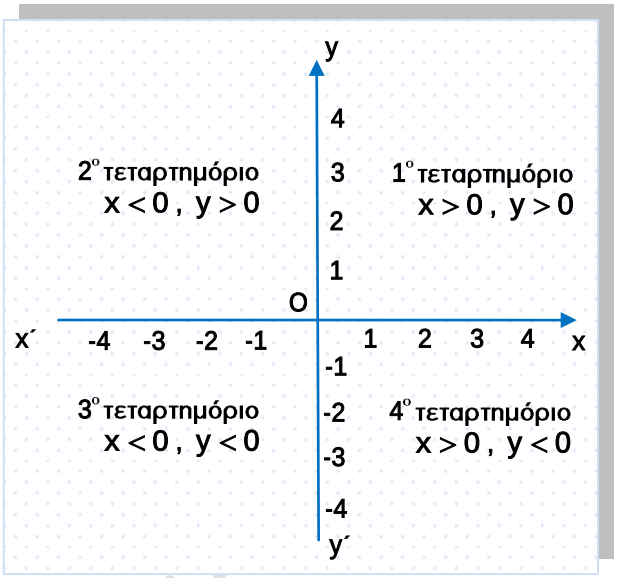
Γραφική παράσταση συνάρτησης

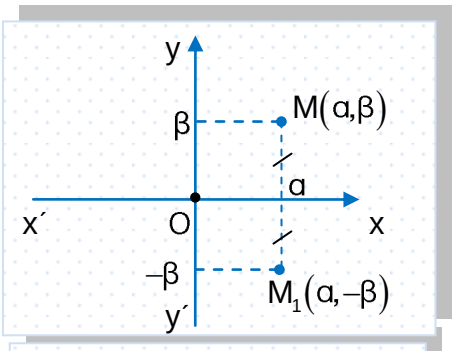
Καρτεσιανές συντεταγμένες



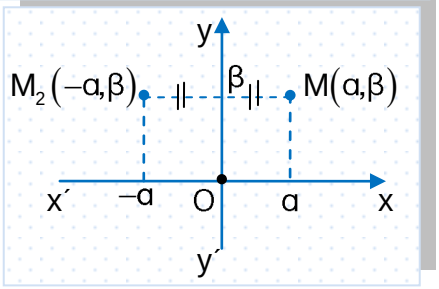
Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων λέγεται ένα ζεύγος κάθετων αξόνων x΄x και y΄y με κοινή αρχή Ο.
Συμβολίζεται με **Oxy**.
Το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό λέγεται **καρτεσιανό επίπεδο**.
Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος το σύστημα Oxy λέγεται **ορθοκανονικό**.
Ο οριζόντιος άξονας x΄x καλείται **άξονας των τετμημένων** ή **άξονας των x** και ο κατακόρυφος άξονας y΄y καλείται **άξονας των τεταγμένων** ή **άξονας των y**.
Σε κάθε σημείο Μ του καρτεσιανού επιπέδου αντιστοιχίζουμε ένα διατεταγμένο ζευγάρι (x,y) πραγματικών αριθμών που ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου Μ. Το σημείο συμβολίζεται με Μ(x,y). Το x λέγεται **τετμημένη** και το y **τεταγμένη** του σημείου Μ.
Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη καθένα που ονομάζονται **τεταρτημόρια** και διακρίνονται σε 1°, 2°, 3°, 4°. Το πρόσημο των συντεταγμένων κάθε σημείου φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα.
Κάθε σημείο του άξονα x΄x έχει τεταγμένη μηδέν (y=0), δηλαδή τα σημεία του άξονα x΄x έχουν συντεταγμένες της μορφής (x,0).
Κάθε σημείο του άξονα y΄y έχει τετμημένη μηδέν (x=0), δηλαδή τα σημεία του άξονα y΄y έχουν συντεταγμένες της μορφής (0,y).
Η αρχή Ο των αξόνων έχει συντεταγμένες (0,0).

askisopolis

Συμμετρικά σημεία

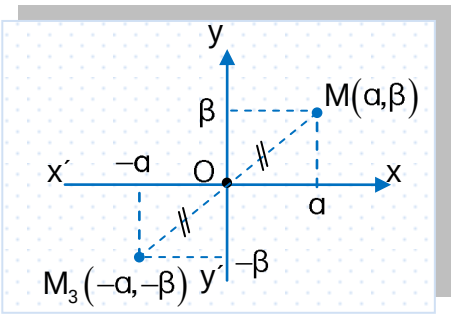


Το σημείο $M_1(\alpha,-\beta)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha,\beta)$ **ως προς τον άξονα x΄x**.
Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x έχουν
την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες.

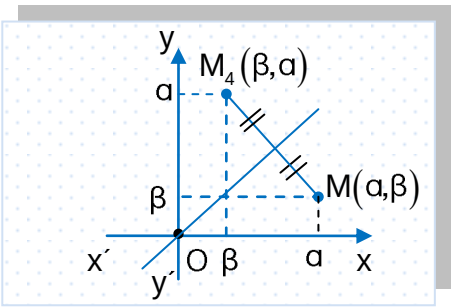


Το σημείο $M_2(-\alpha,\beta)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha,\beta)$ **ως προς τον άξονα y΄y**.
Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y έχουν
την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες.

Το σημείο $M_3(-\alpha,-\beta)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha,\beta)$ **ως προς την αρχή Ο των αξόνων**.
Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων έχουν αντίθετες συντεταγμένες.



Το σημείο $M_4(\beta,\alpha)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha,\beta)$ **ως προς την διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.**
Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς την διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων «αλλάζουν» τις συντεταγμένες τους.

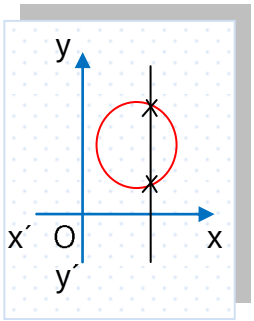


Απόσταση δύο σημείων
Η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, δίνεται από τον τύπο:

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης
Εστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α. Το σύνολο των σημείων $(x,f(x))$ για όλα τα
$x\in A$, ονομάζεται **γραφική παράσταση** της συνάρτησης f.
Ενα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, αν και μόνο αν $f(x)=y$.
Δηλαδή η εξίσωση $y=f(x)$ **επαληθεύεται** μόνο από τα ζεύγη (x,y) που είναι συντεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης**.

