21η Άσκηση

Έως το Θ.Rolle

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x^3$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται σε τουλάχιστον ένα σημείο.

β) Να βρείτε διάστημα της μορφής $(\alpha,\alpha+1)$ με $\alpha\in\mathbb{Z}$ το οποίο να περιέχει την τετμημένη κοινού σημείου των C_f, C_g.

γ) Να δείξετε ότι το κοινό τους σημείο είναι μοναδικό. Η τετμημένη του κοινού τους σημείου είναι πλησιέστερα στο α ή στο $\alpha+1$;

δ) Να τις σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της C_g σε σημείο $B(\rho,g(\rho))$ με $\rho\le 0$ η οποία εφάπτεται και της C_f.Στη συνέχεια να βρείτε διάστημα της μορφής $(\beta,\beta+1)$ με $\beta\in\mathbb{Z}$ το οποίο να περιέχει την τετμημένη του Β.

στ) Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

ζ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0} g(x)\,\eta\mu\dfrac{1}{g(x)}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)+x-2}{\sqrt{x}-1}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{\pi}}\dfrac{\eta\mu g(x)}{g(x)-\pi}$ **iv.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{g^2(x)}$

η) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5+g(x)+2=f(x)+2x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1,1)$.

θ) Έστω συνάρτηση h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $h(x+2)-h(x)=f(x)-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της h δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Αρκεί η εξίσωση $f(x)=g(x)$ να έχει τουλάχιστον μια λύση.

Έστω $\varphi(x)=f(x)-g(x)=x^2+1-x^3$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1-x^3)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$, οπότε υπάρχει $\gamma<0$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\gamma)>0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1-x^3)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)=-\infty$, οπότε υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\delta)<0$.

Επειδή $\varphi(\gamma)\varphi(\delta)<0$ και η h είναι συνεχής στο $[\gamma,\delta]$ ως πολυωνυμική, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\gamma,\delta)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

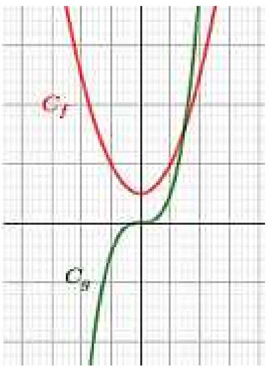
β) Είναι $\varphi(0)=1,\ \varphi(1)=1+1-1=1,\ \varphi(2)=4+1-8=-3$. Επειδή $\varphi(1)\varphi(2)<0$ και η φ είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. Άρα $\alpha=1$.

γ) Για κάθε $x\le 0$ είναι $x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2+1\ge 1\Leftrightarrow f(x)\ge 1$, ενώ $x^3\le 0\Leftrightarrow g(x)\le 0$, οπότε $f(x)>g(x)$.

Όταν $0<x\le 1$ είναι $0<x^2\le 1\Leftrightarrow 1<x^2+1\le 2\Leftrightarrow 1<f(x)\le 2$ και $0<x^3\le 1\Leftrightarrow 0<g(x)\le 1$, οπότε και πάλι $f(x)>g(x)$.

Έστω ότι η φ έχει δύο ρίζες $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Τότε η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $\varphi'(x)=2x-3x^2$ και $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(1,2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi)=0\Leftrightarrow 2\xi-3\xi^2=0\Leftrightarrow \xi(2-3\xi)=0\Leftrightarrow \xi=0$ απορρίπτεται ή $2-3\xi=0\Leftrightarrow \xi=\frac{2}{3}$ που απορρίπτεται. άρα η h δεν έχει 2 ρίζες στο $(1,+\infty)$ και έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα αυτό. Είναι $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{8}>0$, δηλαδή $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)\varphi(2)<0$ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{3}{2},2\right)$. Όμως η φ έχει μοναδική ρίζα, άρα αυτή βρίσκεται πλησιέστερα στο 2.

δ)



ε) Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x$ και $g'(x)=3x^2$.

Η εφαπτομένη της C_g στο Β είναι η ευθεία

$\varepsilon_1:\ y-g(\rho)=g'(\rho)(x-\rho)\Leftrightarrow y-\rho^3=3\rho^2(x-\rho)\Leftrightarrow y=3\rho^2x-2\rho^3$ (1)

Έστω σημείο $\Gamma(\rho_1,f(\rho_1))$. Η εφαπτομένη της C_f στο Γ είναι η ευθεία

$\varepsilon_2 : y - f(\rho_1) = f'(\rho_1)(x-\rho_1) \Leftrightarrow y - \rho_1^2 - 1 = 2\rho_1(x-\rho_1) \Leftrightarrow y = 2\rho_1 x - \rho_1^2 + 1$

