Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020

12ο Διαγώνισμα

30 - 5 - 2020

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$.

μονάδες 5

Α2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

μονάδες 5

Α3. Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

μονάδες 3

Α4. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

μονάδες 4

Α5. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^2(x)-1=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Βρείτε το λάθος στη παρακάτω διαδικασία: $f^2(x)-1=0\Leftrightarrow f^2(x)=1\Leftrightarrow\sqrt{f^2(x)}=\sqrt{1}\Leftrightarrow|f(x)|=1\Leftrightarrow f(x)=\pm1$, άρα $f(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-1,\ x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 4

Α6. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν ορίζεται η σύνθεση της f με την g ($g\circ f$), τότε έχει πεδίο ορισμού το $A_{g\circ f}=f(A)\cap A_g$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε με κατάλληλο παράδειγμα την απάντησή σας στο ερώτημα α..

μονάδες 4

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+1},\ x\in[-1,1]$.

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

Β2. α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\dfrac{1}{4}$ έχει δύο ακριβώς ρίζες μία θετική και μία αρνητική.

μονάδες 3+3

Β3. Να δείξετε ότι υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f έχουν αντίθετες κλίσεις.

μονάδες 5

Β4. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$ τέτοιοι ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}-\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{8}{2\ln 2-1}$.

μονάδες 6

Β5. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{e^{(x^2+1)f(x)}}-1}{\text{συν}\left(\dfrac{x(x^2+1)f(x)}{\ln(x^2+1)}\right)-1}$.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Ο ρυθμός μεταβολής των φορέων ενός ιού, παγκόσμια λόγω επιδημίας, δίνεται σε δεκάδες εκατομμύρια ανά μήνα από τη σχέση $k'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\text{εφ}\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}{\text{συν}\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}$, $0 \le t \le 2\pi$, όπου $t = 0$ είναι η χρονική στιγμή που ξεκινά η μετάδοση του ιού.

Γ1. Να βρείτε πιο χρονικό διάστημα ο ρυθμός μεταβολής των φορέων του ιού είναι θετικός.

μονάδες 7

Γ2. Να βρείτε τη συνάρτηση k της εκτίμησης του πλήθους των φορέων του ιού παγκοσμίως και να αποδείξετε ότι στο τέλος της χρονικής περιόδου ο ιός έχει εξαλειφθεί.

μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε πότε ο αριθμός των φορέων είναι μέγιστος.

μονάδες 7

Γ4. Αν η εκτίμηση για τον αριθμό των φορέων που δεν θα καταφέρουν να αναρρώσουν από τον ιό είναι 1%, να βρείτε πόσοι από τους φορείς του ιού θα καταφέρουν να αναρρώσουν, όταν ο αριθμός των φορέων του ιού είναι μέγιστος. Δίνεται ότι $\sqrt{2} \simeq 1,41$.

μονάδες 4

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(x) = x\ln x - \ln x$ για κάθε $x > 0$.

Δ1. Να βρείτε τους δυνατούς τύπους της f.

μονάδες 5

Έστω ότι $f(x) = \sqrt{(x-1)\ln x}$, $x > 0$

Δ2. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη.

μονάδες 5

Δ3.Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, αν γνωρίζετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = 0$.

μονάδες 6

Δ4.Να δείξετε ότι δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f.

μονάδες 3

Δ5.Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) = 4 - x^2$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

μονάδες 6

Καλή τύχη!

Λύσεις

Θέμα A

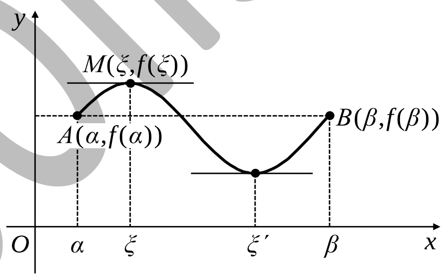
A1. Είναι $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

A2. Αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, ενώ αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως, $y'=\left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'=\dfrac{1}{-x}\cdot\left(-1\right)=\dfrac{1}{x}$ και άρα $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$.

A3. Επειδή $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, αν ένα σημείο $M\left(\alpha,\beta\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο $M'\left(\beta,\alpha\right)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C΄ της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία όμως αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄, δηλαδή την $y=x$.