Παρατήρηση!!
Επειδή σε κάθε x του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα $y=f(x)$, δεν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής παράστασης με διαφορετική τεταγμένη. Δηλαδή κάθε ευθεία κάθετη στον x΄x τέμνει την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης το πολύ σε ένα σημείο. Για παράδειγμα ο κύκλος δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.



askisopolis

Μεθοδολογία ασκήσεων

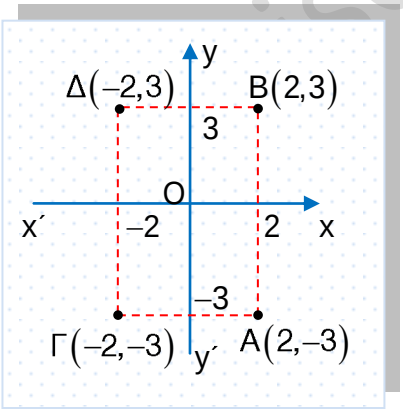
- **Συμμετρικά σημεία**
  Το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha,\beta)$, ως προς:
  τον x΄x είναι το $M_1(\alpha,-\beta)$, ως προς τον y΄y είναι το $M_2(-\alpha,\beta)$, ως προς την αρχή Ο των αξόνων είναι το $M_3(-\alpha,-\beta)$ και ως προς τη διχοτόμο της $1^{ης}$ – $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων είναι το $M_4(\beta,\alpha)$.
- **Απόσταση σημείων** $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.
  Τον τύπο της απόστασης θα τον χρησιμοποιούμε όταν θα θέλουμε να αποδείξουμε ότι κάποιες πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες (ισοσκελές ή ισόπλευρο τρίγωνο) ή όταν θα επαληθεύουμε το πυθαγόρειο θεώρημα για να αποδείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή όταν θα θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, ρόμβος,...κ.ο.κ.

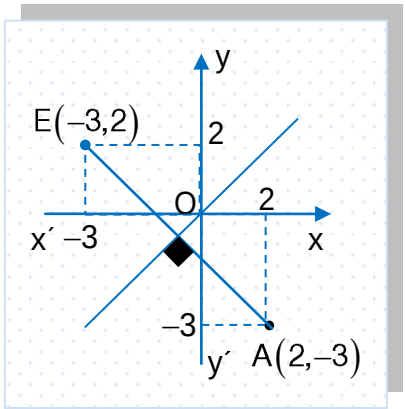
1. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(2,-3)$ ως προς:

i. τον άξονα x΄x ii. τον άξονα y΄y

iii. την αρχή Ο των αξόνων iv. τη διχοτόμο της γωνίας xOy .

Λύση





i. Το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα x΄x είναι το $B(2,3)$.

ii. Το συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα y΄y είναι το $\Gamma(-2,-3)$.

iii. Το συμμετρικό του Α ως προς το Ο είναι το $\Delta(-2,3)$.

iv. Το συμμετρικό του Α ως τη διχοτόμο της γωνίας xOy είναι το σημείο $E(-3,2)$.

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ,λ , ώστε τα σημεία $A(\kappa,4)$ και $B(2,3\lambda-2)$, να είναι:

i. Συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.
ii. Συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.
iii. Συμμετρικά ως προς την αρχή Ο των αξόνων.

Λύση

i. Για να είναι τα σημεία Α και Β συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x, πρέπει να έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες. Δηλαδή:

$$\begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = -y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 2 \\ 4 = -(3\lambda-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 2 \\ 4 = -3\lambda+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 2 \\ 3\lambda = 2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 2 \\ \lambda = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

ii. Για να είναι τα σημεία Α και Β συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y, πρέπει να έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες. Δηλαδή:

$$\begin{cases} y_A = y_B \\ x_A = -x_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 3\lambda-2 \\ \kappa = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda = 6 \\ \kappa = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \kappa = -2 \end{cases}.$$

iii. Για να είναι τα σημεία Α και Β συμμετρικά ως προς το Ο, πρέπει να έχουν αντίθετες συντεταγμένες. Δηλαδή:

$$\begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = -y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = -2 \\ 4 = -(3\lambda-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = -2 \\ \lambda = -\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

3. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(-3,-2)$ και $\Gamma(5,6)$.

i. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ.
ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση

i. $(AB) = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$,

$(B\Gamma) = \sqrt{(5+3)^2 + (6+2)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128}$ και

$(\Gamma A) = \sqrt{(1-5)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$

ii. Επειδή $(AB) = (A\Gamma)$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

4. Δίνονται τα σημεία $A(3,2)$ και $B(7,-4)$. Να βρεθεί σημείο Γ του άξονα x΄x, ώστε το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι:

i. ισοσκελές με κορυφή το Γ.
ii. ορθογώνιο στο Γ.

Λύση

askisopolis

Επειδή το σημείο Γ βρίσκεται στον άξονα x΄x οι συντεταγμένες του είναι της μορφής (x,0).

i. Για να είναι το τρίγωνο ΓΑΒ ισοσκελές με κορυφή το Γ, πρέπει: (ΓΑ)=(ΓΒ)

Όμως $(\Gamma A)=\sqrt{(3-x)^2+(2-0)^2}=\sqrt{9-6x+x^2+4}=\sqrt{x^2-6x+13}$ και

$$(\Gamma B)=\sqrt{(7-x)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{49-14x+x^2+16}=\sqrt{x^2-14x+65}$$

Άρα $\sqrt{x^2-6x+13}=\sqrt{x^2-14x+65}\Leftrightarrow$

$$\left(\sqrt{x^2-6x+13}\right)^2=\left(\sqrt{x^2-14x+65}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$x^2-6x+13=x^2-14x+65\Leftrightarrow$$

$$14x-6x=65-13\Leftrightarrow$$

$$8x=52\Leftrightarrow x=\frac{52}{8}=\frac{13}{4}$$

Άρα $\Gamma\left(\frac{13}{4},0\right)$.

ii. Για να είναι το τρίγωνο ΓΑΒ ορθογώνιο στο Γ, πρέπει τα μήκη των πλευρών του να επαληθεύουν το πυθαγόρειο θεώρημα. Δηλαδή

$$(A\Gamma)^2+(B\Gamma)^2=(AB)^2\Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{x^2-6x+13}\right)^2+\left(\sqrt{x^2-14x+65}\right)^2=\left(\sqrt{(7-3)^2+(-4-2)^2}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$x^2-6x+13+x^2-14x+65=16+36\Leftrightarrow$$

$$2x^2-20x+78-52=0\Leftrightarrow$$

$$2x^2-20x+26=0\Leftrightarrow$$

$$x^2-10x+13=0$$

Η τελευταία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού με $\Delta=(-10)^2-4\cdot1\cdot13=48$

και ρίζες $x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{48}}{2}=\frac{-10\pm4\sqrt{3}}{2}=\frac{2\left(-5\pm2\sqrt{3}\right)}{2}=-5\pm2\sqrt{3}$.

