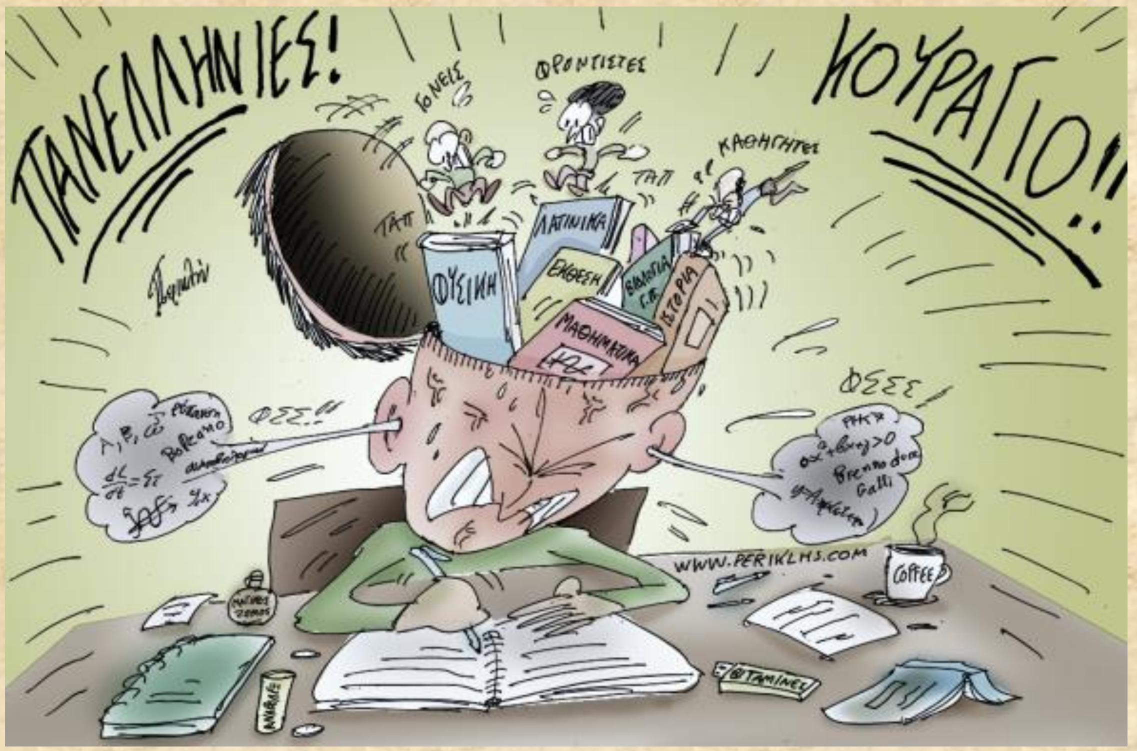
ΤΕΛΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

8 Επαναληπτικές Ασκήσεις από την ομάδα του Askisopolis

για τις πανελλαδικές του 2021

Δεύτε λάβετε τελευταίον ασπασμόν!



Στέλιος Μιχαήλογλου
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Άγγελος Μπλιάς
Δημήτρης Πατσιμάς
Αποστόλης Κακαβάς
Νίκος Τούντας

www.askisopolis.gr

Εκφωνήσεις

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3\sqrt[3]{x}$, $x\geq 0$ και $g(x)=\ln x,\ x>0$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

γ) Να βρείτε τα σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g στα οποία η κατακόρυφη απόσταση τους γίνεται ελάχιστη.

δ) Να αποδείξετε ότι $(g\circ f)(x)=\ln 3+\dfrac{1}{3}g(x)$ για κάθε x > 0.

ε) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_g που να είναι κάθετη σε εφαπτομένη της C_f.

2. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=(e^x-1)^2(x-1)^2$

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.

γ) Αν για τα $x_0\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $f'(x_0)=0$ είναι $f''(x_0)\neq 0$, δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f΄ έχει τουλάχιστον δυο εφαπτομένες παράλληλες στον x΄x.

δ) Αν $h(x)=\left(e^x-1\right)^2\left(x-1\right)^2$ με $x\geq 1$, να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και με δεδομένο ότι η h^{-1} είναι συνεχής να δείξετε ότι η h^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=(e^2-1)^2$ και να βρείτε την εφαπτομένη της $C\,h^{-1}$ στο $x_0=(e^2-1)^2$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln^2 x+1}$, $x>0$ και $g(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $(f\circ g)(x)=\varphi(x)=\dfrac{x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει τρία σημεία καμπής από τα οποία τα δύο είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της φ και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

ε) Αφού αποδείξετε ότι $\left|\varphi(x)\right|\leq\dfrac{1}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$(2-\eta\mu x)\left(\ln^2 x+1\right)-\ln x>0$ για κάθε $x>0$.

4. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=(\alpha+2)x^3-3\alpha x^2+3(\alpha-6)x+12+\alpha$, με $\alpha\neq -2$.

α) Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του α, ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα.

Έστω $\alpha=-3$

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα $\rho\in\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(\dfrac{x^3}{9}+3x\right)=f\left(x^2+1\right)$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) Να υπολογίσετε συναρτήσει του ρ το όριο $\lim\limits_{x\to\rho}\dfrac{\left(x^2-\rho^2\right)}{\left(x+1-e^x\right)\cdot\eta\mu\left(f(x)\right)}$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to\rho}\dfrac{\left(3x-2x^2-1\right)}{\left(e^{f(x)}+f(x)-1\right)\left(x-\rho\right)}$

ζ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(|\eta\mu x|-|x|\right)=f\left(\dfrac{\rho^3}{9}+3\rho-1\right)$ είναι αδύνατη.

η) Να αποδείξετε ότι $f(2021)>\dfrac{f(2020)+f(2022)}{2}$.

θ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, και να βρείτε την αντίστροφή της.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ημ^2x-\sqrt{2}\cdot ημx+2\sqrt{2}, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f .

β) **i.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2$ είναι αδύνατη.

γ) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)-2\sqrt{2}\right)\cdot \ln x\right]$.

δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και

$g(x)=ημ^2x-\sqrt{2}\cdot e^x+2\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}$ τέμνονται σ' ένα ακριβώς σημείο.

6. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $|f(x)-f(y)|\le|x-y|^2$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

γ) Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^{-2x}\left(g(x)+x\right)\left(g'(x)+1\right)=1$ και $g(0)=1$, να αποδείξετε ότι $g(x)=e^x-x,\ x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν η C_f τέμνει την C_g στο σημείο με τετμημένη 0, να βρείτε την f και να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g δεν έχουν άλλο κοινό σημείο.

