Θέματα εξετάσεων στα Μαθηματικά προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου παλαιοτέρων ετών

Διανύσματα

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $(\text{ΑΒ}) = 3-\sqrt{3}$, $(\text{ΑΓ}) = 2\sqrt{3}$ και $\hat{\text{Α}} = 60°$. Να βρείτε:

α) $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$

β) Το μέτρο της διαμέσου ΑΔ.

γ) Τη γωνία $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Δ}$.

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ τέτοια, ώστε $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 3$ και $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$. Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \vec{u} - 2\vec{v}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΓ}} = \vec{u} + \vec{v}$ τότε:

α) Να βρείτε το $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

3. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 1$ και $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 6\vec{\gamma} = \vec{0}$, τότε:

α) Αφού δείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -8$, να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = -2\vec{\beta}$.

γ) Να υπολογίσετε το $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = (\kappa, \kappa+1)$ και $\overrightarrow{\text{ΑΓ}} = (3\kappa, \kappa-1)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για $\kappa = 0$ και $\kappa = -2$ τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

β) Αν τα Α,Β,Γ σχηματίζουν τρίγωνο:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{\text{ΑΜ}}$ όπου Μ το μέσον του ΒΓ.

ii. Να βρείτε την τιμή του κ για να είναι $\overrightarrow{\text{ΑΜ}} \perp \overrightarrow{\text{ΒΓ}}$.

iii. Για $\kappa = \frac{1}{2}$ να υπολογίσετε τη γωνία $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Μ}$.

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}| = 2$, $|\overrightarrow{\text{ΑΓ}}| = 6$ και $\hat{\text{Α}} = \frac{\pi}{3}$. Να δείξετε ότι τα διανύσματα

$\overrightarrow{\text{ΑΒ}} - \overrightarrow{\text{ΑΓ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΒΓ}} - 14\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 60°$ και $\vec{\beta} = -\vec{\gamma} - \vec{\alpha}$.

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\lambda\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ να είναι κάθετα.

Ευθεία

7. Δίνονται οι ευθείες : (ε): $x+2y-1=0$ και (η): $x+2y-3=0$. καθώς και το σημείο $\Sigma(3,-3)$.

α) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις του σημείου Σ από τις δυο ευθείες καθώς και την απόσταση μεταξύ των ευθειών (ε) και (η).

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το Σ και τέμνει τις ευθείες (ε) και (η) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, έτσι ώστε η ευθεία (ζ): $x-y-5=0$ να διέρχεται από το μέσον του ΑΒ.

8. **α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε} που είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $x-y+4=0$ και διέρχεται από το σημείο $B(1,-1)$.

β) Σημείο $A(\lambda,\mu)$ κινείται στην ευθεία με εξίσωση $x-y=2$. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{AM}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων, κινείται στην ευθεία με εξίσωση (η): $y=x-4$.

γ) Να βρείτε την απόσταση των ευθειών (η), (ε) την εξίσωση της μεσοπαράλληλης τους.

9. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2,3).Το ύψος του ΒΔ ανήκει στην ευθεία ε: $x-2y=-2$ και η διάμεσος του ΓΜ ανήκει στη ευθεία η: $3x+y=5$. Να βρείτε

α) Τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

β) Την εξίσωση του ύψους ΑΕ.

10. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-2)x+2\lambda y=4-4\lambda$ (Ι)

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (Ι) παριστάνει ευθεία ε_λ.

β) Να βρείτε την τιμή του λ για να είναι η ε_λ παράλληλη στον y'y.

γ) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνονται από την (Ι) διέρχονται από σταθερό σημείο το οποίο να προσδιορίσετε.

Κωνικές τομές

Κύκλος

11. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(y-1,1)$ και $\vec{\beta}=(y+1,-4x+1)$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $N(x,y)$ για τα οποία ισχύει $\left|5\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=3\sqrt{2}$.

12. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x-4\lambda y+4\lambda=0$ (1).

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C_λ , του οποίου και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ περνάνε από το σημείο $A(1,1)$.

γ) Να βρείτε την ευθεία ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ορίζει στον κύκλο C_λ χορδή ΒΓ ,ώστε $B\hat{A}\Gamma=90^\circ$.

δ) Αν Μ το σημείο τομής της ε με την ευθεία $\delta: x-y-3=0$, να βρείτε τις ακέραιες τιμές του λ ώστε το Μ να έχει τετμημένη ακέραιο.

13. Δίνεται η εξίσωση : $x^2+y^2-5+\lambda(2x-y-5)=0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του πραγματικού λ με $\lambda\neq-2$. Τι παριστάνει η (1) για $\lambda=-2$;

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων.

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο το οποίο και να προσδιορίσετε.

14. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2\mu x=6\mu y,\ \mu\neq 0.$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παραστάνει κύκλο για κάθε $\mu\neq 0$, ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των κύκλων.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των πιο πάνω κύκλων.

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την πιο πάνω εξίσωση εφάπτονται στην ευθεία με εξίσωση $x+3y=0.$

δ) Αν Β σημείο του κύκλου που προκύπτει για μ> 0 , τέτοιο ώστε ΟΒ είναι διάμετρος του με μήκος $2\sqrt{10}$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Β.

15. Δίνεται κύκλος C που έχει το κέντρο του στην ευθεία ε: $2x-3y=5$ και διέρχεται από τα σημεία $A(3,3)$ και $B(6,0)$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου C είναι $(x-4)^2+(y-1)^2=5$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στον κύκλο στο σημείο Α και να δείξετε ότι τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $E(-3,0)$.

γ) Έστω Γ και Δ τα σημεία τομής της ευθείας η: $y-1=\lambda(x-4),\ \lambda\in\mathbb{R}$ με τον κύκλο C του α ερωτήματος. Να υπολογίσετε το $\left|\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}\right|$.

16. Δίνονται τα σημεία Ε' (-3,0) και Ε(3,0).

α) Να αποδείξετε ότι η γενική εξίσωση κύκλου C που διέρχεται από τα Ε' και Ε με κέντρο $K(0,\kappa),\ \kappa\in\mathbb{R}$ είναι: $x^2+y^2-2\kappa y=9\ (C)$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (C) στο σημείο Ε.

17. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x-\lambda y-2=0,\ \lambda\in\mathbb{R}\ (1)$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε.

γ) Για ποιες τιμές του λ, η ευθεία (1) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v}=(\lambda^2-3,2\lambda)$.

δ) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η (1) είναι εφαπτομένη στον κύκλο $(x-2)^2+(y-2)^2=\frac{2}{5}$.

18. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-\alpha(x-y)+2(\alpha-2)x=0\ (1)$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα συναρτήσει του α.

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της εξίσωσης (1) ανήκουν σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

γ) Έστω C1 εκείνος από τους κύκλους της εξίσωσης (1), του οποίου το κέντρο ανήκει και στην ευθεία (η): $y=-3x+6$ και C2 η παραβολή που έχει κορυφή το 0(0,0), εστία Ε(-1,0) και άξονα συμμετρίας τον x'x.

i. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C1 και της παραβολής C2.

ii. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες του κύκλου C1 και της παραβολής C2.

19. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2=2px$ και εστία Ε.

α) Αν η εφαπτομένη της στο σημείο $M(x_1,y_1)\neq(0,0)$ τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Α, να αποδείξετε ότι η γωνία ΕΑΜ είναι ορθή.

β) Αν $p=3$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στην παραβολή που είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $3x-4y+2=0.$

20. Έστω η εξίσωση $x^2+y^2-2\alpha^2x-4\alpha y+2\alpha^2-1=0,\ \alpha\in\mathbb{R}$ (1). Να δείξετε ότι:

α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να βρεθεί η ακτίνα του.

β) Τα κέντρα Κ των κύκλων (1) είναι σημεία παραβολής, της οποίας να βρείτε την εξίσωση καθώς και την εστία Ε.

γ) Οι κύκλοι (1) εφάπτονται στην διευθετούσα (δ) της παραβολής για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

δ) Αν $\alpha \neq 0$, και Α το σημείο τομής της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $K\left(\alpha^2, 2\alpha\right)$ με την διευθετούσα (δ), τότε το εμβαδόν $\left(KAE\right) = \dfrac{\left(\alpha^2+1\right)^2}{2|\alpha|}$.

Διανύσματα

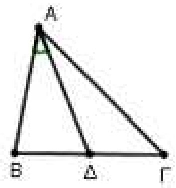
1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $(AB)=3-\sqrt{3}$, $(A\Gamma)=2\sqrt{3}$ και $\hat{A}=60°$. Να βρείτε:

α) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$

β) Το μέτρο της διαμέσου ΑΔ.

γ) Τη γωνία $B\hat{A}\Delta$.

Λύση



α) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu A=\left(3-\sqrt{3}\right)\cancel{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}=3\sqrt{3}-3$

β) Είναι $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)$, οπότε $\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right|$. Είναι

$$\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Gamma}^2\right)=\frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2\left(3\sqrt{3}-3\right)+\left|\overrightarrow{A\Gamma}^2\right|\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(3-\sqrt{3}\right)^2+6\sqrt{3}-6+\left(2\sqrt{3}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left(9-\cancel{6\sqrt{3}}+3+\cancel{6\sqrt{3}}-6+12\right)=\frac{18}{4}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|=\sqrt{\frac{18}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

γ) $\sigma\upsilon\nu B\hat{A}\Delta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}}{3\sqrt{2}\left(3-\sqrt{3}\right)}=\dfrac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2+3\sqrt{3}-3}{3\sqrt{2}\left(3-\sqrt{3}\right)}=$

$$=\frac{9-6\sqrt{3}+3+3\sqrt{3}-3}{3\sqrt{2}\left(3-\sqrt{3}\right)}=\frac{9-3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}\left(3-\sqrt{3}\right)}=\frac{\cancel{3}\cancel{\left(3-\sqrt{3}\right)}}{\cancel{3}\sqrt{2}\cancel{\left(3-\sqrt{3}\right)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$. Άρα $B\hat{A}\Delta=45^\circ$.

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ τέτοια, ώστε $|\vec{u}|=|\vec{v}|=3$ και $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\pi}{3}$. Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\overrightarrow{AB}=\vec{u}-2\vec{v}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{u}+\vec{v}$ τότε:

α) Να βρείτε το $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

Λύση

α) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{9}{2}$

β) $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left(\vec{u}-2\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-4\vec{u}\cdot\vec{v}+4\vec{v}^2=|\vec{u}|^2-4\cdot\frac{9}{2}+4|\vec{v}|^2=9-18+36=27\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=3\sqrt{3}$

$\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=|\vec{u}|^2+2\cdot\frac{9}{2}+|\vec{v}|^2=9+9+9=27\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=3\sqrt{3}$

Επειδή $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\left(\vec{u}-2\vec{v}\right)\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{v}-2\vec{v}^2=|\vec{u}|^2-\vec{u}\cdot\vec{v}-2|\vec{v}|^2=9-\frac{9}{2}-18=-\frac{27}{2}<0$ άρα $\hat{A}>90°$. Άρα το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

3. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}|=4,\ |\vec{\beta}|=2,\ |\vec{\gamma}|=1$ και $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}-6\vec{\gamma}=\vec{0},$ τότε:

α) Αφού δείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-8,$ να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}.$

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=-2\vec{\beta}$.

γ) Να υπολογίσετε το $|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|.$

Λύση

α) $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}-6\vec{\gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=6\vec{\gamma}\Rightarrow |2\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|6\vec{\gamma}|=6|\vec{\gamma}|=6\Leftrightarrow (2\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=36\Leftrightarrow 4\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=36\Leftrightarrow$

$4|\vec{\alpha}|^2+4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=36\Leftrightarrow 64+4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4=36\Leftrightarrow 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-32\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-8$

$$\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}=\frac{-8}{8}=-1\Leftrightarrow(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=180^\circ\Leftrightarrow\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$$

β) Επειδή $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ είναι $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ με $\lambda<0$. Όμως $|\vec{\alpha}|=|\lambda||\vec{\beta}|\Leftrightarrow 8=4|\lambda|\Leftrightarrow|\lambda|=2\overset{\lambda<0}{\Leftrightarrow}\lambda=-2$ άρα $\vec{\alpha}=-2\vec{\beta}$

γ) $|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2-4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2-4(-8)+4|\vec{\beta}|^2=16+32+4\cdot8=80\Leftrightarrow|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

4. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(\kappa,\kappa+1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3\kappa,\kappa-1),\ \kappa\in\mathbb{R}.$

α) Να δείξετε ότι για $\kappa=0$ και $\kappa=-2$ τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

β) Αν τα Α,Β,Γ σχηματίζουν τρίγωνο:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{AM}$ όπου Μ το μέσον του ΒΓ.

ii. Να βρείτε την τιμή του κ για να είναι $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{B\Gamma}.$

iii. Για $\kappa=\frac{1}{2}$ να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{A}M.$

Λύση

α) Αν $\kappa=0$ είναι $\overrightarrow{AB}=(0,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(0,-1)$, οπότε $\overrightarrow{A\Gamma}=-\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{A\Gamma}//\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow A,B,\Gamma$ συνευθειακά.

Αν $\kappa=-2$ είναι $\overrightarrow{AB}=(-2,-1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(-6,-3)$, οπότε $\overrightarrow{A\Gamma}=3\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{A\Gamma}//\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow A,B,\Gamma$ συνευθειακά.