Άρα $\Gamma\left(-5+2\sqrt{3},0\right)$ ή $\Gamma\left(-5-2\sqrt{3},0\right)$.

5. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ, για την οποία το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(-5,\lambda)$, $B(\lambda-4,-2)$ και $\Gamma(\lambda+1,2)$ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο στο Β.

Λύση

Είναι $(AB)=\sqrt{(\lambda-4+5)^2+(-2-\lambda)^2}=\sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda+2)^2}=\sqrt{2\lambda^2+6\lambda+5}$,

$(A\Gamma)=\sqrt{(\lambda+1+5)^2+(2-\lambda)^2}=\sqrt{(\lambda+6)^2+(2-\lambda)^2}=\sqrt{2\lambda^2+8\lambda+40}$ και

$(B\Gamma)=\sqrt{(\lambda+1-\lambda+4)^2+(2+2)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$.

Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές με κορυφή το Β, ισχύει: $(AB)=(B\Gamma)\Leftrightarrow$

askisopolis

$\sqrt{2\lambda^2+6\lambda+5}=\sqrt{41} \Leftrightarrow 2\lambda^2+6\lambda+5=41 \Leftrightarrow 2\lambda^2+6\lambda-36=0 \Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda-18=0 \Leftrightarrow$
$\lambda=-6$ ή $\lambda=3$.

Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Β, τα μήκη των πλευρών του ικανοποιούν το πυθαγόρειο θεώρημα. Δηλαδή:

$$(AB)^2+(B\Gamma)^2=(A\Gamma)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{2\lambda^2+6\lambda+5}\right)^2+\left(\sqrt{41}\right)^2=\left(\sqrt{2\lambda^2+8\lambda+40}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$2\lambda^2+6\lambda+5+41=2\lambda^2+8\lambda+40 \Leftrightarrow$$

$$6\lambda-8\lambda=40-41-5 \Leftrightarrow$$

$$-2\lambda=-6 \Leftrightarrow$$

$$\lambda=3.$$

Άρα για $\lambda=3$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο στο Β.

➢ **<u>Σημεία τομής</u>**

Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με:

- τον άξονα x΄x: Θέτουμε $y=f(x)=0$. Έστω $x_1,x_2,...,x_k$ οι λύσεις της εξίσωσης.
  Τα ζητούμενα σημεία είναι τα: $(x_1,0),(x_2,0),...,(x_k,0)$.
- τον άξονα y΄y: Θέτουμε $x=0$ (αν γίνεται) και βρίσκουμε το $f(0)$. Το ζητούμενο σημείο (αν υπάρχει) είναι το $(0,f(0))$.
- τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g: Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ και έστω $x_1,x_2,...,x_k$ οι λύσεις της εξίσωσης.
  Τα ζητούμενα σημεία είναι τα: $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_k,y_k)$, όπου $y_1=f(x_1)=g(x_1)$...

➢ **<u>Σχετική θέση γραφικών παραστάσεων</u>**

- Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον x΄x, όταν $f(x)>0$ ή αντίστοιχα $f(x)<0$.
- Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω ή κάτω από την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, όταν $f(x)>g(x)$ ή αντίστοιχα $f(x)<g(x)$

6. Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες.

i. $f(x)=3x-6$ ii. $f(x)=(x-3)(x+1)$ iii. $f(x)=x^2-2x-8$

iv. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x}$ v. $f(x)=\sqrt{x+2}$ vi. $f(x)=|x-1|+2$

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι: $A=\mathbb{R}$.
$f(x)=0 \Leftrightarrow 3x-6=0 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$. Σημείο τομής με τον x΄x το $(2,0)$.
Για $x=0$ είναι: $f(0)=3\cdot 0-6=-6$. Σημείο τομής με τον y΄y το $(0,-6)$.

ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι: $A=\mathbb{R}$.
$f(x)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.
Τα σημεία τομής με τον x΄x είναι: $(3,0)$ και $(-1,0)$.
Για $x=0$ είναι: $f(0)=(0-3)(0+1)=-3$. Σημείο τομής με τον y΄y το $(0,-3)$.

iii. Το πεδίο ορισμού της f είναι: $A=\mathbb{R}$.
$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow x=4$ ή $x=-2$. Σημεία τομής με τον x΄x τα: $(4,0)$ και $(-2,0)$.
Για $x=0$ είναι: $f(0)=0^2-2\cdot 0-8=-8$. Σημείο τομής με τον y΄y το $(0,-8)$.

iv. Για να ορίζεται η f πρέπει: $x^2+x\neq 0 \Leftrightarrow x(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq -1$. Άρα $A=\mathbb{R}-\{0,-1\}$.
$f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x^2+x}=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$. Σημείο τομής με τον x΄x το $(2,0)$.
Επειδή $x\neq 0$, η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα y΄y.

v. Για να ορίζεται η f πρέπει: $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$. Άρα $A=[-2,+\infty)$.
$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$. Σημείο τομής με τον x΄x το $(-2,0)$.
Για $x=0$ είναι: $f(0)=\sqrt{0+2}=\sqrt{2}$. Σημείο τομής με τον y΄y το $(0,\sqrt{2})$.

vi. Το πεδίο ορισμού της f είναι: $A=\mathbb{R}$.
$f(x)=0 \Leftrightarrow |x-1|+2=0 \Leftrightarrow |x-1|=-2$ αδύνατο.
Η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον x΄x.
Για $x=0$ είναι: $f(0)=|0-1|+2=1+2=3$. Σημείο τομής με τον y΄y το $(0,3)$.

7. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i. $f(x)=x^2+3x-2$ και $g(x)=3x+2$

ii. $f(x)=\dfrac{6x+12}{x+1}$ και $g(x)=x+2$

Λύση

i. Είναι $A_f=A_g=\mathbb{R}$.
$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+3x-2=3x+2 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.
Είναι $g(2)=3\cdot 2+2=8$ και $g(-2)=3(-2)+2=-4$.

askisopolis

Σημεία τομής τα $(2,8)$ και $(-2,-4)$.

ii. Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει: $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$.

Είναι $A_f=\mathbb{R}-\{1\}$ και $A_g=\mathbb{R}$.