ε) Αν $\varphi(x)=\ln g(x)$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\varphi(x)=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^3-\alpha x^2+\beta x-3$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η f , να έχει τοπικά ακρότατα στα $x_1=1$ και $x_2=-\frac{5}{9}$.

Για $\alpha=2,\beta=-5$:

β) να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ) να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=2021$.

δ) να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ε) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{\ln\alpha}$, $x>0$ με $\alpha>1$ και $g(x)=συνf(x)$, $x>0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το πρόσημο του ακροτάτου της.

β) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha>1$, να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x)+g^2(x)=1$ για κάθε $x>\frac{1}{\ln\alpha}$ και $\alpha>e$.

δ) Να αποδείξετε ότι $(\alpha-1)f'(1)<\alpha-2<(\alpha-1)f'(\alpha)$ για κάθε $\alpha>1$.

ε) Για $\alpha=e$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)g(x)=g(x)$ έχει άπειρες λύσεις στο $(1,+\infty)$ και μάλιστα ακριβώς δύο από αυτές βρίσκονται στο $(1,e^2)$.

Παρουσίαση ασκήσεων

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3\sqrt[3]{x}$, $x\geq 0$ και $g(x)=\ln x,\ x>0$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

γ) Να βρείτε τα σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g στα οποία η κατακόρυφη απόσταση τους γίνεται ελάχιστη.

δ) Να αποδείξετε ότι $(g\circ f)(x)=\ln 3+\frac{1}{3}g(x)$ για κάθε x > 0.

ε) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_g που να είναι κάθετη σε εφαπτομένη της C_f.

Λύση

α) Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)=\left(3x^{\frac{1}{3}}\right)'=x^{\frac{1}{3}-1}=x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Στο x = 0 είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^{\frac{1}{3}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}3x^{\frac{1}{3}-1}=\lim\limits_{x\to 0}3x^{-\frac{2}{3}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x = 0.

β) Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x}=y\overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow}\sqrt[3]{x}=\frac{y}{3}\Leftrightarrow x=\left(\frac{y}{3}\right)^3\Leftrightarrow x=\frac{y^3}{27}$, άρα $f^{-1}(y)=\frac{y^3}{27},\ y\geq 0$ οπότε

$f^{-1}(x)=\frac{x^3}{27},\ x\geq 0$.

γ) Η κατακόρυφη απόσταση των f, g είναι $d(x)=|f(x)-g(x)|=\left|3\sqrt[3]{x}-\ln x\right|,\ x>0$.

Έστω $h(x)=3\sqrt[3]{x}-\ln x,\ x>0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=f'(x)-g'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x}$

$h'(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x}\geq 0\Leftrightarrow\sqrt[3]{x}-1\geq 0\Leftrightarrow\sqrt[3]{x}\geq 1\Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $h'(x)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $(0,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $h'(x)>0$ και επειδή η αι συνεχής στο $[1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η h έχει ελάχιστο για x = 1.

Είναι $h(1)=3\sqrt[3]{1}-\ln 1=3>0$, οπότε $h(x)\geq h(1)>0$ και $d(x)=h(x)\geq h(1)$, άρα η κατακόρυφη απόσταση γίνεται ελάχιστη στο σημείο $(1,3)$ της C_f και το $(1,0)$ της C_g.

δ) Για το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ έχουμε:

$A_{g\circ f}=\left\{x\in A_f\ /\ f(x)\in A_g\right\}=\left\{x\geq 0\ /\ 3\sqrt[3]{x}>0\right\}=\{x\geq 0\ /\ x>0\}=(0,+\infty)$, τότε

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\ln\left(3\sqrt[3]{x}\right)=\ln 3+\ln x^{\frac{1}{3}}=\ln 3+\frac{1}{3}\ln x=\ln 3+\frac{1}{3}g(x)$

ε) Αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχουν $x_1>0$ και $x_2>0$ τέτοια ώστε $f'(x_1)g'(x_2)=-1$.

Όμως $f'(x_1)>0$ και $g'(x_2)>0$, δηλαδή $f'(x_1)g'(x_2)>0\neq -1$ άρα δεν υπάρχουν τέτοιες εφαπτομένες.

2. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=(e^x-1)^2(x-1)^2$

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.

γ) Αν για τα $x_0\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $f'(x_0)=0$ είναι $f''(x_0)\neq 0$, δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f' έχει τουλάχιστον δυο εφαπτομένες παράλληλες στον x΄x.

δ) Αν $h(x)=(e^x-1)^2(x-1)^2$ με $x\geq 1$, να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και με δεδομένο ότι η h^{-1} είναι συνεχής να δείξετε ότι η h^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=(e^2-1)^2$ και να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{h^{-1}}$ στο $x_0=(e^2-1)^2$.

Λύση

α) Η f είναι συνεχής στο [0,1] παραγωγίσιμη στο (0,1) και f(0)=f(1) οπότε από θεώρημα Rolle η f' έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1). Όμως $f'(x)=2(e^x-1)(x-1)(xe^x-1)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2(e^x-1)(x-1)(xe^x-1)=0$

Οπότε x=0 ή x=1 ή $xe^x-1=0$

Άρα η συνάρτηση $g(x)=xe^x-1$ έχει ρίζα στο (0,1)

Όμως $g'(x)=(x+1)e^x$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g΄(x)		-	0	+	
g(x)		↘		↗	

Στο $A_1=(-\infty,-1]$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα $g(A_1)=(g(-1),\lim\limits_{x\to-\infty}g(x))=[-e^{-1}-1,-1)$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{-x}}\right)\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DL}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{e^{-x}}\right)=0$ Συνεπώς στο A_1 δεν έχει ρίζες η g και μάλιστα g(x)<0

Επομένως η g έχει μοναδική λύση και μάλιστα στο διάστημα (0,1). Τότε όμως η f' έχει ακριβώς τρεις ρίζες τις 0, x_1,1.

x	$-\infty$		0		x_1		1		$+\infty$
x-1		-		-		-	0	+	
e^x-1		-	0	+		+		+	
$g(x)=xe^x-1$		-		-	0	+		+	
f΄(x)		-	0	+	0	-	0	+	
f(x)		↘		↗		↘		↗	

β) Όμως η g είναι γνησίως αύξουσα στο (-1,+∞) και αν x_1 η ρίζα τότε λόγω μονοτονίας και από το $g(A_1)$ θα είναι για x> x_1, g(x)>0 και για x< x_1, g(x)<0 Άρα η f έχει δύο τοπικά μέγιστα και ένα τοπικό ελάχιστο.

