Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Εκφωνήσεις

2024-2025

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr

Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

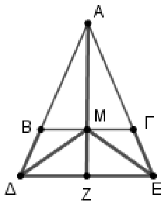
Τρίγωνα

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

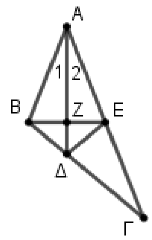
Θέμα 2ο

12635. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης του ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ προς τα Β,Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ ώστε ΒΔ=ΓΕ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ.

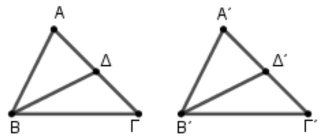
12636. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ αντίστοιχα ώστε ΒΔ=ΓΕ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ.
γ) Αν η ΑΜ τέμνει την ΔΕ στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ.



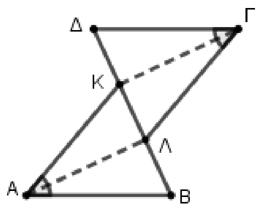
12705. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε ΑΓ = 2ΑΒ. Η διχοτόμος του ΑΔ τέμνει την διάμεσο ΒΕ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΑΒ = ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2}$.
β) ΔΒ = ΔΕ.
γ) $ΑΖ \perp ΒΕ$



13518. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του σχήματος με ΑΓ = Α΄Γ΄ και ΑΒ = Α΄Β΄. Αν οι διάμεσοι ΒΔ και Β΄Δ΄ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:
α) $\hat{Α} = \hat{Α}'$
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

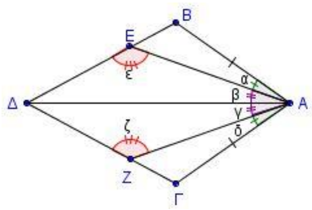


13826. Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ του σχήματος έχουν ΑΒ = ΓΔ = ΑΚ= ΓΛ και $\hat{Α} = \hat{Γ}$.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ίσα και ότι έχουν ΒΚ = ΔΛ.
β) Έστω ότι Λ και Κ είναι τα μέσα των ΒΚ και ΔΛ αντίστοιχα:
i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα ΒΛ, ΛΚ και ΚΔ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
ii. Να αποδείξετε ότι οι ΑΛ και ΓΚ είναι κάθετες στην ευθεία ΚΛ.

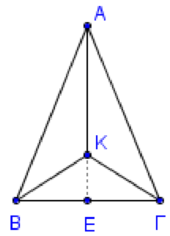


34493. Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και Α΄Β΄Γ΄ $(Α'Β' = Α'Γ')$.
α) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $ΑΒ = Α'Β'$ και $\hat{Α} = \hat{Α}'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $ΑΓ = Α'Γ'$ και $\hat{Β} = \hat{Β}'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

34511. Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{α} = \hat{δ}$, $\hat{β} = \hat{γ}$ και $ΑΒ = ΑΓ$,να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.
β) Οι γωνίες ε και ζ είναι ίσες



34773. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $ΚΒ = ΚΓ$.



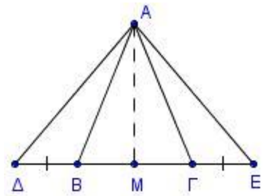
α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα.

ii. η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ.

γ) Η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι η ΚΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΚΓ.

34774. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και ΑΜ η διάμεσός του. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε $ΒΔ = ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι:



α) $Α\hat{Β}Δ = Α\hat{Γ}Ε$.

β) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

γ) η ΑΜ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΑΔΕ.

34780. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $ΑΔ = ΑΒ$ και $ΑΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.

β) Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΕΔ στο Ζ, να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα.

ii. $ΖΔ = \frac{ΕΔ}{2}$.

34784. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε $ΜΒ = ΜΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσα.

β) Η ευθεία ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $Β\hat{Μ}Γ$.

36099. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα.

γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές.

36100.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ (ΚΑ=ΚΒ) και ΚΓ διχοτόμος της γωνίας $\hat{Κ}$.Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) παίρνουμε σημείο Μ, έτσι ώστε ΑΛ=ΒΜ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές.

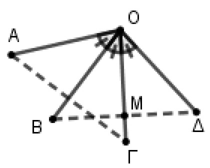
β) η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ .

36104. Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οx και Οy αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $ΟΑ = ΟΒ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΑ = ΜΒ$

β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ.

36110. Αν στο σχήμα που ακολουθεί είναι $Α\hat{Ο}Β = Β\hat{Ο}Γ = Γ\hat{Ο}Δ$ και $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ$,τότε να αποδείξετε ότι:



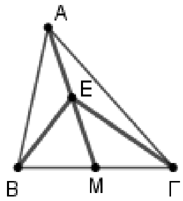
α) $ΑΓ = ΒΔ$

β) το Μ είναι μέσο του ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ.

36170. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ
αντίστοιχα τέτοια, ώστε $AE = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \Gamma\Delta$ **β)** $B\Delta = \Gamma E$ **γ)** $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$

36333. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ. Αν $B\Gamma = 2BE$, να αποδείξετε ότι:

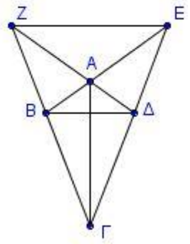


α) $A\hat{E}B = E\hat{M}\Gamma$.

β) $AB = E\Gamma$.

Θέμα 4ο

14880. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν Ε το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΑ και ΓΒ, να αποδείξετε ότι:

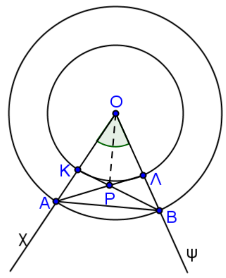


α) Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ.

β) $\Gamma Z = \Gamma E$.

γ) $EZ \parallel B\Delta$.

37095. Δίνεται οξεία γωνία xOψ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O,ρ_1) και (O,ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Οx στα σημεία Κ,Α και την Οψ στα Λ,Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

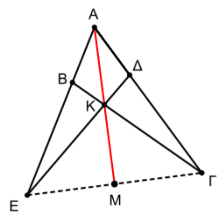


α) $A\Lambda = BK$.

β) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ,ΒΚ.

γ) Η ΟΡ διχοτομεί τη γωνία $x\hat{O}\psi$.

37124.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΓ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ, να αποδείξετε ότι:



α) $B\Gamma = \Delta E$.

β) $BK = K\Delta$.

γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.

δ) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ.

Θέμα 3ο

12069. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) παίρνουμε στην πλευρά ΑΒ σημείο Δ, ώστε ΔΒ = 2ΑΔ, και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε, ώστε ΕΓ= 2ΑΕ. Το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τμήματα ΔΒ και ΕΓ είναι ίσα.

ii. Το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

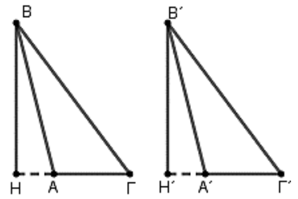
β) Αν Ρ το σημείο τομής των τμημάτων ΒΕ και ΓΔ να δείξετε ότι:

i. Οι γωνίες $\Gamma\hat{B}E$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ίσες.

ii. Το τμήμα ΡΜ διχοτομεί τη γωνία $B P \Gamma$.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (21 ασκήσεις)

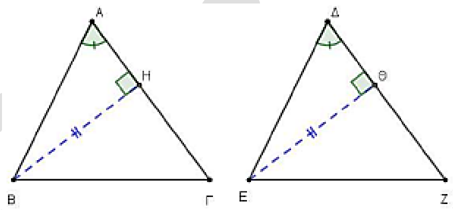
Θέμα 2ο



12149. Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ $\left(\hat{A} > 90^\circ\right)$ και Α΄Β΄Γ΄ $\left(\hat{A}' > 90^\circ\right)$ με γ = γ΄ και β = β΄. Αν τα ύψη ΒΗ και Β΄Η΄ των τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

α) $B\hat{A}H = B'\hat{A}'H'$.

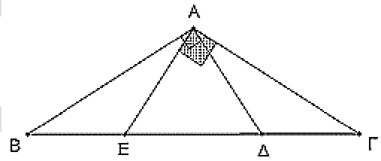
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.



13517. Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{E}Z$. Αν τα ύψη τους ΒΗ και ΕΘ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = ΔΕ.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα .



13533. Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και η κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) ΒΕ = ΓΔ.

34387. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ των γωνιών Β και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα.

β) Έστω ΕΗ και ΔΖ οι κάθετες από τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα στη ΒΓ.
Να αποδείξετε ότι ΕΗ = ΔΖ.

34401. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα.

β) $A\Delta = AE$.

34404. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$ και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $MK = M\Lambda$.

β) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ.

34405. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ φέρουμε κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $M\Delta = ME$.

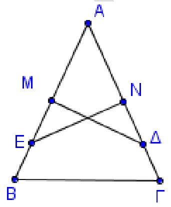
β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

34496. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.
β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

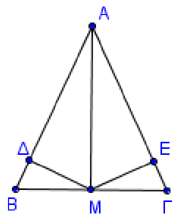
34497. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα.
β) Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ.

34499. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^{\circ}\right)$ και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Α). Να αποδείξετε ότι:
α) $AB = BE$
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα.

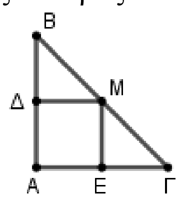
36329. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Αν $M\Delta = NE$ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
β) Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = NE$.



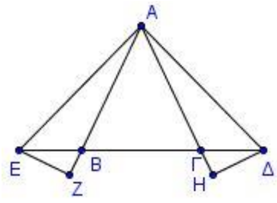
36330. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Αν είναι $M\Delta = ME$, τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα.
β) Αν είναι $AB = A\Gamma$ και Μ το μέσο του ΒΓ, τότε $M\Delta = ME$.



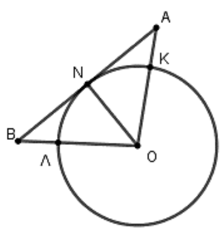
36331. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Αν ΜΔ = ΜΕ τότε:
i. τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα.
ii. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΜΕ.



36332. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην ευθεία ΑΓ και από το Ε φέρουμε ΕΖ κάθετη στην ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) $A\Delta = AE$ **β)** $EZ = \Delta H$



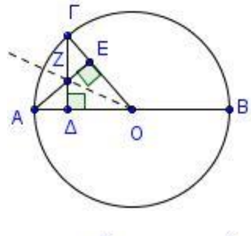
36344. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Ν του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του Ν θεωρούμε σημεία Α και Β, τέτοια ώστε ΝΑ=ΝΒ. Οι ΟΑ και ΟΒ τέμνουν τον κύκλο στα Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές.
β) Το σημείο Ν είναι μέσο του τόξου ΚΛ.



36345. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΟΕ είναι ισοσκελές.

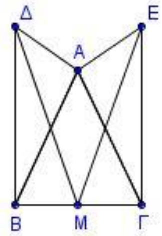
β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία ΑΟΓ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ.



37012. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ})$. Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ τα τμήματα $\text{ΒΔ}\perp\text{ΒΓ}$ και $\text{ΓΕ}\perp\text{ΒΓ}$ τέτοια, ώστε $\text{ΒΔ}=\text{ΓΕ}$. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα.

β) $\text{ΑΔ}=\text{ΑΕ}$.



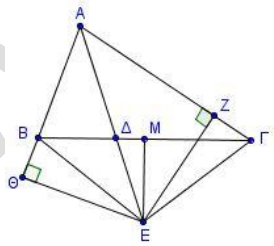
Θέμα 4ο

1707. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ,Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ,ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

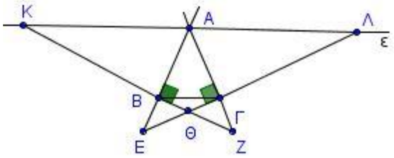
α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα.

γ) $\text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Ε}+\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Ε}=180^\circ$.



1875. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α. Η κάθετη στη πλευρά ΑΒ στο Β τέμνει την ε στο Κ και την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Η κάθετη στη πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.



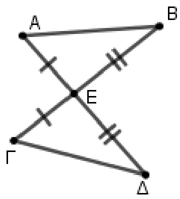
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\text{ΑΖ}=\text{ΑΕ}$ **ii.** $\text{ΑΚ}=\text{ΑΛ}$

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η ΑΘ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Θ το σημείο τομής των ΚΖ,ΕΛ. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

13839. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΓΕ και ΒΕ=ΕΔ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα.



β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις ΕΗ και ΕΘ του σημείου Ε από τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ, αντίστοιχα, είναι ίσες.

γ) Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΓΔ προς τα Α και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

37094. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ}$, τότε τα ύψη ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει.

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

Ισοσκελές τρίγωνο – Μεσοκάθετος – Διχοτόμος (10 ασκήσεις)

Θέμα 2ο

34424. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.

β) Οι γωνίες $A\hat{I}B$ και $A\hat{I}\Gamma$ είναι ίσες.

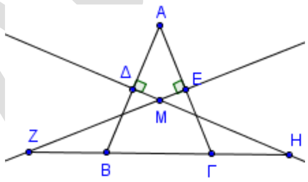
γ) Η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

34503. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα.

β) Το Γ ισαπέχει από τα σημεία Α και Ε και η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΕ.

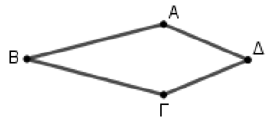
34507. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$. Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο Μ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση ΒΓ στα Η και Ζ.



α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές.

34514. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ = ΒΓ και $\hat{A}=\hat{\Gamma}$.
Να αποδείξετε ότι:

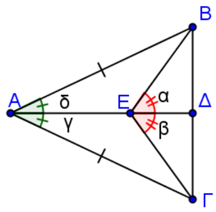


α) $BA\Gamma=B\Gamma A$.

β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.

γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.

34516. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB=A\Gamma\right)$ του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}=\hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

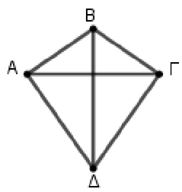


α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.

β) Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.

γ) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

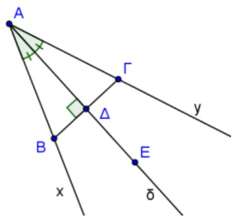
36102. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA=B\Gamma$ και $\Delta A=\Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:



α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.

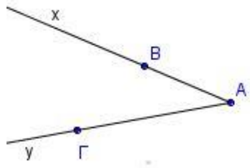
36341. Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της Αδ. Από τυχαίο σημείο Β της Αx φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Αy στο Γ. Να αποδείξετε ότι:



α) $AB=A\Gamma$.

β) Το τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β και Γ.

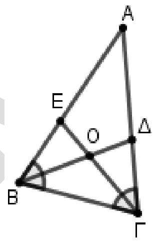
36226. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αχ και Αy παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.



Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:
α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια.
β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια.
γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

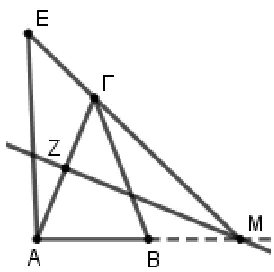
Θέμα 4ο

13854.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ των γωνιών Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο Ο.



α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ.
β) Από τα σημεία Ε και Δ φέρνουμε κάθετες ΕΛ και ΔΚ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι: ΔΚ=ΕΛ.
γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ που η απόστασή του από το σημείο Ε να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και Κ αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

37823.Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΓ=ΒΓ).
Η μεσοκάθετη *ε* της ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΒ (προς το μέρος του Β) στο σημείο Μ και την ΑΓ στο Ζ. Στην προέκταση της ΜΓ (προς το μέρος του Γ) παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΓΕ=ΒΜ.



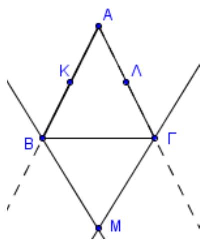
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές.
β) Να δειχτεί ότι τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΓΒΜ είναι ίσα.
γ) Να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΜΕ είναι ισοσκελές.

Ανισοτικές σχέσεις **(6 ασκήσεις)**

2ο Θέμα

34396. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΑΔ = ΔΕ$.
β) $ΑΔ < ΔΒ$.

34415. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$.Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Μ και Κ,Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

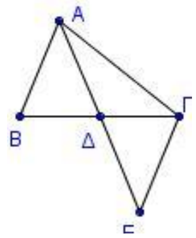


α) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές με $ΜΒ = ΜΓ$.
β) $ΜΚ = ΜΛ$.

34502. Στο διπλανό σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ, ώστε $\Delta\mathrm{E} = \mathrm{A}\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{AB} = \Gamma\mathrm{E}$.

β) $\mathrm{A}\Delta < \dfrac{\mathrm{AB} + \mathrm{A}\Gamma}{2}$.

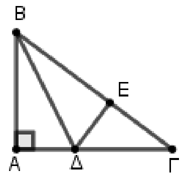


36168. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας Β. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{A}\Delta = \Delta\mathrm{E}$.

β) $\mathrm{A}\Delta < \Delta\Gamma$.

γ) $\mathrm{A}\Gamma > \mathrm{AB}$.



Θέμα 4ο

1749. Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία ε, τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ δεν είναι κάθετη στην ε. Έστω A' το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.

α) Αν η BA' τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία ε διχοτομεί τη γωνία AOA'.

ii. Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία ε.

β) Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι:

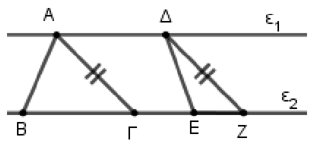
i. $\mathrm{KA} = \mathrm{KA}'$ **ii.** $\mathrm{KA} + \mathrm{KB} > \mathrm{AO} + \mathrm{OB}$

13751. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔΕΖ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{\mathrm{E}} > 90^\circ$. Ισχύει επίσης ότι ΑΓ = ΔΖ.

α) i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές Α και Δ ονομάζοντας τα ΑΗ και ΔΘ αντίστοιχα.

ii. Να αποδείξετε ότι ΗΓ = ΘΖ.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί ΕΖ < ΒΓ.



Σχετική θέση ευθείας – κύκλου (8 ασκήσεις)

Θέμα 2ο

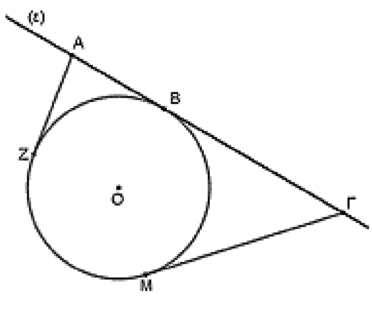
13759. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 6. Έστω d η απόσταση του κέντρου Ο του κύκλου από μια ευθεία (ε). Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:

α) d = 3. **β)** d = 6. **γ)** d = 9.

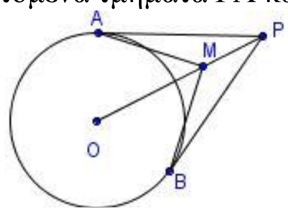
13817. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Β του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε). Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία Α και Γ εκατέρωθεν του Β έτσι ώστε ΒΑ < ΒΓ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΖ και ΓΜ στον κύκλο.

α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = ΑΖ + ΜΓ.

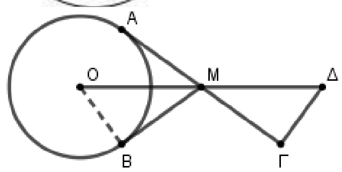


36095. Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB. Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP, να αποδείξετε ότι:



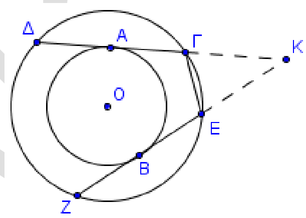
α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.
β) $M\hat{A}O = M\hat{B}O$.

36098. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB. Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα MΓ=MA και την OM κατά τμήμα MΔ=OM.



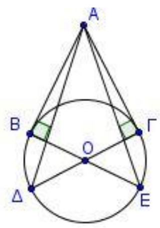
α) Να αποδείξετε ότι MB = MΓ.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και MΓΔ είναι ίσα.

36338. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R (ρ<R). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου (O,R) εφάπτονται στον κύκλο (0,ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$.
β) Αν οι ΔΓ και ΖΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KEΓ είναι ισοσκελές.

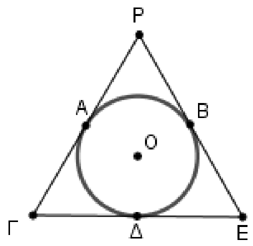
36354. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ. Από σημείο εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AΓ. Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ABE και AΓΔ είναι ίσα.
β) Τα τρίγωνα ABΔ και AΓE είναι ίσα.

Θέμα 4ο

1751. Έστω ότι ο κύκλος (O,ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου PΓE στα σημεία A,Δ και B.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. $P\Gamma = \Gamma\Delta + AP$
ii. $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$
β) Αν $A\Gamma = BE$, να αποδείξετε ότι
i. Το τρίγωνο PΓE είναι ισοσκελές.
ii. Τα σημεία P, O και Δ είναι συνευθειακά.

1752.Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P . Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα PA και PB. H διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. H εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο PΓΔ είναι ισοσκελές.
β) ΓA= ΔB.
γ) η περίμετρος του τριγώνου PΓΔ είναι ίση με PA+ PB.

Σχετική θέση δύο κύκλων **(8 ασκήσεις)**

Θέμα 2ο

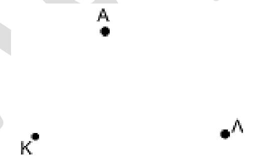
12417. Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r), με R=3, r=2 και KΛ=4. Να αποδείξετε ότι:
α) Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B.

β) $\hat{KA\Lambda} > \hat{A\Lambda K}$.

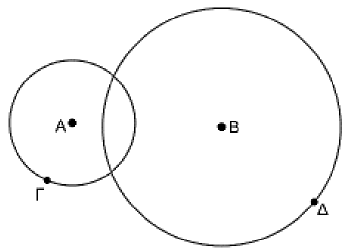
13757.Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,2) και (Λ,5).
α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.
γ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν ο κύκλος (Κ,2) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,5);
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
δ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13758.Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,3) και (Λ,8). Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:
α) ΚΛ = 13. **β)** ΚΛ = 2. **γ)** ΚΛ = 5.
δ) ΚΛ = 11. **ε)** ΚΛ = 9.

13835. Τα σημεία Α, Κ και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο Α απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.
α) Να αποδείξετε ότι 1< ΚΛ < 9.
β) Να βρείτε ένα σημείο Β του επιπέδου διαφορετικό από το Α, που να απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.



13836.α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) ισχύει ρ < R.
Να αποδείξετε ότι $B\Delta - A\Gamma < AB < A\Gamma + B\Delta$.
β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 5 από το Β του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;

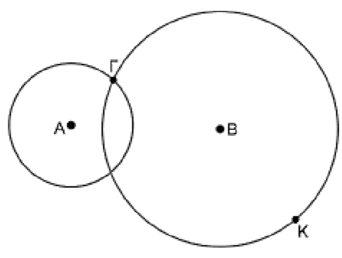


Θέμα 4ο

13823.α) Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) ισχύει ρ < R και ΑΒ = 6.
i. Να αποδείξετε ότι:

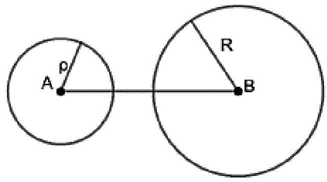
$$BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma.$$

ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα Κ και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;
Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το Β.»
Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το Α.»
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 2 από το Β του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;

13846.Δίνεται το διπλανό σχήμα με τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) με
R > ρ. Επίσης ΑΒ = 9.



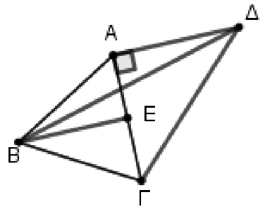
α) Να αποδείξετε ότι R + ρ < 9.
β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΚΛΜ με ΚΛ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛΜ να είναι ίση με R. Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.
γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 που περιγράφονται παρακάτω;
Ι1: «Η απόσταση των σημείων από το Κ είναι ίση με ρ».
Ι2: «Η απόσταση των σημείων από το Μ είναι ίση με R».
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 3ο

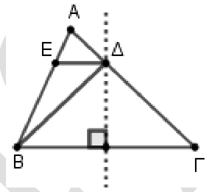
13702.Δίνονται δυο κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν η εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:
α) τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
β) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ εφάπτεται στη διάκεντρο ΚΛ των κύκλων (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2).

Παραλληλία

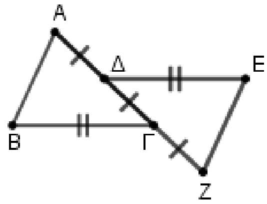
Θέμα 2ο



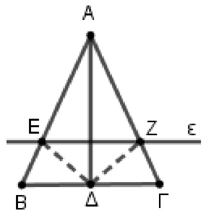
12710.Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΒΕ. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με υποτείνουσα τη ΓΔ έτσι, ώστε τα σημεία Β και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) ΒΕ // ΑΔ.
β) οι γωνίες ΕΒΔ και ΑΔΒ είναι ίσες.
γ) το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές.



13534.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές.
β) η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$.

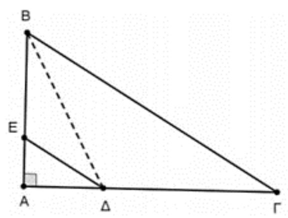


13748.Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την ΑΓ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΓΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ είναι ίσα.
β) ΑΒ // ΕΖ.

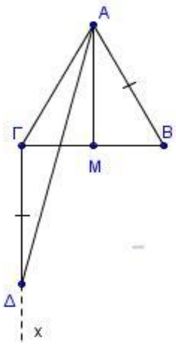


34399. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma})$ φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.
β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα.

34776. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ



($\hat{\mathrm{A}}=90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο, ώστε η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας ΑΔΒ να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i) $\mathrm{E\hat{\Delta}B}=\mathrm{\Delta\hat{B}\Gamma}$ και $\mathrm{E\hat{\Delta}A}=\hat{\Gamma}$.
ii) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.
β) Αν $\mathrm{A\hat{\Delta}B}=60^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία Γ.

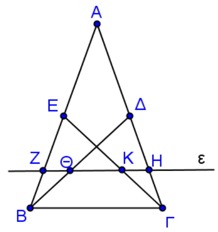


34777. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma})$ και η διάμεσός του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma x \perp \mathrm{B\Gamma}$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta=\mathrm{AB}$.
α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma}$ είναι ίση με τη $\mathrm{\Gamma\hat{\Delta}A}$.
β) Να αποδείξετε ότι:
i) ΓΔ//ΑΜ
ii) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.

34779. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AB}$ και $\mathrm{AE}=\mathrm{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. **β)** $\Delta\mathrm{E}\parallel\mathrm{B\Gamma}$.

4ο Θέμα

1744. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ. Μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα και τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα.



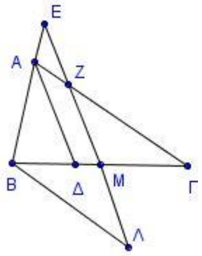
Να αποδείξετε ότι:

α) $ΒΖ = ΓΗ$.

β) τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα.

γ) $ΖΚ = ΗΘ$.

1818. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$, η διχοτόμος του ΑΔ και ευθεία ε παράλληλη από το Β προς την ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ, την ευθεία ε στο σημείο Λ και την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΛΕ είναι ισοσκελή.

β) $ΒΛ = ΓΖ$.

γ) $ΑΕ = ΑΓ - ΒΛ$.

13699. Δίνονται δυο κύκλοι (Κ, $ρ_1$) και (Λ, $ρ_2$) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Έστω ότι μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο Μ.