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \frac{6x+12}{x+1}=x+2\Leftrightarrow 6x+12=(x+1)(x+2)\Leftrightarrow$$

$6x+12=x^2+2x+x+2\Leftrightarrow\ x^2+3x+2-6x-12=0\Leftrightarrow x^2-3x-10=0\Leftrightarrow$
$x=5$ ή $x=-2$

Είναι $g(5)=5+2=7$ και $g(-2)=-2+2=0$.

Σημεία τομής τα $(5,7)$ και $(2,0)$.

8. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+2x-4$, βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^2+2$.

Λύση

Είναι $f(x)>g(x)\Leftrightarrow x^2+2x-4>x^2+2\Leftrightarrow 2x>6\Leftrightarrow x>3$.

Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω ή κάτω από την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, όταν $x\in(3,+\infty)$.

9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Να βρείτε:

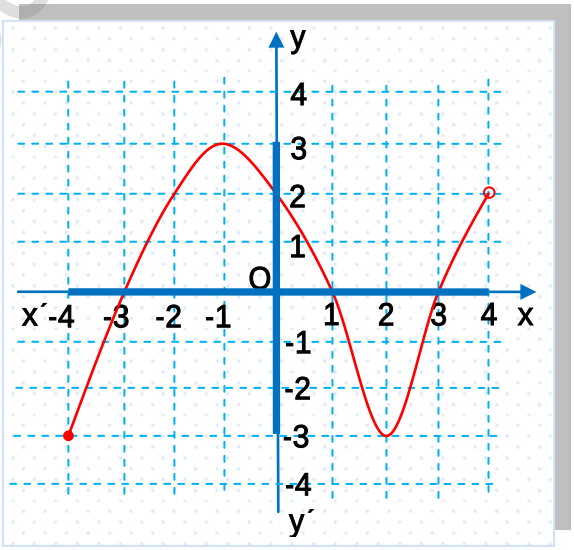
i. Το πεδίο ορισμού της.

ii. Το σύνολο τιμών της.

iii. Τις τιμές $f(0), f(2), f(-1)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

v. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>0$.



Λύση

i. Αν προβάλλουμε όλα τα σημεία της καμπύλης στον άξονα x΄x, θα δημιουργηθεί το διάστημα $[-4,4)$, άρα $A=[-4,4)$.

ii. Αν προβάλλουμε όλα τα σημεία της καμπύλης στον άξονα y΄y, θα δημιουργηθεί το διάστημα $[-3,3]$, άρα $f(A)=[-3,3]$.

iii. Το $f(0)$ είναι η τιμή της f για $x=0$, δηλαδή το σημείο τομής της καμπύλης με τον άξονα y΄y.

Επειδή η καμπύλη τέμνει τον y΄y στο 2, είναι $f(0)=2$.

askisopolis

Το $f(2)$ είναι η τιμή της f για $x=2$. Παρατηρούμε ότι το σημείο $(2,-3)$ της καμπύλης έχει $x=2$ και $y=-3$, άρα $f(2)=-3$.

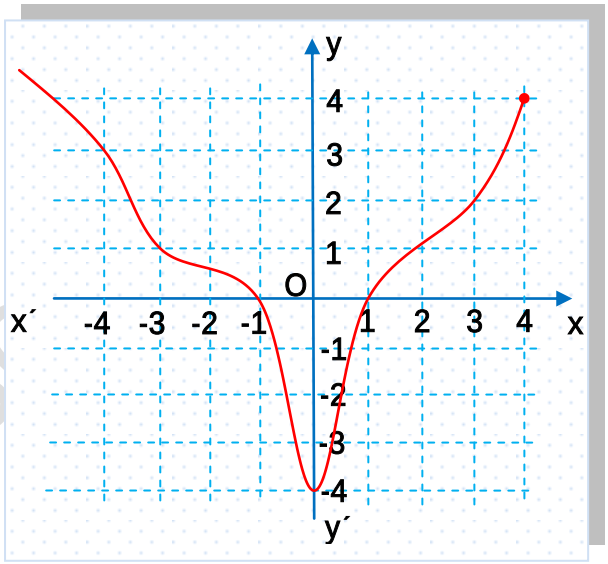
Το $f(-1)$ είναι η τιμή της f για $x=-1$. Παρατηρούμε ότι το σημείο $(-1,3)$ της καμπύλης έχει $x=-1$ και $y=3$, άρα $f(-1)=3$.

iv. Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$, είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της καμπύλης με τον άξονα x΄x. Άρα $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-3$ ή $x=1$ ή $x=3$.

v. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της καμπύλης που βρίσκονται πάνω από τον x΄x. Παρατηρούμε ότι πάνω από τον x΄x βρίσκονται τα σημεία με
$-3<x<1$ και τα σημεία με $3<x<4$, άρα: $f(x)>0 \Leftrightarrow -3<x<1$ ή $3<x<4$.

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.
Να βρείτε:

i. Το πεδίο ορισμού της.
ii. Το σύνολο τιμών της.
iii. Τις τιμές $f(0), f(-3), f(2)$.
iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.
v. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-4$.
vi. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$.
vii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>1$.
viii. Να λύσετε την ανίσωση $1 \le f(x) \le 3$.



Λύση

i. Αν προβάλλουμε όλα τα σημεία της καμπύλης στον άξονα x΄x, θα δημιουργηθεί το διάστημα $(-\infty,4]$, άρα $A=(-\infty,4]$.

ii. Αν προβάλλουμε όλα τα σημεία της καμπύλης στον άξονα y΄y, θα δημιουργηθεί το διάστημα $[-4,+\infty)$, άρα $f(A)=[-4,+\infty)$.

iii. Το $f(0)$ είναι η τιμή της f για $x=0$, δηλαδή το σημείο τομής της καμπύλης με τον άξονα y΄y. Επειδή η καμπύλη τέμνει τον y΄y στο -4, είναι $f(0)=-4$.

Το $f(-3)$ είναι η τιμή της f για $x=-3$. Παρατηρούμε ότι το σημείο $(-3,1)$ της καμπύλης έχει $x=-3$ και $y=1$, άρα $f(-3)=1$.

Το $f(2)$ είναι η τιμή της f για $x=2$. Παρατηρούμε ότι το σημείο $(2,1)$ της καμπύλης έχει $x=2$ και $y=1$, άρα $f(2)=1$.

vi. Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$, είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της καμπύλης με τον άξονα x΄x. Άρα $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$.

v. Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=-4$ είναι οι τετμημένες των σημείων της καμπύλης για τα οποία $y=-4$. Επειδή το σημείο $(0,-4)$ της καμπύλης είναι το μοναδικό με $y=-4$, έχουμε:
$f(x)=-4 \Leftrightarrow x=0$.

vi. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της καμπύλης που βρίσκονται κάτω από τον x΄x. Παρατηρούμε ότι κάτω από τον x΄x βρίσκονται τα σημεία με $-1<x<1$, άρα: $f(x)<0 \Leftrightarrow -1<x<1$.

