14ο Λύκειο Περιστερίου
Κριτήριο αξιολόγησης

Νοέμβριος 2017

Ον/νυμο …………………………………………………………………………….. **Ομάδα Α**

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ και $B(4,6)$. Να βρείτε:

α) Το μέσο Γ του ΑΒ. μονάδες 5

β) Το μέτρο του διανύσματος ΑΒ. μονάδες 7

γ) Σημείο Μ του επιπέδου για το οποίο ισχύει ότι $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$. μονάδες 15

δ) Σημείο Ζ του άξονα x΄x τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΖΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. μονάδες 15

ε) Το συμμετρικό του Α ως προς το Β. μονάδες 15

στ) Σημείο Κ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{AK} // x'x$ και $|\overrightarrow{AK}| = 3$. μονάδες 18

ζ) Αν $\Delta(6,2)$, να βρείτε σημείο Ε ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι παραλληλόγραμμο. μονάδες 10

η) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και $\Theta(-5,-6)$ είναι συνευθειακά. μονάδες 15

14ο Λύκειο Περιστερίου
Διαγώνισμα στις συντεταγμένες διανύσματος

Νοέμβριος 2017

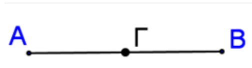
Ον/νυμο ………………………………………………………………………….. **Ομάδα Β**

Δίνονται τα σημεία $A(-2,3)$ και $B(4,-5)$. Να βρείτε:

α) Το μέτρο του διανύσματος ΑΒ. μονάδες 5
β) Το μέσο Γ του ΑΒ. μονάδες 7
γ) Σημείο Ζ του άξονα y΄y τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΖΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. μονάδες 15
δ) Σημείο Μ του επιπέδου για το οποίο ισχύει ότι $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$. μονάδες 15
ε) Το συμμετρικό του Α ως προς το Β. μονάδες 15
στ) Σημείο Κ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{AK} // y'y$ και $|\overrightarrow{AK}| = 2$. μονάδες 18
ζ) Αν $\Delta(6,2)$, να βρείτε σημείο Ε ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι παραλληλόγραμμο. μονάδες 10
η) Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και $\Theta(-5,7)$ είναι συνευθειακά. μονάδες 15

Λύσεις

Ομάδα Α



α) $x_\Gamma = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$, $y_\Gamma = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{2+6}{2} = 4$ άρα $\Gamma\left(\dfrac{5}{2}, 4\right)$.

β) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = 5$

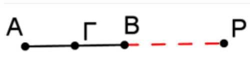
γ) Έστω $M(x,y)$, τότε $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow (x-1, y-2) = 2(4-x, 6-y) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 8-2x \\ y-2 = 12-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{14}{3} \end{cases}$, άρα

$M\left(3, \dfrac{14}{3}\right)$

δ) Έστω $Z(\zeta, 0)$, τότε: $(ZA) = (ZB) \Leftrightarrow$

$\sqrt{(\zeta-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(\zeta-4)^2 + (0-6)^2} \Leftrightarrow \cancel{\zeta^2} - 2\zeta + 1 + 4 = \cancel{\zeta^2} - 8\zeta + 16 + 36 \Leftrightarrow 6\zeta = 47 \Leftrightarrow \zeta = \dfrac{47}{6}$,

άρα $Z\left(\dfrac{47}{6}, 0\right)$.



ε) Έστω P το συμμετρικό του A ως προς το B, τότε το B είναι μέσο του AP και ισχύει ότι:

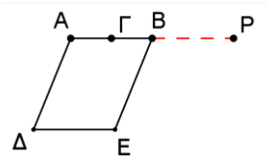
$x_B = \dfrac{x_A + x_P}{2} \Leftrightarrow 4 = \dfrac{1 + x_P}{2} \Leftrightarrow 8 = 1 + x_P \Leftrightarrow x_P = 7$,

$y_B = \dfrac{y_A + y_P}{2} \Leftrightarrow 6 = \dfrac{2 + y_P}{2} \Leftrightarrow 12 = 2 + y_P \Leftrightarrow y_P = 10$, άρα $P(7,10)$.