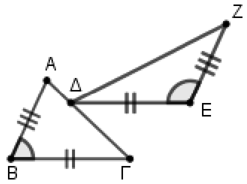
α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι ευθείες ΚΒ και ΛΜ τέμνονται σε σημείο, έστω Δ.

ii. το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

γ) Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες $ρ_1$ και $ρ_2$ των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13752. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β} < 90^\circ$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ και από το σημείο Ε φέρουμε τμήμα ΕΗ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



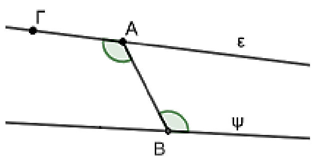
α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

1. Οι γωνίες $Δ\hat{Ε}Ζ$ και $Α\hat{Β}Γ$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.
2. Οπότε $ΔΕΖ = ΑΒΓ$.
3. Τα τρίγωνα ΔΕΗ και ΑΒΓ είναι ίσα.
4. Το τμήμα ΔΗ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ.

β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3.

γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\hat{Β} < 90^\circ$, να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΓ και ΔΗ για τα διάφορα είδη της γωνίας Β και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

13822. Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ).



α) Αν η γωνία $Β\hat{Α}Γ$ είναι μεγαλύτερη από την $Α\hat{Β}ψ$:

i. Να αποδείξετε ότι $Β\hat{Α}ε + Α\hat{Β}ψ < 180^\circ$.

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

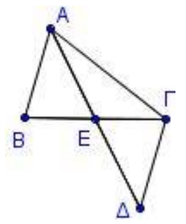
β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

γ) Αν ισχύει $B\hat{A}\Gamma < A\hat{B}\psi$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

13843.Έστω ότι οι ευθείες x΄x και y΄y εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα μιας διαμέτρου του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) οι ευθείες x΄x και y΄y είναι παράλληλες.
β) οι διχοτόμοι των γωνιών ΒΑx και ΑΒy τέμνονται σε σημείο Μ.
γ) το σημείο Μ είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ.
δ) αν η διχοτόμος της γωνίας ΒΑx τέμνει την y΄y στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας ΑΒy τέμνει την x΄x στο σημείο Δ, τότε ΜΓ = ΜΔ.

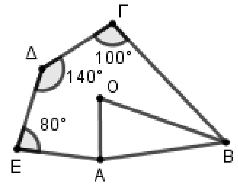
34335.Δίνεται κύκλος (O,R) και μία ευθεία x΄x η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ της ημιευθείας Αx. Αν για κάποιο σημείο Β του κύκλου ισχύει η σχέση
ΜΑ = ΜΒ, να αποδείξετε ότι:
α) το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O,R)
β) η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx είναι κάθετη στη ΜΟ,
γ) το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας ΒΜx.

37166. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α,Β,Γ,Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωρίο Ε ισαπέχει από τα χωριά Β,Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.



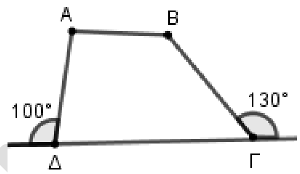
α) Να αποδείξετε ότι:
i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ.
ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν,
να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.
iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από το δρόμο ΑΔ.
β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ.

Άθροισμα γωνιών τριγώνου
Θέμα 2ο



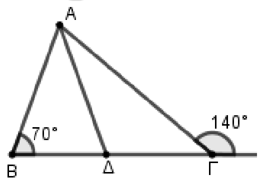
12640. Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100^o , η γωνία του Δ ισούται με 140^o και η γωνία του Ε ισούται με 80^o τότε, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A}+\hat{B}$.
β) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.



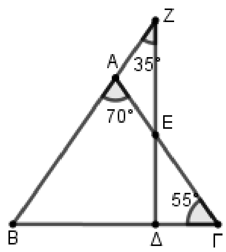
12644. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με 130^o και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110^o . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:

α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.
β) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A}+\hat{B}$.
γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.



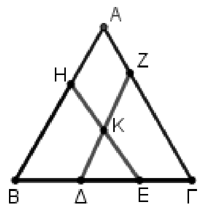
12704.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=70^\circ$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi\omega\tau}=140^\circ$. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε ΑΔ = ΑΒ.
Να αποδείξετε ότι:

α) $B\hat{A}\Delta=40^\circ$.
β) $A\hat{\Delta}\Gamma=110^\circ$.
γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



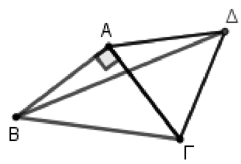
12707.Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=70°$ και $\hat{\Gamma}$=55°. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το σημείο Α και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Ζ ώστε $B\hat{Z}\Delta=35°$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της ΒΓ.
Η ΖΔ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
β) $Z\hat{\Delta}B=90°$.
γ) το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.



12708.Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΒΓ και ΓΑ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα ώστε ΒΕ = ΓΖ. Στις πλευρές ΑΒ και ΓΒ θεωρούμε σημεία Η και Δ αντίστοιχα ώστε ΒΗ = ΓΔ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΖ και ΕΗ τέμνονται στο σημείο Κ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΗ = ΔΖ και $B\hat{H}E=\Gamma\hat{\Delta}Z$.
β) τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΚΕΔ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία.

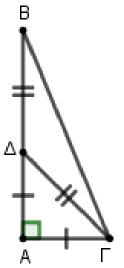


12709.Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A}=90^\circ$.
Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ.
α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.
γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΒΔ.

13442. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$.
Στην πλευρά του ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ ώστε
ΒΔ = ΔΓ και ΑΔ = ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Delta}\Gamma = 45^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.

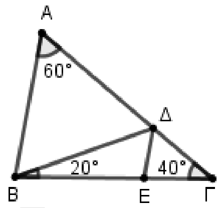


13443. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$.

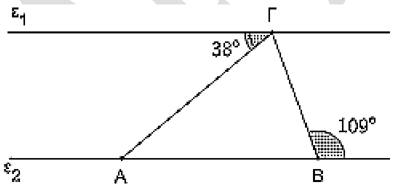
Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $\Gamma B\Delta = 20^\circ$.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.
β) Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

i. $B\hat{\Delta}E = 60^\circ$.

ii. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}\Gamma$.



13535. Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε_1 διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε_2 που ορίζεται από τις κορυφές του Α και Β. Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:
α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

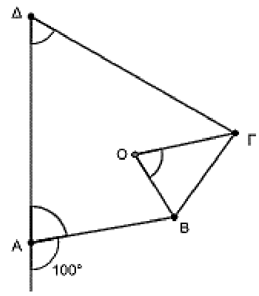


13619. Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος με
$\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 100^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^\circ$.

Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ο, τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

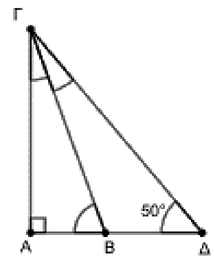
β) Να αποδείξετε ότι $B\hat{O}\Gamma = 70^\circ$.



13654. Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\hat{A} = 90^\circ$, $A\hat{B}\Gamma - A\hat{\Gamma}B = 50^\circ$ και $A\hat{\Delta}\Gamma = 50^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$.

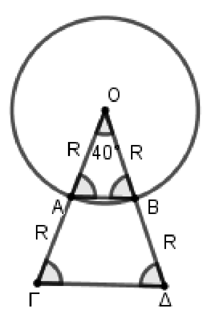


13687. Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $AOB = 40^\circ$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΓ = ΟΑ και ΒΔ = ΟΒ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 70^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $O\hat{\Gamma}\Delta$ και $O\hat{\Delta}\Gamma$.

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΒ//ΓΔ.

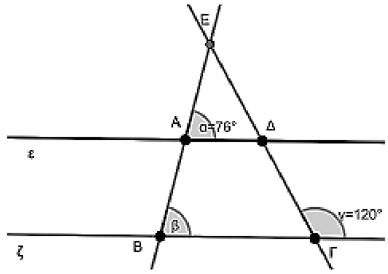


13741. Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{\alpha}=76^\circ$ και $\hat{\gamma}=120^\circ$, να υπολογίσετε :

α) Τη γωνία $\hat{\beta}$.

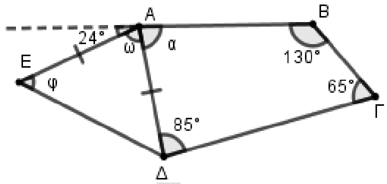
β) Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ .

γ) Τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΕΑΔ.



13749. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος ΑΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ και η ημιευθεία Αx είναι προέκταση της ΒΑ προς το Α. Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

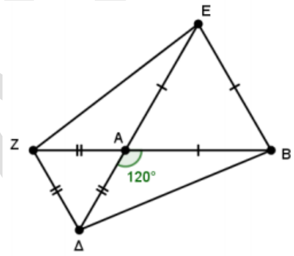
α) Τη γωνία $\hat{\alpha}$ **β)** Τη γωνία $\hat{\omega}$ **γ)** Τη γωνία $\hat{\varphi}$.



14884. Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\hat{A}=120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα.

β) Το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο στο ΒΕ.



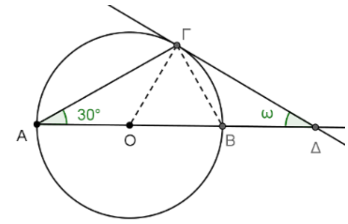
34313. Δίνεται κύκλος (O,R) διαμέτρου ΑΒ, και χορδή του ΑΓ τέτοια ώστε $B\hat{A}\Gamma=30^\circ$.

Στο σημείο Γ του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ (προς το Β) σε σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας του $\Gamma\hat{O}\Delta$.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\omega}$.

γ) Να αποδείξετε ότι ΟΔ=2R.



34397. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE=AB$.

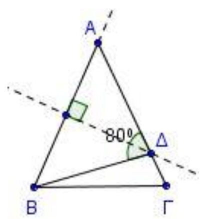
β) Αν επιπλέον $B\hat{\Delta}A=55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ.

34413. Ένας μαθητής της Α΄ Λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία xOψ. Στη συνέχεια με κέντρο τη κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δύο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Οx και Οψ της γωνίας στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ,Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

34418. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η εξωτερική γωνία Α είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας $A\hat{B}\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$.

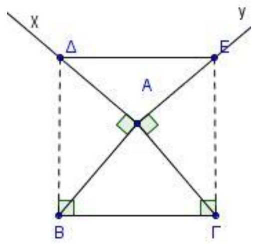
β) Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό σημείο Δ. Αν η γωνία $A\hat{\Delta}B$ ίση με 80°, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



34422. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$. Οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ στα σημεία Β και Γ τέμνουν τις Αx και Αy στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

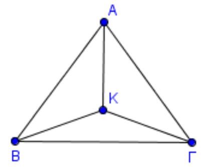
β) Αν η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με 80°, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου που έχει για κορυφές τα σημεία Α, Ε και Δ.



34775. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ με $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω Κ σημείο της διχοτόμου της γωνίας Α, τέτοιο, ώστε $KB = KA = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα.

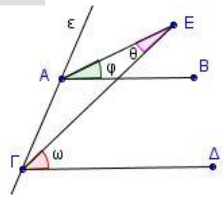
β) Να υπολογίσετε: **i.** τις γωνίες ΑΒΚ και ΑΓΚ. **ii.** τη γωνία $B\hat{K}\Gamma$.

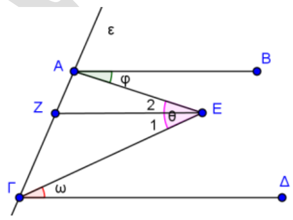


34770. Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και ένα τυχαίο σημείο Ε βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το Ε είναι εκτός των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ, τότε: $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$.

β) Αν το Ε είναι ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι $\theta = \hat{\varphi} + \hat{\omega}$.



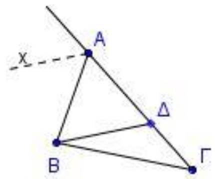


34778. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Έστω Αχ η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 120^\circ$. Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Αx, η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $A\hat{B}\Delta = 60^\circ$ **ii.** το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

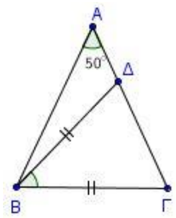
β) Αν η γωνία ΒΔΑ είναι διπλάσια της $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΓ.



34785. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ με $A = 50^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο, ώστε $B\Delta = B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

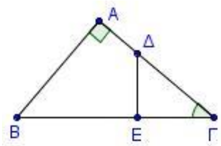
β) Να αποδείξετε ότι $\Delta B\Gamma = A$.



34786. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^\circ)$ με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

β) τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΔΕΒ.

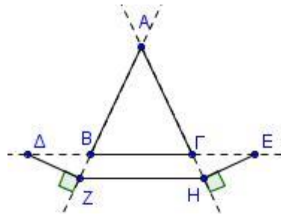


34787. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ με $\hat{A} = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) παίρνουμε τμήμα ΒΔ τέτοιο, ώστε $B\Delta = AB$. Να υπολογίσετε

α) τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

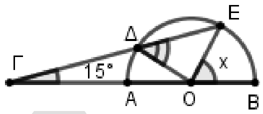
β) τη γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$.

34500. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma})$ και σημεία Δ και Ε στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε $\mathrm{B\Delta}=\mathrm{\Gamma E}$.
Έστω $\mathrm{\Delta Z}\perp\mathrm{AB}$ και $\mathrm{EH}\perp\mathrm{A\Gamma}$.



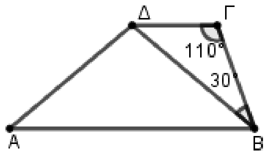
α) Να αποδείξετε ότι:
 i. $\mathrm{BZ}=\mathrm{\Gamma H}$.
 ii. Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.
β) Αν $\hat{\mathrm{A}}=50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΗ.