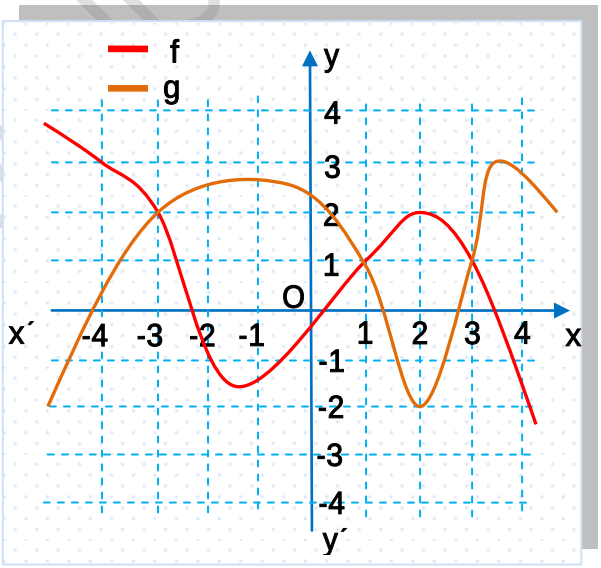
vii. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της καμπύλης για τα οποία η τεταγμένη τους είναι μεγαλύτερη από 1, άρα
$f(x)>1 \Leftrightarrow x<-3$ ή $x>2$.

viii. Οι λύσεις της ανίσωσης $1\le f(x)\le 3$ είναι οι τετμημένες των σημείων της καμπύλης για τα οποία η τεταγμένη τους βρίσκεται στο διάστημα $[1,3]$.
Άρα $1\le f(x)\le 3 \Leftrightarrow -4\le x\le -3$ ή $2\le x\le 3$.

11. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g.

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>g(x)$.



Λύση

i. Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f,g.
Επειδή κοινά σημεία είναι τα $(-3,2)$, $(1,1)$ και $(3,1)$, έχουμε:
$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=-3$ ή $x=1$ ή $x=3$.

ii. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>g(x)$ είναι τα διαστήματα στα οποία η κόκκινη καμπύλη (f), βρίσκεται πάνω από την καφέ καμπύλη (g). Αυτό συμβαίνει όταν $x<-3$ ή $1<x<3$, άρα:
$f(x)>g(x) \Leftrightarrow x<-3$ ή $1<x<3$.

12. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=-x^2-1$ και $g(x)=x^{2012}+2013$, δεν έχουν κοινά σημεία.

Λύση

Για να μην έχουν κοινά σημεία οι γραφικές παραστάσεις των f,g πρέπει η εξίσωση $f(x)=g(x)$, να είναι αδύνατη.

Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow -x^2-1=x^{2012}+2013 \Leftrightarrow x^{2012}+x^2+2014=0$. Παρατηρούμε ότι στη προσπάθεια μας να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$, προκύπτει μια άλλη εξίσωση την οποία και δεν γνωρίζουμε να λύνουμε. Για το λόγο αυτό παρατηρούμε λίγο της συναρτήσεις f και g και διαπιστώνουμε ότι: $x^2 \geq 0$, άρα $x^2+1>0 \Leftrightarrow -x^2-1<0$, δηλαδή $f(x)<0$ για κάθε τιμή του x και $x^{2012} \geq 0$, άρα $x^{2012}+2013>0$, δηλαδή $g(x)>0$ για κάθε τιμή του x.

Δηλαδή $g(x)>f(x)$ για κάθε τιμή του x, οπότε η εξίσωση $f(x)=g(x)$ είναι αδύνατη.

Σημείο καμπύλης

Το σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, αν και μόνο αν

$$f(\alpha)=\beta$$

13. Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(2,-6)$, $B(-1,-8)$ και $\Gamma(-5,-4)$, ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+5x-4$.

Λύση

Το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της f, αν και μόνο αν $f(2)=-6$

Είναι $f(2)=2^2+5\cdot 2-4=4+10-4=10\neq -6$, άρα το Α δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

Είναι $f(-1)=(-1)^2+5\cdot(-1)-4=1-5-4=-8$, άρα το Β ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

Είναι $f(-5)=(-5)^2+5\cdot(-5)-4=25-25-4=-4$, άρα το Γ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

14. Να βρείτε το λ, ώστε το σημείο που δίνεται κάθε φορά να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

i. $f(x)=3x^2-\lambda x+6 \quad A(2,4)$ ii. $f(x)=\dfrac{2x-3\lambda}{x+1} \quad B(-2,-5)$

Λύση

i. Το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της f, αν και μόνο αν : $f(2)=4 \Leftrightarrow$ $3\cdot 2^2-\lambda\cdot 2+6=4 \Leftrightarrow 12-2\lambda+6=4 \Leftrightarrow 12+6-4=2\lambda \Leftrightarrow 2\lambda=14 \Leftrightarrow \lambda=7$.

ii. Το σημείο Β ανήκει στη γραφική παράσταση της f, αν και μόνο αν : $f(-2)=-5 \Leftrightarrow$

$$\frac{2(-2)-3\lambda}{-2+1}=-5 \Leftrightarrow \frac{-4-3\lambda}{-1}=-5 \Leftrightarrow -4-3\lambda=-1\cdot(-5) \Leftrightarrow -4-3\lambda=5 \Leftrightarrow$$
$$-4-5=3\lambda \Leftrightarrow 3\lambda=-9 \Leftrightarrow \lambda=-3$$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha x+2}{x^2+\beta}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(-1,2)$

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-\frac{2}{3}$ και $\beta=\frac{1}{3}$.

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

iii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

iv. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = 1.

Λύση

i. Επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α και Β, ισχύει:

$$\begin{cases} f(1)=1 \\ f(-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha\cdot 1+2}{1^2+\beta}=1 \\ \frac{\alpha\cdot(-1)+2}{(-1)^2+\beta}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+2=1+\beta \\ -\alpha+2=2+2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta+1-2 \\ -\alpha-2\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha=\beta-1 \\ -(\beta-1)-2\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta-1 \\ -\beta+1-2\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta-1 \\ -3\beta=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3} \\ \beta=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

ii. Για $\alpha=-\frac{2}{3}$ και $\beta=\frac{1}{3}$ είναι: $f(x)=\frac{-\frac{2}{3}x+2}{x^2+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{-2x+6}{2}}{\frac{3x^2+1}{2}}=\frac{-2x+6}{3x^2+1}$.