β) Τα Α,Β,Γ σχηματίζουν τρίγωνο όταν

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\neq0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\kappa & \kappa+1\\ 3\kappa & \kappa-1\end{vmatrix}\neq0\Leftrightarrow\kappa^2-\kappa-3\kappa^2-3\kappa\neq0\Leftrightarrow-2\kappa^2-4\kappa\neq0\Leftrightarrow-2\kappa(\kappa+2)\neq0\Leftrightarrow$$

$\kappa\neq0$ και $\kappa\neq-2$.

i. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})=\frac{1}{2}(\kappa+3\kappa,\kappa+1+\kappa-1)=(2\kappa,\kappa)$

ii. $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}=(2\kappa,-2)$, $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=0\Leftrightarrow4\kappa^2-2\kappa=0\Leftrightarrow2\kappa(2\kappa-1)=0\Leftrightarrow$

$\kappa=0$ απορρίπτεται ή $\kappa=\frac{1}{2}$.

iii. Για $\kappa=\frac{1}{2}$ είναι $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ και $\overrightarrow{AM}=\left(1,\frac{1}{2}\right).$

$$\text{συν}B\hat{A}M=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow B\hat{A}M=45^\circ$$

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $|\vec{AB}|=2$, $|\vec{A\Gamma}|=6$ και $\hat{A}=\frac{\pi}{3}$. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{AB}-\vec{A\Gamma}$ και $\vec{B\Gamma}-14\vec{AB}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Λύση

$$\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=|\vec{AB}||\vec{A\Gamma}|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=2\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=6$$

$$\left(\vec{AB}-\vec{A\Gamma}\right)\cdot\left(\vec{B\Gamma}-14\vec{AB}\right)=\left(\vec{AB}-\vec{A\Gamma}\right)\cdot\left(\vec{A\Gamma}-\vec{AB}-14\vec{AB}\right)=\left(\vec{AB}-\vec{A\Gamma}\right)\cdot\left(\vec{A\Gamma}-15\vec{AB}\right)=$$

$$=\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}-15\vec{AB}^2-\vec{A\Gamma}^2+15\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=16\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}-15|\vec{AB}|^2-|\vec{A\Gamma}|^2=$$

$$=16\cdot 6-15\cdot 4-36=0\Leftrightarrow\left(\vec{AB}-\vec{A\Gamma}\right)\perp\left(\vec{B\Gamma}-14\vec{AB}\right)$$

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60^\circ$ και $\vec{\beta}=-\vec{\gamma}-\vec{\alpha}$.

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\lambda\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ να είναι κάθετα.

Λύση

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$

β) $\vec{\beta}=-\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}-\vec{\beta}\Rightarrow|\vec{\gamma}|=|-\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\Leftrightarrow|\vec{\gamma}|^2=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2\Leftrightarrow$

$|\vec{\gamma}|^2=|\vec{\alpha}|^2+2+|\vec{\beta}|^2=4+2+1=7\Leftrightarrow|\vec{\gamma}|=\sqrt{7}$

γ) $\left(\lambda\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}\right)\perp\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)\Leftrightarrow\left(\lambda\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}\right)\cdot\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)=0\Leftrightarrow\left(\lambda\vec{\alpha}+2\left(-\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\right)\cdot\left(\vec{\beta}-\left(-\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\right)=0\Leftrightarrow$

$\left(\lambda\vec{\alpha}-2\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)\left(\vec{\beta}+\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow\left(\left(\lambda-2\right)\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow$

$\left(\lambda-2\right)\vec{\alpha}^2+2\left(\lambda-2\right)\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-4\vec{\beta}^2=0\Leftrightarrow\left(\lambda-2\right)|\vec{\alpha}|^2+2\left(\lambda-2\right)-2-4|\vec{\beta}|^2=0\Leftrightarrow$

$4\left(\lambda-2\right)+2\lambda-4-2-4=0\Leftrightarrow 4\lambda-8+2\lambda-10=0\Leftrightarrow 6\lambda=18\Leftrightarrow\lambda=3$

Ευθεία

7. Δίνονται οι ευθείες : (ε): $x+2y-1=0$ και (η): $x+2y-3=0$. καθώς και το σημείο $\Sigma\left(3,-3\right)$.

α) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις του σημείου Σ από τις δυο ευθείες καθώς και την απόσταση μεταξύ των ευθειών (ε) και (η).

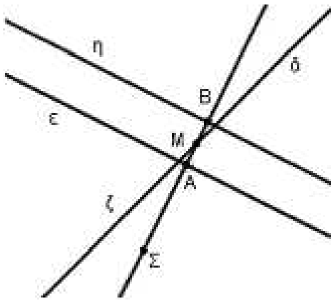
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το Σ και τέμνει τις ευθείες (ε) και (η) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, έτσι ώστε η ευθεία (ζ): $x-y-5=0$ να διέρχεται από το μέσον του ΑΒ.

Λύση

α) $d\left(\Sigma,\varepsilon\right)=\frac{|3+2(-3)-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$, $d\left(\Sigma,\eta\right)=\frac{|3+2(-3)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

Για την απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο μιας από τις δύο ευθείες.
Για $x=1$ έχουμε από την εξίσωση της (ε) $y=0$ δηλαδή το σημείο $N\left(1,0\right)$.

Έχουμε $d(\varepsilon,\eta)=d(N,\eta)=\dfrac{|1+2\cdot 0-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



β) Οι ευθείες που διέρχονται από το Σ έχουν εξίσωση της μορφής $y+3=\lambda(x-3)\Leftrightarrow y=\lambda x-3\lambda-3$ ή είναι η $x=3$.

Αν δ: $y=\lambda x-3\lambda-3$

Από το σύστημα των δ,ε προκύπτει ότι τέμνονται στο σημείο

$A\left(\dfrac{6\lambda+7}{2\lambda+1},-\dfrac{2\lambda+3}{2\lambda+1}\right)$

Από το σύστημα των η,ε προκύπτει ότι τέμνονται στο σημείο

$B\left(\dfrac{6\lambda+9}{2\lambda+1},-\dfrac{3}{2\lambda+1}\right)$

Το μέσο Μ του ΑΒ έχει συντεταγμένες (x_M,y_M) με

$x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{6\lambda+7}{2\lambda+1}+\dfrac{6\lambda+9}{2\lambda+1}\right)=\dfrac{6\lambda+8}{2\lambda+1}$, $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{2\lambda+3}{2\lambda+1}-\dfrac{3}{2\lambda+1}\right)=-\dfrac{\lambda+3}{2\lambda+1}$

Επειδή από το Μ διέρχεται η ευθεία ζ, ισχύει ότι:

$x_M-y_M-5=0\Leftrightarrow \dfrac{6\lambda+8}{2\lambda+1}+\dfrac{\lambda+3}{2\lambda+1}-5=0\Leftrightarrow 6\lambda+8+\lambda+3-10\lambda-5=0\Leftrightarrow \lambda=2$. Τότε δ: $y=2x-9$

Αν δ: $x=3$, τότε από το σύστημα των δ,ε προκύπτει ότι τέμνονται στο σημείο $A(3,-1)$ και από το σύστημα των η,ε προκύπτει ότι τέμνονται στο σημείο $B(3,0)$. Το μέσο Μ του ΑΒ έχει συντεταγμένες $\left(3,-\dfrac{1}{2}\right)$ και δεν επαληθεύει την ζ.

