34η Άσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g: $(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ όπου g παραγωγίσιμη με $g'(x)=\frac{g(x)}{x}+2$ για κάθε $x>0$, f συνεχής με $f^2(x)=\ln^4 x+2\ln^2 x+1$ για κάθε $x>0$, $f(1)=1$ και $g(1)=0$.

1. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln^2 x+1,\ x>0$

2. Να δείξετε ότι $g(x)=2x\ln x,\ x>0$.

3. Να δείξετε ότι $\kappa^{\kappa}\cdot\lambda^{\lambda}\ge e^{-\frac{2}{e}}$ για κάθε $\kappa,\lambda>0$.

4. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

5.Να δείξετε ότι $x\ln x\ge x-1$ για κάθε $x>0$.

6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2\ln x-3x^2+4x-1=0$ έχει μοναδική ρίζα.

7. Δίνεται το ολοκλήρωμα $I_\nu=\int_1^e (f(x)-1)^{\frac{\nu}{2}}dx,\ \nu\in\mathbb{N},\ \nu\ge1$.

α) Να δείξετε ότι $I_\nu=e-\nu I_{\nu-1}$.

β) Να υπολογίσετε το I_3 .

8. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g και τις ευθείες $x=e$, $x=e^2$.

9.Να δείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx<\int_1^e \frac{g(x)}{x}dx+1$.

10. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα μεγαλύτερη του 1.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

1. $f^2(x)=\ln^4 x+2\ln^2 x+1 \Leftrightarrow f^2(x)=(\ln^2 x+1)^2$. Επειδή $(\ln^2 x+1)^2>0$ για κάθε $x>0$, είναι $f^2(x)>0 \Leftrightarrow f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

Επειδή $f(1)=1>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, άρα $f(x)=\ln^2 x+1,\ x>0$.

2. $g'(x)=\frac{g(x)}{x}+2 \Leftrightarrow xg'(x)=g(x)+2x \Leftrightarrow xg'(x)-g(x)=2x \Leftrightarrow \frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}=\frac{2}{x} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{g(x)}{x}\right)'=(2\ln x)' \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x}=2\ln x+c \Leftrightarrow g(x)=2x\ln x+cx,\ x>0, c\in\mathbb{R}$.

$g(1)=0 \Leftrightarrow c=0$ άρα $g(x)=2x\ln x$.

3. $\kappa^\kappa\cdot\lambda^\lambda\geq e^{-\frac{2}{e}} \Leftrightarrow \ln(\kappa^\kappa\cdot\lambda^\lambda)\geq \ln e^{-\frac{2}{e}} \Leftrightarrow \ln\kappa^\kappa+\ln\lambda^\lambda\geq -\frac{2}{e} \Leftrightarrow \kappa\ln\kappa+\lambda\ln\lambda\geq -\frac{2}{e} \Leftrightarrow$

$2\kappa\ln\kappa+2\lambda\ln\lambda\geq -\frac{4}{e} \Leftrightarrow g(\kappa)+g(\lambda)\geq -\frac{4}{e}$.

Είναι $g'(x)=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}=2(\ln x+1)$.

$g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2(\ln x+1)\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq -1 \Leftrightarrow x\geq e^{-1}$.

Για κάθε $x\in(0,e^{-1})$ είναι $g'(x)<0 \Rightarrow g\searrow(0,e^{-1}]$ και για κάθε $x>e^{-1}$ είναι $g'(x)>0 \Rightarrow g\nearrow[e^{-1},+\infty)$.

Η g έχει ελάχιστο το $g(e^{-1})=2e^{-1}\ln e^{-1}=-\frac{2}{e}$, οπότε $g(x)\geq -\frac{2}{e}$ για κάθε $x>0$.

Είναι $g(\kappa)\geq -\frac{2}{e},\ g(\lambda)\geq -\frac{2}{e}$ και με πρόσθεση κατά μέλη $g(\kappa)+g(\lambda)\geq -\frac{4}{e}$.

4. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \ln^2 x+1=2x\ln x \Leftrightarrow \ln^2 x-2x\ln x+1=0$

Έστω $h(x)=\ln^2 x-2x\ln x+1,\ x\in(0,+\infty)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$h'(x)=2\ln x(\ln x)'-\left(2\ln x+2x\frac{1}{x}\right)+1=2\frac{\ln x}{x}-2\ln x-1=2\frac{\ln x}{x}-2\ln x-1$

και $h''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{2}{x}=2\frac{1-\ln x-x}{x^2}$.

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f'' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $1-\ln x-x$.

Έστω $\varphi(x)=1-\ln x-x$, $x\in(0,+\infty)$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$\varphi'(x)=-\frac{1}{x}-1$. Είναι $\varphi'(x)<0$ άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $\varphi(1)=0$. Για κάθε $x>1$ είναι $\varphi(x)<\varphi(1)=0$, άρα $h''(x)<0$ και η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Άρα $h'(x)<h'(1)=-1<0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Για κάθε $0<x<1$ είναι $\varphi(x)>\varphi(1)=0$, άρα $h''(x)>0$ και η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$. Άρα $h'(x)<h'(1)=-1<0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.Επειδή η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln^2 x-2x\ln x+1)=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln^2 x=+\infty$ και

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0 .$$

Ακόμη $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\ln^2 x}{x} - 2\ln x + \frac{1}{x}\right)\right] = -\infty$, γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$$

Για το σύνολο τιμών της h έχουμε: $h\left((0,+\infty)\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} h(x), \lim_{x\to0^+} h(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$.