Πρέπει $3x^2+1\neq 0 \Leftrightarrow 3x^2\neq -1$ που ισχύει, άρα $A=\mathbb{R}$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-2x+6}{3x^2+1}=0 \Leftrightarrow -2x+6=0 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=\frac{6}{2}=3.$$

Σημείο τομής με τον x΄x, το $(3,0)$.

iii. Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον x΄x, όταν:

$f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{-2x+6}{3x^2+1}>0$, επειδή όμως $3x^2+1>0$, είναι

$$-2x+6>0 \Leftrightarrow -2x>-6 \Leftrightarrow x<\frac{-6}{-2}=3$$

askisopolis

iv. Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = 1, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=1$. Είναι:

$$f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{-2x+6}{3x^2+1}=1 \Leftrightarrow -2x+6=3x^2+1 \Leftrightarrow 3x^2+2x-5=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-\frac{5}{3}$$

Σημεία τομής τα $(1,1)$ και $\left(-\frac{5}{3},1\right)$.

16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x^3-1$ και $g(x)=-\alpha x+\alpha-4$, $\alpha\in\mathbb{R}$, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στον άξονα y΄y.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=3$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

Λύση

i. Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται στον άξονα y΄y, τα σημεία $(0,f(0))$ και $(0,g(0))$ ταυτίζονται, άρα $f(0)=g(0)\Leftrightarrow$

$\alpha\cdot 0-1=-\alpha\cdot 0+\alpha-4 \Leftrightarrow -1=\alpha-4 \Leftrightarrow 4-1=\alpha \Leftrightarrow \alpha=3$.

ii. Για $\alpha=3$ είναι $f(x)=3x^3-1$ και $g(x)=-3x+3-4=-3x-1$.

Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, όταν:

$f(x)>g(x) \Leftrightarrow 3x^3-1>-3x-1 \Leftrightarrow 3x^3+3x>0 \Leftrightarrow 3x(x^2+1)>0$ (1).

Όμως $x^2+1>0$ για κάθε τιμή του x, άρα η (1) ισχύει όταν $3x>0 \Leftrightarrow x>0$.

17. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $(x-2)f(x)+xf(x-2)=x^3-4x$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(0)=0$.

Για να υπολογίσουμε το $f(0)$, πρέπει να το εμφανίσουμε στη μοναδική πληροφορία που μας δίνει η άσκηση, που είναι η σχέση (1).

Για το λόγο αυτό θα αντικαταστήσουμε στη σχέση (1), $x=0$. Είναι:

$(0-2)f(0)+0\cdot f(0-2)=0^3-4\cdot 0 \Leftrightarrow -2f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$.

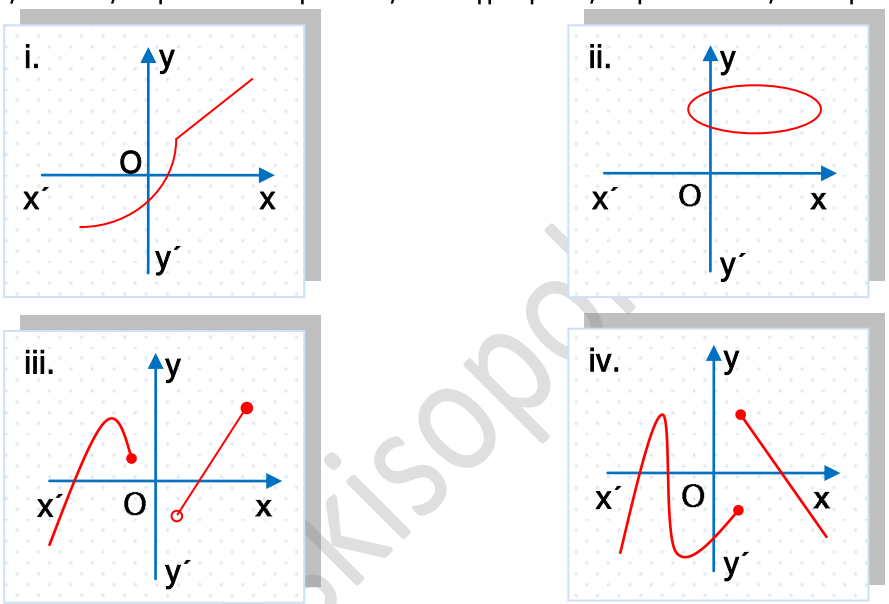
Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε και $x=2$ στη σχέση (1). Τότε θα προέκυπτε: $(2-2)f(2)+2f(2-2)=2^3-4\cdot 2 \Leftrightarrow 2f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$.

askisopolis

Σχέση καμπύλης-συνάρτησης

Μια καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, αν και μόνο αν κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει την καμπύλη το πολύ σε ένα σημείο.
Σημείωση: Θυμίζουμε ότι μια διμελή σχέση μεταξύ δύο συνόλων Α και Β είναι συνάρτηση, όταν κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

18. Ποιες από τις παρακάτω καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων;



askisopo

Λύση

i. Επειδή κάθε ευθεία κάθετη στον x΄x τέμνει την καμπύλη το πολύ σε ένα σημείο, είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.
ii. Επειδή υπάρχουν κατακόρυφες ευθείες που έχουν με την καμπύλη 2 σημεία (π.χ y΄y), δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.
iii. Επειδή κάθε ευθεία κάθετη στον x΄x τέμνει την καμπύλη το πολύ σε ένα σημείο, είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.
iv. Επειδή υπάρχει ευθεία κάθετη στον x΄x που έχει με την καμπύλη 2 κοινά σημεία, δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

Ερωτήσεις κατανόησης

19. Να τοποθετήσετε μέσα σε κάθε ορθογώνιο το γράμμα Σ αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις τις θεωρείτε σωστές ή το Λ αν τις θεωρείτε λανθασμένες.

i. Αν α=0 το σημείο Μ(α, β) βρίσκεται στον άξονα x΄x. ☐

ii. Κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει το διάγραμμα μιας συνάρτησης το πολύ σ' ένα σημείο. ☐

iii. Τα σημεία Α(α, β) και Β(-α, -β) του καρτεσιανού επιπέδου είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. ☐

iv. Το σημείο $M(-1,3)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $K(1,3)$ ως προς τον άξονα x΄x. ☐

v. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε στο διάστημα Δ η γραφική της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g. ☐

vi. Αν $f(x) > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. ☐

vii. Αν η εξίσωση f(x)=0 έχει ρίζες x_1, x_2 τότε τα σημεία $A(x_1,0)$ και $B(x_2,0)$ είναι τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x. ☐

viii. Αν το 0 δεν βρίσκεται στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f, τότε η γραφική παράσταση της f και ο yy΄ δεν έχουν κοινό σημείο. ☐