2ος τρόπος

Έστω $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$.

Το Α ανήκει στην (ε) οπότε $x_A+2y_A-1=0$ (1).

Το Β ανήκει στην (η) οπότε $x_B+2y_B-3=0$ (2).

Το σημείο $M(x_M,y_M)$ είναι μέσο του ΑΒ οπότε $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2},y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}$.

Επίσης το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ζ) οπότε

$x_M-y_M-5=0\Leftrightarrow \dfrac{x_A+x_B}{2}-\dfrac{y_A+y_B}{2}-5=0\Leftrightarrow x_A+x_B-(y_A+y_B)=10$ (3) (3)

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε :

$x_A+x_B+2y_A+2y_B-4=0\Leftrightarrow x_A+x_B+2(y_A+y_B)=4$ (4)

Με αφαίρεση της σχέσης (3) από την (4) έχουμε : $3(y_A+y_B)=-6\Leftrightarrow y_A+y_B=-2$ (5)

Από τη σχέση (3) μέσω της (5) έχουμε $x_A+x_B=8$

Άρα το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $(4,-1)$ και η (δ) έχει εξίσωση

$y-y_M=\dfrac{y_\Sigma-y_M}{x_\Sigma-x_M}\cdot(x-x_M)\Leftrightarrow y+1=2(x-4)\Leftrightarrow y=2x-9$.

8. α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε} που είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $x-y+4=0$ και διέρχεται από το σημείο $B(1,-1)$.

β) Σημείο $A(\lambda,\mu)$ κινείται στην ευθεία με εξίσωση $x-y=2$. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{AM}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων, κινείται στην ευθεία με εξίσωση (η): $y=x-4$.

γ) Να βρείτε την απόσταση των ευθειών (η), (ε) την εξίσωση της μεσοπαράλληλης τους.

Λύση

α) Επειδή η ε είναι παράλληλη στην $x-y+4=0$ που έχει $\lambda=1$, είναι και $\lambda_\varepsilon=1$, οπότε η εξίσωση της ε είναι: $y+1=1(x-1)\Leftrightarrow y=x-2$

β) Έστω (x_M, y_M) οι συντεταγμένες του Μ, τότε

$$\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow (x_M,y_M)=2(x_M-\lambda, y_M-\mu)\Leftrightarrow \begin{cases} x_M=2x_M-2\lambda \\ y_M=2y_M-2\mu \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{x_M}{2} \\ \mu=\dfrac{y_M}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Επειδή το $A(\lambda,\mu)$ κινείται στην ευθεία με εξίσωση $x-y=2$, ισχύει ότι $\lambda-\mu=2$ και λόγω της (1):

$\frac{x_M}{2}-\frac{y_M}{2}=2\Leftrightarrow x_M-y_M=4$. Επειδή οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση $x-y=4$ το σημείο Μ κινείται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-4$.

γ) Αρχικά παρατηρούμε ότι οι ευθείες ε και η είναι παράλληλες, οπότε για να βρούμε την απόστασή τους αρκεί να βρούμε την απόσταση ενός σημείου της μίας από την άλλη.

Στην για $x=0$ είναι $y=-2$ άρα το σημείο $K(0,-2)$ ανήκει στην ε.

$$d(\varepsilon,\eta)=d(K,\eta)=\frac{|0-(-2)-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Έστω $M(x,y)$ σημείο της μεσοπαράλληλης ,τότε

$$d(M,\eta)=d(M,\varepsilon)\Leftrightarrow \frac{|x-y-4|}{\sqrt{2}}=\frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow |x-y-4|=|x-y-2|\Leftrightarrow$$

$(x-y-4=x-y-2\Leftrightarrow -4=-2 \text{ αδύνατη})$ ή $(x-y-4=-x+y+2\Leftrightarrow x-y-3=0)$

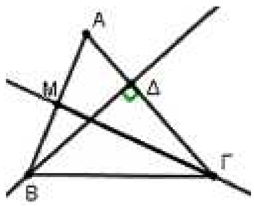
Άρα η εξίσωση της μεσοπαράλληλης είναι η $x-y-3=0$.

9. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2,3).Το ύψος του ΒΔ ανήκει στην ευθεία ε: $x-2y=-2$ και η διάμεσος του ΓΜ ανήκει στη ευθεία η: $3x+y=5$. Να βρείτε

α) Τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

β) Την εξίσωση του ύψους ΑΕ.

Λύση



α) $A\Gamma\perp B\Delta\Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma}\cdot\lambda_{B\Delta}=-1\Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma}\cdot\frac{1}{2}=-1\Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma}=-2$

Η ευθεία ΑΓ έχει εξίσωση: $y-3=-2(x-2)\Leftrightarrow y=-2x+7$.

Οι συντεταγμένες του Γ θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος των ΑΓ,ΓΜ.

Είναι: $\begin{cases} y=-2x+7 \\ 3x+y=5 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+7 \\ 3x-2x+7=5 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+7 \\ x=-2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=4+7=11 \\ x=-2 \end{cases}$

άρα $\Gamma(-2,11)$.

Έστω ότι το Β έχει συντεταγμένες (x_1,y_1) , τότε για το Μ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{x_1+2}{2},\frac{y_1+3}{2}\right)$.

Επειδή το σημείο Μ βρίσκεται στην ευθεία ΓΜ, ισχύει ότι:

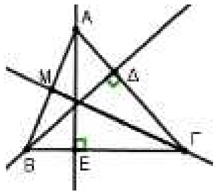
$3\frac{x_1+2}{2}+\frac{y_1+3}{2}=5\Leftrightarrow 3x_1+6+y_1+3=10\Leftrightarrow y_1=1-3x_1 \quad (1)$

Επειδή το Β είναι σημείο της ΒΔ, ισχύει ότι: $x_1-2y_1=-2$ και λόγω της (1) είναι

$x_1-2(1-3x_1)=-2\Leftrightarrow x_1-2+6x_1=-2\Leftrightarrow 7x_1=0\Leftrightarrow x_1=0$ και $y_1=1-3\cdot 0=1$ άρα $B(0,1)$.

β) Είναι $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{11-1}{-2-0}=-5$ και $AE\perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{AE}\lambda_{B\Gamma}=-1\Leftrightarrow -5\lambda_{B\Gamma}=-1\Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma}=\dfrac{1}{5}$

Η ΒΓ έχει εξίσωση: $y-1=\dfrac{1}{5}x \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{5}x+1$



10. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-2)x+2\lambda y=4-4\lambda$ (I)

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (I) παριστάνει ευθεία ε_λ.

β) Να βρείτε την τιμή του λ για να είναι η ε_λ παράλληλη στον y'y.

γ) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνονται από την (I) διέρχονται από σταθερό σημείο το οποίο να προσδιορίσετε.

