Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου από το Askisopolis 2023 - 2024

Αντώνης Βαλέργας
Αποστόλης Κακαβάς
Στέλιος Μιχαήλογλου
Άγγελος Μπλιάς
Θανάσης Νικολόπουλος
Δημήτρης Πατσιμάς
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Νίκος Σαμπάνης
Βαγγέλης Τόλης
Νίκος Τούντας
Ισαάκ Χιονίδης

Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας 2 ωρών στο 1ο κεφάλαιο

2023-2024

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

6 μονάδες

Α2. Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού α και πως συμβολίζεται;

4 μονάδες

Α3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για όλα τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ ισχύει η πρόταση: αν $\alpha^2>\alpha\beta$ τότε $\alpha>\beta$.

β) Για όλα τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ ισχύει η πρόταση: αν $\frac{\alpha}{\beta}>1$ τότε $\alpha>\beta$.

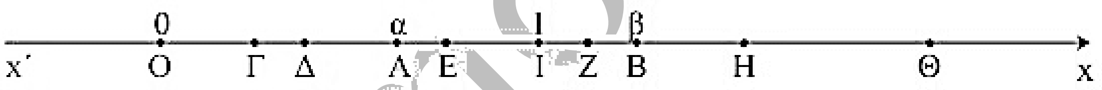
γ) Αν $\alpha<\beta<0$ τότε $\alpha^2>\beta^2$.

δ) Ισχύει ότι $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

ε) $\sqrt{x^2}=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

10 μονάδες

Α4. Στον παρακάτω άξονα τα σημεία Ο, Ι, Α και Β παριστάνουν τους αριθμούς 0, 1, α και β αντιστοίχως, με 0 < α < 1 και β > 1, ενώ τα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \alpha^2, \beta^2, \alpha^3$ και β^3, όχι όμως απαραίτητα με την σειρά που αναγράφονται.



Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα, στον οποίο να αντιστοιχίσετε τα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ με τους αριθμούς που παριστάνουν.

Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ

5 μονάδες

Θέμα Β

Έστω οι πραγματικοί αριθμοί x, y.

Β1. Να αποδείξετε ότι:

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $x^2-6x\ge-9$ **β)** Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει: $2\left(x^2+y^2\right)\ge\left(x+y\right)^2$

6 μονάδες

Β2. Αν $4<x<5$ και $5<y<6$, να βρείτε τις τιμές μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $x+y$ **β)** $x-y$

6 μονάδες

Β3. Αν $3<x<4$, να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση $|x-3|+|x-4|$.

4 μονάδες

B4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του:

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\lvert x-1\rvert \le 2$	$d(x,1)\le 2$	$[-1,3]$
$\lvert x-3\rvert \le 2$		
	$d(x,-2)\le 4$	
		$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

9 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha=\sqrt{\sqrt{3}}-\sqrt{\sqrt{2}}$ και $\beta=\sqrt{\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{2}}$ καθώς και η παράσταση $\Pi=|\alpha\beta|+\alpha\beta-|\alpha|\beta-\alpha|\beta|$. Να αποδείξετε ότι:

Γ1. $\alpha^2+\beta^2=2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

6 μονάδες

Γ2. $\alpha=\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}$ και $\beta=\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}$

4 μονάδες

Γ3. $\sqrt[5]{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[10]{\alpha^3}=\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}$

6 μονάδες

Γ4. $\Pi=\left(|\alpha|-\alpha\right)\left(|\beta|-\beta\right)$

5 μονάδες

Γ5. $\Pi=0$

4 μονάδες

Θέμα Δ

Δ1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $\left(1+2\sqrt{5}\right)^2$ και $\left(1-2\sqrt{5}\right)^2$.

5 μονάδες

Δ2. Αν $A=\sqrt{21+4\sqrt{5}}-\sqrt{21-4\sqrt{5}}$, να δείξετε ότι $A=2$.