20. Το σημείο $(-3,4)$ είναι συμμετρικό του σημείου $(3,-4)$ ως προς:

Α. τον άξονα Β. τον άξονα y΄y
Γ. την αρχή των αξόνων Δ. την ευθεία y=x

21. Αν α και β είναι οι συντεταγμένες δύο σημείων του άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε η μεταξύ τους απόσταση είναι ίση με:

Α. $\alpha-\beta$ Β. $\beta-\alpha$ Γ. $-(\alpha-\beta)$ Δ. $|\beta-\alpha|$ Ε. $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

askisopolis

22. Αν το σημείο $(-2,1)$ ανήκει στην καμπύλη $x^2-3y^2=\lambda$ τότε το λ ισούται:

Α. 4 Β. 1 Γ. 5 Δ. $\sqrt{5}$ Ε. $-\sqrt{5}$

23. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x+3$ τέμνει τον άξονα y΄y στο:

Α. 1 Β. 3 Γ. 5 Δ. -1 Ε. -3

24. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(-1,4)$ ως προς:

i. τον άξονα x΄x ii. τον άξονα y΄y

iii. την αρχή Ο των αξόνων iv. τη διχοτόμο της γωνίας xOy .

25. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ,λ , ώστε τα σημεία $A(3,\kappa)$ και $B(2\lambda+1,4)$, να είναι:

i. Συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.
ii. Συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.
iii. Συμμετρικά ως προς την αρχή Ο των αξόνων.

26. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α(-5, 3) , Β(-1, -2) και Γ(4, 2) είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

27. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α(2,6), Β(-2,2), και Γ(2,2), αποτελούν κορυφές ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου.

28. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-2,2)$, $B(-1,4)$, $\Gamma(5,3)$ και $\Delta(4,1)$, είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

29. Αν $A(-1,2)$ και $B(3,4)$ να βρείτε σημείο Μ που να ανήκει στον x΄x ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

30. Να βρείτε σημείο του οποίου η τεταγμένη είναι διπλάσια από την τετμημένη και η απόστασή του από το σημείο $A(2,4)$ είναι ίση με 125.

31. Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες.

i. $f(x)=2x+4$ ii. $f(x)=(x-2)(x-4)$ iii. $f(x)=x^2+5x+6$

iv. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ v. $f(x)=\sqrt{x-1}$ vi. $f(x)=|x-3|-2$

32. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i. $f(x)=x^2-5x+1$ και $g(x)=1-3x$

ii. $f(x)=\dfrac{x^2+x-5}{x-2}$ και $g(x)=2x+1$

askisopolis

33. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x^3-x$ και $g(x)=x^2-1$.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2|x|+1$

i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.

ii. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f περνάει από το $K(-2,-1)$.

35. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3x^2-4x-2$, βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=3x^2+6$.

36. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=5-|x-1|+3x$, βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=3x-1$.

37. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.
Να βρείτε:

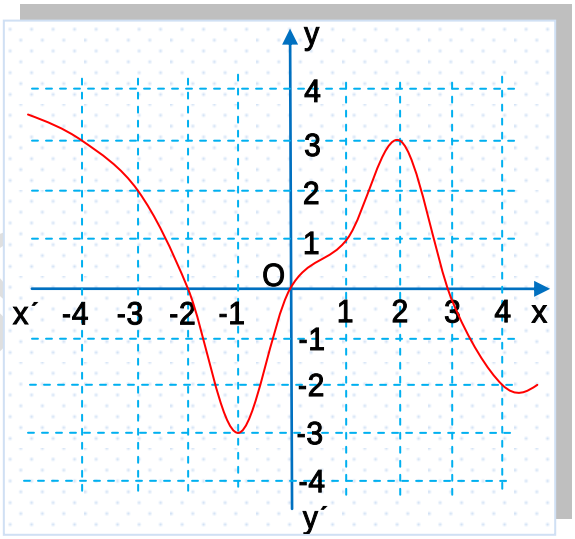
i. Το πεδίο ορισμού της.

ii. Το σύνολο τιμών της.

iii. Τις τιμές $f(0), f(-4), f(-1), f(2)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

v. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>0$.



38. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.
Να βρείτε:

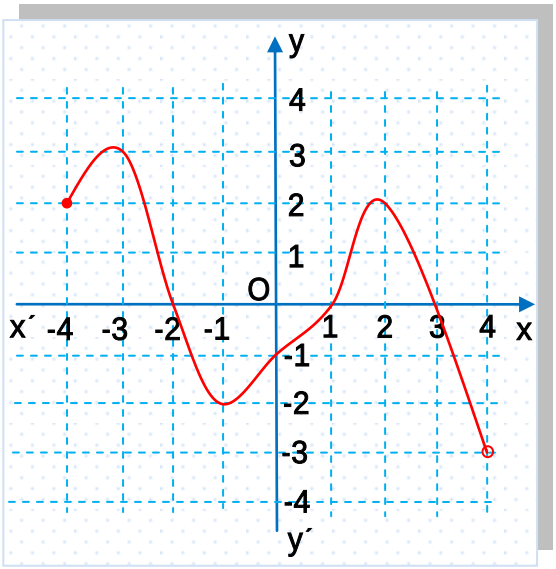
i. Το πεδίο ορισμού της.

ii. Το σύνολο τιμών της.

iii. Τις τιμές $f(0), f(-4), f(-1), f(1)$ και να αποδείξετε ότι $f(-4)+f(-1)-1=f(0)+f(1)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

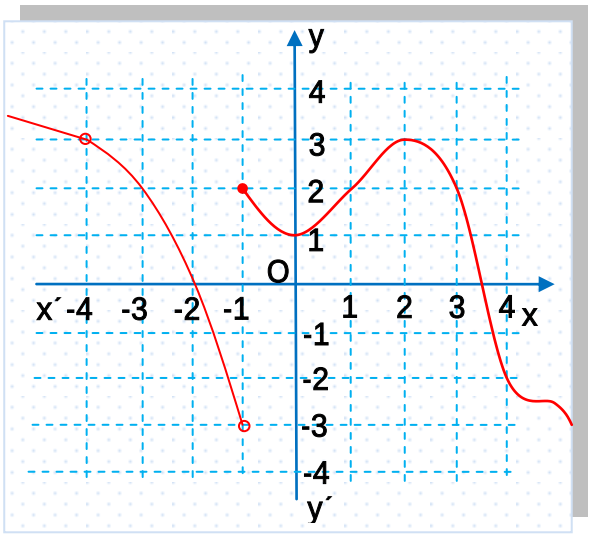
v. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$.