34505. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Α και παίρνουμε ένα σημείο Γ. Θεωρούμε Ε ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ΓΔ ισούται με το ΟΒ και η γωνία $\mathrm{B\hat{\Gamma}E}$ είναι 15°, τότε

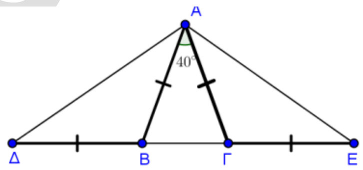


α) να αποδείξετε ότι $\mathrm{O\hat{\Delta}E}=30^\circ$.
β) να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{E\hat{O}B}=\mathrm{x}$.

34506.Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΔΓ, στο οποίο η διαγώνιος ΒΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΔ. Αν είναι η γωνία $\hat{\Gamma}=110°$ και η γωνία $\mathrm{\Delta\hat{B}\Gamma}=30°$, να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$.



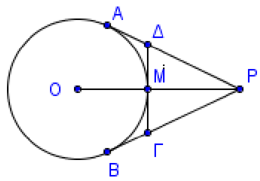
36087. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $\mathrm{\Delta B}=\mathrm{BA}=\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{\Gamma E}$ και $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}=40^\circ$.Να αποδείξετε ότι:



α) $\mathrm{A\hat{B}\Delta}=\mathrm{A\hat{\Gamma}E}=110^\circ$.
β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.
γ) Το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές.

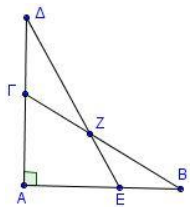
36101. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=80^\circ$, $\hat{\mathrm{B}}=20^\circ+\hat{\Gamma}$ και έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ.
β) Φέρνουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΔΕ και ΕΔΓ.

36114. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.



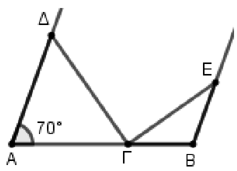
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές.
β) Αν $\mathrm{A\hat{P}B}=40^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία ΑΟΒ.

36117. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (γωνία Α ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Delta}=30^\circ$ και Ζ το σημείο τομής των πλευρών τους ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα..



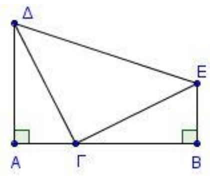
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΕΖΓ.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και ΕΒΖ είναι ισοσκελή.

36118. Στο διπλανό σχήμα, οι ΑΔ, ΒΕ είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{A\Gamma}$, $\mathrm{BE}=\mathrm{B\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=70^\circ$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΓ και ΒΓΕ.
β) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{\Delta\hat{\Gamma}E}=90^\circ$.

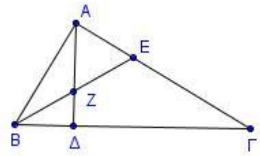
36163. Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες Α,Β είναι ορθές και επιπλέον $\mathrm{A\Delta = B\Gamma}$ και $\mathrm{A\Gamma = BE}$. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα.

β) Αν η γωνία $\mathrm{E\hat{\Gamma}B = 40^\circ}$, τότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

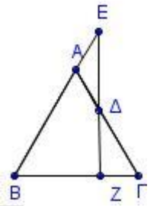
36167. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2\hat{B}$ και $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$.



α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B}=60^\circ$.

β) Αν το ύψος ΑΔ και η διχοτόμος ΒΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.

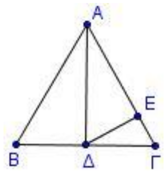
36228. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε $\mathrm{AE = A\Delta}$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.

β) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ΕΔ (προς το Δ) με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι κάθετη στην ΒΓ.

36336. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB = A\Gamma}$ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια, ώστε $\mathrm{B\hat{A}\Delta = 30^\circ}$. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο, ώστε $\mathrm{A\Delta = AE}$.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ.

37009. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΕ.

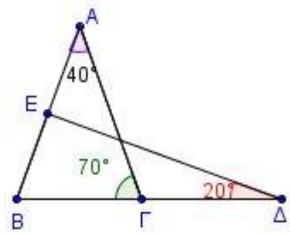
γ) Αν η γωνία Β είναι 20° μεγαλύτερη από τη γωνία Γ, να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ.

37013. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB = A\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

β) Αν $\hat{A}=75^\circ+\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

37014.Στο διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι:

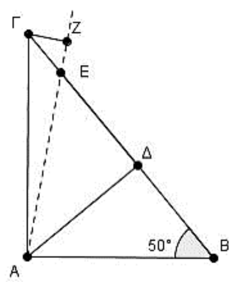


α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές,

β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή.

Θέμα 4ο

1708. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ$\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ με $\hat{B}=50^\circ$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε $\mathrm{\Delta E = B\Delta}$. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

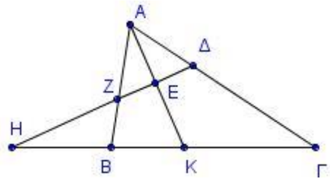


α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

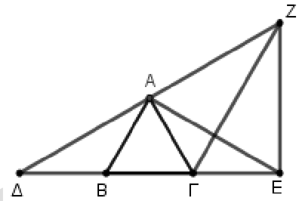
ii. $\mathrm{\Gamma\hat{A}E = 10^\circ}$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ.

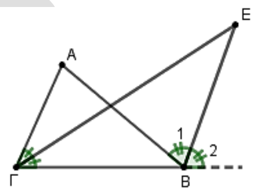


1792. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε
φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:

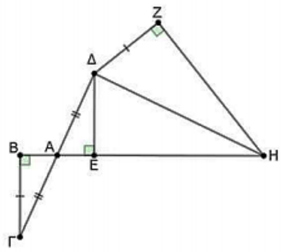
α) $Ζ\hat{Δ}Γ = 90^\circ + \frac{\hat{Α}}{2}$ **β)** $ΖΚ = ΚΔ$ **γ)** $Ζ\hat{Η}Γ = \frac{\hat{Β} - \hat{Γ}}{2}$.



1819. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $ΒΔ = ΒΓ$, ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΓΕ = ΒΓ$. Φέρουμε την κάθετη στην ΕΔ στο σημείο Ε, η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓΑΕ και ΒΔΑ.
β) Να αποδείξετε ότι η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ.
γ) Να αποδείξετε ότι $ΑΒ \| ΓΖ$.

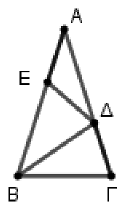


1851. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η προέκταση της διχοτόμου της γωνίας Γ και της εξωτερικής γωνίας του Β τέμνονται στο Ε.
Δίνεται ότι $Α\hat{Β}Ε = 70^\circ = 2Γ\hat{Ε}Β$.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



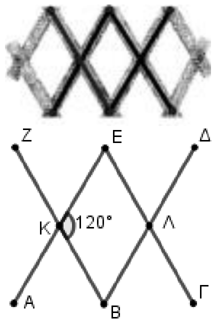
11882. Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ και ΔΖΗ είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες $Α\hat{Β}Γ$, $Α\hat{Ε}Δ$ και $Δ\hat{Ζ}Η$, αντίστοιχα. Επίσης ΑΓ = ΑΔ και ΒΓ = ΔΖ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΔΕ είναι ίσα.
β) Η ΔΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $Ε\hat{Η}Ζ$.
γ) Αν, επιπλέον, οι ΑΔ και ΔΗ είναι κάθετες, τότε $Α\hat{Δ}Ε = \frac{Ε\hat{Η}Ζ}{2}$.

13499. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^\circ\right)$ με ΑΒ < ΑΓ και ΑΗ το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε ΔΒ = ΑΒ και ΓΕ = ΓΑ. Αν ΔΖ και ΕΘ είναι οι αποστάσεις των Δ και Ε από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) $Γ\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Η$ και $Ε\hat{Α}Β = Η\hat{Α}Ε$.
β) ΔΕ = ΔΖ + ΕΘ.



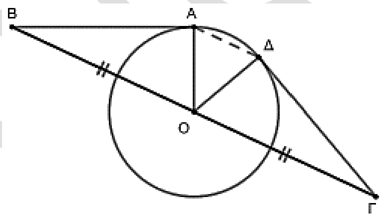
13537. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ , σημείο Δ της πλευράς ΑΓ, ώστε ΑΔ = ΒΔ = ΒΓ και σημείο Ε της πλευράς ΑΒ, ώστε ΑΕ = ΓΔ.
α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $\hat{Γ} = 2\hat{Α}$ **ii.** $Α = 36^\circ$
iii. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
β) Στην προέκταση της ΔΕ προς το Ε θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε ΔΖ = ΑΓ.
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

13697.Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα ΑΕ, ΒΖ, ΒΔ και ΓΕ αναπαριστάνουν τέσσερεις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου. Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή ΑΕ // ΒΔ και ΒΖ // ΓΕ, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή Κ κοινό μέσο των ΑΕ, ΒΖ και Λ κοινό μέσο των ΒΔ, ΓΕ. Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι ΑΕ και ΒΖ με κορυφή το κοινό τους μέσο Κ, η γωνία $\mathrm{B\hat{K}E}$, είναι ίση με 120^{o} .



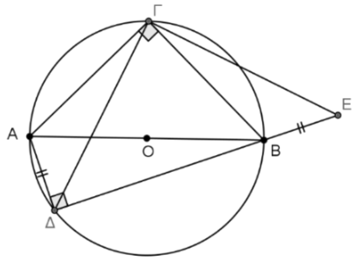
α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\hat{K}B} = \mathrm{K\hat{B}\Lambda} = \mathrm{B\hat{\Lambda}\Gamma} = 60^{\circ}$.
β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

13750.Από σημείο Β εξωτερικό ενός κύκλου (O,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ. Ενώνουμε το σημείο Β με το κέντρο Ο του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΟΓ = ΒΟ. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ, όπως στο σχήμα.



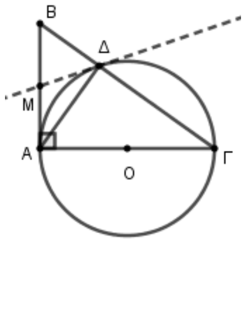
α) Να αποδείξετε ότι: **i.** ΑΒ = ΔΓ **ii.** ΑΔ // ΒΓ)
β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΒΑ είναι ίσο με την ακτίνα R, τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο ΑΟΔ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

34316.Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και διάμετρός του ΑΒ. Έστω Γ το μέσο ενός ημικυκλίου του, Δ τυχαίο σημείο του άλλου ημικυκλίου του και $\mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \mathrm{A\hat{\Delta}B} = 90^{\circ}$. Στην προέκταση της ΔΒ προς το μέρος του Β θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΒΕ = ΑΔ.



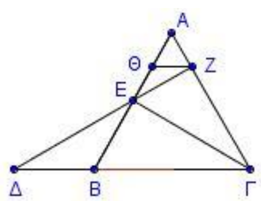
α) Να αποδείξετε ότι:
i. οι γωνίες $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta}$ και $\mathrm{\Gamma\hat{B}E}$ είναι ίσες,
ii. τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα.
iii. η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ.
β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου.

34329.Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{\mathrm{A}} = 90°$). Με διάμετρο την κάθετη πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο κέντρου Ο, ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ του τριγώνου σε σημείο Δ. Έστω ότι η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΒ σε σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:



α) $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta} = \hat{\mathrm{B}}$,
β) $\mathrm{M\hat{\Delta}B} = 90° - \hat{\Gamma}$ και το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές.
γ) το Μ είναι το μέσο του ΑΒ.

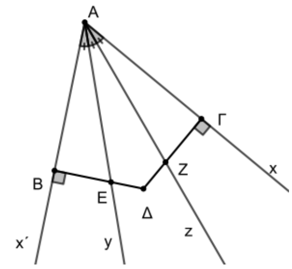
37097. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΓΕ. Στην προέκταση της ΓΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\mathrm{B\Delta} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.
Αν η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και $\mathrm{Z\Theta} \parallel \mathrm{B\Gamma}$:



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘΕΖ.

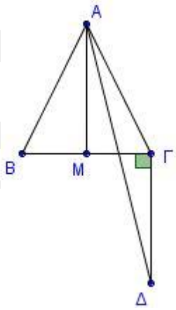
γ) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\Theta Z$.
δ) Να αποδείξετε ότι $3AB = 4\Theta B$.

37125.Στις πλευρές Αx΄ και Αx γωνίας $x'\hat{A}x$ θεωρούμε σημεία Β και Γ ώστε ΑΒ = ΑΓ. Οι κάθετες στις Αx΄ και Αx στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ. Αν οι ημιευθείες Αy και Αz χωρίζουν τη γωνία $x'\hat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις ΒΔ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές.
β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'\hat{A}x$.
γ) Οι γωνίες ΓΒΔ και ΓΑΔ είναι ίσες.

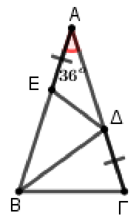
37164. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρνουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$ (Α,Δ εκατέρωθεν της ΒΓ). Να αποδείξετε ότι:



α) $AM \parallel \Gamma\Delta$.
β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.
γ) $\Delta\hat{A}\Gamma = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$.
δ) $A\Delta < 2AB$.

3ο Θέμα

12200.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 36^\circ$. Έστω ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β και Ε σημείο της πλευράς ΑΒ ώστε ΑΕ = ΓΔ.

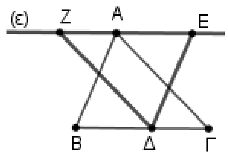


α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΒΔ.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.
γ) Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

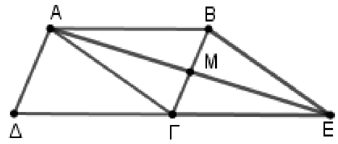
Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια

Παραλληλόγραμμο

Θέμα 2ο

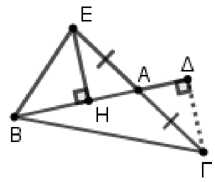


13755.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τις παράλληλες προς την ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :
α) τα τετράπλευρα ΖΑΓΔ και ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμα.
β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.



