# Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στα Μαθηματικά προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου από το Askisopolis 2024 - 2025


**Αντώνης Βαλέργας**
**Αποστόλης Κακαβάς**
**Στέλιος Μιχαήλογλου**
**Άγγελος Μπλιάς**
**Θανάσης Νικολόπουλος**
**Δημήτρης Πατσιμάς**
**Βαγγέλης Ραμαντάνης**
**Νίκος Σαμπάνης**
**Βαγγέλης Τόλης**
**Νίκος Τούντας**
**Ισαάκ Χιονίδης**

# Μαθηματικά προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου
## 1ο Διαγώνισμα
## Ύλη: Έως Μονοτονία- Ακρότατα

**18-9-2024**

## Θέμα Α

**Α1.** Πότε δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες;

Μονάδες 3

**Α2.** Πότε μια συνάρτηση f: $A \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 3

**Α3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν για μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \geq m$ για κάθε $x \in A$, τότε η f έχει ελάχιστο το m».

**α)** Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 1+3

**Α4.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν $f, g$ είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε $f \circ g = g \circ f$».

**α)** Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 1+3

**Α5.**Να μεταφέρετε στη κόλα σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση στη παρακάτω άσκηση:

Έστω $f(x) = \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Αν $(fof)(x) = 9x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

Α. α = β= 1 Β. α =1 και β = 3 Γ. α = β = 3 Δ. α = 3 και β = 1 Ε. α = 9 και β = 4

Μονάδες 3

**Α6.** Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

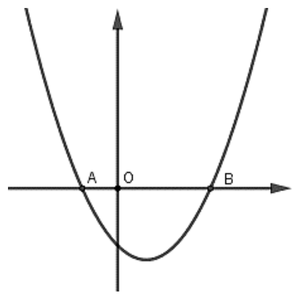
**α)**Συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B είναι μία διαδικασία κατά την οποία κάποια από τα στοιχεία ενός συνόλου A αντιστοιχίζονται σε στοιχεία του B.

**β)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ είναι ένα ημικύκλιο.

**γ)** Η γραφική παράσταση της συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y όταν β > 0.

**δ)** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 1$.

Αν Α(ω,0), Β(φ,0) τότε ω + φ = 1




Μονάδες 4x2

## Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln\frac{x}{x+1}$ και $g(x) = \ln x - \ln(x+1)$.

**Β1.** Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες. Αν όχι, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο στο οποίο να είναι ίσες.

Μονάδες 5

**Β2.** Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

**Β3.** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν τέμνουν τους άξονες.

Μονάδες 6

**Β4.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 7

## Θέμα Γ

**Γ1. α)** Δείξτε ότι $x+\frac{1}{x}\geq 2$ για κάθε $x>0$

**β)** Δείξτε ότι $x+\frac{1}{x}\leq 2$ για κάθε $x<0$.

Μονάδες 2+2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

**Γ2.** Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 6

**Γ3.** Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+x^{2024}=2$.

Μονάδες 8

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι δεν είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 2+5

## Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{\frac{|x^2-4|-x^2+4}{2}}$

**Δ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$.

Μονάδες 4

**Δ2.** Να απλοποιήσετε τον τύπο της $f$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 6

**Δ3.** Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f$ και $g$, όπου

$g(x)=\frac{16}{x^2+4}$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

**Δ4.** Αν $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $\sqrt{4-\text{συν}^2\alpha}<\sqrt{4-\text{συν}^2\beta}$.

Μονάδες 4

**Δ5.** Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη $C_f$ και τον άξονα $x'x$ για κάθε $x\in[-2,2]$.

Μονάδες 6

**Καλή τύχη!**

## Λύσεις

## Θέμα Α

**Α1.** Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

**Α2.** Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

**Α3.α)** Ψευδής
**β) 1ο αντιπαράδειγμα:**
Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + (x+1)^2, x \in \mathbb{R}$ .
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 \geq 0$, $(x+1)^2 \geq 0$, οπότε και $x^2 + (x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$, όμως δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = 0$, αφού η εξίσωση $x_0^2 + (x_0+1)^2 \geq 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.
**2ο αντιπαράδειγμα:**
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ημx, x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \leq ημx \leq 1$ άρα και $f(x) = ημx > -2$. Τότε, για $m = -2$ δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = m \Leftrightarrow ημx_0 = -2$, άρα η συνάρτηση f δεν έχει ελάχιστο το $m = -2$.

