Τράπεζα 20-1

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

2.22518

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και τυχαίο σημείο Ο. Αν $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+5\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OB}=-\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+4\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}+6\vec{\gamma}$, τότε:

α) να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$.
Μονάδες 13

β) να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Μονάδες 12

4.22561

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$. Θεωρούμε σημεία Ε,Ζ στην ΑΔ και τη διαγώνιο ΑΓ αντίστοιχα, ώστε $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AZ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{AZ}=\frac{1}{4}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$ Μονάδες 8

β) $\overrightarrow{EZ}=\frac{1}{4}\left(\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}\right)$ και να υπολογίσετε με τη βοήθεια των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ το $\overrightarrow{EB}$. Μονάδες 12

γ) τα σημεία Ε,Ζ,Β είναι συνευθειακά. Μονάδες 5

Συντεταγμένες διανύσματος

2.22530

Θεωρούμε τα σημεία Α,Β,Γ ώστε $\overrightarrow{AB}=(-1,4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,6)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο και να βρείτε αν η γωνία Α του τριγώνου είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία. Μονάδες 15

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου. Μονάδες 10

Εσωτερικό γινόμενο

2.22505

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, $\vec{v}=5\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{u}\perp\vec{v}$ και $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}$. Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}-3\vec{v}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{u}-3\vec{v}|=14$.
Μονάδες 13

2.22517

Έστω δυο διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\beta}=\left(\frac{1}{7},1\right)$ και

$\vec{\alpha}+7\vec{\beta}=(\mu+2,7-2\mu),\ \mu\in\mathbb{R}$.

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως συνάρτηση του μ. Μονάδες 10
β) Αν μ=2, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=(3,-4)$ και ότι το $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}+7\vec{\beta}$. Μονάδες 10

ii. να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ Μονάδες 5

2.22524
Έστω $\vec{\alpha}=(2,-3)$ και $\vec{\beta}=(-5,1)$ δύο διανύσματα.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και να απλοποιήσετε την παράσταση $\dfrac{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}{\sqrt{-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}}$. Μονάδες 13

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$. Μονάδες 12

2.22527
α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=2|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\beta}|^2$.
Μονάδες 12
β) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με τη μονάδα και $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$. Αν η διαγώνιος του ΑΓ έχει μήκος $\sqrt{3}$, να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ. Μονάδες 13

Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα

2.20050
Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,7)$ και $\vec{\beta}=(2,4)$.
α) Να βρεθεί η προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$. Μονάδες 10
β) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$. Μονάδες 15

Εξίσωση ευθείας

2.22517
Θεωρούμε τα σημεία Α(6, μ) και Β(μ+2, μ+1), $\mu\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$, τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα Α και Β. Μονάδες 15
β) Να βρείτε για ποια τιμή του μ , το σημείο Γ(4, 2) περιέχεται στην ευθεία ΑΒ. Μονάδες 10

4.22563
Θεωρούμε το σημείο Μ(-3, -2) και ευθεία που διέρχεται από το Μ και τέμνει τους αρνητικούς ημιάξονες στα σημεία Α, Β.
α) Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας είναι αρνητικός. Μονάδες 10
β) Έστω Ε(λ) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

i. Να αποδείξετε ότι $E(\lambda)\geq 12$ για κάθε $\lambda<0$. Μονάδες 10

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει με τους ημιάξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν. Μονάδες 5

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

2.22520
Έστω Α(-1, 1), Β (2, 0) και Γ(-1, 3) τρία σημεία του επιπέδου.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x, y) ώστε:
$3\overrightarrow{AM}^2 - 5\overrightarrow{BM}^2 + 2\overrightarrow{\Gamma M}^2 = 0$ είναι η ευθεία ε: 5x-3y+1=0. Μονάδες 15
β) Να βρείτε ευθεία κάθετη στην (ε) που διέρχεται από το μέσο Κ του τμήματος ΑΓ.
Μονάδες 10

2.22531

Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda-1)x+(18-11\lambda)y+9\lambda-17=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, (1)