στ) Έστω $K(x_1, y_1)$, τότε $\overrightarrow{AK} = (x_1 - 1, y_1 - 2)$

Είναι $\overrightarrow{AK} // x'x \Leftrightarrow y_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 2$, τότε $\overrightarrow{AK} = (x_1 - 1, 0)$ και

$\left|\overrightarrow{AK}\right| = 3 \Leftrightarrow |x_1 - 1| = 3 \Leftrightarrow x_1 - 1 = \pm 3 \Leftrightarrow x_1 = 4$ ή $x_1 = -2$ άρα $K(4,2)$ ή $(-2,2)$



ζ) Έστω $E(x_2, y_2)$

ΑΒΕΔ παραλληλόγραμμο αν και μόνο αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta E} \Leftrightarrow$

$(4-1, 6-2) = (x_2 - 6, y_2 - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = x_2 - 6 \\ 4 = y_2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 6 \end{cases}$, άρα $E(9,6)$

η) $A(1,2)$, $B(4,6)$, $\Theta(-5,-6)$.

$\overrightarrow{AB} = (4-1, 6-2) = (3,4)$, $\overrightarrow{B\Theta} = (-5-4, -6-6) = (-9, -12)$, $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Theta}\right) = 0$

Ομάδα Β

2. α) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(4+2)^2 + (-5-3)^2} = 10$

β) $x_\Gamma = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-2+4}{2} = 1,\ y_\Gamma = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3-5}{2} = -1$ άρα $\Gamma(1,-1)$.

γ) Έστω $Z(0,\zeta)$, τότε: $(ZA) = (ZB) \Leftrightarrow$

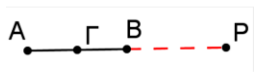
$\sqrt{(0+2)^2 + (\zeta-3)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (\zeta+5)^2} \Leftrightarrow 4 + \cancel{\zeta^2} - 6\zeta + 9 = 16 + \cancel{\zeta^2} + 10\zeta + 25 \Leftrightarrow 16\zeta = -28 \Leftrightarrow \zeta = -\dfrac{7}{4}$,

άρα $Z\left(0,-\dfrac{7}{4}\right)$.

δ) Έστω $M(x,y)$, τότε $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow (x+2, y-3) = 2(4-x,-5-y) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 8-2x \\ y-3 = -10-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -\dfrac{7}{3} \end{cases}$, άρα

$M\left(3,-\dfrac{7}{3}\right)$.

ε) Έστω P το συμμετρικό του A ως προς το B, τότε το B είναι μέσο του AP και ισχύει ότι:



$x_B = \dfrac{x_A + x_P}{2} \Leftrightarrow 4 = \dfrac{-2 + x_P}{2} \Leftrightarrow 8 = -2 + x_P \Leftrightarrow x_P = 10$,

$y_B = \dfrac{y_A + y_P}{2} \Leftrightarrow -5 = \dfrac{3 + y_P}{2} \Leftrightarrow -10 = 3 + y_P \Leftrightarrow y_P = -13$, άρα $P(10,-13)$.

στ) Έστω $K(x_1, y_1)$, τότε $\overrightarrow{AK} = (x_1 + 2, y_1 - 3)$

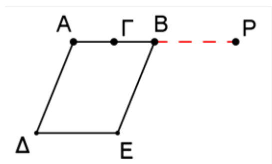
Είναι $\overrightarrow{AK} // yy \Leftrightarrow x_2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2$, τότε $\overrightarrow{AK} = (0, y_1 - 3)$ και

$\left|\overrightarrow{AK}\right| = 2 \Leftrightarrow |y_1 - 3| = 2 \Leftrightarrow y_1 - 3 = \pm 2 \Leftrightarrow y_1 = 5$ ή $y_1 = 1$, άρα $K(-2,5)$ ή $(-2,1)$

ζ) Έστω $E(x_2, y_2)$

ΑΒΕΔ παραλληλόγραμμο αν και μόνο αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta E} \Leftrightarrow$

$(4+2,-5-3) = (x_2 - 6, y_2 - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = x_2 - 6 \\ -8 = y_2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 12 \\ y_2 = -6 \end{cases}$, άρα $E(12,-6)$



η) $A(-2,3), B(4,-5), \Gamma(-5,7)$.

$\overrightarrow{AB} = (4+2,-5-3) = (6,-8)$, $\overrightarrow{B\Theta} = (-5-4, 7+5) = (-9.12)$, $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Theta}\right) = 0$.