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,x_1]$, $[x_1,1]$,παραγωγίσιμη στα $(0,x_1)$, $(x_1,1)$ και $f'(0)=f'(x_1)=f'(1)$.

Από θεώρημα Rolle θα υπάρχουν $x_2,x_3\in(0,x_1),(x_1,1)$ τέτοια ώστε $f''(x_2)=f''(x_3)=0$ και συνεπώς οι εφαπτομένες της $C_{f'}$ στα x_2,x_3 θα είναι παράλληλες στον x΄x ή θα είναι ο x΄x. Όμως αν η εφαπτομένη της $C_{f'}$ στο τυχαίο x_4 είναι ο x΄x τότε θα πρέπει να ισχύει $f''(x_4)=0$ και $f'(x_4)=0$ που είναι άτοπο από υπόθεση. Συνεπώς η f' έχει τουλάχιστον δυο εφαπτομένες παράλληλες στον x΄x.

δ) Για $x\geq 1$ η h είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών. Στο (1,+∞) η $h'(x)>0$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο [1,+∞) άρα 1-1 και αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το [0,+∞) αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Το $x_0=(e^2-1)^2\in A_{h^{-1}}$ και επειδή h(2)= $(e^2-1)^2$ άρα

$h^{-1}((e^2-1)^2)=2$ και το $\lim\limits_{x\to(e^2-1)^2}\frac{h^{-1}(x)-h^{-1}((e^2-1)^2)}{x-(e^2-1)^2}=\lim\limits_{x\to(e^2-1)^2}\frac{h^{-1}(x)-2}{x-(e^2-1)^2}\overset{*}{=}\lim\limits_{\omega\to 2}\frac{\omega-2}{h(\omega)-(e^2-1)^2}$

$= \lim\limits_{\omega \to 2} \dfrac{\omega - 2}{h(\omega) - h(2)} = \lim\limits_{\omega \to 2} \dfrac{1}{\dfrac{h(\omega) - h(2)}{\omega - 2}} = \dfrac{1}{h'(2)} = \dfrac{1}{2(e^2-1)(2e^2-1)} \in \Re$ άρα η

$(h^{-1})'((e^2-1)^2) = \dfrac{1}{2(e^2-1)(2e^2-1)}$.

*Θέτω ω= $h^{-1}(x)$ και επειδή η h^{-1}συνεχής με $\lim\limits_{x \to (e^2-1)^2} h^{-1}(x) = 2$ το $\omega \to$ 2 και x = h(ω), επειδή για ω κοντά στο 2 είναι $h(\omega) \neq 2$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι $y - 2 = \dfrac{1}{2\left(e^2-1\right)\left(2e^2-1\right)}\left(x - \left(e^2-1\right)^2\right)$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln^2 x + 1}$, $x > 0$ και $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $(f \circ g)(x) = \varphi(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει τρία σημεία καμπής από τα οποία τα δύο είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της φ και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

ε) Αφού αποδείξετε ότι $|\varphi(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $(2 - \eta\mu x)(\ln^2 x + 1) - \ln x > 0$ για κάθε $x > 0$.

Λύση

α) Είναι $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \,/\, g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, e^x > 0\} = \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{\ln e^x}{\left(\ln e^x\right)^2 + 1} = \dfrac{x}{x^2+1}$

β) Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$\varphi'(x) = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$

$\varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \geq 0 \overset{\left(1+x^2\right)^2 > 0}{\Leftrightarrow} 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Για κάθε $x < -1$ ή $x > 1$ είναι $\varphi'(x) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$. Για κάθε $x \in (-1, 1)$ είναι $\varphi'(x) > 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$.Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -1 το $\varphi(-1) = -\dfrac{1}{2}$ και τοπικό μέγιστο στο 1 το $\varphi(1) = \dfrac{1}{2}$.

γ) $\varphi''(x) = \left(\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\right)' \Leftrightarrow \varphi''(x) = \dfrac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{\left(1+x^2\right)^3} = \dfrac{2x^3 - 6x}{\left(1+x^2\right)^3}$

$\varphi''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^3 - 6x}{\left(1+x^2\right)^3} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow 2x\left(x^2 - 3\right) \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq 0$ ή $x \geq \sqrt{3}$.

Η φ είναι κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,\sqrt{-3}\right],\left[0,\sqrt{3}\right]$

και κυρτή στα διαστήματα $\left[-\sqrt{3},0\right],\left[\sqrt{3},+\infty\right)$.

Η f έχει σημεία καμπής τα

$A\left(-\sqrt{3},f'\left(-\sqrt{3}\right)\right)\equiv\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $O(0,0)$ και

$B\left(\sqrt{3},f'\left(\sqrt{3}\right)\right)\equiv\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
φ''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
φ		∩		∪		∩		∪	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		Σ.Κ.		

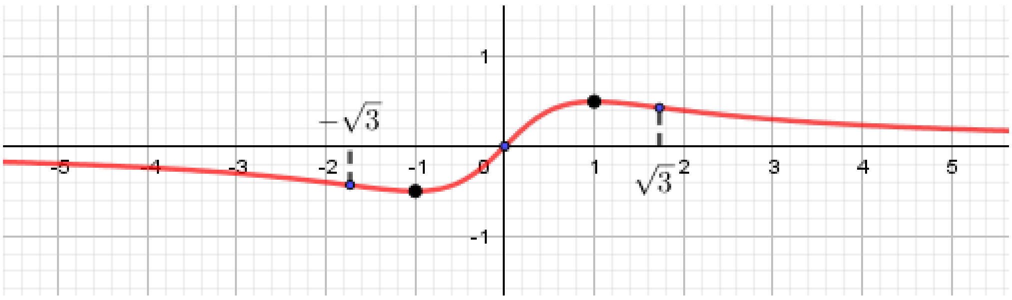
Τα σημεία A και B έχουν αντίθετες συντεταγμένες άρα είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων το τρίτο σημείο καμπής.

δ) Επειδή η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$,

οπότε η y = 0, δηλαδή ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ .

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
φ''		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
φ'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
φ		↘		↘		↗		↗		↘		↘	



ε) $\left|\varphi(x)\right|\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{|x|}{\left|1+x^2\right|}\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{|x|}{1+x^2}\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2|x|\le 1+x^2\Leftrightarrow$

$1-2|x|+|x|^2\ge 0\Leftrightarrow\left(1-|x|\right)^2\ge 0$ ισχύει.