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, παριστάνει ευθεία. Μονάδες 10
β) Αν (ε_1), (ε_2) είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για λ=1, λ=2 αντίστοιχα, να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν. Μονάδες 15

2.22525

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι πλευρές του ΑΒ και ΑΔ βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις ε_1: $2x+y+2=0$ και ε_2: $x-2y+6=0$ αντίστοιχα. Αν το κέντρο του είναι το σημείο Κ(-1, -2), τότε:
α) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α και να αποδείξετε ότι Γ(0, -6). Μονάδες 12
β) να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΓΔ και τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.
Μονάδες 13

4.22562

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2t+6,0)$, $B(0,4t-2)$, $t\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ. Μονάδες 5
β) Να δείξετε ότι το Μ κινείται σε ευθεία την οποία να προσδιορίσετε. Μονάδες 10
γ) Αν (ΑΒ)=d, να αποδείξετε ότι $d^2\geq 20$ και κατόπιν να βρείτε τα Α, Β ώστε η απόσταση (ΑΒ) να είναι ελάχιστη. Μονάδες 10

4.22564

Θεωρούμε τις εξισώσεις $\varepsilon_\lambda:(\lambda-1)x+(\lambda-2)y-\lambda+3=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι καθεμιά από τις (ε_λ) παριστάνει ευθεία και κατόπιν ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο. Μονάδες 10
β) Έστω $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq 2$. Αν η (ε_λ) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α(α, 0) και Β(0, β) αντίστοιχα, τότε:
i. να εκφράσετε τα α, β συναρτήσει του λ. Μονάδες 5
ii. να βρείτε την ευθεία της παραπάνω μορφής ώστε να ισχύει $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=2$. Μονάδες 10

4.22565

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+2(xy-2x-2y)+3=0$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει δυο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους. Μονάδες 8
Έστω $\varepsilon_1: x+y=1$ και $\varepsilon_2:\ x+y=3$ οι δυο ευθείες.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζεται από τους άξονες και τις ευθείες. Μονάδες 7
γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή Ο και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Α, Β ώστε (ΑΒ)=2. Μονάδες 10

Αποσταση σημείου από ευθεία – Εμβαδόν τριγώνου

2.22506

Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$, όπου $\alpha\beta>0$ και $\alpha\neq\beta$.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΒ: $y=-\frac{\beta}{\alpha}x+\beta$. Μονάδες 7

β) Αν ε είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(\alpha,\beta)$ και είναι κάθετη προς την ευθεία ΑΒ , τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ε. Μονάδες 9

ii) αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Κ και τον άξονα y΄y στο σημείο Λ , να αποδείξετε ότι $(OK\Lambda)=\frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{2\alpha\beta}$,όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων. Μονάδες 9

2.22521

Θεωρούμε τα σημεία Α(λ+1, 2λ), Β(2-λ, 4) και Γ(-1, 2), $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό λ, τα σημεία σχηματίζουν τρίγωνο. Μονάδες 10

β) Έστω ότι για το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει (ΑΒΓ)=3.

i. Να αποδείξετε ότι λ=1 ή λ=2. Μονάδες 10

ii. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\Gamma A}, \overrightarrow{\Gamma B}$ όταν λ=1. Μονάδες 5

2.22522

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε την ευθεία ε : $y=x+1$ και τα σημεία Α(2, 0) και Β(6, - 3) .

α) Να προσδιορίσετε σημείο Γ της ευθείας ε ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ. Μονάδες 15

β) Έστω Γ(1, 12) . Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 10

2.22523

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνω Οxy θεωρούμε την ευθεία ε: $y=x+\kappa-1$, όπου κ θετικός ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας.

α) Να βρείτε με τη βοήθεια του κ, τα σημεία τομής Α, Β της ευθείας με τους άξονες x΄x, y΄y και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ. Μονάδες 13

β) Αν ισχύει (ΟΑΒ) < 2 να αποδείξετε ότι κ=2. Μονάδες 12

2.22529

Θεωρούμε την ευθεία ε: $3x-4y+2=0$ και το σημείο Α(-2, 1).