5 μονάδες

Δ3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει:

$$|x-A|+|y-2024|=2024-y$$

8 μονάδες

Δ4. Να αποδείξετε ότι $9\alpha^2-6\alpha+A>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό α.

7 μονάδες

Καλή τύχη!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά: $|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2 \le (|\alpha|+|\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 \le |\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2 \Leftrightarrow$
$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \le \alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2 \Leftrightarrow 2\alpha\beta \le 2|\alpha\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \le |\alpha\beta|$ που ισχύει.

Η ισότητα $|\alpha\beta| = \alpha\beta$ ισχύει αν και μόνον αν $\alpha\beta \ge 0$, δηλαδή αν και μόνον αν οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

Α2. Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με |α| και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \ge 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Α3. α) Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

Α4.

Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ
α^3	α^2	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	β^2	β^3

Αιτιολόγηση

$0<\alpha<1 \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} 0<\alpha^2<\alpha \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} \alpha^3<\alpha^2$ άρα $0<\alpha^3<\alpha^2<\alpha<1$

$\beta>1 \overset{\beta>0}{\Rightarrow} \beta^2>\beta \overset{\beta>0}{\Rightarrow} \beta^3>\beta^2$ άρα $1<\beta<\beta^2<\beta^3$

Ακόμη $0<\alpha^2<\alpha<1 \Rightarrow 0<\sqrt{\alpha^2}<\sqrt{\alpha}<\sqrt{1} \Rightarrow 0<|\alpha|<\sqrt{\alpha}<1 \Rightarrow 0<\alpha<\sqrt{\alpha}<1$

$1<\beta<\beta^2 \Rightarrow \sqrt{1}<\sqrt{\beta}<\sqrt{\beta^2} \Rightarrow 1<\sqrt{\beta}<|\beta| \Rightarrow 1<\sqrt{\beta}<\beta$

Θέμα Β

Β1. α) $x^2-6x \ge -9 \Leftrightarrow x^2-6x+9 \ge 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \ge 0$, που ισχύει

β) $2(x^2+y^2) \ge (x+y)^2 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2 \ge x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow$
$2x^2+2y^2-x^2-2xy-y^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$, που ισχύει.

Β2. α) Από τις ανισότητες $4<x<5$ και $5<y<6$ με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε $9<x+y<11$.

β) Είναι $4<x<5$ και $5<y<6 \Leftrightarrow -5>-y>-6 \Leftrightarrow -6<-y<-5$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε $-2<x-y<0$.

Β3. Είναι $x>3 \Leftrightarrow x-3>0$, $x<4 \Leftrightarrow x-4<0$, οπότε $|x-3|+|x-4| = x-3-x+4 = 1$

Β4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του:

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x-1\| \le 2$	$d(x,1) \le 2$	$[-1,3]$
$\|x-3\| \le 2$	$d(x,3) \le 2$	$[1,5]$
$\|x+2\| \le 4$	$d(x,-2) \le 4$	$[-6,2]$
$\|x\| \ge 2$	$d(x,0) \ge 2$	$(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$

- $|x-3|\le 2 \Leftrightarrow d(x,3)\le 2$ και $|x-3|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x-3\le 2 \Leftrightarrow 1\le x\le 5 \Leftrightarrow x\in[1,5]$
- $d(x,-2)\le 4 \Leftrightarrow |x-(-2)|\le 4 \Leftrightarrow |x+2|\le 4$ και $|x+2|\le 4 \Leftrightarrow -4\le x+2\le 4 \Leftrightarrow -6\le x\le 2 \Leftrightarrow x\in[-6,2]$
- $x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty) \Leftrightarrow (x\le -2 \text{ ή } x\ge 2) \Leftrightarrow |x|\ge 2$ και $|x|\ge 2 \Leftrightarrow |x-0|\ge 2 \Leftrightarrow d(x,0)\ge 2$.