$(2-\eta\mu x)\left(\ln^2 x+1\right)-\ln x>0\Leftrightarrow(2-\eta\mu x)\left(\ln^2 x+1\right)>\ln x\Leftrightarrow 2-\eta\mu x>\dfrac{\ln x}{\ln^2 x+1}\Leftrightarrow 2-\eta\mu x>\varphi(\ln x)$

Επειδή $\left|\varphi(x)\right|\le\dfrac{1}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι και $\left|\varphi(\ln x)\right|\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}\le\varphi(\ln x)\le\dfrac{1}{2}$ για κάθε $x>0$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $-1\le\eta\mu x\le 1\Leftrightarrow 1\ge-\eta\mu x\ge-1\Leftrightarrow 1\le 2-\eta\mu x\le 3$, άρα $2-\eta\mu x\ge 1>\dfrac{1}{2}\ge\varphi(\ln x)\Rightarrow$

$2-\eta\mu x>\varphi(\ln x)$.

4. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=(\alpha+2)x^3-3\alpha x^2+3(\alpha-6)x+12+\alpha$, με $\alpha\neq-2$.

α) Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του α, ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα.

Έστω $\alpha=-3$

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα $\rho\in\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(\frac{x^3}{9}+3x\right)=f\left(x^2+1\right)$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) Να υπολογίσετε συναρτήσει του ρ το όριο $\lim\limits_{x\to\rho}\frac{\left(x^2-\rho^2\right)}{\left(x+1-e^x\right)\cdot \eta\mu\left(f(x)\right)}$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to\rho}\frac{\left(3x-2x^2-1\right)}{\left(e^{f(x)}+f(x)-1\right)(x-\rho)}$

ζ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(|\eta\mu x|-|x|\right)=f\left(\frac{\rho^3}{9}+3\rho-1\right)$ είναι αδύνατη .

η) Να αποδείξετε ότι $f(2021)>\frac{f(2020)+f(2022)}{2}$.

θ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, και να βρείτε την αντίστροφή της.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=3(\alpha+2)x^2-6\alpha x+3(\alpha-6)$.

Η f' είναι τριώνυμο με διακρίνουσα

$\Delta=36\alpha^2-36(\alpha+2)(\alpha-6)=36\left(\alpha^2-\alpha^2+6\alpha-2\alpha+12\right)=36(4\alpha+12)=144(\alpha+3)$

- Αν $\Delta>0\Leftrightarrow\alpha+3>0\Leftrightarrow\alpha>-3\Rightarrow\alpha\in(-3,-2)\cup(-2,+\infty)$, τότε η f' έχει δύο ρίζες και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθέν τους, οπότε η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\Delta=0\Leftrightarrow\alpha+3=0\Leftrightarrow\alpha=-3$ τότε $f'(x)=-3x^2+18x-27=-3(x-3)^2$.

  Για κάθε $x\neq3$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\Delta<0\Leftrightarrow\alpha+3<0\Leftrightarrow\alpha<-3$ τότε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Τελικά η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ όταν $\alpha\leq-3$ και η μεγαλύτερη τιμή του α είναι το -3.

β) Για $\alpha=-3$ είναι $f(x)=-x^3+9x^2-27x+9$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα ρ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, το ρ είναι η μοναδική ρίζα της f.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι και 1-1.

$$f\left(\frac{x^3}{9}+3x\right)=f\left(x^2+1\right)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}\frac{x^3}{9}+3x=x^2+1\Leftrightarrow x^3-9x^2+27x-9=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=\rho$$

δ) Αρχικά βλέπουμε ότι $f(0)=9\neq0$, οπότε $\rho\neq0$.

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x\geq x+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0, για x = ρ είναι

$e^\rho>\rho+1\Leftrightarrow\rho+1-e^\rho<0$

Βλέπουμε ότι η $f'(x)=0$ έχει διπλή ρίζα το 3 και $f(3)=-18$, άρα $\rho\neq3$.

$$\lim_{x\to\rho}\frac{x^2-\rho^2}{\left(x+1-e^x\right)\eta\mu f\left(x\right)}=\lim_{x\to\rho}\frac{\left(x-\rho\right)\left(x+\rho\right)}{\left(x+1-e^x\right)\eta\mu f\left(x\right)}=\lim_{x\to\rho}\left(\frac{x+\rho}{x+1-e^x}\cdot\frac{x-\rho}{\eta\mu f\left(x\right)}\right)=$$

$$\frac{2\rho}{\rho+1-e^{\rho}}\cdot\frac{1}{f'\left(\rho\right)}=\frac{2\rho}{f'\left(\rho\right)\left(\rho+1-e^{\rho}\right)}$$ γιατί

$$\lim_{x\to\rho}\frac{x-\rho}{\eta\mu f\left(x\right)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to\rho}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu f\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)}=\frac{1}{f'\left(\rho\right)}$$

ε) $$\lim_{x\to\rho}\frac{\left(3x-2x^2-1\right)}{\left(e^{f(x)}+f\left(x\right)-1\right)\left(x-\rho\right)}=\lim_{x\to\rho}\left[\left(3x-2x^2-1\right)\frac{1}{\left(e^{f(x)}+f\left(x\right)-1\right)\left(x-\rho\right)}\right]=+\infty$$, γιατί

- $3x-2x^2-1=-2x^2+3x-1$, $\Delta=1>0$, $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm1}{-4}=\dfrac{1}{2},1$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{19}{8}<0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\rho\right)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}\rho<\frac{1}{2}<1$,άρα $\lim_{x\to\rho}\left(3x-2x^2-1\right)=3\rho-2\rho^2-1<0$ (το ρ δεν βρίσκεται μεταξύ των ριζών του τριωνύμου άρα είναι ομόσημο του -2).

- $\lim_{x\to\rho}\left(e^{f(x)}+f\left(x\right)-1\right)=e^{f(\rho)}+f\left(\rho\right)-1=0$

Θεωρούμε $g\left(x\right)=e^x+x-1$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

Για

$$x<\rho\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(x\right)>f\left(\rho\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)>0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g\left(f\left(x\right)\right)>g\left(0\right)\Leftrightarrow e^{f(x)}+f\left(x\right)-1>0$$

$$x>\rho\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(x\right)<f\left(\rho\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)<0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g\left(f\left(x\right)\right)<g\left(0\right)\Leftrightarrow e^{f(x)}+f\left(x\right)-1<0$$

Άρα για

$x<\rho:\left(x-\rho\right)\left(e^{f(x)}+f\left(x\right)-1\right)<0$

$x>\rho:\left(x-\rho\right)\left(e^{f(x)}+f\left(x\right)-1\right)<0$

Οπότε $\lim_{x\to\rho}\dfrac{1}{\left(e^{f(x)}+f\left(x\right)-1\right)\left(x-\rho\right)}=-\infty$.