α) Να αποδείξετε ότι το Α δεν ανήκει στην (ε) και να βρείτε την απόστασή του από αυτή. Μονάδες 10

β) Να βρείτε όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες στην (ε) και απέχουν από το Α απόσταση ίση με 3 μονάδες. Μονάδες 15

2.22532

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο οποίο απεικονίζεται ο χάρτης του νομού Αρκαδίας. Τα χωριά Δόξα (Δ), Λευκοχώρι (Λ) και Κακουρέϊκα (Κ) έχουν αντίστοιχες συντεταγμένες Δ(-2, 2), Λ(2, -1) και Κ(-1, -10).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα χωριά Δόξα (Δ) και Λευκοχώρι (Λ). Μονάδες 8

β) Να βρείτε την απόσταση του Κ από την ευθεία (ε). Μονάδες 8

γ) Να εξετάσετε, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, ποιο από τα χωριά Δόξα και Λευκοχώρι απέχει τη μικρότερη απόσταση από τα Κακουρέϊκα. Μονάδες 9

2.22537

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τα σημεία Α(λ-1, λ+2) και Β(μ+3, μ), λ, μ $\in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β κινούνται στις ευθείες $\varepsilon_1 : y = x + 3$ και $\varepsilon_2 : y = x - 3$ αντίστοιχα. Μονάδες 12

β) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών ε_1, ε_2. Μονάδες 13

2.22538

Δίνονται τα σημεία Α(0,2), Β(1,5) και Γ(t–1, 3t–2), t $\in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ. Μονάδες 7

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ΑΒ καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ανεξάρτητα του t. Μονάδες 18

4.22568

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τα σημεία Μ(x, y), Α(-1, 3) και Β(2, -1) ώστε να σχηματίζουν τρίγωνο με εμβαδόν (ΜΑΒ)=4.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι δυο ευθείες ε_1, ε_2 παράλληλες μεταξύ τους. Μονάδες 8

β) Να βρείτε την απόσταση των ε_1, ε_2. Μονάδες 5

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα Α, Β είναι η μεσοπαράλληλη των ε_1, ε_2. Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό; Μονάδες 12

4.22571

Δίνονται τα σημεία Α(1, 2), Β(-3, 4) και Γ(2λ+1, 1-λ), λ $\in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερό. Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ κινείται σε ευθεία παράλληλη στην ΑΒ. Μονάδες 6

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΒΓ. Μονάδες 7

4.22577

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τις ευθείες

$\varepsilon_\lambda : x + (\lambda + 2)y - \lambda + 1 = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο Μ. Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι $d(O, \varepsilon_1) \le \sqrt{10}$ Μονάδες 8

γ) Να βρείτε ποια από τις ευθείες της παραπάνω μορφής απέχει την μέγιστη απόσταση από το Ο. Μονάδες 10

4.22588

Θεωρούμε τα σημεία Α(2, 2), Β(-1, 0) και Γ(0, 2).

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x, y) ώστε $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 - 2\overrightarrow{\Gamma M}^2 = 3$ είναι η ευθεία ε: $x - 2y + 1 = 0$. Μονάδες 10

β) Να βρείτε:

i. Σημείο Κ στον άξονα x΄x ώστε το συμμετρικό του ως προς την ευθεία του ερωτήματος α) να είναι σημείο Λ του άξονα y΄y. Μονάδες 10

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΣ όπου Σ είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y΄y. Μονάδες 5

4.18623

Δίνονται τα σημεία Α(3,4) , Β(5,7) και Γ (2μ +1,3μ −2) , όπου μ $\in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α , Β και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ. Μονάδες 8
β) Να αποδείξετε ότι:
i) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δεν εξαρτάται από το μ. Μονάδες 5
ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε , της οποίας να βρείτε την εξίσωση. Μονάδες 7
γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ; Μονάδες 5

Κύκλος

2.22507

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0,-5)$ και ακτίνα ρ = 3. Μονάδες 12
β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του παραπάνω κύκλου. Μονάδες 13