askisi

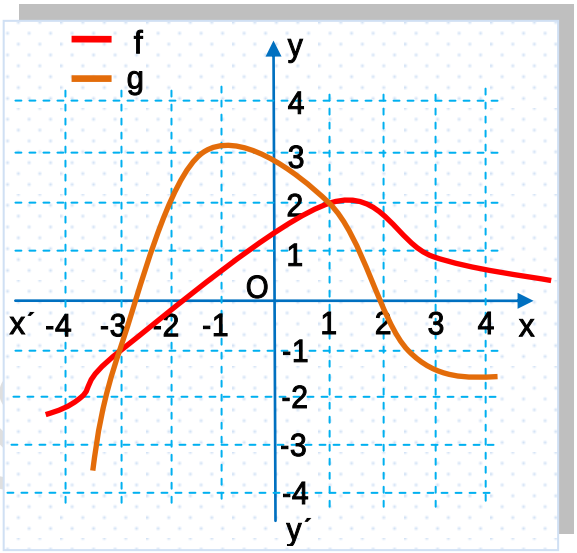
39. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.
Να βρείτε:

i. Το πεδίο ορισμού της.
ii. Το σύνολο τιμών της.
iii. Τις τιμές $f(0), f(-3), f(2), f(3)$.
iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.
v. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.
vi. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>0$.
vii. Να λύσετε την ανίσωση $2 \le f(x) \le 3$.



40. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g.

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.
ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>g(x)$.



41. Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(2,5)$, $B(-1,4)$ και $\Gamma(0,1)$, ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3x^2-4x+1$.

42. Να βρείτε το λ, ώστε το σημείο που δίνεται κάθε φορά να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

i. $f(x)=\lambda x^2-x+\lambda \quad A(2,8)$

ii. $f(x)=\dfrac{x+\lambda}{x-1} \quad B(3,2)$

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x$

i. Να βρείτε τα α,β έτσι ώστε $f(-1)=7$ και $f(2)=-2$.

ii. Στη συνέχεια να βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.

44. Ποιες από τις παρακάτω καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων;

Β΄ ΟΜΑΔΑ

45. Αν $A(-2,4)$ και $B(1,3)$, να βρείτε σημείο Μ που να έχει τεταγμένη τριπλάσια από την τετμημένη, ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ.

46. Δίνονται τα σημεία Α(4, 2), Β(3, -1) και η ευθεία ε: $y=-3x$. Να βρεθεί σημείο Γ της ευθείας ε, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Β.

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lambda x+1,\ \lambda<0$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής Α και Β της γραφικής της παράστασης με τους άξονες.

ii. Να βρείτε το λ, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ να είναι ίσο με 2.

48. Να βρείτε τις τιμές των α,β, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=(\alpha+\beta)x+2\alpha$ να διέρχεται από τα σημεία $A(1,4)$ και $B(2,6)$.

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-\alpha}{\beta x+2}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,-1)$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\dfrac{1}{2}$ και $\beta=-\dfrac{7}{4}$.

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = 2.

50. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x-\alpha}{x^2}$ και $g(x)=\alpha-x$, $\alpha\in\mathbb{R}$, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται επί της ευθείας $x=4$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

51. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=-|x-1|-4$ και $g(x)=x^2+5$, δεν έχουν κοινά σημεία.

askisopolis

52. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $xf(x+2)+(x+2)f(2x+1)=x^2+x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3,1)$.

53. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $(x-1)f(x)+xf(x-1)=x^2-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

54. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x)+(x-2)f(2012)+(x^2-4)f(1821)=3x-5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$.

55. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

56. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)+x+y$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
ii. $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

19. i. Λ ii. Σ iii. Σ iv. Λ v. Λ vi. Σ vii. Σ viii. Σ **20**. Γ **21**. Δ **22**. Β **23**. Β **24**. i. $(-1,-4)$ ii. $(1,4)$ iii. $(1,-4)$ iv. $(4,-1)$ **25**. i. $\kappa=-4,\ \lambda=1$ ii. $\kappa=4,\ \lambda=-2$ iii. $\kappa=-4,\ \lambda=-2$ **29**. (0,0),(4,0) **30**. $(7,14),(-3,-6)$ **31**.i. $(-2,0),(0,4)$ ii. $(2,0),(4,0),(0,8)$ iii. $(-2,0),(-3,0),(0,6)$ iv. $(-2,0),(2,0),(0,4)$ v. $(1,0)$ vi. $(1,0),(5,0),(0,1)$ **32**. i. $(0,1),(2,-5)$ ii. $(1,3),(3,7)$ **33**. $(1,0),(-1,0)$ **34**.i. $(1,0),(-1,0),(0,1)$ ii. όχι **35**. $(-\infty,-2)$ **36**. $(-5,7)$ **37**.i. $\mathbb{R}$ ii. $[-3,+\infty)$ iii. $f(0)=0, f(-4)=3,$ $f(-1)=-3, f(2)=3$ iv. $x=-2$ ή $x=3$ v. $x<-2$ ή $0<x<3$	**38**. i. $[-4,4)$ ii. $(-3,3]$ iii. $f(0)=-1, f(-4)=2,$ $f(-1)=-2, f(1)=0$ iv. $x=-2$ ή $x=1$ v. $-2<x<1$ ή $3<x<4$ **39**.i. $\mathbb{R}-\{-4\}$ ii. $\mathbb{R}$ iii. $f(0)=1, f(-3)=2,$ $f(2)=3, f(3)=2$ iv. $x=-2$ ή $x=3,5$ v. $x=-3$ ή $x=1$ ή $x=3$ vi. $x<-2$ ή $-1<x<3,5$ vii. $-4<x<-3$ ή $1\le x\le 3$ **40**.i. $x=-3$ ή $x=1$ ii. $x<-3$ ή $x>1$ **42**.i. 2, ii. 1 **43**. $\alpha=2,\ \beta=-5$ **44**.i, iv **45**. $\left(\frac{5}{4},\frac{15}{4}\right)$ **46**. $(0,0),\left(-\frac{6}{5},\frac{18}{5}\right)$ **47**.ii. –1/4 **48**. $\alpha=1,\ \beta=2$ **49**. ii. $\left(\frac{1}{2},0\right)$, iii. $(1,2)$ **50**. ii. $x>4$

askisopolis