13816.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε ΑΔ < ΑΒ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε την ΑΜ προς το Μ κατά τμήμα ΜΕ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι :
α) το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.
β) τα σημεία Δ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.

13825.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την ΒΑ και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη ΒΓ και το σημείο Α). Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τετράπλευρα ΑΔΜΒ και ΑΓΜΕ είναι παραλληλόγραμμα.
β) ΔΑ=ΑΕ.



13833.Στο διπλανό σχήμα το ΓΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, το ΕΗ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΕ και η ΒΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΕΓ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι ΑΗ=ΑΔ.
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο.

13829.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ των τμημάτων ΑΟ και ΓΟ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΕ=ΓΖ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

13834.Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Β κατά τμήμα ΒΖ=ΒΓ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΗ=ΒΓ, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΜΖ και ΕΜΗ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΗΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

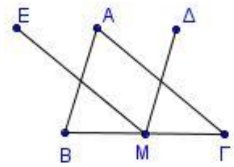
34386. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 2ΒΓ$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα $ΔΕ = ΑΔ$ και φέρουμε την ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι
α) το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές.
β) το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) η ΑΗ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΑΕ.

34388. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του ΒΜ και ΓΝ. Προεκτείνουμε την ΒΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $ΜΔ = ΒΜ$ και την ΓΝ (προς το Ν) κατά τμήμα $ΝΕ = ΓΝ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ \parallel ΒΓ$ και $ΑΕ \parallel ΒΓ$.
β) Είναι τα σημεία Ε, Α και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34389. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

34391. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓΑ. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΔΑ = ΑΕ$.
β) Τα σημεία Δ, Α και Ε είναι συνευθειακά.
γ) $ΔΕ = ΒΓ$.

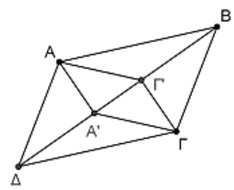
34394. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 2ΑΔ$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
β) Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34395. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΟ και σημείο Ζ του τμήματος ΟΓ, ώστε $ΟΕ = ΟΖ$. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΔΕ = ΒΖ$ **β)** Το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

34423. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 2ΒΓ$ και Ε το μέσο της πλευράς ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές.
β) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

34425. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε $ΜΔ = ΔΕ$. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ.

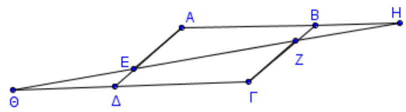
34783. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Α΄, Γ΄ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ. Αν τα σημεία Α΄ και Γ΄ δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:



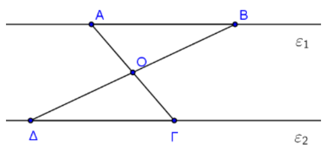
α) $ΑΑ' \parallel ΓΓ'$
β) $ΑΑ' = ΓΓ'$
γ) Το τετράπλευρο ΑΓ΄ΓΑ΄ είναι παραλληλόγραμμο.

36089. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών του Δ και Β τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

36090. Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια, ώστε $ΑΕ = ΓΖ$. Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ, να αποδείξετε ότι: **α)** $Η\hat{Β}Ζ = Ε\hat{Δ}Θ$ **β)** $Β\hat{Ζ}Η = Δ\hat{Ε}Θ$ **γ)** $ΒΗ = ΘΔ$

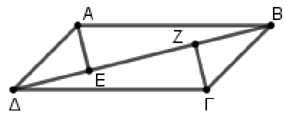


36096. Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 και τα σημεία Α, Β στην ε_1 και Δ και Γ στην ε_2 ώστε τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται στο μέσο Ο του ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:



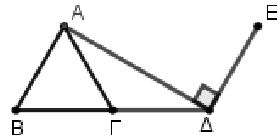
α) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.
β) το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

36105. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ > ΒΓ$ φέρνουμε από τις κορυφές Α και Γ καθέτους στη διαγώνιο ΒΔ, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



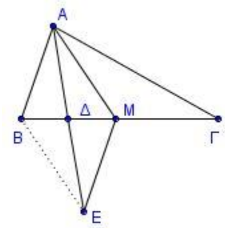
α) $ΑΕ = ΓΖ$
β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

36115. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $ΓΔ = ΒΓ$. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην ΑΔ στο σημείο της Δ, τέτοιο, ώστε $ΔΕ = ΒΓ$.(Α και Ε στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τη ΒΔ).



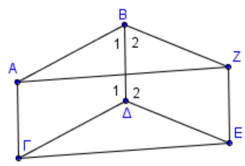
α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ.
β) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

36164. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $ΒΓ = 2ΑΒ$ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΜ και Ε σημείο στην προέκταση της ώστε $ΑΔ = ΔΕ$.Να αποδείξετε ότι:



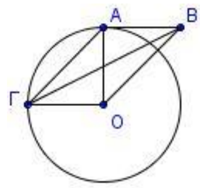
α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $ΜΕ = ΜΓ$.

36327. Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΓ και ΒΔΕΖ. Να αποδείξετε ότι:



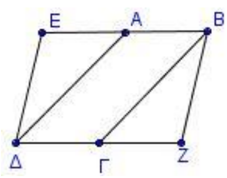
α) Το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $Α\hat{Β}Ζ = Γ\hat{Δ}Ε$

36348. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες ΟΑ, ΟΓ και εφαπτόμενο στο κύκλο τμήμα ΑΒ με $ΑΒ = ΟΓ$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ.

36225. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ (προς το Α) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα $ΑΕ = ΑΒ$ και $ΓΖ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

37015. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα $ΜΔ = ΜΑ$. Από το Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $ΒΜ = \frac{ΑΕ}{2}$.

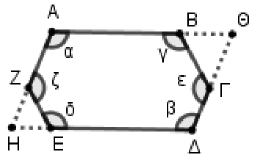
Θέμα 4ο

1709. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο η εξωτερική του γωνία Γ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας Α. Από την κορυφή Α διέρχεται ημιευθεία Αx//ΒΓ στο ημιεπίπεδο (ΑΒ, Γ). Στην ημιευθεία Αx θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:
α) Η ΒΔ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΓ.
β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\hat{Γ}_{εξ}$.
γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

1730. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει $ΑΒ > ΑΔ$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:
Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
Ισχυρισμός 2: $Α\hat{Ε}Δ = Β\hat{Ζ}Γ$.
Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών Δ και Β.
α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.
β) Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

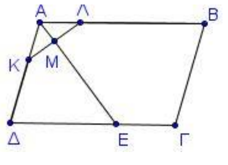
1731. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύουν ΑΒ > ΓΔ και η γωνία Α είναι αμβλεία,, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:
Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.
Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.
α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.
β) Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1746. Στο κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ισχύον τα εξής: $\hat{α} = \hat{β}$, $\hat{γ} = \hat{δ}$ και $\hat{ε} = \hat{ζ}$.



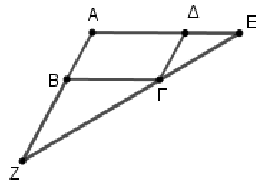
α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{α} + \hat{γ} + \hat{ε}$.
β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:
i. Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές.
ii. Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο.

1785. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ > ΑΔ$. Θεωρούμε σημεία Κ,Λ των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε $ΑΚ = ΑΛ$. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΑΔ = ΔΕ$. **β)** $ΒΓ + ΓΕ = ΑΒ$. **γ)** $\hat{Β} = 2 \cdot Α\hat{Λ}Κ$

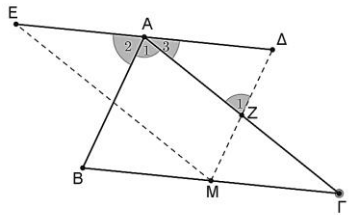
1805. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΔΕ = ΔΓ$ ενώ στη προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $ΒΖ = ΒΓ$.



α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $Β\hat{Γ}Ζ = Δ\hat{Γ}Ε$
ii. Τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά.

β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό.
≪ Έχουμε: $B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΖΕ) και $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{E}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΔΓ). Όμως $\Delta\hat{\Gamma}E + \Gamma\hat{\Delta}E + \Delta\hat{E}\Gamma = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα : $\Delta\hat{\Gamma}E + B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{\Gamma}Z = 180^\circ$. Οπότε τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά.≫
Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.

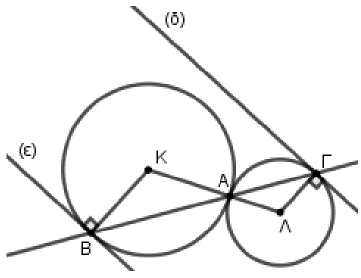
1810.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ του ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο με το ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο με το ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από το ΒΓ και το σημείο Α .Να αποδείξετε ότι:



α) Τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.
β) Η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίση με την περίμετρο του.
γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής :
$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΑΖ)
$A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΔΕ). Όμως $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + A\hat{\Delta}Z = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$.
Οπότε Δ,Α,Ε συνευθειακά.
Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

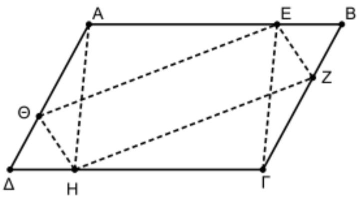
13742.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε ΒΚ ⊥ ΒΓ έτσι ώστε ΒΚ = ΑΓ (το σημείο Κ είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α).
α) Να αποδείξετε ότι ΑΜ//ΒΚ και ΑΒ = ΒΚ.
β) Να δείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΜ.
γ) Να αποδείξετε ότι $B\hat{K}A = 45^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$.
δ) Μπορεί το τετράπλευρο ΑΒΚΜ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13845.Οι κύκλοι (Κ,R), (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το Α και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία Β και Γ. Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ε) και (δ) στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:



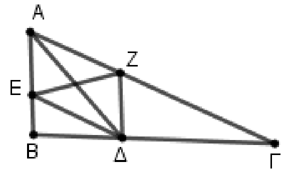
α) $K\hat{B}A = \Lambda\hat{\Gamma}A$.
β) (ε) // (δ).
γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο ΚΓΛΒ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

37108. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, με $ΑΕ = ΓΗ$ και $ΒΖ = ΔΘ$. Να αποδείξετε ότι:



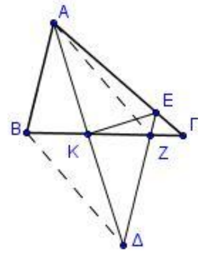
α) Το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

37117. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α, για την οποία ισχύει ότι $ΑΔ = ΔΓ$. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:



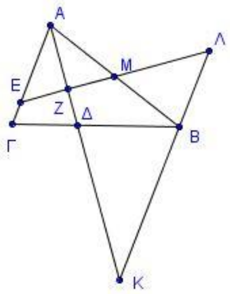
α) Τα τμήματα ΕΔ και ΑΓ είναι παράλληλα.
β) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές.
γ) Τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται.

37131. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΚ διχοτόμο της γωνίας Α. Στην προέκταση της ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $ΑΚ = ΚΔ$. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.
β) Η ΕΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΔ.
γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα.
δ) Το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.

37160. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή.
β) Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Θέμα 3ο

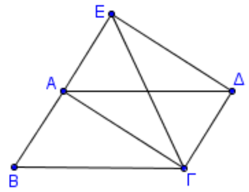
11897. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΜ. Στην προέκταση της ΑΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα ΓΔ = ΑΓ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΜ που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) ΜΓ = ΓΕ.
β) Το τετράπλευρο ΑΜΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) $\hat{Β} + Β\hat{Α}Μ = Γ\hat{Ε}Δ$

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

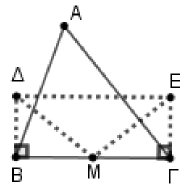
2ο Θέμα

34781. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) $ΜΔ = ΜΓ$
β) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Μ και Ν είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ.

36175. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ.
β) Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές.
γ) $Β\hat{Γ}Α = Α\hat{Δ}Ε$



36339.Στο σχήμα που ακολουθεί, το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, και τα τμήματα ΒΔ και ΕΓ είναι κάθετα στη ΒΓ στα σημεία Β, Γ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΜΔ = ΜΕ. Να αποδείξετε ότι:
α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.
β) το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

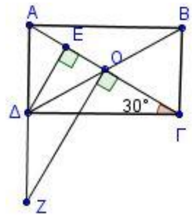


36353. Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε δύο διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες. **β)** Το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο.

37008.Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΝ = ΚΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα.
β) το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο.

4ο Θέμα

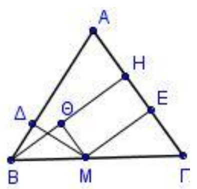
1729. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $Δ\hat{Γ}Α = 30^\circ$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε $ΔΕ \perp ΑΓ$.
α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΑΔΓ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρείς ίσες γωνίες.
β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα.



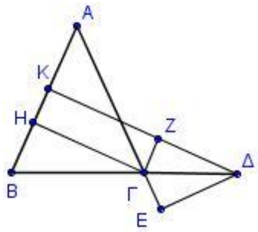
1733. Έστω $ε_1, ε_2$ δύο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.
α) Αν $Μ_1$ είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την $ε_1$ και $Μ_2$ το συμμετρικό του $Μ_1$ ως προς την $ε_2$, να αποδείξετε ότι:
i. $ΟΜ = ΟΜ_1$.
ii. Τα σημεία Μ, Ο και $Μ_2$ είναι συνευθειακά.
iii. Το τρίγωνο $ΜΜ_1Μ_2$ είναι ορθογώνιο.
β) Αν $Μ_3$ είναι το συμμετρικό του $Μ_2$ ως προς την $ε_1$, τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $ΜΜ_1Μ_2Μ_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1735. Θεωρούμε ευθεία (ε) και δύο σημεία Α και Β εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω Α΄ και Β΄ τα συμμετρικά σημεία των Α και Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε).
α) Να αποδείξετε ότι ΑΑ΄//ΒΒ΄.
β) Αν η μεσοκάθετος του ΑΒ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το Κ ανήκει και στη μεσοκάθετο του Α΄Β΄.
γ) Να βρείτε τη σχέση των ευθειών ΑΒ και (ε) ώστε το τετράπλευρο ΑΒΒ΄Α΄ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

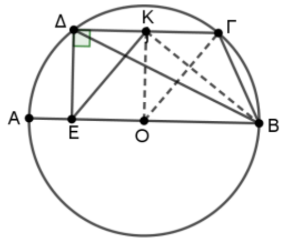
1800. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$, τυχαίο σημείο Μ της βάσης του ΒΓ και το ύψος του ΒΗ. Από το Μ φέρουμε κάθετες ΜΔ, ΜΕ και ΜΘ στις ΑΒ, ΑΓ και ΒΗ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΜΕΗΘ είναι ορθογώνιο.
β) $ΒΘ = ΔΜ$.
γ) $ΜΔ + ΜΕ = ΒΗ$.