Λύση

α) Η (1) δεν παριστάνει ευθεία όταν $\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda=2$ και $2\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=0$ που είναι αδύνατο.
Άρα η εξίσωση (I) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Η ε_λ είναι παράλληλη στον y'y όταν είναι της μορφής $x=k,\ k\in\mathbb{R}$, οπότε πρέπει $2\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=0$.
Τότε η ε_λ έχει εξίσωση $-2x=4\Leftrightarrow x=-2$.

γ) Για $\lambda=2$ είναι $4y=4-8\Leftrightarrow y=-1$. Δύο από τις ευθείες ε_λ τέμνονται στο σημείο $A(-2,-1)$. Για να διέρχονται όλες οι ευθείες ε_λ από το Α πρέπει

$(\lambda-2)(-2)+2\lambda(-1)=4-4\lambda\Leftrightarrow -2\lambda+\cancel{4}-2\lambda=\cancel{4}-4\lambda$ που ισχύει.

Όλες οι ευθείες ε_λ διέρχονται από το σημείο $A(-2,-1)$.

Κωνικές τομές

Κύκλος

11. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(y-1,1)$ και $\vec{\beta}=(y+1,-4x+1)$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $N(x,y)$ για τα οποία ισχύει $\left|5\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=3\sqrt{2}$.

Λύση

α) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow(y-1)(y+1)+1\cdot(-4x+1)=0\Leftrightarrow y^2-1-4x+1=0\Leftrightarrow y^2=4x$.
Ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι η παραβολή C: $y^2=4x$.

β) $5\vec{\alpha}-\vec{\beta}=5(y-1,1)-(y+1,-4x+1)=(4y-6,4x)$

$\left|5\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{(4y-6)^2+(4x)^2}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow(4y-6)^2+(4x)^2=18\Leftrightarrow$

$\left[4\left(y-\dfrac{3}{2}\right)\right]^2+16x^2=18\Leftrightarrow16\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+16x^2=18\Leftrightarrow x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{18}{16}$

Ο γεωμετρικός τόπος του Ν είναι κύκλος με κέντρο $K\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{\dfrac{18}{16}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

12. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x-4\lambda y+4\lambda=0$ (1).

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C_λ , του οποίου και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ περνάνε από το σημείο $A(1,1)$.

γ) Να βρείτε την ευθεία ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ορίζει στον κύκλο C_λ χορδή ΒΓ ,ώστε $B\hat{A}\Gamma=90°$.

δ) Αν Μ το σημείο τομής της ε με την ευθεία $\delta: x-y-3=0$, να βρείτε τις ακέραιες τιμές του λ ώστε το Μ να έχει τετμημένη ακέραιο.

Λύση

α) $x^2+y^2-2x-4\lambda y+4\lambda=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4\lambda y+4\lambda^2=4\lambda^2-4\lambda+1 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2\lambda)^2=(2\lambda-1)^2$

Η εξίσωση παριστάνει κύκλο όταν $(2\lambda-1)^2>0 \Leftrightarrow 2\lambda-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq\frac{1}{2}$.

Το κέντρο Κ του κύκλου έχει συντεταγμένες $(1,2\lambda)$ και η ακτίνα του ρ είναι $\rho=\sqrt{(2\lambda-1)^2}=|2\lambda-1|$.

β) Όλοι οι κύκλοι C_λ περνάνε από το σημείο $A(1,1)$ όταν:

$1^2+1^2-2\cdot1-4\lambda\cdot1+4\lambda=0 \Leftrightarrow 1+1-2-4\lambda+4\lambda=0$ που ισχύει.

γ) Η γωνία ΒΑΓ είναι ορθή μόνο όταν είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, δηλαδή όταν η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου δηλαδή όταν το Κ ανήκει στην ε. Είναι $\lambda_\varepsilon=\lambda_{OK}=\frac{2\lambda-0}{1-0}=2\lambda$ και η ε έχει εξίσωση $y=2\lambda x$.

δ) Από το σύστημα των ε, δ έχουμε: $\begin{cases} x-y-3=0 \\ y=2\lambda x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\lambda x-3=0 \\ y=2\lambda x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2\lambda)x=3 \\ y=2\lambda x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{1-2\lambda} \\ y=\frac{6\lambda}{1-2\lambda} \end{cases}$.

Το Μ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{3}{1-2\lambda},\frac{6\lambda}{1-2\lambda}\right)$.

Η τετμημένη του Μ είναι ακέραιος όταν ο αριθμός $\frac{3}{1-2\lambda}$ είναι ακέραιος και αυτό συμβαίνει όταν ο αριθμός $1-2\lambda$ διαιρεί το 3, δηλαδή όταν $1-2\lambda=\pm1$ ή ±3 . Άρα

$1-2\lambda=1 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $1-2\lambda=-1 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $1-2\lambda=3 \Leftrightarrow \lambda=-1$ ή $1-2\lambda=-3 \Leftrightarrow \lambda=2$

13. Δίνεται η εξίσωση : $x^2+y^2-5+\lambda(2x-y-5)=0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του πραγματικού λ με $\lambda\neq-2$. Τι παριστάνει η (1) για $\lambda=-2$;

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων.

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο το οποίο και να προσδιορίσετε.

Λύση

α) $x^2+y^2-5+\lambda(2x-y-5)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2\lambda x-\lambda y-5\lambda-5=0$

Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=4\lambda^2+\lambda^2-4(-5\lambda-5)=5\lambda^2+20\lambda+20=5(\lambda+2)^2$

Η (1) παριστάνει κύκλο όταν $A^2+B^2-4\Gamma>0 \Leftrightarrow 5(\lambda+2)^2>0 \Leftrightarrow \lambda\neq-2$. Τότε το κέντρο Κ έχει συντεταγμένες $K\left(-\lambda,\frac{\lambda}{2}\right)$ και η ακτίνα είναι $\rho=\sqrt{5}|\lambda+2|$.

Αν $\lambda=-2$ η (1) γίνεται:

$x^2+y^2-5+\lambda(2x-y-5)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x+2y+5=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=0 \Leftrightarrow$
$x=2$ και $y=1$ και παριστάνει το σημείο $K(2,-1)$.

β) Είναι $x_K=-\lambda,\ y_K=\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda=2y_K$ οπότε $x_K=-2y_K$. Επειδή οι συντεταγμένες του Κ επαληθεύουν την εξίσωση $x=-2y \Leftrightarrow x+2y=0$, ο γεωμετρικός τόπος του Κ είναι η ευθεία με εξίσωση $x+2y=0$.