A4. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $\left(\alpha,\beta\right)$ και $f\left(\alpha\right)=f\left(\beta\right)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο, ώστε: $f'\left(\xi\right)=0$. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M\left(\xi,f\left(\xi\right)\right)$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



A5. Επειδή $f^{2}\left(x\right)=1$ δεν σημαίνει ότι $f\left(x\right)=\pm1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, γιατί μπορεί να είναι
$$f\left(x\right)=\begin{cases}1, & x<3\\ -1, & x\geq 3\end{cases}.$$

A6. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f\left(x\right)=x^{2},\ x\in\left[1,4\right]$ και $g\left(x\right)=x,\ x\in\left[4,16\right]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχει σύνολο τιμών το $f\left(A\right)=\left[f\left(1\right),f\left(4\right)\right]=\left[1,16\right]$.

Για το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ έχουμε :

$$\begin{cases}x\in\left[1,4\right]\\ f\left(x\right)\in\left[4,16\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[1,4\right]\\ 4\leq x^{2}\leq 16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[1,4\right]\\ 2\leq x\leq 4\end{cases}\Rightarrow x\in\left[2,4\right]\text{ άρα } A_{g\circ f}=\left[2,4\right].$$

Όμως $f\left(A\right)\cap A_{g}=\left[4,16\right]\neq A_{g\circ f}$.

Θέμα B

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη με τύπο $f'\left(x\right)=\dfrac{\dfrac{2x}{\cancel{x^{2}+1}}\cdot\cancel{\left(x^{2}+1\right)}-2x\ln\left(x^{2}+1\right)}{\left(x^{2}+1\right)^{2}}=\dfrac{2x\left(1-\ln\left(x^{2}+1\right)\right)}{\left(x^{2}+1\right)^{2}}$.

Έχουμε $1-\ln\left(x^{2}+1\right)\geq 0\Leftrightarrow\ln\left(x^{2}+1\right)\leq 1=\ln e\Leftrightarrow x^{2}+1\leq e\Leftrightarrow$

$x^{2}\leq e-1\Leftrightarrow-\sqrt{e-1}\leq x\leq\sqrt{e-1}$ ισχύει αφού $x\in\left[-1,1\right]$.

x	-1		0		1
$2x$		$-$	0	$+$	
$1-\ln\left(x^2+1\right)$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	O.E	$\nearrow$	

Η f είναι συνεχής σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων στο $\left[-1,1\right]$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-1,0\right]$,γνησίως αύξουσα στο $\left[0,1\right]$ έχει ελάχιστο στο 0 το $f\left(0\right)=0$, μέγιστα στα σημεία -1,1 τα $f\left(-1\right)=f\left(1\right)=\dfrac{\ln 2}{2}$.

B2. α) Θεωρούμε τα διαστήματα $A_1=\left[-1,0\right]$και $A_2=\left(0,1\right]$.

Λόγω της μονοτονίας στα παραπάνω διαστήματα έχουμε :

$$f\left(A_1\right)=\left[f\left(0\right),f\left(-1\right)\right]=\left[0,\frac{\ln 2}{2}\right] \text{ και } f\left(A_2\right)=\left(\lim_{x\to 0^+}f\left(x\right),f\left(1\right)\right]=\left(f\left(0\right),f\left(1\right)\right]=\left(0,\frac{\ln 2}{2}\right]$$

Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $f\left(A\right)=f\left(A_1\right)\cup f\left(A_2\right)=\left[0,\dfrac{\ln 2}{2}\right]$.

β) Ισχύει $\dfrac{1}{4}<\dfrac{\ln 2}{2}\Leftrightarrow 1<2\ln 2\Leftrightarrow \ln e<\ln 4$ και $\dfrac{\ln 2}{2}>0$ άρα το $\dfrac{1}{4}$ ανήκει στα $f\left(A_1\right),f\left(A_2\right)$ οπότε υπάρχουν $x_1\in A_1, x_2\in A_2$ τέτοιοι ώστε $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=\dfrac{1}{4}$.Η f είναι γνησίως μονότονη στα A_1,A_2 άρα και 1-1 οπότε τα x_1,x_2 είναι μοναδικά και η εξίσωση $f\left(x\right)=\dfrac{1}{4}$ έχει δύο ακριβώς ρίζες ,μία αρνητική και μία θετική όπως φαίνεται από τα διαστήματα στα οποία ανήκουν.($f\left(0\right)=0\neq\dfrac{1}{4}$).

B3. Για την f ισχύει το ΘΜΤ στα διαστήματα $\left[-1,0\right]$ και $\left[0,1\right]$ οπότε υπάρχουν $\theta_1\in\left(-1,0\right),\theta_2\in\left(0,1\right)$ τέτοιοι ώστε $f'\left(\theta_1\right)=\dfrac{f\left(0\right)-f\left(-1\right)}{0+1}=-\dfrac{\ln 2}{2}$ και $f'\left(\theta_2\right)=\dfrac{f\left(1\right)-f\left(0\right)}{1-0}=\dfrac{\ln 2}{2}=-f'\left(\theta_1\right)$.