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της h και η h είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0$.

5. $x\ln x \ge x - 1 \Leftrightarrow 2x\ln x \ge 2x - 2 \Leftrightarrow g(x) \ge 2x - 2$. Είναι $g'(x) = 2\ln x + 2$ και $g'(1) = 2$.

Η εφαπτομένη της C_g στο $x = 1$ είναι η ευθεία $y - g(1) = g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$.

Είναι $g''(x) = \frac{2}{x} > 0 \Rightarrow g \cup (0,+\infty)$. Επειδή η g είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $g(x) \ge 2x - 2$.

6. Έστω $t(x) = 2x^2\ln x - 3x^2 + 4x - 1$, $x > 0$. Η t είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$t'(x) = 4x\ln x + 2x - 6x + 4 = 4x\ln x - 4x + 4 = 4(x\ln x - x + 1)$

Για κάθε $x \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι $t'(x) > 0$ και επειδή η t είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $\lim_{x\to0^+} x^2\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$, οπότε

$\lim_{x\to0^+} t(x) = \lim_{x\to0^+}\left(2x^2\ln x - 3x^2 + 4x - 1\right) = -1$, $\lim_{x\to+\infty} t(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(2\ln x - 3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\right] = +\infty$.

Για το σύνολο τιμών της t έχουμε: $t(A) = \left(\lim_{x\to0^+} t(x), \lim_{x\to+\infty} t(x)\right) = (-1,+\infty)$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της t και η t είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, η εξίσωση $t(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

7.α) $I_\nu = \int_1^e \left(f(x) - 1\right)^{\frac{\nu}{2}} dx = \int_1^e \left(\ln^2 x + 1 - 1\right)^{\frac{\nu}{2}} dx = \int_1^e \ln^\nu x\,dx = \int_1^e \ln^\nu x \cdot (x)'\,dx =$

$\left[x\ln^\nu x\right]_1^e - \int_1^e \cancel{x}\cdot\nu\ln^{\nu-1}x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx = e - \nu\int_1^e \ln^{\nu-1}x\,dx = e - \nu I_{\nu-1}$

β) Για $\nu = 3$ είναι: $I_3 = e - 3I_2$

Για $\nu = 2$ είναι: $I_2 = e - 3I_1 = e - 3$ και $I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e-3) = e - 3e + 9 = -2e + 9$.

($I_1 = \int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e x'\ln x\,dx = \left[x\ln x\right]_1^e - \int_1^e dx = e - \left[x\right]_1^e = e - e + 1 = 1.$)

8. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $E = \int_1^e \left|f(x) - g(x)\right| dx = \int_1^e \left|h(x)\right| dx$.

Για κάθε $e \le x \le e^2 \overset{h\searrow}{\Leftrightarrow} h(e) \ge h(x) \ge h(e^2) \Leftrightarrow 2 - 2e \ge h(x) \ge 5 - 4e^2$ άρα $h(x) < 0$, οπότε:

$E = -\int_e^{e^2} h(x)dx = -\int_e^{e^2}\left(\ln^2 x - 2x\ln x + 1\right)dx = -\int_e^{e^2}\ln^2 x\,dx + \int_e^{e^2} 2x\ln x\,dx - \left[x\right]_e^{e^2} =$

$$= -\int_e^{e^2} (x)' \ln^2 x dx + \int_e^{e^2} (x^2)' \ln x dx - e^2 + e = -\left[x\ln^2 x\right]_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \cancel{x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx + \left[x^2 \ln^2 x\right]_e^{e^2} -$$

$$-\int_e^{e^2} x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx - e^2 + e = -4e^2 + e + 2\int_e^{e^2} (x)' \ln x dx + 4e^4 - e^2 - [x]_e^{e^2} - e^2 + e =$$

$$= 4e^4 - 7e^2 + 3e + 2[x\ln x]_e^{e^2} - 2\int_e^{e^2} \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx = 4e^4 - 7e^2 + 3e + 4e^2 - 2e - 2[x]_e^{e^2} =$$

$$= 4e^4 - 5e^2 + 3e$$

9. Για κάθε $x \ge 1 \overset{h\searrow}{\Leftrightarrow} h(x) \le h(1) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \le 1 \Leftrightarrow f(x) \le g(x) + 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \le \frac{g(x)}{x} + \frac{1}{x}$.

Επειδή η ισότητα στη τελευταία σχέση ισχύει μόνο για $x = 1$, έχουμε: $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx < \int_1^e \left(\frac{g(x)}{x} + \frac{1}{x}\right) dx \Leftrightarrow$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx < \int_1^e \frac{g(x)}{x} dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx < \int_1^e \frac{g(x)}{x} dx + [\ln x]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx < \int_1^e \frac{g(x)}{x} dx + 1$$

10. $g(x) = e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2x\ln x - e^{\frac{1}{x}} = 0$.

Έστω $\alpha(x) = 2x\ln x - e^{\frac{1}{x}}$, $x \in [1, +\infty)$.

Είναι $\alpha(1) = -e < 0$ και $\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x\ln x - e^{\frac{1}{x}}\right) = +\infty - 1 = +\infty$ άρα υπάρχει $\beta > 1$ τέτοιο ώστε $\alpha(\beta) > 0$. Επειδή $\alpha(1)\alpha(\beta) < 0$ και η α είναι συνεχής στο $[1, \beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θ.Bolzano, η εξίσωση $\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\ln x = e^{\frac{1}{x}}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, \beta)$.