1816. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ. Να αποδείξετε ότι:
α) Η γωνία ΖΓΔ είναι ίση με τη Β.
β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΓΕ.
γ) Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές.
δ) $ΔΚ - ΔΕ = ΗΓ$

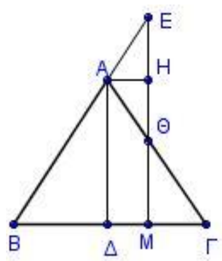


1879. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Φέρνουμε χορδή $ΓΔ \parallel ΑΒ$ και Κ το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $Δ\hat{Ε}Κ = \dfrac{Δ\hat{Ο}Γ}{2}$ **γ)** $ΚΕ < ΚΒ$

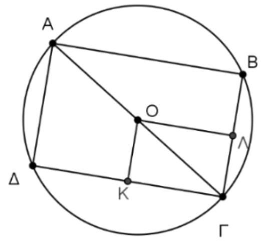


13746. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Στην προέκταση της διαμέσου ΑΔ προς το Δ παίρνουμε σημείο Ε, έτσι ώστε ΑΔ = ΔΕ.
α) Να αποδείξετε ότι :
  i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ είναι ίσα.
  ii. Η διάμεσος ΑΔ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ που την περιέχουν.
β) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ το διπλάσιο της διαμέσου ΑΔ ισούται με την πλευρά ΒΓ, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου ΑΒΕΓ και το είδος του τριγώνου ΑΒΓ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

14887. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ\left(ΑΒ = ΑΓ\right)$ και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα. Αν ΑΔ και ΑΗ τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) $Δ\hat{Α}Η = 90^\circ$.
β) Το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές.
γ) $ΜΘ + ΜΕ = 2ΑΔ$.

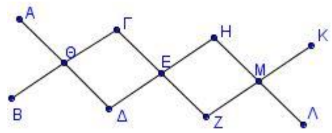


34326.Έστω κύκλος κέντρου Ο και ΑΓ μια διάμετρός του. Θεωρούμε δυο ίσες χορδές ΑΔ, ΒΓ και χορδές ΔΓ, ΑΒ τέτοιες ώστε να είναι κάθετες στις ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα.



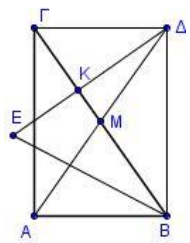
Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες.
β) το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
γ) η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου,
(Μονάδες 6)
δ) το τετράπλευρο ΟΚΓΛ είναι ορθογώνιο.

37083. Στην διπλανή εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:



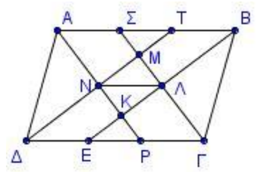
α) Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο.
β) Τα σημεία Β,Δ,Ζ είναι συνευθειακά.
γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

37102. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ την οποία προεκτείνουμε, προς το μέρος του Μ, κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔΚ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας Β στο Ε.



Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο.
β) $K\hat{E}B = 90^\circ - \dfrac{\hat{B}}{2}$
γ) $\Delta E = B\Delta$.

37167. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > A\Delta$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΡ, ΒΕ, ΓΣ και ΔΤ (όπου Ρ,Ε στην ΔΓ και Σ, Τα στην ΑΒ) τέμνονται στα σημεία Κ,Λ,Μ και Ν όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

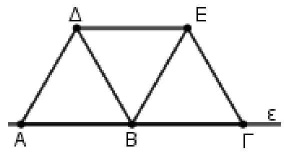


α) το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο.
β) το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.
γ) $\Lambda N \parallel AB$
δ) $\Lambda N = AB - A\Delta$

ΡΟΜΒΟΣ **(13 ασκήσεις)**

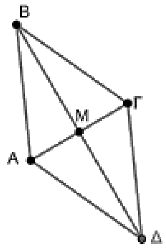
Θέμα 2ο

13767. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ έτσι ώστε ΑΒ = ΒΓ. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



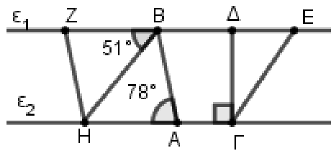
α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{B}E$.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι ρόμβος.

13832. Στο σχήμα το Μ είναι μέσο των τμημάτων ΑΓ και ΒΔ. Επίσης $A\hat{M}B = \Gamma\hat{M}B$.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. Οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες. **ii.** Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.
β) Το ΑΒΓΔ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;

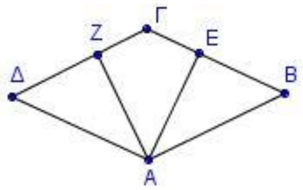
13842. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΖΗ είναι ρόμβος. Επίσης δίνονται οι γωνίες $B\hat{A}H = 70^\circ$, $Z\hat{B}H = 51^\circ$ και η $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{B}H$.
β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.
γ) Αν η γωνία Ε του τριγώνου ΓΔΕ είναι ίση με 56^o, να υπολογίσετε τη γωνία Γ του τριγώνου ΓΔΕ.

34498. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε το ΑΔ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Έστω Κ το συμμετρικό του Β ως προς το Δ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές. **β)** Το τετράπλευρο ΑΒΕΚ είναι ρόμβος.

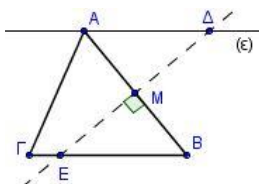
34504. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $AE \perp B\Gamma$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



α) Αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε $AZ = AE$.
β) Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει $AZ = AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.

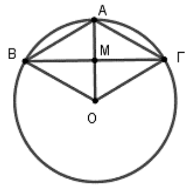
34513. Σε κύκλο κέντρου Ο, έστω ΟΑ μια ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της ΟΑ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ισόπλευρο. **β)** Το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι ρόμβος.

36107. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε από την κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η κάθετη στο μέσο Μ της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.

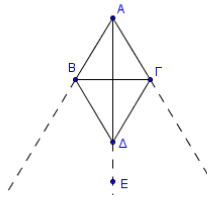


α) Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$ και $EA = EB$.
β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ.
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος.

36349.Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ.



36351. Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) Το Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα).
β) Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ.

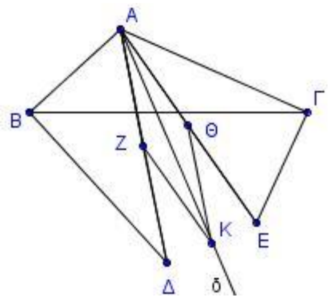


Θέμα 4ο

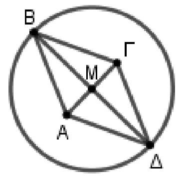
1740. Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:
Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.
Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.
α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.
β) Στην περίπτωση που οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση.

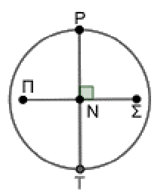
37109. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Κ,Λ της διαγωνίου του ΒΔ, τέτοια, ώστε να ισχύει $\mathrm{BK}=\mathrm{K\Lambda}=\Lambda\Delta$.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε και το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος.
γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ώστε το ΑΚΓΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

37141. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A}\Gamma$ και $\hat{\mathrm{A}}>90^\circ$. Φέρνουμε τμήμα ΒΔ κάθετο στην ΑΒ και με $\mathrm{B}\Delta=\mathrm{A}\Gamma$ και τμήμα ΓΕ κάθετο στην ΑΓ με $\Gamma\mathrm{E}=\mathrm{AB}$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Θ των ΑΔ και ΑΕ καθώς και τη διχοτόμο Αδ της γωνίας $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.
α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{AE}$.
β) Αν Κ τυχαίο σημείο της διχοτόμου Αδ, να αποδείξετε ότι το Κ ισαπέχει από τα μέσα Ζ και Θ.
γ) Αν το Κ είναι σημείο της διχοτόμου Αδ τέτοιο, ώστε $\mathrm{KZ}=\mathrm{AZ}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος.



13857.α) Στο σχήμα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο Μ. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.
β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.
Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».
Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.
γ) Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΤ και ΠΣ τέμνονται κάθετα στο Ν και ΠΝ = ΝΣ. Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Ν.
Να αποδείξετε ότι ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ.

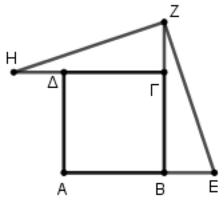




ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ (17 ασκήσεις)

Θέμα 2ο

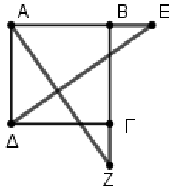
13536.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ προς το Β, ΒΓ προς το Γ και ΓΔ προς το Δ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε ΒΕ = ΓΖ = ΔΗ.



α) Να αποδείξετε ότι ΖΕ = ΖΗ.
β) Να αποδείξετε ότι $Ε\hat{Ζ}Η = 90^\circ$.

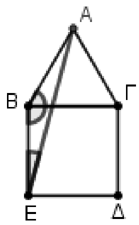
14883. Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

36165. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΑΒ (προς το Β) και ΒΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $ΒΕ = ΓΖ$. Να αποδείξετε ότι:



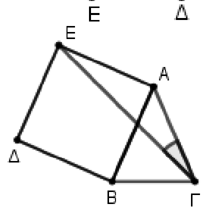
α) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα.
β) Οι γωνίες ΕΔΓ και ΑΖΒ είναι ίσες.

36173. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες: **i.** $Α\hat{Β}Ε$ **ii.** $Β\hat{Ε}Α$
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

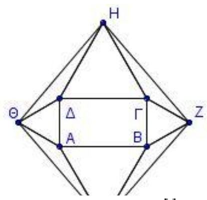
36174. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές.
β) $2Ε\hat{Γ}Α = 90^\circ - Β\hat{Α}Γ$.

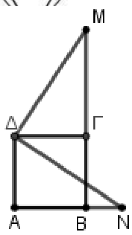
4ο Θέμα

1734. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ.



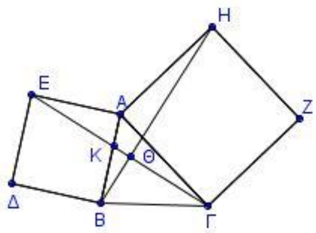
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.
β) Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε το ΕΖΗΘ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

1750. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΝ και την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $ΓΜ = ΑΝ$. Να αποδείξετε ότι:



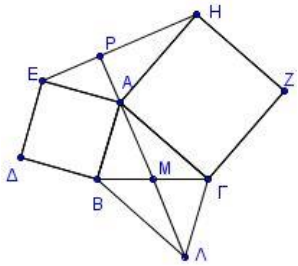
α) $ΔΝ = ΔΜ$ **β)** $ΔΝ \perp ΔΜ$

1788. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Να αποδείξετε ότι:



α) $Ε\hat{Α}Η = Α\hat{Β}Γ + Α\hat{Γ}Β$
β) $ΕΓ = ΒΗ$
γ) Η ΕΓ είναι κάθετη στη ΒΗ.

1795. Εκτός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ το μέσο του ΒΓ και Λ σημείο στην προέκταση της ΑΜ τέτοιο, ώστε $\mathrm{AM}=\mathrm{M\Lambda}$, να αποδείξετε ότι:

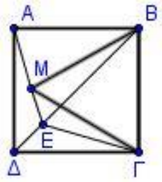


α) $\Gamma\Lambda=\mathrm{AE}$.

β) $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Lambda=\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{H}$.

γ) Η προέκταση της ΜΑ (προς το Α) τέμνει κάθετα την ΕΗ.

1814. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο ΜΒΓ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:

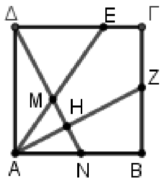


α) $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=15^{\circ}$.

β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ είναι ίσα.

γ) Η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΜ.

1825.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΔΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας ΕΑΒ και τη ΔΗ κάθετη από το Δ προς την ΑΖ, η οποία τέμνει την ΑΕ στο Μ και την ΑΒ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:

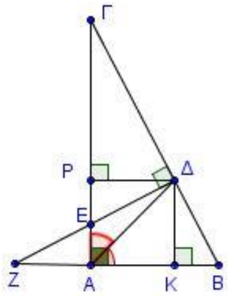


α) Τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα.

β) ΑΜ=ΑΝ και ΔΕ=ΕΜ.

γ) ΑΕ=ΔΕ+ΒΖ

1894. Σε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(\hat{\mathrm{A}}=90^{\circ}\right)$ φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Έστω Κ και Ρ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΒ (προς το Α) στο σημείο Ζ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{\mathrm{B}}=\Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma$

ii. $\Delta\mathrm{E}=\Delta\mathrm{B}$

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΓΖ.

13744.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ προς το Β και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε ΒΕ = ΓΖ. Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ, τότε:

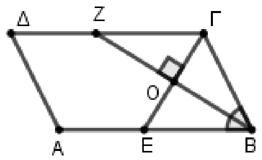
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta$ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{A}$ είναι ίσες.

ii. Τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ είναι κάθετα.

