Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2020 - 2021


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

11ο Διαγώνισμα

4-5-2021

Θέμα Α

Α1. α) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $\left(x^{-\nu}\right)'=-\nu x^{-\nu-1}$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

μονάδες 3+4

Α2. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ και ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα της f στο Δ;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν μια f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, τότε $f'(x)>0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=1$

β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), αν $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

μονάδες 6

Α5. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|x^3-x^2-1\right|-x^3+x^2}{x^2}$ είναι ίσο με:

Α. $+\infty$ Β. $-\infty$ Γ. 1 Δ. -1 Ε. 0

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}+1$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο:

Α) η g είναι συνεχής στο 2

Β) η f είναι συνεχής στο 1

Γ) η g έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

Δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

μονάδες 4

Θέμα Β

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-\eta\mu x-1}{x}=\lambda\in[0,+\infty)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$.

μονάδες 4

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln f(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

μονάδες 5

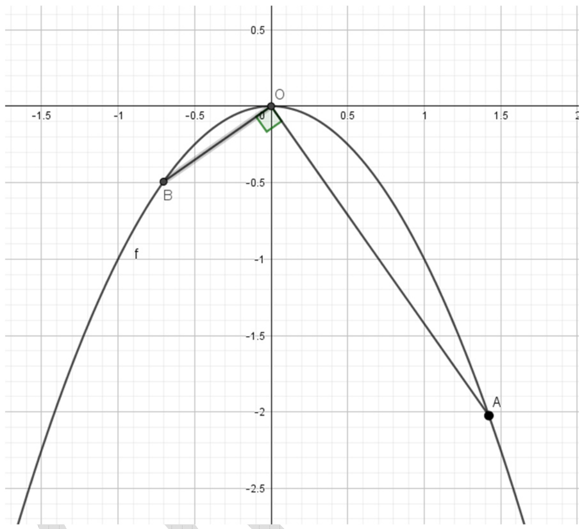
Β4. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(0,1) σχηματίζει με τον άξονα x΄x οξεία γωνία τουλάχιστον 45°. μονάδες 5

Β5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{συνx}{x}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ και το σημείο της $Α\left(α,-α^2\right)$, $α>0$. Θεωρούμε και ένα σημείο Β της γραφικής παράστασης της f με αρνητική τετμημένη τέτοιο ώστε $ΟΑ\perp ΟΒ$.



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ συναρτήσει του α δίνεται από την συνάρτηση

$$Ε(α)=\frac{α^2+1}{2α},\ α>0\ .$$

μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν του ΟΑΒ παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ποια είναι αυτή.

μονάδες 5

Γ3. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Α είναι $4t\frac{cm}{sec}$, όπου $t\geq 0$ και το σημείο Α τη χρονική στιγμή 0 έχει τετμημένη $\frac{1}{2}$, τότε:

α) να βρείτε πότε το σημείο Α βρίσκεται στη θέση που το εμβαδόν του ΟΑΒ παίρνει την ελάχιστη τιμή του.

μονάδες 5

β) να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ την παραπάνω χρονική στιγμή.

μονάδες 3

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{α\to 1}\left(e^{\frac{1}{1-Ε(α)}}\cdot ημ\left(\frac{1}{Ε(α)-1}\right)\right)$, όπου Ε(α) η συνάρτηση του ερωτήματος Γ1.

μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4(1-x)^4$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f\left(e^x-x-1\right)=0$, $x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=\frac{1}{2}$, δηλαδή $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο εφαπτομένες της C_f παράλληλες στην χορδή ΟΑ, όπου Ο(0,0) και $Α\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

μονάδες 2+6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x^4+(1-x)^4$ δεν μπορεί να έχει πραγματικές ρίζες αν τα x^4 και $(1-x)^4$ είναι φυσικοί αριθμοί.

μονάδες 7

Καλή Τύχη!