γ) Για $\lambda=0$ είναι $x^2+y^2-5=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=5$ (2) και για $\lambda=1$ είναι $x^2+y^2+2x-y-10=0$ (3).
Αντικαθιστώντας στην (3) την (2) έχουμε: $5+2x-y-10=0 \Leftrightarrow y=2x-5$ και η (2) γίνεται:

$x^2+(2x-5)^2=5 \Leftrightarrow x^2+4x^2-20x+25=5 \Leftrightarrow 5x^2-20x+20=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$ και $y=2\cdot 2-5=-1$. Δύο από τους κύκλους διέρχονται από το σημείο $M(2,-1)$, για να διέρχονται όλοι οι κύκλοι από το Μ πρέπει:

$2^2+(-1)^2-5+\lambda(2\cdot 2-(-1)-5)=0 \Leftrightarrow 4+1-5+\lambda(4+1-5)=0$ που ισχύει.

14. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2\mu x=6\mu y,\ \mu\neq 0.$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παραστάνει κύκλο για κάθε $\mu\neq 0$, ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των κύκλων.
β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των πιο πάνω κύκλων.
γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την πιο πάνω εξίσωση εφάπτονται στην ευθεία με εξίσωση $x+3y=0$.
δ) Αν Β σημείο του κύκλου που προκύπτει για μ> 0 , τέτοιο ώστε ΟΒ είναι διάμετρος του με μήκος $2\sqrt{10}$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Β.

Λύση

α) $x^2+y^2-2\mu x=6\mu y \Leftrightarrow x^2-2\mu x+y^2-6\mu y=0 \Leftrightarrow x^2-2\mu x+\mu^2+y^2-6\mu y+9\mu^2=10\mu^2 \Leftrightarrow$
$(x-\mu)^2+(y-3\mu)^2=10\mu^2$. Επειδή $10\mu^2\neq 0$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(\mu,3\mu)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{10\mu^2}=\sqrt{10}|\mu|$.

β) Είναι $\begin{cases} x_K=\mu \\ y_K=3\mu \end{cases} \Rightarrow y_K=3x_K$

Επειδή οι συντεταγμένες του Κ επαληθεύουν την εξίσωση $y=3x$ ο γεωμετρικός τόπος του Κ είναι η ευθεία ε: $y=3x$.

γ) Έστω ε_1 η ευθεία με εξίσωση $x+3y=0$. Είναι $d(K,\varepsilon_1)=\frac{|\mu+3\cdot 3\mu|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|10\mu|}{\sqrt{10}}=\frac{\cancel{10}|\mu|\sqrt{10}}{\cancel{10}}=|\mu|\sqrt{10}=\rho$
άρα όλοι οι κύκλοι της αρχικής εξίσωσης εφάπτονται στην ευθεία ε_1.

δ) Επειδή η ΟΒ είναι διάμετρος του κύκλου, είναι $OK=\rho \Leftrightarrow \sqrt{10}|\mu|=\sqrt{10} \Leftrightarrow |\mu|=1 \overset{\mu>0}{\Leftrightarrow} \mu=1$
Το Β είναι το σημείο τομής της ΟΚ με τον κύκλο, οπότε για μ=1 έχουμε το σύστημα:

$\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y=0 \\ y=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9x^2-2x-6\cdot 3x=0 \\ y=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2-20x=0 \\ y=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x(x-2)=0 \\ y=3x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=0 \text{ ή } x=2 \\ y=3x \end{cases}$. Για $x=2$ είναι $y=6$ οπότε $B(2,6)$. (για $x=0$ έχουμε $y=0$ δηλαδή το Ο που είναι διαφορετικό από το Β).

Η εφαπτομένη η του κύκλου στο Β είναι κάθετη στην ΟΒ, οπότε:

$\lambda_\eta \cdot 3 = -1 \Leftrightarrow \lambda_\eta = -\frac{1}{3}$ και η η έχει εξίσωση: $y - 6 = -\frac{1}{3}(x-2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{20}{3}$.

15. Δίνεται κύκλος C που έχει το κέντρο του στην ευθεία ε: $2x - 3y = 5$ και διέρχεται από τα σημεία $A(3,3)$ και $B(6,0)$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου C είναι $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 5$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στον κύκλο στο σημείο Α και να δείξετε ότι τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $E(-3,0)$.

γ) Έστω Γ και Δ τα σημεία τομής της ευθείας η: $y - 1 = \lambda(x-4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ με τον κύκλο C του α ερωτήματος. Να υπολογίσετε το $\left|\overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta}\right|$.

Λύση

α) Έστω $K(x_0, y_0)$ το κέντρο του κύκλου.

Είναι $(AK) = (BK) \Leftrightarrow \sqrt{(x_0-3)^2 + (y_0-3)^2} = \sqrt{(x_0-6)^2 + y_0^2} \Leftrightarrow$

$\cancel{x_0^2} - 6x_0 + 9 + \cancel{y_0^2} - 6y_0 + 9 = \cancel{x_0^2} - 12x_0 + 36 + \cancel{y_0^2} \Leftrightarrow 6x_0 - 6y_0 = 18 \Leftrightarrow x_0 = y_0 + 3$ (1)

Επειδή το Κ βρίσκεται στην ευθεία $2x - 3y = 5$ ισχύει ότι

$2x_0 - 3y_0 = 5 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2(y_0+3) - 3y_0 = 5 \Leftrightarrow 2y_0 + 6 - 3y_0 = 5 \Leftrightarrow y_0 = 1$ και από την $(1) \Rightarrow x_0 = 4$, άρα $K(4,1)$.

Για την ακτίνα ρ του κύκλου ισχύει ότι: $\rho = KA = \sqrt{(4-3)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$, οπότε ο κύκλος έχει εξίσωση:

$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 5$

β) Έστω ε_1 η εφαπτομένη του κύκλου στο Α. Είναι

$\lambda_{KA} \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = -1 \Leftrightarrow \frac{3-1}{3-4} \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = -1 \Leftrightarrow -2 \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \frac{1}{2}$.

Η ε_1 έχει εξίσωση $y - 3 = \frac{1}{2}(x-3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Επειδή για $y = 0$ είναι $x = -3$, η ε_1 τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $E(-3,0)$.

γ) Επειδή το Κ επαληθεύει την η, η ευθεία αυτή διέρχεται από το Κ, οπότε η ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

Επειδή $\overrightarrow{O\Delta} = -\overrightarrow{O\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta} = \vec{0}$, είναι $\left|\overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta}\right| = 0$.

16. Δίνονται τα σημεία Ε' (-3,0) και Ε(3,0).

α) Να αποδείξετε ότι η γενική εξίσωση κύκλου C που διέρχεται από τα Ε' και Ε με κέντρο $K(0,\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$ είναι: $x^2 + y^2 - 2\kappa y = 9$ (C)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (C) στο σημείο Ε.

Λύση

α) Η ακτίνα ρ του κύκλου είναι $\rho = (KE) = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-\kappa)^2} = \sqrt{\kappa^2 + 9}$ και η εξίσωσή του είναι:

$x^2 + (y-\kappa)^2 = \left(\sqrt{\kappa^2+9}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\kappa y + \cancel{\kappa^2} = \cancel{\kappa^2} + 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\kappa y = 9$

β) Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου στο Ε. Είναι $\varepsilon \perp KE \Leftrightarrow \lambda_{KE} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \frac{\kappa}{-3} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{3}{\kappa}$, $\kappa \neq 0$

Είναι ε: $y=\frac{3}{\kappa}(x-3) \Leftrightarrow y=\frac{3}{\kappa}x-\frac{9}{\kappa}$.