B4. Για την f ισχύει το ΘΜΤ στα διαστήματα $\left[-1,x_2\right],\left[x_2,1\right]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in\left(-1,x_2\right)$, $\xi_2\in\left(x_2,1\right)$ τέτοιοι ώστε $f'\left(\xi_1\right)=\dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(-1\right)}{x_2+1}=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{\ln 2}{2}}{x_2+1}\Leftrightarrow\dfrac{1}{f'\left(\xi_1\right)}=\dfrac{4x_2+4}{1-2\ln 2}$ και

$$f'\left(\xi_2\right)=\frac{f\left(1\right)-f\left(x_2\right)}{1-x_2}=\frac{\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}}{1-x_2}\Leftrightarrow\frac{1}{f'\left(\xi_2\right)}=\frac{-4+4x_2}{1-2\ln 2}.$$

Επομένως $\dfrac{1}{f'\left(\xi_1\right)}-\dfrac{1}{f'\left(\xi_2\right)}=\dfrac{4x_2+4}{2\ln 2-1}-\dfrac{-4+4x_2}{2\ln 2-1}=\dfrac{8}{2\ln 2-1}$

B5. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{e^{\left(x^2+1\right)f\left(x\right)}}-1}{\text{συν}\dfrac{x\cdot\left(x^2+1\right)f\left(x\right)}{\ln\left(x^2+1\right)}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{e^{\frac{\cancel{\left(x^2+1\right)}\ln\left(x^2+1\right)}{\cancel{x^2+1}}}}-1}{\text{συν}\dfrac{x\cdot\cancel{\left(x^2+1\right)}\cdot\cancel{\ln\left(x^2+1\right)}}{\cancel{\left(x^2+1\right)}\cancel{\ln\left(x^2+1\right)}}-1}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{e^{\ln(x^2+1)}}-1}{\sigma\upsilon\nu x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sigma\upsilon\nu x-1}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{(\sigma\upsilon\nu x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\cdot(\sigma\upsilon\nu x+1)}{(\sigma\upsilon\nu^2 x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\cdot(\sigma\upsilon\nu x+1)}{-\eta\mu^2 x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\sqrt{x^2+1}+1}=-1\cdot\frac{2}{2}=-1$$

Θέμα Γ

Γ1. Για $t\in[0,2\pi]$ είναι: $k'(t)>0\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}>0\Leftrightarrow\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}<0\Leftrightarrow$

$$\frac{\eta\mu\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}<0\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{t-\pi}{4}\right)<0\ (1).$$

Θέτουμε $\frac{t-\pi}{4}=y$. Είναι $0\le t\le 2\pi\Leftrightarrow-\pi\le t-\pi\le\pi\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}\le\frac{t-\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}\le y\le\frac{\pi}{4}$.

Η (1) γίνεται: $\eta\mu y<0\overset{y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]}{\Leftrightarrow}-\frac{\pi}{4}\le y<0\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}\le\frac{t-\pi}{4}<0\Leftrightarrow-\pi\le t-\pi<0\Leftrightarrow 0\le t<\pi$

Οπότε για $t\in[0,\pi)$, ο ρυθμός μεταβολής θα είναι θετικός.

2ος τρόπος

Είναι : $k'(t)=0\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}=0\Leftrightarrow\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}=0\Leftrightarrow$

$$\frac{\eta\mu\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}=0\Leftrightarrow\eta\mu\left(\frac{t-\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow\frac{t-\pi}{4}=\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow t=4k\pi+\pi\overset{t\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow}t=\pi.$$

Είναι $\kappa'(2\pi)=-1<0$ οπότε $\kappa'(t)<0$ στο $(\pi,2\pi]$ και $\kappa'(0)=1>0$ οπότε $\kappa'(t)>0$ στο $[0,\pi)$.

Επομένως για $t\in[0,\pi)$, ο ρυθμός μεταβολής θα είναι θετικός.

Γ2. Για $t\in[0,2\pi]$ είναι: $k'(t)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}\Leftrightarrow k'(t)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\eta\mu\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}\Leftrightarrow$

$$k'(t)=\sqrt{2}\cdot\frac{-\frac{1}{4}\eta\mu\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\cdot\frac{\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{t-\pi}{4}\right)\right)'}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}=\left(-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{t-\pi}{4}\right)}\right)'\Leftrightarrow$$

$$k(t) = -\sqrt{2}\cdot\frac{1}{συν\left(\frac{t-\pi}{4}\right)} + c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Τη χρονική στιγμή $t=0$ που αρχίζει η εξάπλωση του ιού είναι

$k(0)=0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\cdot\frac{1}{συν\left(-\frac{\pi}{4}\right)}+c=0 \Leftrightarrow c=2$, άρα $k(t)=2-\frac{\sqrt{2}}{συν\left(\frac{t-\pi}{4}\right)},\quad t\in[0,2\pi]$.