Θέμα Γ

Γ1. $\alpha^2+\beta^2=\left(\sqrt{\sqrt{3}}-\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2=$

$=\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^2-\cancel{2\sqrt{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{2}}}+\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^2+\cancel{2\sqrt{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{2}}}+\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2=$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

Γ2. Είναι $\sqrt{\sqrt{3}}=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}$ και $\sqrt{\sqrt{2}}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$ άρα $\alpha=\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}$ και $\beta=\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}$.

Γ3. $\sqrt[5]{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[10]{\alpha^3}=\alpha^{\frac{1}{5}}\cdot\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\alpha^{\frac{3}{10}}=\alpha^{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}}=\alpha^{\frac{2}{10}+\frac{5}{10}+\frac{3}{10}}=\alpha^{\frac{10}{10}}=\alpha=\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}$.

Γ4. $\Pi=|\alpha\beta|+\alpha\beta-|\alpha|\beta-\alpha|\beta|=|\alpha||\beta|+\alpha\beta-|\alpha|\beta-\alpha|\beta|=|\alpha|(|\beta|-\beta)-\alpha(|\beta|-\beta)=(|\alpha|-\alpha)(|\beta|-\beta)$

Γ5. Είναι $\alpha>0\Leftrightarrow\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}>0\Leftrightarrow\sqrt[4]{3}>\sqrt[4]{2}\Leftrightarrow\sqrt[4]{3}^4>\sqrt[4]{2}^4\Leftrightarrow 3>2$ που ισχύει και
$\beta=\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}>0$ που ισχύει αφού $\sqrt[4]{3}>0$ και $\sqrt[4]{2}>0$. Άρα $\Pi=(\alpha-\alpha)(\beta-\beta)=0$.

Θέμα Δ

Δ1. $\left(1+2\sqrt{5}\right)^2=1^2+2\cdot1\cdot2\sqrt{5}+\left(2\sqrt{5}\right)^2=1+4\sqrt{5}+20=21+4\sqrt{5}$ και

$\left(1-2\sqrt{5}\right)^2=1^2-2\cdot1\cdot2\sqrt{5}+\left(2\sqrt{5}\right)^2=1-4\sqrt{5}+20=21-4\sqrt{5}$ **.**

Δ2. Από το ερώτημα (Δ1),αντικαθιστώντας τις υπόριζες ποσότητες , θα έχουμε:

$$A=\sqrt{21+4\sqrt{5}}-\sqrt{21-4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(1+2\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(1-2\sqrt{5}\right)^2}=\left|1+2\sqrt{5}\right|-\left|1-2\sqrt{5}\right|=$$

$=\left(1+2\sqrt{5}\right)-\left(2\sqrt{5}-1\right)=1+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}+1=2$, γιατί $1+2\sqrt{5}>0$ και $1-2\sqrt{5}<0$, εφόσον είναι $1<2\sqrt{5}\Leftrightarrow 1^2<\left(2\sqrt{5}\right)^2\Leftrightarrow 1<20$,που ισχύει.

Δ3. Γνωρίζουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $|\alpha|\ge-\alpha$, οπότε και $|y-2024|\ge 2024-y$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει ισοδύναμα όταν $y-2024\le 0\Leftrightarrow y\le 2024$.
Επειδή , λοιπόν , ισχύει $|y-2024|\ge 2024-y\ge 0$ και $|x-A|=|x-2|\ge 0$, η ισότητα $|x-2|+|y-2024|=2024-y$ αληθεύει μόνο όταν $|x-2|=0$ και $|y-2024|=2024-y$, δηλαδή $x=2$ και $y-2024\le 0\Leftrightarrow y\le 2024$. Άρα, $x=2$ και $y\le 2024$.

Δ4. Θα δείξουμε ότι ισχύει $9\alpha^2 - 6\alpha + 2 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό α. Είναι:
$9\alpha^2 - 6\alpha + 2 = 9\alpha^2 - 6\alpha + 1 + 1 = (3\alpha - 1)^2 + 1 > 0$ που είναι αληθής για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, επειδή $(3\alpha - 1)^2 \geq 0$ άρα $(3\alpha - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.