β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής Ρ των ΑΖ και ΔΕ είναι τέτοιο ώστε ΡΒ = ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Ε στην προέκταση του τμήματος ΑΒ.

13850.Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος και η ΒΖ διχοτόμος της γωνίας Β. Φέρουμε ΓΟ κάθετη στη ΒΖ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε.



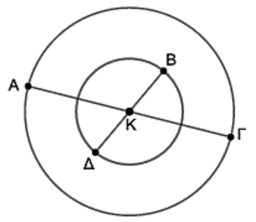
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ είναι ίσα.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι ρόμβος

δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Β ώστε το τετράπλευρο ΕΒΓΖ να είναι τετράγωνο;

13848.Στο διπλανό σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο Κ και οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροί τους.



α) Αν ισχύει ΑΓ>ΒΔ:

i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.

ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής: «Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13841.Σε τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β και Μ το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ζ τότε:

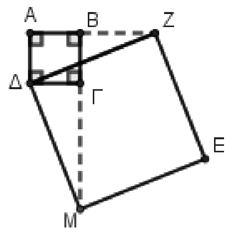
α) Να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΕΔ.

β) Να αποδείξετε ότι ΒΕ//ΖΔ.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.

δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ώστε το τετράπλευρο ΔΕΒΖ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

34336.Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το Β κατά τμήμα ΒΖ και την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΜ = ΑΖ. Θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔΜΕΖ να είναι παραλληλόγραμμο.



Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα και οι γωνίες $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$ και $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{M}$ είναι ίσες.

β) το τετράπλευρο ΔΜΕΖ είναι τετράγωνο.

γ) οι γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E}$ και $\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B}$ είναι παραπληρωματικές.

Εφαρμογές παραλληλογράμμων

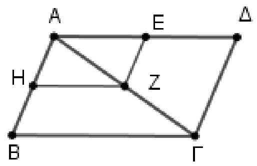
Θέμα 2ο

12639. Από το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν η παράλληλη από το Δ στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α) το Ζ είναι μέσο της ΑΓ.

β) το ΑΕ ισούται με το 1/4 του ΑΓ.

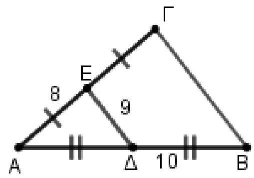
13532.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $ZH = \dfrac{AB}{2}$.

β) Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

14877. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος τα σημεία Δ και τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΑΕ = 8, ΕΔ = 9 και ΔΒ = 10.

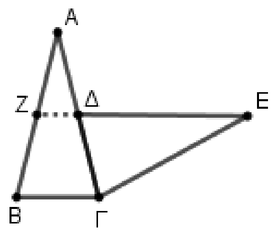


α) Να αποδείξετε ότι οι ΒΓ και ΔΕ είναι παράλληλες.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ.

34332.Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ με $AB = A\Gamma = E\Gamma = E\Delta$, όπου Δ είναι το μέσο της ΑΓ και $B\Gamma = \dfrac{AB}{2}$.



Έστω Ζ το σημείο στο οποίο η προέκταση της ΕΔ προς το Δ τέμνει την ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα.

β) το σημείο Ζ είναι το μέσο της ΑΒ.

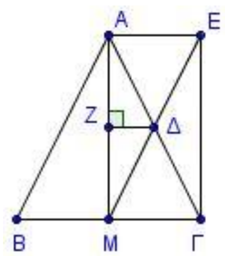
34398. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E = \dfrac{A\Gamma}{2}$ (στη λύση αποδεικνύει ότι $A\Delta = \dfrac{B\Gamma}{2}$)

β) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ) $\Delta E = \dfrac{A\Gamma}{2}$.

34426. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$ και η διάμεσός του ΑΜ. Στο τρίγωνο ΑΜΓ θεωρούμε τη διάμεσο ΜΔ την οποία προεκτείνουμε προς το Δ κατά τμήμα ΔΕ = ΜΔ. Φέρουμε από το σημείο Δ τμήμα ΔΖ κάθετο στην ΑΜ. Να αποδείξετε ότι: Αν το σημείο Ζ είναι η προβολή του Δ στην ΑΜ, να αποδείξετε ότι:

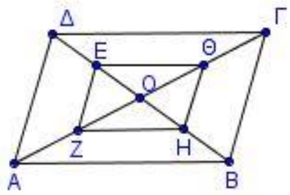


α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο.

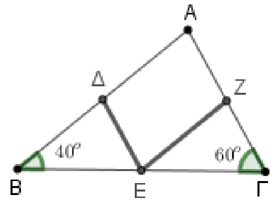
β) $\Delta Z = \dfrac{B\Gamma}{4}$.

34494. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Η ευθεία ΔΖ διχοτομεί το τμήμα ΑΕ.

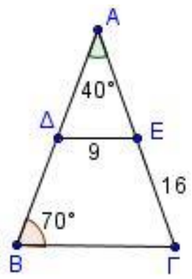
34512. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο είναι το κέντρο του. Έστω Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των ΟΔ, ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 40, να βρείτε τη περίμετρο του ΕΖΗΘ.



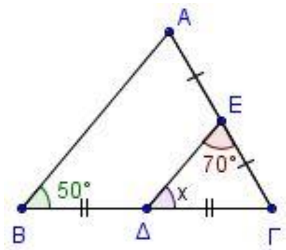
34768. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επιπλέον τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.
α) Να υπολογίσετε τη γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΑΓ και ΖΕ//ΑΒ.
γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ.



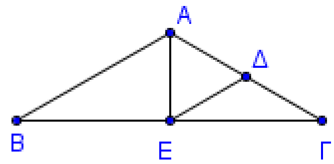
36088. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με $\Delta E = 9$ και $E\Gamma = 16$.
α) Να αποδείξετε ότι
i. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.
ii. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 18$.
γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.



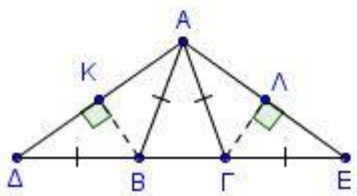
36091. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $\Delta\hat{E}\Gamma = 70^\circ$.
α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E \parallel AB$.
β) Να υπολογίσετε
i. τη γωνία $\hat{x}$.
ii. τις γωνίες Α και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.



36224. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Θεωρούμε Δ και Ε τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

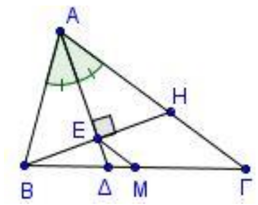


36356. Θεωρούμε τρίγωνα ΑΒΔ με ΑΒ = ΒΔ = 5 και ΑΓΕ με ΑΓ = ΓΕ = 5 έτσι ώστε τα σημεία Δ, Β, Γ και Ε να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους ΒΚ και ΓΛ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ισοσκελή.
ii. τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.
β) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ.



4ο Θέμα

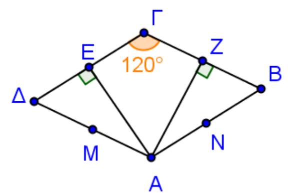
1723. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ $(\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma})$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Φέρουμε από το Β κάθετη στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την πλευρά ΑΓ στο Η. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές.
β) $\mathrm{EM} \parallel \mathrm{H\Gamma}$
γ) $\mathrm{EM} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AB}}{2}$

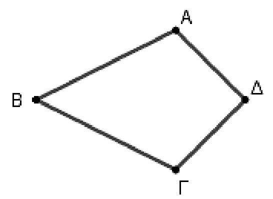
1741. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ,Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ,Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta\mathrm{E} \parallel \mathrm{B\Gamma}$.
β) Στη περίπτωση που το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, και Δ,Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ,Α και Ε είναι συνευθειακά.

1743. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $\hat{\Gamma} = 120^\circ$. Έστω ΑΕ και ΑΖ οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.



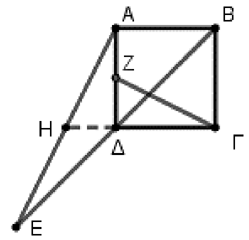
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.
ii. $\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{EZ}$
β) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο.

1745.Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ=ΒΓ και $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma}$.
Να αποδείξτε ότι:



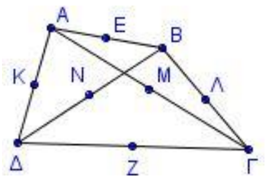
α) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.
β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα.
γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

1766. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ είναι το μέσο της ΑΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η. Να αποδείξετε ότι:



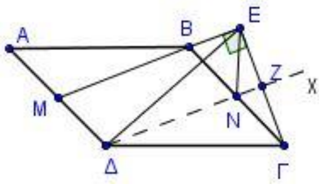
α) $\Delta\mathrm{H} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2}$
β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα.
γ) Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ.

1773. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{B\Gamma}$. Αν Ε,Λ,Ζ,Κ,Ν,Μ είναι τα μέσα των
ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ,ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΕΜΖΝ είναι ρόμβος.
β) Η ΕΖ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΜΝ.
γ) $\mathrm{KE} = \mathrm{Z}\Lambda$
δ) Τα τμήματα ΚΛ,ΜΝ,ΕΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

1775. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ και ΓΕ κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία ΜΒ $(\mathrm{ΓΕ} \perp \mathrm{ΜΒ})$. Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία ΜΒ $(\mathrm{Δx} \parallel \mathrm{ΜΒ})$ τέμνει τις ΒΓ και ΓΕ στα σημεία Ν,Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

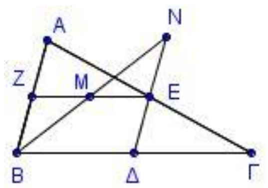


α) Το τετράπλευρο ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το σημείο Ζ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΕ.
γ) $\mathrm{ΔΕ} = \mathrm{ΔΓ}$.

1794. α) Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.
β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ,Λ,Μ,Ν των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ πρέπει απαραίτητα να είναι ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

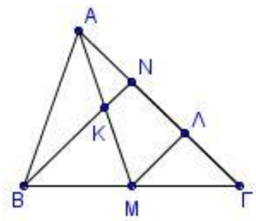
1798. α) Σε ρόμβο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.
β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

1801. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{ΑΒ} < \mathrm{ΑΓ}$ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει τη ΖΕ στο σημείο Μ και την προέκταση της ΔΕ στο σημείο Ν, να αποδείξετε ότι:



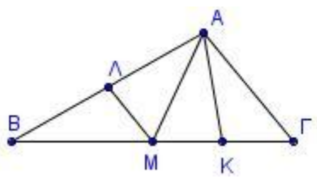
α) Το τετράπλευρο ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Τα τρίγωνα ΒΖΜ και ΜΕΝ είναι ισοσκελή.
γ) $\mathrm{ΒΖ} + \mathrm{ΝΕ} = \mathrm{ΔΓ}$

1802. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ διάμεσός του και Κ το μέσο του ΑΜ. Αν η προέκταση της ΒΚ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν, και Λ είναι το μέσο του ΓΝ, να αποδείξετε ότι:



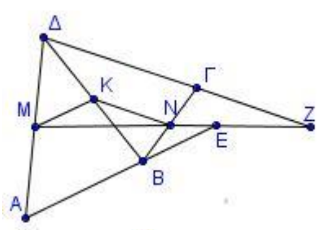
α) Το σημείο Ν είναι μέσο του ΑΛ.
β) $\mathrm{Κ\hat{Μ}Γ} = \mathrm{Μ\hat{Β}Κ} + \mathrm{Α\hat{Κ}Ν}$
γ) $\mathrm{ΒΚ} = 3\mathrm{ΚΝ}$

1803. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{ΒΓ} = 2\mathrm{ΑΓ}$. Έστω ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ και Κ,Λ τα μέσα των ΜΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

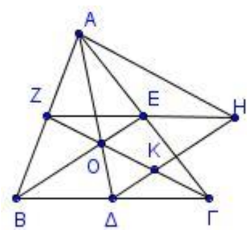


α) $\mathrm{Μ\hat{Α}Γ} = \mathrm{Α\hat{Μ}Γ}$.
β) $\mathrm{ΜΛ} = \mathrm{ΜΚ}$.
γ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΛΜΚ.

1804. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\mathrm{ΑΒ} = \mathrm{ΓΔ}$ και Μ,Ν,Κ τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ,ΔΓ τέμνουν την προέκταση της ΜΝ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: **α)** $\mathrm{ΜΚ} = \mathrm{ΚΝ}$ **β)** $\mathrm{Μ\hat{Ε}Α} = \mathrm{Μ\hat{Ζ}Δ}$



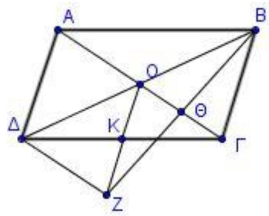
1820. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΖΕ (προς το Ε) κατά τμήμα $\mathrm{ΕΗ} = \mathrm{ΖΕ}$. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΕΗΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.



β) Η περίμετρος του τριγώνου ΑΔΗ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΓ.
γ) Οι ευθείες ΒΕ και ΔΗ τριχοτομούν το τμήμα ΖΓ.

1898.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Έστω Ε,Ζ και Η τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος.
γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο (η γωνία Β ορθή),να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ.

1877. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Κ το μέσο του ΓΔ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΟΚ κατά τμήμα $ΚΖ = ΚΟ$. Η ΒΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Θ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τμήματα ΟΓ και ΒΖ διχοτομούνται.
β) $ΑΟ = ΔΖ$
γ) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΖΓ είναι ίσα.



13743.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ στην πλευρά ΑΒ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.
α) Να αποδείξετε ότι $Δ\hat{Μ}Γ = Β\hat{Γ}Μ$.
β) Αν το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Μ στην ΑΒ ώστε το τρίγωνο ΔΜΓ να είναι ισοσκελές με ΔΜ = ΔΓ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας.
γ) Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΓ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΜΔΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.