**Α4. α)** Ψευδής
**β)** Έστω $f(x) = x+1$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + 1$ και $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ . Είναι φανερό ότι $f \circ g \neq g \circ f$ .

**Α5. Σωστή απάντηση η Δ.**
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = α(αx+β)+β = α^2x + αβ + β$. Είναι $(f \circ f)(x) = 9x + 4$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{cases} α^2 = 9 \\ αβ + β = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} α = \pm 3 \\ αβ + β = 4 \ (1) \end{cases}$$

Επειδή $α > 0$, είναι $α = 3$ και τότε η $(1)$ γίνεται $3β + β = 4 \Leftrightarrow 4β = 4 \Leftrightarrow β = 1$ και $f(x) = 3x + 1$.

**Α6.** α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ

## Θέμα Β

**Β1.** Για να ορίζεται η f πρέπει:

$$\frac{x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 0 \text{ , άρα } D_f = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) .$$

Για να ορίζεται η g πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x > 0$ , άρα $D_g = (0, +\infty)$ .

Επειδή $D_f \neq D_g$ είναι $f \neq g$ . Όταν όμως $x \in (0, +\infty)$ είναι $f(x) = \ln\frac{x}{x+1} = \ln x - \ln(x+1) = g(x)$ .

Άρα οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες στο $(0, +\infty)$ .

**Β2.** Είναι $g(x) = \ln\frac{x}{x+1} = \ln\frac{x+1-1}{x+1} = \ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$.

Έστω $0 < x_1 < x_2$ , τότε: $x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1+1} < -\frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow$

$$1-\frac{1}{x_1+1}<1-\frac{1}{x_2+1}\Leftrightarrow \ln\left(1-\frac{1}{x_1+1}\right)<\ln\left(1-\frac{1}{x_2+1}\right)\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow g\nearrow(0,+\infty).$$

**Β3.** Επειδή $0\notin D_f$ και $0\notin D_g$ οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν τέμνουν τον άξονα y΄y.

$f(x)=0\Leftrightarrow \ln\frac{x}{x+1}=0\Leftrightarrow \frac{x}{x+1}=1\Leftrightarrow x=x+1$ αδύνατο, οπότε η $C_f$ δεν τέμνει τον x΄x

$g(x)=0\Leftrightarrow \ln x-\ln(x+1)=0\Leftrightarrow \ln x=\ln(x+1)\Leftrightarrow x=x+1$ αδύνατο, οπότε η $C_g$ δεν τέμνει τον x΄x.

**Β4.** Για να ορίζεται η $f\circ g$ πρέπει:

$$\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \ln\frac{x}{x+1}>0 \text{ ή } \ln\frac{x}{x+1}<-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \frac{x}{x+1}>1 \text{ ή } \frac{x}{x+1}<\frac{1}{e}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x>0\\ x>x+1 \text{ αδύνατη}\end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases}x>0\\ ex<x+1\Leftrightarrow ex-x<1\Leftrightarrow (e-1)x<1\Leftrightarrow x<\frac{1}{e-1}\end{cases}\Rightarrow x\in\left(0,\frac{1}{e-1}\right).$$

Άρα $D_{f\circ g}=\left(0,\frac{1}{e-1}\right)$ και $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln\frac{g(x)}{g(x)+1}=\ln\frac{\ln\frac{x}{x+1}}{\ln\frac{x}{x+1}+1}$ .

## Θέμα Γ

**Γ1. α)** $x+\frac{1}{x}\geq 2\underset{x>0}{\Leftrightarrow} x\cdot x+x\cdot\frac{1}{x}\geq 2\cdot x\Leftrightarrow x^2+1\geq 2x\Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0\Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$ που ισχύει .

**β)** $x+\frac{1}{x}\leq 2\underset{x<0}{\Leftrightarrow} x\cdot x+x\cdot\frac{1}{x}\geq 2\cdot x\Leftrightarrow x^2+1\geq 2x\Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0\Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$ που ισχύει .