Αν $\kappa=0$ Τότε $K(0,0)$ και επειδή η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ΚΕ, είναι κάθετη στον άξονα x΄x και η εξίσωσή της είναι η $x=3$.

2ος τρόπος

Έστω $M(x,y)$ σημείο της εφαπτομένης ,τότε

$\overrightarrow{KE} \perp \overrightarrow{KM} \Leftrightarrow \overrightarrow{KE}\cdot\overrightarrow{KM}=0 \Leftrightarrow (3,-k)\cdot(x-3,y)=0 \Leftrightarrow 3x-9-ky=0$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Ε είναι η $3x-ky-9=0$.

17.Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x-\lambda y-2=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.
β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε.
γ) Για ποιες τιμές του λ, η ευθεία (1) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v}=(\lambda^2-3,2\lambda)$.
δ) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η (1) είναι εφαπτομένη στον κύκλο $(x-2)^2+(y-2)^2=\frac{2}{5}$

Λύση

α) Η (1) δεν παριστάνει ευθεία όταν $\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda=-2$ και $\lambda=0$ που είναι αδύνατο. Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Για $\lambda=-2$ η (1) γίνεται $2y-2=0 \Leftrightarrow y=1$ και για $\lambda=0$: $2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$.
Δύο από τις ευθείες της (1) διέρχονται από το σημείο $A(1,1)$, για να διέρχονται όλες οι ευθείες της (1) από το σημείο αυτό πρέπει: $(\lambda+2)\cdot 1-\lambda\cdot 1-2=0 \Leftrightarrow \lambda+2-\lambda-2=0$ που ισχύει.

γ) Το διάνυσμα $\vec{\delta}=(-\lambda,-\lambda-2)$ είναι παράλληλο στις ευθείες της (1).

$\vec{v}\perp\varepsilon \Leftrightarrow \vec{v}\perp\vec{\delta} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{\delta}=0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2-3)+(-\lambda-2)\cdot 2\lambda=0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2-3+2\lambda+4)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή

$\lambda^2+2\lambda+1=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$

δ) Ο κύκλος έχει κέντρο $K(2,2)$ κι ακτίνα $\rho=\sqrt{\frac{2}{5}}$. Οι ευθείες της (1) εφάπτονται στον κύκλο αν και μόνο αν: $d(K,\varepsilon)=\sqrt{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow \frac{|(\lambda+2)\cdot 2-\lambda\cdot 2-2|}{\sqrt{(\lambda+2)^2+\lambda^2}}=\sqrt{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2\lambda^2+4\lambda+4}}=\sqrt{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow \frac{4}{\left(\sqrt{2\lambda^2+4\lambda+4}\right)^2}=\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\frac{\cancel{4}^{2}}{2\lambda^2+4\lambda+4}=\frac{\cancel{2}^{1}}{5} \Leftrightarrow 2\lambda^2+4\lambda+4=10 \Leftrightarrow 2\lambda^2+4\lambda-6=0 \Leftrightarrow \lambda^2+2\lambda-3=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=-3$

Παραβολή

18.Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-\alpha(x-y)+2(\alpha-2)x=0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα συναρτήσει του α.
β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της εξίσωσης (1) ανήκουν σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
γ) Έστω C1 εκείνος από τους κύκλους της εξίσωσης (1), του οποίου το κέντρο ανήκει και στην ευθεία (η): $y=-3x+6$ και C2 η παραβολή που έχει κορυφή το 0(0,0), εστία Ε(-1,0) και άξονα συμμετρίας τον x'x.

i. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C1 και της παραβολής C2.
ii. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες του κύκλου C1 και της παραβολής C2.

Λύση

α) $x^2+y^2-\alpha(x-y)+2(\alpha-2)x=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-\alpha x+\alpha y+2(\alpha-2)x=0 \Leftrightarrow \ x^2+y^2+(\alpha-4)x+\alpha y=0$

Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=(\alpha-4)^2+\alpha^2>0$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, οπότε η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α. Ο κύκλος έχει κέντρο το $K\left(-\frac{\alpha-4}{2},-\frac{\alpha}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{(\alpha-4)^2+\alpha^2}}{2}$.

β) Είναι $\begin{cases} x_K=-\frac{\alpha-4}{2} \\ y_K=-\frac{\alpha}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_K=-\alpha+4 \\ 2y_K=-\alpha \end{cases} \Rightarrow 2x_K=2y_K+4 \Leftrightarrow y_K=x_K+2$

Επειδή οι συντεταγμένες του Κ επαληθεύουν την εξίσωση $y=x+2$ ο γεωμετρικός τόπος του Κ είναι η ευθεία ε: $y=x+2$.

γ) i. Επειδή το Κ βρίσκεται στην η, ισχύει ότι $-\frac{\alpha}{2}=-3\left(-\frac{\alpha-4}{2}\right)+6 \Leftrightarrow -\alpha=3\alpha-12+12 \Leftrightarrow \alpha=0$. Τότε ο C1 έχει κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho_1=2$.

Για την παραβολή είναι $\frac{p}{2}=-1 \Leftrightarrow p=-2$ άρα C2: $y^2=-4x$.

ii. Αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία των C1, C2.

$\begin{cases} x^2+y^2-4x=0 \\ y^2=-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-4x=0 \\ y^2=-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x=0 \\ y^2=-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-8)=0 \\ y^2=-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ή } x=8 \\ y^2=-4x \end{cases}$.

Αν $x=0$ τότε $y=0$ και κοινό σημείο είναι το $O(0,0)$ ενώ για $x=8$ είναι $y^2=-32$ αδύνατο

Η εφαπτομένη της παραβολής στο Ο είναι ο άξονας y΄y. Επειδή η εφαπτομένη του κύκλου στο Ο είναι κάθετη στην ΚΟ, ο άξονας y΄y εφάπτεται και στον κύκλο.

19. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2=2px$ και εστία Ε.

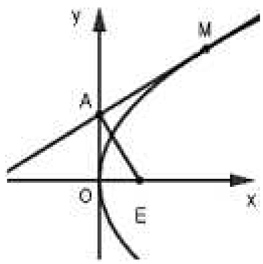
α) Αν η εφαπτομένη της στο σημείο $M(x_1,y_1)\neq(0,0)$ τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Α, να αποδείξετε ότι η γωνία ΕΑΜ είναι ορθή.

β) Αν $p=3$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στην παραβολή που είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $3x-4y+2=0$.