Για να δέχονται οι C_f, C_g κοινή εφαπτομένη πρέπει να υπάρχουν τιμές των ρ, ρ_1 για τις οποίες οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να ταυτίζονται. Αυτό συμβαίνει όταν $\begin{cases} 3\rho^2 = 2\rho_1 \\ -2\rho^3 = -\rho_1^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3\rho^2}{2} = \rho_1 \\ -2\rho^3 = -\left(\dfrac{3\rho^2}{2}\right)^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{3\rho^2}{2} = \rho_1 \\ -2\rho^3 = -\dfrac{9\rho^4}{4} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3\rho^2}{2} = \rho_1 \\ -8\rho^3 = -9\rho^4 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3\rho^2}{2} = \rho_1 \\ 9\rho^4 - 8\rho^3 - 4 = 0 \ \ (3) \end{cases}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = 9x^4 - 8x^3 - 4$, $x \le 0$.

Έστω $x_1 < x_2 \le 0$, τότε $x_1^4 > x_2^4 \Leftrightarrow 9x_1^4 > 9x_2^4$ (4) και

$x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -8x_1^3 > -8x_2^3 \Leftrightarrow -8x_1^3 - 4 > -8x_2^3 - 4$ (5)

Από (4)+(5) $\Rightarrow \varphi(x_1) > \varphi(x_2)$ άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 9x^4 = +\infty$ και $\varphi(0) = -4$.

Επειδή η φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = (-\infty, 0]$ έχει σύνολο τιμών το $\varphi(\Delta) = \left[\varphi(0), \lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)\right) = [-4, +\infty)$. Επειδή $0 \in \varphi(\Delta)$, υπάρχει μοναδικό $\rho \in \Delta$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\rho) = 0$.

Είναι $\varphi(-1) = 13 > 0, \varphi(0) = -4 < 0$. Επειδή $\varphi(-1)\varphi(0) < 0$ ισχύει το θεώρημα Bolzano για την φ στο διάστημα $[-1, 0]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\xi) = 0$.

Επειδή το ξ είναι μοναδικό ,το ξ ταυτίζεται με το ρ άρα το ζητούμενο διάστημα είναι το $(-1, 0)$.

στ) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε $x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

$g(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y$.Αν $y \ge 0$ τότε $x = \sqrt[3]{y}$, ενώ αν $y < 0$ τότε $x = -\sqrt[3]{-y}$, άρα

$g^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, \ y \ge 0 \\ -\sqrt[3]{-y}, \ y < 0 \end{cases}$, οπότε $g^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, \ x \ge 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, \ x < 0 \end{cases}$

ζ) i. $\lim\limits_{x\to0} g(x)\eta\mu\dfrac{1}{g(x)} = \lim\limits_{x\to0}\left(x^3\eta\mu\dfrac{1}{x^3}\right) = 0$ γιατί $\left|x^3\eta\mu\dfrac{1}{x^3}\right| = |x^3|\left|\eta\mu\dfrac{1}{x^3}\right| \le |x^3| \overset{x\ne0}{\Leftrightarrow} -|x^3| \le x^3\eta\mu\dfrac{1}{x^3} \le |x^3|$

$\lim\limits_{x\to0}|x^3| = 0 = \lim\limits_{x\to0}\left(-|x^3|\right) \overset{\text{ΚΠ}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to0}\left(x^3\eta\mu\dfrac{1}{x^3}\right) = 0$

ii. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)+x-2}{\sqrt{x}-1} \overset{\sqrt{x}=u}{=} \lim\limits_{u\to1}\dfrac{u^6+u-2}{u-1} = \lim\limits_{u\to1}\dfrac{\cancel{(u-1)}\left(u^5+u^4+u^3+u^2+u+2\right)}{\cancel{u-1}} = 7$

iii. $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{\pi}}\dfrac{\eta\mu g(x)}{g(x)-\pi} = \lim\limits_{x\to\sqrt[3]{\pi}}\dfrac{\eta\mu\left(\pi - g(x)\right)}{g(x)-\pi} \overset{\pi-g(x)=u}{=} \lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{-u} = -1$

iv. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{g^2(x)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{x^6} = +\infty$

η) $x^5+g(x)+2=f(x)+2x \Leftrightarrow x^5+x^3-x^2-2x+1=0$

$A(x)=x^5+x^3-x^2-2x+1=(x-1)(x+1)(x^3+2x-1)$

Έστω $B(x)=x^3+2x-1,\ x\in[-1,1]$. $B(-1)=-4,\ B(1)=2,\ B(1)B(-1)<0$ και h συνεχής, οπότε από το Θ.Β υπάρχει $x_0\in(-1,1): B(x_0)=0$, τότε και $A(x_0)=0$

θ) Είναι $h(x+2)-h(x)=x^2$ και για $x=0$ είναι $h(2)-h(0)=0 \Leftrightarrow h(2)=h(0)$. Σύμφωνα με το θ.Rolle υπάρχει $\xi_1\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi_1)=0$.