ζ) $f\left(\left|\eta\mu x\right|-\left|x\right|\right)=f\left(\dfrac{\rho^3}{9}+3\rho-1\right)$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\left|\eta\mu x\right|\le\left|x\right|\Leftrightarrow\left|\eta\mu x\right|-\left|x\right|\le0\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(\left|\eta\mu x\right|-\left|x\right|\right)\ge f\left(0\right)\Leftrightarrow f\left(\left|\eta\mu x\right|-\left|x\right|\right)\ge9$

$$f\left(\rho\right)=0\Leftrightarrow-\rho^3+9\rho^2-27\rho+9=0\Leftrightarrow-\frac{\rho^3}{9}+\rho^2-3\rho+1=0\Leftrightarrow\frac{\rho^3}{9}+3\rho-1=\rho^2$$

Άρα $f\left(\dfrac{\rho^3}{9}+3\rho-1\right)=f\left(\rho^2\right)$

$\rho>0\Leftrightarrow\rho^2>0\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(\rho^2\right)<f\left(0\right)\Leftrightarrow f\left(\rho^2\right)<9$

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

η) $f''\left(x\right)=-6x+18$ άρα για $x>3:f''\left(x\right)<0$ δηλαδή f κοίλη .

Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την f στα διαστήματα [2020,2021] και[2021,2022], οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (2020,2021)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = f(2021) - f(2020)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (2021,2022)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = f(2022) - f(2021)$.

Έχουμε $3 < \xi_1 < \xi_2 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(2021) - f(2020) > f(2022) - f(2021) \Leftrightarrow$

$f(2021) > \dfrac{f(2020) + f(2022)}{2}$

θ) $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 27x + 9 = -(x-3)^3 - 18$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$ οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow -(x-3)^3 - 18 = y \Leftrightarrow (x-3)^3 = -y - 18 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{-y-18} + 3\ ,\ y \le -18 \\ x = -\sqrt[3]{y+18} + 3\ ,\ y > -18 \end{cases}$

Άρα $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x-18} + 3\ ,\ x \le -18 \\ -\sqrt[3]{x+18} + 3\ ,\ x > -18 \end{cases}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2 x - \sqrt{2} \cdot \eta\mu x + 2\sqrt{2}, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f .

β) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.

γ) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to 0^+}\left[\left(f(x) - 2\sqrt{2}\right) \cdot \ln x\right]$.

δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $g(x) = \eta\mu^2 x - \sqrt{2} \cdot e^x + 2\sqrt{2} + \dfrac{\pi}{2}$ τέμνονται σ’ ένα ακριβώς σημείο.

Λύση

α) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και στο $(0, \dfrac{\pi}{2})$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με παράγωγο $f'(x) = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x \cdot \left(2\eta\mu x - \sqrt{2}\right)$.

Όμως $\sigma\upsilon\nu x \ge 0$ στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και $2\eta\mu x - \sqrt{2} \ge 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x \ge \sqrt{2} \Leftrightarrow \eta\mu x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x \ge \eta\mu\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{\pi}{4}$ η ισότητα για x=$\dfrac{\pi}{4}$ αφού η ημx γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
συνx	+		+
$2\eta\mu x - \sqrt{2}$	−	0	+
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	Ο.Ε.	↗

Έχουμε $f(0) = 2\sqrt{2}, f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}$ και $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ οπότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 0, το $f(0)=2\sqrt{2}$, ολικό ελάχιστο στο $\frac{\pi}{4}$,το $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ και τοπικό μέγιστο στο $\frac{\pi}{2}$,το $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\sqrt{2}$. Επειδή είναι όμως συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ έχει και ολικό μέγιστο το μεγαλύτερο από τα τοπικά δηλαδή το $f(0)=2\sqrt{2}$

β) i.Έστω $A_1=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ και $A_2=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

Λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα αυτά έχουμε: $f(A_1)=\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right),f(0)\right]=\left[2\sqrt{2}-\frac{1}{2},2\sqrt{2}\right]$ και

$f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}f(x),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right),1+\sqrt{2}\right]=\left(2\sqrt{2}-\frac{1}{2},1+\sqrt{2}\right]$ αφού η f είναι συνεχής στο $\frac{\pi}{4}$.

Επομένως η f έχει σύνολο τιμών $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=\left[2\sqrt{2}-\frac{1}{2},2\sqrt{2}\right]$

ii. Το 2 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f οπότε η εξίσωση $f(x)=2$ είναι αδύνατη αφού $2<2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 5<4\sqrt{2}\Leftrightarrow 25<32$.

γ) $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(f(x)-2\sqrt{2}\right)\cdot\ln x\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(\eta\mu^2x-\sqrt{2}\cdot\eta\mu x\right)\cdot\ln x\right]=$

$\lim\limits_{x\to0^+}\left[\eta\mu x\left(\eta\mu x-\sqrt{2}\right)\cdot\ln x\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\eta\mu x}{x}\left(\eta\mu x-\sqrt{2}\right)\cdot x\cdot\ln x\right]=1\cdot\left(-\sqrt{2}\right)\cdot0=0$ αφού

$$\lim\limits_{x\to0^+}(x\cdot\ln x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0.$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)=\eta\mu^2x-\sqrt{2}\cdot\eta\mu x+2\sqrt{2}-\eta\mu^2x+\sqrt{2}\cdot e^x-2\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$

$h(x)=-\sqrt{2}\cdot\eta\mu x+\sqrt{2}\cdot e^x-\frac{\pi}{2},x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με παράγωγο $h'(x)=-\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{2}\cdot e^x=\sqrt{2}\cdot\left(e^x-\sigma\upsilon\nu x\right)$.

Για $x\geq0\Leftrightarrow e^x\geq e^0\Leftrightarrow e^x\geq1\geq\sigma\upsilon\nu x$ οπότε $e^x\geq\sigma\upsilon\nu x$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα $h'(x)>0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, η h συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

οπότε έχει σύνολο τιμών το $h\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[h(0),h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\left[\underbrace{\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}}_{<0},\underbrace{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}}_{>0}\right]$.

(Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot e^x-x,x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Η k είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $k'(x)=\sqrt{2}\cdot e^x-1>0$ αφού

$0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow1\leq e^x\leq e^{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow\sqrt{2}\leq\sqrt{2}\cdot e^x\leq\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow\underbrace{\sqrt{2}-1}_{>0}\leq\sqrt{2}\cdot e^x-1\leq\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{2}}-1\Rightarrow\sqrt{2}\cdot e^x-1>0$

οπότε $0<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow h(0)<h\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow 0<-\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}$.