Λύση

α) Επειδή το Μ είναι σημείο της παραβολής ισχύει ότι $y_1^2=2px_1 \Leftrightarrow x_1=\frac{y_1^2}{2p}$ (1)

Η εφαπτομένη ε της παραβολής στο Μ έχει εξίσωση ε: $yy_1=p(x+x_1)$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=\frac{p}{y_1}$.



Για $x=0$ είναι $y=\frac{px_1}{y_1}=\frac{p\frac{y_1^2}{2p}}{y_1}=\frac{y_1}{2}$, άρα το Α έχει συντεταγμένες $\left(0,\frac{y_1}{2}\right)$.

Είναι $\lambda_{EA} = \dfrac{\frac{y_1}{2} - 0}{0 - \frac{p}{2}} = -\dfrac{y_1}{p}$. Επειδή $\lambda_\varepsilon \lambda_{EA} = \dfrac{p}{y_1}\left(-\dfrac{y_1}{p}\right) = -1$, είναι $E\hat{A}M = 90°$

β) Για $p = 3$ είναι C: $y^2 = 6x$.

Επειδή η ευθεία $3x - 4y + 2 = 0$ έχει $\lambda = \dfrac{3}{4}$ και η ζητούμενη εφαπτομένη ε θα έχει $\lambda_\varepsilon = \dfrac{3}{4}$.

Άρα $\dfrac{3}{y_1} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow y_1 = 4$ και $x_1 = \dfrac{y_1^2}{2p} = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3}$, οπότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$y \cdot 4 = 3\left(x + \dfrac{8}{3}\right) \Leftrightarrow 3x - 4y + 8 = 0$

20. Έστω η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\alpha^2 x - 4\alpha y + 2\alpha^2 - 1 = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$ (1). Να δείξετε ότι:

α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να βρεθεί η ακτίνα του.

β) Τα κέντρα Κ των κύκλων (1) είναι σημεία παραβολής, της οποίας να βρείτε την εξίσωση καθώς και την εστία Ε.

γ) Οι κύκλοι (1) εφάπτονται στην διευθετούσα (δ) της παραβολής για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

δ) Αν $\alpha \neq 0$, και Α το σημείο τομής της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $K\left(\alpha^2, 2\alpha\right)$ με την διευθετούσα (δ), τότε το εμβαδόν $(KAE) = \dfrac{\left(\alpha^2 + 1\right)^2}{2|\alpha|}$.

Λύση

α) Είναι

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = \left(-2\alpha^2\right)^2 + \left(-4\alpha\right)^2 - 4\left(2\alpha^2 - 1\right) = 4\alpha^4 + 16\alpha^2 - 8\alpha^2 + 4 = 4\alpha^4 + 8\alpha^2 + 4 = 4\left(\alpha^2 + 1\right)^2 > 0$

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ άρα η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K_1\left(\alpha^2, 2\alpha\right)$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{\sqrt{4\left(\alpha^2+1\right)^2}}{2} = \alpha^2 + 1$.

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

β) Είναι $\begin{cases} x_K = \alpha^2 \\ y_K = 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = \alpha^2 \\ \dfrac{y_K}{2} = \alpha \end{cases} \Rightarrow x_K = \left(\dfrac{y_K}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y_K^2 = 4x_K$.

Επειδή οι συντεταγμένες του K_1 επαληθεύουν την εξίσωση $y^2 = 4x$, τα κέντρα Κ των κύκλων (1) είναι σημεία παραβολής $y^2 = 4x$ η οποία έχει $p = 2$ και εστία $E(1,0)$.

γ) Η διευθετούσα της παραβολής είναι η ευθεία δ: $x = -1 \Leftrightarrow x + 1 = 0$. Οι κύκλοι (1) εφάπτονται στη δ αν και μόνο αν $d\left(K_1, \delta\right) = \rho = \alpha^2 + 1$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Είναι $d\left(K_1, \delta\right) = \left|\alpha^2 - (-1)\right| = \alpha^2 + 1 = \rho$.

δ) Επειδή το Κ είναι σημείο της παραβολής ισχύει ότι

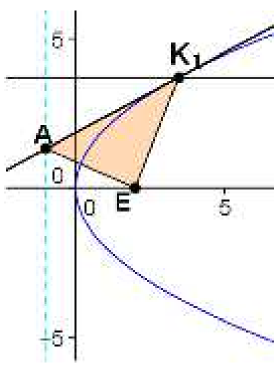
$4\alpha^2 = 2p\alpha^2 \Leftrightarrow p = 2$ και C: $y^2 = 4x$.

Η εφαπτομένη της παραβολής στο Κ έχει εξίσωση:

$2\alpha y = 2\left(x + \alpha^2\right) \Leftrightarrow \alpha y - x - \alpha^2 = 0$.

Για το Α έχουμε το σύστημα:

$\begin{cases} \alpha y - x - \alpha^2 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha y = \alpha^2 - 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \\ x = -1 \end{cases}$, άρα $A\left(-1, \dfrac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\right)$.



Είναι $\overrightarrow{EA}=\left(-2,\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\right)$, $\overrightarrow{EK}=\left(\alpha^2-1,2\alpha\right)$,

$$\det\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EK}\right)=\begin{vmatrix}-2 & \frac{\alpha^2-1}{\alpha}\\ \alpha^2-1 & 2\alpha\end{vmatrix}=-4\alpha-\frac{\left(\alpha^2-1\right)^2}{\alpha}=-\frac{4\alpha^2+\alpha^4-2\alpha^2+1}{\alpha}=-\frac{\alpha^4+2\alpha^2+1}{\alpha}=-\frac{\left(\alpha^2+1\right)^2}{\alpha}$$

$$\left(KAE\right)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EK}\right)\right|=\frac{\left(\alpha^2+1\right)^2}{2|\alpha|}.$$

2ος τρόπος

$$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EK}=-2\left(\alpha^2-1\right)+\frac{\alpha^2-1}{\cancel{\alpha}}\cdot 2\cancel{\alpha}=-2\alpha^2+2+2\alpha^2-2=0 \quad .$$

Άρα το τρίγωνο ΚΑΕ είναι ορθογώνιο με εμβαδόν

$$\left(KAE\right)=\frac{1}{2}\left(EA\right)\left(EK\right)=\frac{1}{2}\sqrt{4+\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\alpha^2-1\right)^2+4\alpha^2}\Leftrightarrow$$

$$\left(KAE\right)=\frac{1}{2}\sqrt{4+\frac{\alpha^4-2\alpha^2+1}{\alpha^2}}\cdot\sqrt{\alpha^4-2\alpha^2+1+4\alpha^2}\Leftrightarrow$$

$$\left(KAE\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^4+2\alpha^2+1}{\alpha}}\cdot\sqrt{\alpha^4+2\alpha^2+1}\Leftrightarrow\left(KAE\right)=\frac{1}{2|\alpha|}\sqrt{\left(\alpha^4+2\alpha^2+1\right)^2}\Leftrightarrow\left(KAE\right)=\frac{\left(\alpha^2+1\right)^2}{2|\alpha|}$$