Το τέλος της χρονικής περιόδου είναι $t=2\pi$, οπότε

$k(2\pi)=2-\frac{\sqrt{2}}{συν\left(\frac{2\pi-\pi}{4}\right)}=2-\frac{\sqrt{2}}{συν\frac{\pi}{4}}=2-\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2-2=0$, δηλαδή δεν υπάρχει πλέον φορέας του ιού.

Γ3. Από το Γ1 ερώτημα έχουμε :

Για κάθε $t\in[0,\pi)$ είναι $k'(t)>0$ και επειδή η k είναι συνεχής στο $[0,\pi]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $t\in(\pi,2\pi]$ είναι $k'(t)<0$ και επειδή η k είναι συνεχής στο $[\pi,2\pi]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για $t=\pi$ η k έχει μέγιστο, οπότε μετά από π μήνες εκτιμάται ότι ο αριθμός των φορέων θα είναι μέγιστος.

Γ4. Ο μέγιστος αριθμός φορέων του ιού παγκόσμια, είναι

$k(\pi)=2-\frac{\sqrt{2}}{συν\left(\frac{\pi-\pi}{4}\right)}=2-\sqrt{2}$ δεκάδες εκατομμύρια, οπότε θα αναρρώσει το 99% των φορέων,

δηλαδή το $\frac{99\left(2-\sqrt{2}\right)}{10}=0,99\cdot(2-1,41)=0.99\cdot 0,59\simeq 0,58$ δεκάδες εκατομμύρια ή 5,8 περίπου εκατομμύρια φορείς.

Θέμα Δ

Δ1. $f^2(x)=x\ln x-\ln x=(x-1)\ln x$ (1)

Για κάθε $x>1$ είναι $x-1>0,\ \ln x>0$ άρα $(x-1)\ln x>0$ και για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $x-1<0,\ \ln x<0$ άρα $(x-1)\ln x>0$. Δηλαδή $(x-1)\ln x>0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)=0\Leftrightarrow(x-1)\ln x=0\Leftrightarrow x=1$.

Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι $f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$. Οπότε

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f(x)=\sqrt{(x-1)\ln x}$ ή $f(x)=-\sqrt{(x-1)\ln x}$ και

για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f(x)=\sqrt{(x-1)\ln x}$ ή $f(x)=-\sqrt{(x-1)\ln x}$

$$\text{Άρα } f(x)=\begin{cases}\sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(0,1)\\ 0, & x=1\\ \sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}=\sqrt{(x-1)\ln x},\ x>0 \text{ ή}$$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(0,1)\\ 0 & , x=1\\ -\sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(1,+\infty)\end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x)=\begin{cases}-\sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(0,1)\\ 0 & , x=1\\ \sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(1,+\infty)\end{cases} \quad \text{ή}$$

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(0,1)\\ 0 & , x=1\\ -\sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}=-\sqrt{(x-1)\ln x},\ x>0$$

Δ2. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $t(x)=\sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $t'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, οπότε:

Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\frac{\left[(x-1)\ln x\right]'}{2\sqrt{(x-1)\ln x}}=\frac{\ln x+\frac{x-1}{x}}{2\sqrt{(x-1)\ln x}}=\frac{x\ln x+x-1}{2x\sqrt{(x-1)\ln x}}.$$

Στο $x=1$ είναι $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{(x-1)\ln x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{(x-1)\ln x}}{\sqrt{(x-1)^2}}=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{\frac{\cancel{(x-1)}\ln x}{(x-1)^{\cancel{2}}}}=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{\frac{\ln x}{x-1}}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x,\ x>0$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\varphi'(1)=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\sqrt{\varphi'(1)}=1$ (1)

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{(x-1)\ln x}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{(x-1)\ln x}}{-\sqrt{(x-1)^2}}=\lim_{x\to1^-}\left(-\sqrt{\frac{\cancel{(x-1)}\ln x}{(x-1)^{\cancel{2}}}}\right)=\lim_{x\to1^-}\left(-\sqrt{\frac{\ln x}{x-1}}\right)=$$

$$=-\sqrt{\varphi'(1)}=-1\quad(2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$.