Επίσης : $\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{2}<\pi\Leftrightarrow 8<\pi^2$ ισχύει).

Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της h οπότε υπάρχει $x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$τέτοιο ώστε

$h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.Το x_0 μοναδικό αφού η h είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $g(x)=\eta\mu^2x-\sqrt{2}\cdot e^x+2\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}$ τέμνονται σ' ένα ακριβώς σημείο.

6. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $|f(x)-f(y)|\le|x-y|^2$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

γ) Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^{-2x}\left(g(x)+x\right)\left(g'(x)+1\right)=1$ και $g(0)=1$, να αποδείξετε ότι $g(x)=e^x-x,\ x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν η C_f τέμνει την C_g στο σημείο με τετμημένη 0, να βρείτε την f και να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g δεν έχουν άλλο κοινό σημείο.

ε) Αν $\varphi(x)=\ln g(x)$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\varphi(x)=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

Λύση

α) Για κάθε $x,x_0\in\mathbb{R}$ με $x\ne x_0$ και για $y=x_0$, έχουμε: $|f(x)-f(x_0)|\le|x-x_0|^2\Leftrightarrow$

$-|x-x_0|^2\le f(x)-f(x_0)\le|x-x_0|^2\Leftrightarrow f(x_0)-|x-x_0|^2\le f(x)\le f(x_0)+|x-x_0|^2$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x_0)-|x-x_0|^2\right]=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x_0)+|x-x_0|^2\right]=f(x_0)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x,x_0\in\mathbb{R}$ με $x\ne x_0$ και για $y=x_0$, έχουμε: $|f(x)-f(x_0)|\le|x-x_0|^2\Leftrightarrow$

$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}\le|x-x_0|\Leftrightarrow\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\le|x-x_0|\Leftrightarrow -|x-x_0|\le\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le|x-x_0|$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-|x-x_0|\right)=0$, , $\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ με $f'(x_0)=0$, άρα $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. είναι $f(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι: $e^{-2x}\left(g(x)+x\right)\left(g'(x)+1\right)=1\Leftrightarrow\left(g(x)+x\right)\left(g'(x)+1\right)=e^{2x}\Leftrightarrow$

$2\left(g(x)+x\right)\left(g(x)+x\right)'=2e^{2x}\Leftrightarrow\left[\left(g(x)+x\right)^2\right]'=\left(e^{2x}\right)'\Leftrightarrow\left(g(x)+x\right)^2=e^{2x}+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$.

Για x = 0 είναι $\left(g(0)+0\right)^2=e^0+c_1\Leftrightarrow 1=1+c_1\Leftrightarrow c_1=0$, άρα

$\left(g(x)+x\right)^2=e^{2x}=\left(e^x\right)^2\Leftrightarrow|g(x)+x|=e^x$.

Έστω $h(x)=g(x)+x,\ x\in\mathbb{R}$, τότε $|h(x)|=e^x$ (1).

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $|h(x)| = e^x \neq 0 \Rightarrow h(x) \neq 0$, οπότε η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επειδή $h(0) = g(0) = 1 > 0$, είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται: $h(x) = e^x \Leftrightarrow g(x) + x = e^x \Leftrightarrow g(x) = e^x - x,\ x \in \mathbb{R}$.

δ) Έχουμε $f(0) = g(0) \Leftrightarrow c = 1$, άρα $f(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}$.
Τα κοινά σημεία των C_f, C_g είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = e^x - x \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = x + 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Όμως γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x \geq x + 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0, οπότε μοναδική λύση της εξίσωσης $e^x = x + 1$ είναι η x = 0 και κατά συνέπεια το σύστημα έχει λύση (x,y) = (0,1).
Άρα το μοναδικό κοινό σημείο των C_f, C_g είναι το $(0,1)$.

ε) Έχουμε $\varphi(x) = \ln(e^x - x)$.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x \geq x + 1 > x \Rightarrow e^x - x > 0$, οπότε $A_\varphi = \mathbb{R}$.
Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$.

$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x > 0$ και $\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x < 0$.
Για κάθε $x < 0$ είναι $\varphi'(x) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο

διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 0$ είναι $\varphi'(x) > 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η φ έχει ελάχιστο το $\varphi(0) = 0$.

Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(e^x - x) \underset{\substack{x \to -\infty \Rightarrow \\ u \to +\infty}}{\overset{e^x - x = u}{=}} \lim\limits_{u \to +\infty} \ln u = +\infty$ και

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^x - x) \underset{\substack{x \to +\infty \Rightarrow \\ y \to +\infty}}{\overset{e^x - x = y}{=}} \lim\limits_{u \to +\infty} \ln y = +\infty$ αφού

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[e^x \left(1 - \dfrac{x}{e^x} \right) \right] = +\infty(1 - 0) = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

Η φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, 0]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $\varphi(A_1) = \left[\varphi(0), \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) \right) = [0, +\infty)$.

Η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2 = (0, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $\varphi(A_2) = \left(\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x), \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) \right) = (0, +\infty)$.

- Αν α < 0 η εξίσωση $\varphi(x) = \alpha$ δεν έχει ρίζες.
- Αν α = 0 τότε στο A_1 η φ είναι γνησίως φθίνουσα οπότε έχει μοναδική ρίζα την x = 0.

Επειδή το 0 δεν περιέχεται στο $\varphi(A_2)$, η φ δεν έχει ρίζα στο A_2.
Τελικά η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την x = 0.

- Αν α > 0 η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες, μια στο $(-\infty, 0)$ και μια στο $(0, +\infty)$ γιατί το $\alpha > 0$ βρίσκεται στο εσωτερικό των $\varphi(A_1), \varphi(A_2)$ και επειδή η φ είναι αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα A_1, A_2, έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(-\infty, 0)$ και ακριβώς μια στο $(0, +\infty)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 3$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η f, να έχει τοπικά ακρότατα στα $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{5}{9}$.

Για $\alpha = 2, \beta = -5$:

β) να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ) να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2021$.