2.22508

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε κύκλο που διέρχεται από το σημείο και έχει κέντρο το $K(4,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι $C:(x-4)^2+(y-8)^2=5$,και έπειτα να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Ο και Κ . Μονάδες 13
β) Από τα σημεία του κύκλου C να βρείτε τις συντεταγμένες:
i) του σημείου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. Μονάδες 6
ii) του σημείου που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. Μονάδες 6

2.22533

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία Α(x, y), Β(3, 2) και Γ(1, 0) . Αν τα σημεία αυτά σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη ΒΓ, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι το Α κινείται στον κύκλο $C:(x-2)^2+(y-1)^2=2$. Μονάδες 13
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Α, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι και ισοσκελές. Μονάδες 12

2.22534

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία Κ(2, - 1) και Α(-6, 5) .
α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο Κ που διέρχεται από το Α, έχει εξίσωση
$C:(x-2)^2+(y+1)^2=100$ Μονάδες 12
β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο C στο σημείο Α και έχει ακτίνα ίση με το μισό της ακτίνας του C. Μονάδες 13

2.22536

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία Α(1, 0), Β(3, - 2) και την ευθεία ε : $x+y+1=0$.Να βρείτε:
α) Την εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος ΑΒ. Μονάδες 10
β) Την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και έχει το κέντρο του στην ευθεία ε. Μονάδες 15

4.22557

Έστω η εξίσωση: $(x-\lambda+6)^2+(y-2\lambda)^2=-\lambda^2+8\lambda-12$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Τι παριστάνει γεωμετρικά σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy η εξίσωση (1) όταν λ = 2 και τι όταν λ = 6 ; Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ από το διάστημα (2,6) η εξίσωση (1) στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy παριστάνει κύκλο. Μονάδες 8

γ) Καθώς το λ μεταβάλλεται στο διάστημα (2,6) , να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων οι οποίοι προκύπτουν από την εξίσωση (1) ανήκουν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα από το οποίο εξαιρούνται τα άκρα του. Μονάδες 9

4.22558

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τον κύκλο $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ και μία τυχούσα διάμετρό του AB με $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει $x_2 = -x_1$ και $y_2 = -y_1$; Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων N(κ,λ) για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 5$ είναι ο κύκλος $C_2 : x^2 + y^2 = 9$. Μονάδες 12

γ) Στο καρτεσιανό επίπεδο να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων M(x,y) για τα οποία ισχύει: $4 \le x^2 + y^2 \le 9$. Μονάδες 8

4.22581

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Μονάδες 8

β) Ο κύκλος C εφάπτεται στον άξονα x΄x και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους. Μονάδες 7

γ) Το σημείο M(2, - 1) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία A, B ώστε η χορδή AB του κύκλου να έχει μέσο το M. Μονάδες 10

4.22584

Δίνονται οι εξισώσεις $(x + y - 1)(x + y + 1) = 2xy$ (1) και $(\lambda - 1)x + (2\lambda + 3)y + 2\lambda - 5 = 0$ (2) $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=1. Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία. Κατόπιν να αποδείξετε ότι οι ευθείες που προκύπτουν από την (2) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε. Μονάδες 10

γ) Έστω A και B τα σημεία τομής του κύκλου C με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, ώστε η ευθεία AB να προκύπτει από την εξίσωση (2). Μονάδες 7

4.22586

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - (3\alpha + 2)x + \alpha^2 - 4 = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο. Κατόπιν, να βρείτε για ποιες τιμές του α, ο κύκλος διέρχεται από την αρχή O. Μονάδες 10

β) Έστω C ο κύκλος που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση όταν α = 2 και y = λx, $\lambda \in \mathbb{R}$ μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο C σε σημείο A διαφορετικό από το O.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του A συναρτήσει του λ. Μονάδες 10

ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο M του τμήματος OA κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας ο οποίος διέρχεται από το O. Μονάδες 5