Δ3. Για να βρούμε το πρόσημο της $f'(x)=\frac{x\ln x+x-1}{2x\sqrt{(x-1)\ln x}}$, αρκεί να βρούμε το πρόσημο της παράστασης $x\ln x+x-1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x\ln x+x-1,\ x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\ln x+\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}+1=\ln x+2$

$g'(x)\ge0\Leftrightarrow\ln x+2\ge0\Leftrightarrow\ln x\ge-2\Leftrightarrow x\ge e^{-2}$

Για κάθε $x\in(0,e^{-2})$ είναι $g'(x)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(0,e^{-2}]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x\in(e^{-2},+\infty)$ είναι $g'(x)>0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[e^{-2},+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Παρατηρούμε ότι $g(1)=0$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[e^{-2},+\infty)$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο διάστημα αυτό. Για κάθε $e^{-2}\le x<1\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(x)<g(1)=0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[e^{-2},1]$

Για κάθε $x>1 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(1)=0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x+x-1)=-1$ και

$g(e^{-2})=e^{-2}\ln e^{-2}+e^{-2}-1=-\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e^2}-1=-\frac{1}{e^2}-1<0$.

Στο διάστημα $\Delta=(0,e^{-2})$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta)=\left(-\frac{1}{e^2}-1,-1\right)$, άρα για κάθε $x\in(0,e^{-2})$ είναι $g(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow(0,e^{-2}]$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=e^{-2}$,είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, οπότε έχει ελάχιστο το $f(1)=0$.

Δ4. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$, για κάθε $0<\alpha<\beta<1$ είναι $f(\alpha)>f(\beta)$.

Για κάθε $1<\alpha<\beta \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\alpha)<f(\beta)$. Άρα σε κανένα από τα διαστήματα $(0,1)$, $(1,+\infty)$ δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f. Αν τώρα επιλέξουμε $\alpha\in(0,1)$ και $\beta\in(1,+\infty)$, τότε επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1, δεν θα είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), οπότε και πάλι δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f.

Δ5. $f^2(x)=4-x^2$

Αν $4-x^2<0 \Leftrightarrow x^2>4 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>2$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν $4-x^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2\le 4 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0<x\le 2$, έχουμε:

$f^2(x)=4-x^2 \Leftrightarrow (x-1)\ln x=4-x^2 \Leftrightarrow (x-1)\ln x+x^2-4=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=(x-1)\ln x+x^2-4,\ x\in(0,2]$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,4)$ με $h'(x)=\ln x+(x-1)\frac{1}{x}+2x=\ln x+1-\frac{1}{x}+2x$ και

$h''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+2>0 \Rightarrow h'\nearrow(0,2]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} h'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x+1-\frac{1}{x}+2x\right)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 2^-} h'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\ln x+1-\frac{1}{x}+2x\right)=\ln 2+1-\frac{1}{2}+4=\ln 2+\frac{9}{2}>0$

Η h' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει σύνολο τιμών το $h'((0,2))=\left(-\infty,\ln 2+\frac{9}{2}\right)$.

Επειδή το μηδέν περιέχεται στο σύνολο τιμών της h', υπάρχει μοναδικό $\rho\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $h'(\rho)=0$.

Για κάθε $0<x<\rho \Rightarrow h'(x)<h'(\rho)=0 \Rightarrow h\searrow(0,\rho]$ και για κάθε

$\rho<x<2 \Rightarrow h'(x)>h'(\rho)=0 \Rightarrow h\nearrow[\rho,2]$. Η h έχει ελάχιστο στο ρ.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x+x^2-4\right]=-1(-\infty)+0-4=+\infty$ και $h(2)=\ln 2>0$.

Θα αναζητήσουμε τώρα το πρόσημο του ελαχίστου.

Είναι $h'(1)=2>0$, και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} h'(x)=-\infty$, στο διάστημα $(0,1)$ είναι $h'((0,1))=(-\infty,2)$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο $(-\infty,2)$, η h' έχει ρίζα στο $(0,1)$. Όμως το ρ είναι η μοναδική της ρίζα, άρα $\rho\in(0,1)$. Είναι $h(1)=-3<0$ και $\rho<1 \overset{h\nearrow[\rho,4]}{\Leftrightarrow} h(\rho)<h(1)<0$.

Στο διάστημα $\Delta_1 = (0,\rho)$ η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $h(\Delta_1) = (h(\rho), +\infty)$. Επειδή $0 \in h(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $h(x_1) = 0$.
Στο διάστημα $\Delta_2 = (0,2)$ η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $h(\Delta_2) = (h(\rho), \ln 2)$. Επειδή $0 \in h(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $h(x_2) = 0$.
Τελικά η h έχει ακριβώς δύο ρίζες.