δ) να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ε) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με παράγωγο $f'(x) = 9x^2 - 2\alpha x + \beta$ άρα και στα εσωτερικά σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{5}{9}$, τα οποία είναι ακρότατα οπότε ισχύει το θεώρημα Fermat επομένως $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 9 - 2\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 2\alpha - 9$ (1) και

$$f'\left(-\frac{5}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow \cancel{9} \cdot \frac{25}{\underset{9}{\cancel{81}}} + \frac{10\alpha}{9} + \beta \Leftrightarrow 25 + 10\alpha + 9\beta = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$25 + 10\alpha + 9(2\alpha - 9) = 0 \Leftrightarrow 25 + 10\alpha + 18\alpha - 81 = 0 \Leftrightarrow 28\alpha = 56 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

Από την (1) έχουμε $\beta = 4 - 9 = -5$

β) Για $\alpha = 2, \beta = -5$ έχουμε $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x - 3$ και $f'(x) = 9x^2 - 4x - 5$.

Έχουμε : $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x \leq -\frac{5}{9}\right)$ ή $(x \geq 1)$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{5}{9}\right), (1, +\infty)$, $f'(x) < 0$ στο διάστημα $\left(-\frac{5}{9}, 1\right)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{5}{9}\right], [1, +\infty)$,γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{5}{9}, 1\right]$ οπότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $-\frac{5}{9}$,το $f\left(-\frac{5}{9}\right) = -\frac{329}{243}$ και τοπικό ελάχιστο στο 1,το $f(1) = -7$.

γ) Έστω $A_1 = \left(-\infty, -\frac{5}{9}\right), A_2 = \left[-\frac{5}{9}, 1\right]$ και $A_3 = (1, +\infty)$.

Λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα αυτά έχουμε:

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to -\frac{5}{9}^-} f(x)\right) = \left(-\infty, -\frac{190}{81}\right), f(A_2) = \left[f(1), f\left(-\frac{5}{9}\right)\right] = \left[-7, -\frac{329}{243}\right] \text{ και}$$

$$f(A_3) = \left(\lim_{x \to 1^+} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = (-7, +\infty) \text{ αφού}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\frac{5}{9}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-\frac{5}{9}^+} f(x) = f\left(-\frac{5}{9}\right) = -\frac{329}{243}$ και

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1) = -7$.

Το $2021 \in f(A_3), 2021 \notin f(A_1), f(A_2)$ άρα υπάρχει μοναδικό (η f γνησίως αύξουσα στο A_3) $x_1 \in A_3$ τέτοιος ώστε $f(x_1) = 2021$.

δ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 18x - 4$.

Έχουμε : $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 18x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 18x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{9}$.

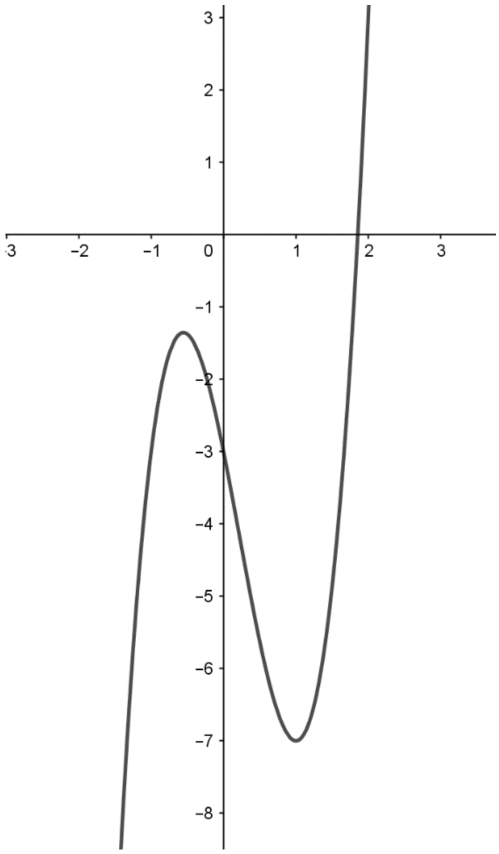
Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f''(x) > 0$ στο διάστημα $\left(\frac{2}{9}, +\infty\right)$, $f'(x) < 0$ στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{2}{9}\right)$

άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{2}{9}, +\infty\right)$,κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{2}{9}\right]$ άρα έχει σημείο καμπής το $A\left(\frac{2}{9}, f\left(\frac{2}{9}\right)\right) \equiv A\left(\frac{2}{9}, -\frac{1018}{243}\right)$.

ε) Η f είναι πολυωνυμική 3ου βαθμού άρα δεν έχει ασύμπτωτες.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{9}$		$\frac{2}{9}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			ΤΜ		ΣΚ		ΤΕ		

Από τον παραπάνω πίνακα τιμών έχουμε την γραφική παράσταση



8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{\ln \alpha}$, $x > 0$ με $\alpha > 1$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu f(x)$, $x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το πρόσημο του ακροτάτου της.

β) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha > 1$, να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) + g^2(x) = 1$ για κάθε $x > \dfrac{1}{\ln \alpha}$ και $\alpha > e$.

δ) Να αποδείξετε ότι $(\alpha - 1) f'(1) < \alpha - 2 < (\alpha - 1) f'(\alpha)$ για κάθε $\alpha > 1$.

ε) Για $\alpha = e$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)g(x) = g(x)$ έχει άπειρες λύσεις στο $(1,+\infty)$ και μάλιστα ακριβώς δύο από αυτές βρίσκονται στο $(1, e^2)$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x \ln \alpha}$

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{x \ln \alpha} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \dfrac{1}{x \ln \alpha} \Leftrightarrow x \ln \alpha \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{\ln \alpha}$,η f είναι συνεχής στο $\dfrac{1}{\ln \alpha}$ άρα $f \searrow \left(0, \dfrac{1}{\ln \alpha}\right]$ και $f \nearrow \left[\dfrac{1}{\ln \alpha}, +\infty\right)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \dfrac{1}{\ln \alpha}$ το

$$f\left(\frac{1}{\ln \alpha}\right) = \frac{1}{\ln \alpha} - 1 - \frac{\ln \frac{1}{\ln \alpha}}{\ln \alpha} = \frac{1}{\ln \alpha} - 1 + \frac{\ln(\ln \alpha)}{\ln \alpha}.$$

1ος τρόπος

$f\left(\frac{1}{\ln\alpha}\right)=\frac{1-\ln\alpha+\ln(\ln\alpha)}{\ln\alpha}\le 0$ με την ισότητα να ισχύει για x =e αφού lnx$\le x-1$ με το ίσον μόνο για x =1 οπότε για α>1 θέτουμε x το lnα

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε την συνάρτηση $k(x)=\frac{1}{\ln x}-1+\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$, $x>1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$k'(x)=-\frac{1}{x\ln^2 x}+\frac{\frac{1}{x\cancel{\ln x}}\cancel{\ln x}-\frac{\ln(\ln x)}{x}}{\ln^2 x}=-\frac{1}{x\ln^2 x}+\frac{1-\ln(\ln x)}{x\ln^2 x}=-\frac{\ln(\ln x)}{x\ln^2 x}$$

- $\ln(\ln x)=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$ και $\ln(\ln x)>0\Leftrightarrow \ln x>1\Leftrightarrow x>e$
- $\ln^2 x>0$ για κάθε $x>1$.

x	$-\infty$	1	e	$+\infty$
$\ln(\ln x)$			-	+
$-x\ln^2 x$			-	-
$k'(x)$			+	-
k			↗	↘

Η k παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=e$ το $k(e)=0$

Άρα για κάθε $x>1$ είναι $k(x)\le 0$

Επομένως το ελάχιστο της f είναι μη θετικός αριθμός και η ισότητα ισχύει για x = e.