4.22587
Σε καρτεσιανό σύστημα Oxy , θεωρούμε τα σημεία M(x, y) , A(-25, 0) και B(-1, 0) για τα οποία ισχύει $\left|\overrightarrow{AM}\right| = 5\left|\overrightarrow{BM}\right|$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει στον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 25$. Μονάδες 10

β) Θεωρούμε το σημείο Σ(7, 1) .

i. Να εξετάσετε αν το σημείο Σ βρίσκεται στο εσωτερικό ή το εξωτερικό του κύκλου C . Μονάδες 5

ii. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες, από το σημείο Σ προς τον κύκλο, είναι μεταξύ τους κάθετες. Μονάδες 10

4.22589
Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία M(x, y) , A(-2, 0) και B(2, 0) ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 3\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 20$ Μονάδες 10

β) Έστω Γ, Δ σημεία του κύκλου C ώστε $\left(\frac{\Gamma\Delta}{4}\right)^2 = 5$

i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ και η αρχή των αξόνων O, είναι συνευθειακά. Μονάδες 10

ii. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{M\Gamma}\cdot\overrightarrow{M\Delta}$ όταν το M κινείται στον κύκλο. Μονάδες 5

4.22590
Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda - 1)x - (\lambda - 7)y + \lambda = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ, με $\lambda \neq 5$, παριστάνει κύκλο. Κατόπιν να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση, όταν λ = 5 . Μονάδες 12

β) Έστω C_1, C_2 οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση όταν λ = 3 και λ = 9 αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά. Μονάδες 6

ii. Να βρείτε το σημείο επαφής των κύκλων. Μονάδες 7

Παραβολή

2.22511.Θεωρούμε την παραβολή $C: y^2 = 4x$ και την κατακόρυφη ευθεία ε: $x = \frac{p}{2}$, όπου *p* είναι η παράμετρος της παραβολής *C* .

α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής. Μονάδες 10

β) Αν η ευθεία *ε* τέμνει την παραβολή *C* στα σημεία της *B* και *Γ* , τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των *B* και *Γ* , καθώς και τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής *C* στα σημεία της αυτά αντίστοιχα. Μονάδες 10

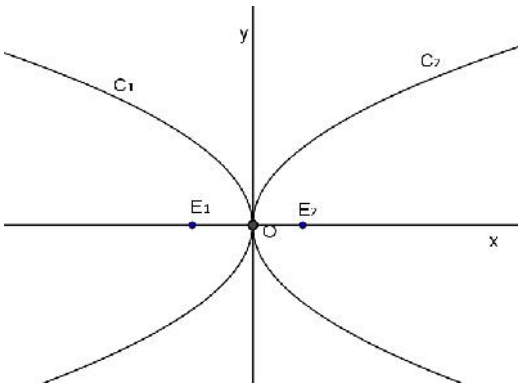
ii) να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 ανήκει στη διευθετούσα της *C* . Μονάδες 5

2.22512.Δίνεται η εξίσωση: $y^4 - 16x^2 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές $C_1: y^2 = 4x$ και $C_2: y^2 = -4x$ και να βρείτε για καθεμιά από αυτές την εστία και τη διευθετούσα της. Μονάδες 13

β) Αν E_1 και E_2 είναι οι εστίες των παραβολών C_1 και C_2 αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2. Μονάδες 12

2.22514.Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται οι παραβολές $C_1 : y^2 = -2px$ και $C_2 : y^2 = 2px$ οι οποίες έχουν εστίες τα σημεία E_1 και E_2 αντίστοιχα.
Η απόσταση των σημείων E_1 και E_2 είναι ίση με 4 μονάδες.



α) Να βρείτε την εστία, τη διευθετούσα και την εξίσωση καθεμιάς από τις παραβολές C_1 και C_2. Μονάδες 15

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2.
Μονάδες 10

4.22559
Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C_1 ο οποίος έχει το κέντρο του στην ευθεία ε : x − y −1 = 0.Έστω επίσης A(5,3) και B(1,5) δύο σημεία του κύκλου C_1.

