53η Επαναληπτική

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(x)=2xf(x)+9$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=3$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ x\in\mathbb{R}$.

2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\sqrt{x^2+9}=\lambda-x,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

4. Να λύσετε την ανίσωση $x+\sqrt{x^2+9}+\sqrt{\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)^2+9}<9$.

5. Υλικό σημείο $M(x,y)$, $x>0$ κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1cm/sec. Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή t_0 που διέρχεται από το σημείο $A(4,9)$.

6. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

7. Θεωρούμε τα σημεία $A\left(x,f^{-1}(x)\right)$, $B\left(f^{-1}(x),x\right)$, $x>0$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα. Να βρείτε για ποια τιμή του $x\in\mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων Α, Β γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

8. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x^2)}{f^2(x)-\eta\mu^2 f(x)}$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

1. $f^2(x)=2xf(x)+9 \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+9 \Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)^2=x^2+9$ (1)

Επειδή $x^2+9>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $g(x)=f(x)-x\neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $g(0)=f(0)=3>0$, είναι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η (1) γίνεται:

$f(x)-x=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ x\in\mathbb{R}$.

2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+9}}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$x^2<x^2+9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}<\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow |x|<\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2+9}<x<\sqrt{x^2+9} \Rightarrow x+\sqrt{x^2+9}>0 \Leftrightarrow f(x)>0$

άρα $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

3. $\sqrt{x^2+9}=\lambda-x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}+x=\lambda \Leftrightarrow f(x)=\lambda$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x^2-9}{x-\sqrt{x^2+9}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-9}{x+x\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-9}{x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}\right)}=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=+\infty+\infty=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$.

- Αν $\lambda\le 0$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda>0$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

4. $x+\sqrt{x^2+9}+\sqrt{\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)^2+9}<9 \Leftrightarrow f(x)+\sqrt{f^2(x)+9}<9 \Leftrightarrow f\left(f(x)\right)<f(4) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<4 \Leftrightarrow$

$x+\sqrt{x^2+9}<4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}<4-x$ (2)

Αν $4-x<0 \Leftrightarrow x>4$ τότε η (2) είναι αδύνατη.

Αν $4-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 4$ η (2) γίνεται:

$\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2<(4-x)^2 \Leftrightarrow x^2+9<16-8x+x^2 \Leftrightarrow 8x<7 \Leftrightarrow x<\dfrac{7}{8}$ που είναι δεκτές τιμές.

5. Είναι $M\left(x(t),y(t)\right)$, όπου $y(t)=x(t)+\sqrt{x^2(t)+9}$.

Είναι $x'(t)=1$ και $y'(t)=x'(t)+\dfrac{x(t)x'(t)}{\sqrt{x^2(t)+9}}$.

Είναι $(OM)(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$, οπότε $(OM)'(t)=\dfrac{\cancel{2}x'(t)x(t)+\cancel{2}y(t)y'(t)}{\cancel{2}\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$.

Τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $x(t_0)=4$, $y(t_0)=9$ είναι:

$$(OM)'(t_0)=\frac{x'(t_0)x(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=\frac{1\cdot 4+9\left(1+\dfrac{4\cdot 1}{\sqrt{16+9}}\right)}{\sqrt{16+81}}=\frac{101}{5\sqrt{97}}\,cm/sec$$

6. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+9}=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}=y-x$ (3)

Είναι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}>x \Leftrightarrow y-x>0$ οπότε η (3) γίνεται:

$$x^2+9=(y-x)^2 \Leftrightarrow x^2+9=y^2-2xy+x^2 \Leftrightarrow 2xy=y^2-9 \Leftrightarrow x=\frac{y^2-9}{2y}, \text{ άρα } f^{-1}(y)=\frac{y^2-9}{2y},\ y\in(0,+\infty)$$

οπότε $f^{-1}(x)=\frac{x^2-9}{2x},\ x\in(0,+\infty)$.

7. $(AB)=\sqrt{\left(x-f^{-1}(x)\right)^2+\left(f^{-1}(x)-x\right)^2}=\sqrt{2\left(x-f^{-1}(x)\right)^2}=\sqrt{2}\left|x-f^{-1}(x)\right|$.

Επειδή $f(x)>x$ η C_f βρίσκεται πάνω από την $y=x$ και λόγω συμμετρίας η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $y=x$. Άρα $(AB)=2\left(x-f^{-1}(x)\right)=\sqrt{2}\left(x-\frac{x^2-9}{2x}\right)=\sqrt{2}\frac{2x^2-x^2+9}{2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x^2+9}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{9}{x}\right)$.

Είναι $(AB)'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)=\frac{x^2-9}{\sqrt{2}x^2}$.

Για κάθε $x\in(0,3)$ είναι $(AB)'(x)<0 \Rightarrow (AB)\searrow(0,3]$ και για κάθε $x>3$ είναι $(AB)'(x)>0 \Rightarrow (AB)\nearrow[3,+\infty)$. Η απόσταση AB γίνεται ελάχιστη για $x=3$ με ελάχιστη απόσταση την $(AB)=\frac{3+\frac{9}{3}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$.

8. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x^2\right) \overset{x^2=y}{\underset{y\to+\infty}{=}} \lim\limits_{y\to+\infty} f(y)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f^2(x)-\eta\mu^2 f(x)\right)=0 \overset{u=f(x)}{\underset{u\to0^+}{=}} \lim\limits_{x\to0^+}\left(u^2-\eta\mu^2 u\right)=0$ και επειδή $\left|\eta\mu f(x)\right|<\left|f(x)\right| \Leftrightarrow \eta\mu^2 f(x)<f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x)-\eta\mu^2 f(x)>0$, είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x^2\right)}{f^2(x)-\eta\mu^2 f(x)}=\lim_{x\to-\infty}\left[f\left(x^2\right)\cdot\frac{1}{f^2(x)-\eta\mu^2 f(x)}\right]=+\infty(+\infty)=+\infty$$