β) $A_1=\left(0,\frac{1}{\ln\alpha}\right]$ και $A_2=\left(\frac{1}{\ln\alpha},+\infty\right)$.

Η f συνεχής και ↘ στο A_1 άρα:

$$f(A_1)=\left[f\left(\frac{1}{\ln\alpha}\right),\lim_{x\to 0^+}f(x)\right)=\left[f\left(\frac{1}{\ln\alpha}\right),+\infty\right).$$

Η f συνεχής και ↗ στο A_2 άρα:

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to\frac{1}{\ln\alpha}^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left(f\left(\frac{1}{\ln\alpha}\right),+\infty\right).$$

- Αν $\alpha=e$ τότε $f\left(\frac{1}{\ln\alpha}\right)=f(1)=0$. Το $0\in f(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1\in A_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$.

  Επειδή f ↘A_1 τότε το x_1 είναι μοναδικό. Το $0\notin f(A_2)$ άρα δεν υπάρχει $x_2\in A_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$. Άρα σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα.

- Αν $\alpha\ne e$ τότε $f\left(\frac{1}{\ln\alpha}\right)<0$. Το $0\in f(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1\in A_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$. Επειδή f ↘A_1 τότε το x_1 είναι μοναδικό. Το $0\in f(A_2)$ άρα υπάρχει $x_2\in A_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$. Επειδή f ↗A_2 τότε το x_2 είναι μοναδικό. Άρα σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες.

γ) $f^2(x)+g^2(x)=1\Leftrightarrow f^2(x)+\sigma\upsilon\nu^2 f(x)=1\Leftrightarrow f^2(x)+1-\eta\mu^2 f(x)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^2(x)=\eta\mu^2 f(x)\Leftrightarrow|\eta\mu f(x)|=|f(x)|$

Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.

Για x το $f(x)$ είναι $|\eta\mu f(x)|\le|f(x)|$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $f(x)=0\Leftrightarrow x=1$ γιατί

από το ερώτημα β) για $x>\frac{1}{\ln\alpha}$, η f έχει μοναδική ρίζα .

Όμως $\alpha>e\Leftrightarrow\ln\alpha>1\Leftrightarrow\frac{1}{\ln\alpha}<1$, η $x=1$ προφανής ρίζα της $f(x)=0$, επομένως είναι η μοναδική της ρίζα.

δ) Η f είναι συνεχής στο $[1,\alpha]$, παραγωγίσιμη στο $(1,\alpha)$ άρα από ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in(1,\alpha)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\alpha)-f(1)}{\alpha-1}=\frac{f(\alpha)}{\alpha-1}=\frac{\alpha-1-1}{\alpha-1}=\frac{\alpha-2}{\alpha-1}.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f''(x)=\dfrac{1}{x^2\ln\alpha}>0$ για κάθε $x>0$ άρα $f'\nearrow(0,+\infty)$.

Για $1<\xi<\alpha\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(1)<f'(\xi)<f'(\alpha)\Leftrightarrow f'(1)<\dfrac{\alpha-2}{\alpha-1}<f'(\alpha)\overset{\alpha>1}{\Leftrightarrow}(\alpha-1)f'(1)<\alpha-2<(\alpha-1)f'(\alpha)$

ε) Για $\alpha=e$ είναι $f(x)=x-1-\ln x$, $x>0$ και $g(x)=\text{συν}(x-1-\ln x)$, $x>0$.

Επίσης $f(A_1)=[0,+\infty)$ και $f(A_2)=(0,+\infty)$.

$2f(x)g(x)=g(x)\Leftrightarrow 2f(x)g(x)-g(x)=0\Leftrightarrow g(x)\big(2f(x)-1\big)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(g(x)=0\Leftrightarrow \text{συν}f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{N}\right)$ ή $\left(2f(x)-1=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}\right)$

Το $\kappa\in\mathbb{N}$ γιατί $f\big((1,+\infty)\big)=(0,+\infty)$ άρα $\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}>0$

Το $\dfrac{1}{2}\in f\big((1,+\infty)\big)$ άρα υπάρχει $\rho_1\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1)=\dfrac{1}{2}$

Το $\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}\in f\big((1,+\infty)\big)$ άρα υπάρχει $\rho_\kappa\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_\kappa)=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$ όμως τα $\kappa\in\mathbb{N}$ είναι άπειρα, επομένως η εξίσωση έχει άπειρες ρίζες στο $(1,+\infty)$.

Αν $A_3=(1,e^2)\subseteq(1,+\infty)$ τότε $f\nearrow A_3$ και $f(A_3)=(0,e^2-3)$ (Είναι $e^2>3$)

Το $\dfrac{1}{2}\in f(A_3)$ άρα υπάρχει $\rho_1\in A_3$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1)=\dfrac{1}{2}$.

(Είναι $0<\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}<e^2-3\Leftrightarrow-\dfrac{\pi}{2}<\kappa\pi<e^2-3-\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\pi<2\kappa\pi<e^2-3-\pi\Leftrightarrow\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}<\kappa<\dfrac{e^2-3-\pi}{2\pi}<1$

αφού $e^2-3-\pi<2\pi\Leftrightarrow e^2<3\pi+3$ ισχύει γιατί $e^2\simeq7{,}3$, $3\pi\simeq9{,}42$ και $\kappa\in\mathbb{N}$ άρα $\kappa=0$)

Το $\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}\in f(A_3)$ με $\kappa=0$ άρα υπάρχει μοναδικό $\rho_2\in A_3$ τέτοιο ώστε $f(\rho_2)=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$.

Άρα ακριβώς δύο από τις ρίζες βρίσκονται στο $(1,e^2)$.