α) Να αποδείξετε ότι $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 25$. Μονάδες 9

β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_2 που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το κέντρο του κύκλου C_1. Μονάδες 7

γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία τομής των C_1 και C_2, τότε:

i) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C_2 στα σημεία αυτά.
Μονάδες 5

ii) να αποδείξετε ότι οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον κύκλο C_1. Μονάδες 4

4.22560
Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από τα σημεία A(0,2) , B(−2,4) και Γ (0,6) .

α) Να αποδείξετε ότι $C : x^2 + (y-4)^2 = 4$ Μονάδες 10

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του κύκλου C . Μονάδες 9

γ) Αν M_1 και M_2είναι τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες του ερωτήματος β), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2. Μονάδες 6

4.22579
Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία A(-2, - 2) , B(0, - 4) , την παραβολή $y^2 = 4x$ και έστω M(x, y) τυχαίο σημείο της παραβολής.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(MAB) = \frac{1}{4}(y^2 + 4y + 16)$ **ii.** $(MAB) \geq 3$ Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του M ώστε το εμβαδόν (MAB) του τριγώνου MAB να γίνεται ελάχιστο. Μονάδες 5

γ) Έστω ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν M(1, -2). Να εξετάσετε αν η εφαπτομένη της παραβολής στο M είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου MAB.
Μονάδες 10

Έλλειψη

2.22509. Δίνονται οι ελλείψεις $C_1 : x^2 + 4y^2 = 20$ και $C_2 : 4x^2 + y^2 = 20$

α) Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις C_1 και C_2 έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων C_1 και C_2 ανήκουν στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 8$ Μονάδες 13

2.22510. Δίνονται ο κύκλος $C_1 : x^2 + y^2 = 20$, η έλλειψη $C_2 : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ και η κατακόρυφη ευθεία ε: $x = 4$. Αν Γ και Δ είναι τα σημεία του πρώτου τεταρτημορίου στα οποία η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ και Δ . Μονάδες 11

β) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C_1 στο σημείο του Γ και της έλλειψης C_2 στο σημείο της Δ , καθώς και το σημείο τομής των εφαπτομένων αυτών. Μονάδες 14

2.22516

Θεωρούμε την έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'\left(-\sqrt{5},0\right)$, $E\left(\sqrt{5},0\right)$ και μεγάλο άξονα μήκους 6 μονάδων.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης. Μονάδες 10

β) Αν είναι σημείο της έλλειψης για το οποίο ισχύει $ME' = 2 \cdot ME$, τότε:

i) να βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων και ΜΕ΄ και ΜΕ. Μονάδες 9

ii) να αποδείξετε ότι η γωνία Ε΄ΜΕ είναι ορθή. Μονάδες 6

4.22592

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία Μ(x,y) για τα οποία ισχύει η ισότητα $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} + \frac{16}{9}\left(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}\right) = 0$,όπου Α(−3,0) και Β(3,0) .

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ ανήκουν στον κύκλο $C_1 : x^2 + y^2 = 25$. Μονάδες 11

β) Αν Γ και Δ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με τον άξονα x x΄, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_2 η οποία έχει μεγάλο άξονα το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ και εστίες τα σημεία Α και Β . Μονάδες 10

ii) να παραστήσετε γραφικά τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 . Μονάδες 4

Υπερβολή

2.22515. Μια έλλειψη C_1 έχει εκκεντρότητα ίση με $\frac{4}{5}$ και τις ίδιες εστίες με την υπερβολή $C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $C_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ Μονάδες 15

β) Να παραστήσετε γραφικά την έλλειψη C_1 και την υπερβολή C_2 σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy. Μονάδες 10

4.22591

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής που τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Α΄(-2, 0) , Α(2, 0) και διέρχεται από το σημείο $\Gamma\left(2\sqrt{5},2\right)$ είναι η $C_1 : \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2 με διάμετρο το τμήμα Α΄Α. Μονάδες 5

γ) Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές κοινές εφαπτόμενες της υπερβολής C_1 και του κύκλου C_2 είναι οι ευθείες $\varepsilon_1 : x = -2$ και $\varepsilon_2 : x = 2$. Μονάδες 10