**Γ2**. Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, λόγω του Γ1 , έχουμε $e^x+e^{-x}=e^x+\frac{1}{e^x}\geq 2$ , $x\in\mathbb{R}$. Οπότε:

$f(x)\geq 2\Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έτσι, η f στη θέση 0 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

**Γ3.** $f(x)+x^{2024}=2\Leftrightarrow f(x)=2-x^{2024}, x\in\mathbb{R}$ . Αν η προηγούμενη εξίσωση έχει λύση $x_0\in\mathbb{R}$, τότε είναι $f(x_0)=2-x_0^{2024}$. Από ερώτημα Γ2 έχουμε $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έτσι και $f(x_0)\geq 2$, οπότε και $2-x_0^{2024}\geq 2\Leftrightarrow x_0^{2024}\leq 0$. Άρα πρέπει να είναι $x_o=0$. Επομένως αν η εξίσωση $f(x)=2-x^{2024}$ έχει λύση αυτή πρέπει να είναι το 0. Εύκολα διατυπώνουμε ότι πράγματι η τιμή 0 του x αποτελεί λύση της εξίσωσης.

**Γ4.** Για κάθε $x\in A_f=\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$, άρα η f είναι άρτια

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε για κάθε $x>0$ είναι $-x<x\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(-x)<f(x)$ που είναι άτοπο.

Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε για κάθε $x>0$ είναι $-x<x\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(-x)>f(x)$ που είναι άτοπο.

Επομένως η f δεν μπορεί να είναι γνησίως μονότονη.

## Θέμα Δ

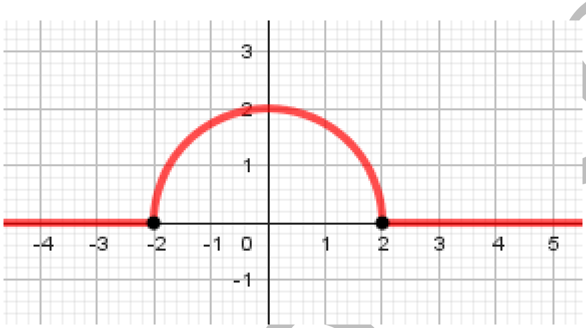
**Δ1.** Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha| \geq \alpha$, οπότε και $|x^2-4| \geq x^2-4 \Leftrightarrow |x^2-4| - x^2 + 4 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x^2-4|-x^2+4}{2}}$ έχει πεδίο ορισμού $D_f = \mathbb{R}$.

**Δ2.** Αν $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$ τότε $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4-x^2+4}{2}} = 0$, αν $x \in [-2,2]$ τότε

$$f(x) = \sqrt{\frac{-x^2+4-x^2+4}{2}} = \sqrt{\frac{8-2x^2}{2}} = \sqrt{4-x^2}, \text{ άρα } f(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty) \\ \sqrt{4-x^2}, x \in [-2,2] \end{cases}.$$

Αν $x \in [-2,2]$ τότε $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = y \Leftrightarrow 4-x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4$.

Οπότε η $C_f$ είναι το θετικό ημικύκλιο του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2 και δύο ημιευθείες επί του άξονα $x'x$, η μία με αρχή το σημείο 2 και εκτεινόμενη προς το $+\infty$ και η άλλη με αρχή το σημείο $-2$ και εκτεινόμενη προς το $-\infty$.




**Δ3.** Αν $x \in [-2,2] \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow 4 \leq x^2+4 \leq 8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \geq \dfrac{1}{x^2+4} \geq \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 4 \geq \dfrac{16}{x^2+4} \geq 2 \Leftrightarrow g(x) \geq 2$ με το "=" να ισχύει για x = 2 και x = - 2.

Επίσης $f(x) \leq 2$, με το "=" να ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα η $C_g$ είναι πάνω από την $C_f$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Δ4.** Αν $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 1 > \sigma\upsilon\nu\alpha > \sigma\upsilon\nu\beta > 0 \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(\sigma\upsilon\nu\alpha) < f(\sigma\upsilon\nu\beta) \Leftrightarrow \sqrt{4-\sigma\upsilon\nu^2\alpha} < \sqrt{4-\sigma\upsilon\nu^2\beta}$.

**2ος τρόπος**

Για κάθε $\alpha,\beta \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha > \sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha > \sigma\upsilon\nu^2\beta \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu^2\alpha < -\sigma\upsilon\nu^2\beta \Leftrightarrow$

$4-\sigma\upsilon\nu^2\alpha < 4-\sigma\upsilon\nu^2\beta \Leftrightarrow \sqrt{4-\sigma\upsilon\nu^2\alpha} < \sqrt{4-\sigma\upsilon\nu^2\beta}$.

**Δ5.** Αν $x \in [-2,2]$ τότε το μέρος της $C_f$ που δεν συμπίπτει με τον $x'x$ είναι το ημικύκλιο του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2, άρα είναι $E = \dfrac{1}{2}\pi\rho^2 = \dfrac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 2\pi$.