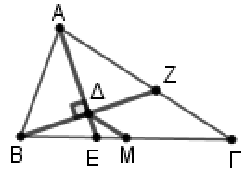
13745.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσο Μ της βάσης ΒΓ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.
α) Αν από το μέσο Μ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:
i. ΜΕ = ΜΖ.
ii. Το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με 2ΑΒ.
β) Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, διαφορετικό από το μέσο Μ, και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, τότε:
i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου ΑΚΔΛ;
ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου ΑΚΔΛ με την περίμετρο του ρόμβου ΑΕΜΖ του ερωτήματος α ii) και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.

13856.Σε τρίγωνο ΔΕΖ, φέρουμε τη διάμεσο ΔΜ και στην προέκτασή της προς το μέρος του Μ παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε ΑΜ=ΜΘ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΕΖ προς το Ε κατά τμήμα ΕΑ=ΕΖ και προς το Ζ κατά τμήμα ΖΓ=ΕΖ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΘΑΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι ΑΔ=12. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου ΕΗ του τριγώνου ΔΕΖ στο σχήμα του Γιάννη;

37096. α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.
β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για
i. ισόπλευρο τρίγωνο.

ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

37106. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < B\Gamma$ και η διχοτόμος ΒΕ της γωνίας Β. Αν $AZ \perp BE$, όπου Ζ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσον της ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

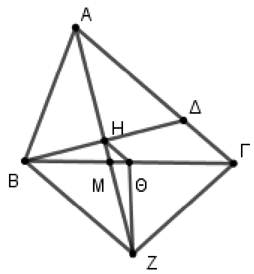


α) Το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

β) $\Delta M \parallel B\Gamma$ και $\Delta M = \dfrac{B\Gamma - AB}{2}$.

γ) $E\hat{\Delta}M = \dfrac{B}{2}$, όπου Β η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ.

37165.Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Από το Β φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο ΑΜ της γωνίας Α, η οποία τέμνει την ΑΜ στο Η και την ΑΓ στο Δ. Στην προέκταση της ΑΗ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΑΗ = ΗΖ και έστω Θ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι



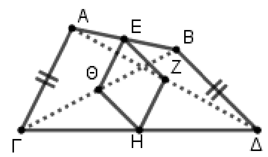
α) το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ρόμβος.

β) ΗΘ//ΒΖ.

γ) $H\Theta = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$

3ο Θέμα

11896. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος ισχύει ότι ΑΔ = ΒΓ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ είναι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ και ΒΔ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:



α. ΕΖ / / = ΗΘ **β.** Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.

12068. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ και Μ το μέσο της υποτείνουσας του ΒΓ. Από το Μ φέρουμε $M\Delta \perp AB$ και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΔΖ.

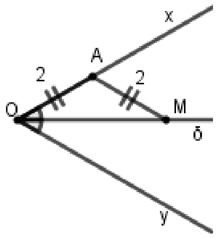
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΜΒΖ είναι ισοσκελές. **ii.** Το τετράπλευρο ΑΜΒΖ είναι ρόμβος.

β) Αν το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΜΒΖ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου

2ο Θέμα

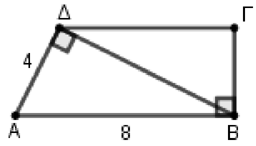


13653.Σχεδιάζουμε γωνία $x\hat{O}y = 60^\circ$ και παίρνουμε σημείο Α επί της πλευράς Οx, τέτοιο ώστε ΑΟ = 2. Φέρουμε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας $x\hat{O}y$ και θεωρούμε σημείο Μ στην Οδ, τέτοιο ώστε ΑΜ = ΑΟ. Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία $\delta\hat{O}y$.

β) Τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΜ.

γ) Το μήκος του ύψους ΑΒ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΜ.



13828.Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ. Αν ΑΔ=4 και ΑΒ=8 τότε:

α) Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\hat{A}B$.

β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ.

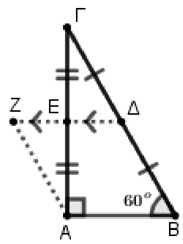
13831.Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{A} = 90^\circ$.

α) Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΑΒ > ΑΓ. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί;

β) Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο α) ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30^o , τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:

i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\hat{B}$ και πόσες η γωνία $\hat{\Gamma}$;

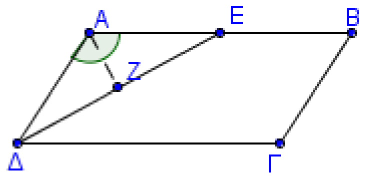
ii. Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας;



13837.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$.
Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε που είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.
Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ=ΔΕ.

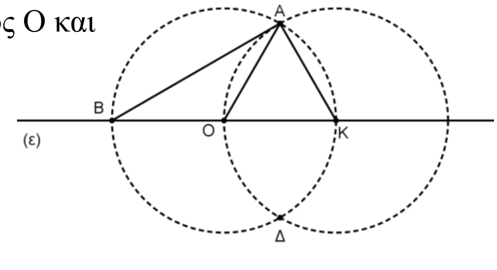
α) Να αποδείξετε ότι ΓΔ=ΑΖ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές.



14876. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{\Delta}E = 30^\circ$ **β)** $AZ = \dfrac{AB}{4}$



34314.Θεωρούμε δυο ίσους κύκλους (Ο,ρ) και (Κ,ρ) τεμνόμενους στα σημεία Α και Δ, με τα κέντρα τους Ο και Κ να βρίσκονται σε ευθεία (ε) που τέμνει τον κύκλο (Ο,ρ) σε σημείο Β, και τη διάκεντρό τους ΟΚ να είναι ίση με ρ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο,

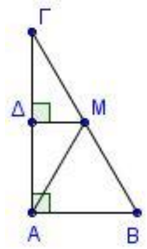
ii. το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ορθογώνιο.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΒΚ.

34393. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ (προς το Α) κατά τμήμα $ΑΗ = ΔΑ$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές.

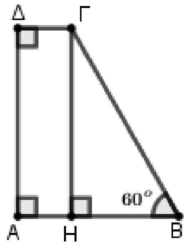
β) Το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Ζ.



34406. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^\circ\right)$ με $ΒΓ = 8\text{cm}$. Έστω ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου και $ΜΔ \perp ΑΓ$. Αν $Α\hat{Μ}Γ = 120^\circ$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $ΑΒ = 4\text{cm}$.

β) Να βρείτε το μήκος της ΜΔ.

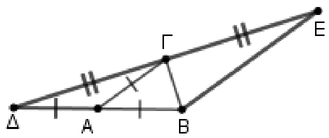


34408. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^\circ$, $ΑΒ > ΓΔ$, $ΒΓ = 4\ ΔΓ$, $\hat{Β} = 60^\circ$ και $ΓΗ \perp ΑΒ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΗΒ = 2ΔΓ$.

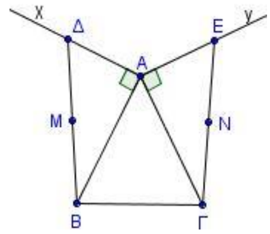
β) το τετράπλευρο ΑΗΓΔ είναι ορθογώνιο με $ΑΗ = \frac{1}{2}ΗΒ$.



34411. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $ΑΒ = ΑΔ$ και στη προέκταση της ΔΓ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $ΔΓ = ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο.

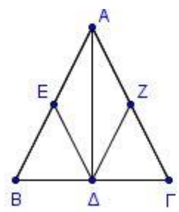
β) $ΒΕ \parallel ΑΓ$ και $ΑΓ = \frac{ΒΕ}{2}$.



34420. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε $Αx \perp ΑΒ$ και $Αy \perp ΑΓ$ όπως στο διπλανό σχήμα. Στις Αx και Αy θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε $ΑΔ = ΑΕ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΒΔ = ΓΕ$.

β) Αν Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές.



34492. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$, το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ίσα.

β) Το τετράπλευρο ΑΖΔΕ είναι ρόμβος.

34495. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και $\hat{Γ} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος του ΑΔ και το μέσο Ζ της πλευράς ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $ΔΖ = \frac{ΑΓ}{2}$.

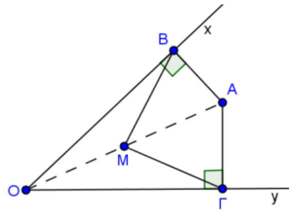
β) Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισόπλευρο.

34515. Δίνεται γωνία xOy και σημείο A στο εσωτερικό της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες AB, AΓ προς τις πλευρές Ox, Oy της γωνίας αντίστοιχα και ονομάζουμε M το μέσο του OA. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές.

β) Το τρίγωνο BMΓ είναι ισοσκελές.

γ) $B\hat{M}A = 2x\hat{O}A$.



36086. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και Μ το μέσο της ΒΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές.

γ) Να βρείτε τη γωνία ΑΜΓ.

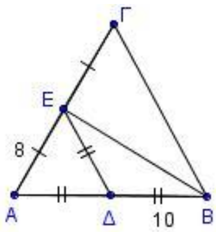
36093. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = \Delta E = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο.

ii. $B\Gamma = 20$.

β) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

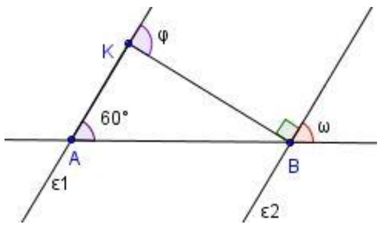


36097. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB = 6$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ.

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΚ ως προς τις γωνίες του.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΚ, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

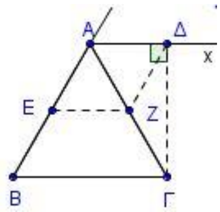


36103. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Ax της γωνίας Α και από το σημείο Γ την κάθετο ΓΔ στην Ax. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΖ = ΑΕ= ΑΖ,

β) η γωνία $A\Gamma\Delta$ είναι ίση με 60°.

γ) το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ρόμβος.



36109. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

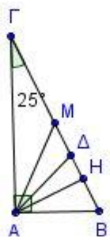
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

β) Αν η πλευρά $B\Gamma = 2\,\text{cm}$, να βρείτε το μήκος της ΑΒ.

36111. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος ΑΜ, το ύψος ΑΗ από την κορυφή Α και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας Α.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{M}B,\ H\hat{A}B,\ A\hat{\Delta}B$.

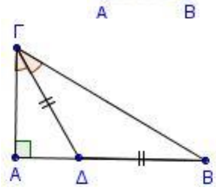
β) Να αποδείξετε ότι $M\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}H = 20^\circ$.



36116. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, έτσι ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\,\text{cm}$.

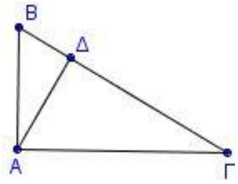
Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = 30^\circ$. **β)** $AB = 3\,\text{cm}$

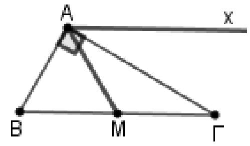


36169. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ$ και Μ το μέσο της ΒΓ.
α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΒ.

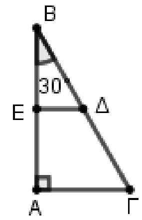
36171. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και ΑΔ το ύψος του.
α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να υπολογιστεί η γωνία ΒΑΔ.
γ) Να αποδείξετε ότι: $B\Delta = \frac{AB}{2}$.



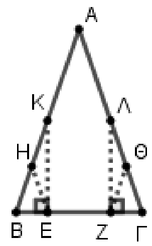
36328.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΜ με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:
α) $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$
β) η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑx.



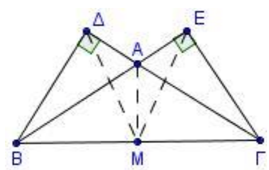
36342. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Αν τα σημεία Ε και Δ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα με $E\Delta = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:
α) ΑΓ **β)** ΒΓ **γ)** ΑΔ
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



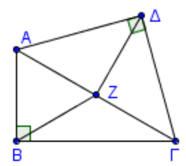
36343. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Από τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΚΕ και ΛΖ στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ είναι ίσα.
β) $EH = Z\Theta$, όπου Η, Θ τα μέσα των τμημάτων ΚΓ, ΛΒ αντίστοιχα.



36350. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} > 90^\circ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.
β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ, τότε:
i. Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.
ii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία ΔΜΕ.



36355. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 90^\circ$ και Ζ το μέσο του ΑΓ. Με υποτείνουσα το ΑΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ με $\hat{\Delta} = 90^\circ$.
α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$.
β) Αν $A\hat{\Gamma}B = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες ΒΑΔ και ΒΓΔ.

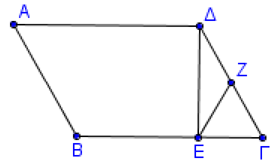


37006. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ και την διάμεσό του ΑΜ στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) $\hat{B} = \Gamma\hat{A}\Delta$ **β)** $A\hat{M}\Delta = 2\hat{\Gamma}$.

37007. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη ΑΕ και ΒΖ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΓΖ = \frac{ΑΔ}{2}$
β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΖ.
γ) το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο.

37017. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{Β} = 120^\circ$ και $ΔΕ \perp ΒΓ$. Έστω ΕΖ η διάμεσος του τριγώνου ΔΕΓ.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Α και Γ του παραλληλογράμμου.
β) Αν Κ είναι το μέσο της ΑΒ, να αποδείξετε ότι $ΕΖ = ΑΚ$.
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΖΓ.

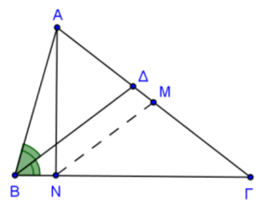


37016. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $ΑΓ < ΑΒ$. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $ΑΔ = ΑΓ$ και στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΑΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι: **α)** $ΔΓ \perp ΕΓ$ **β)** η γωνία ΕΑΓ είναι διπλάσια της γωνίας ΑΔΓ.

4ο Θέμα

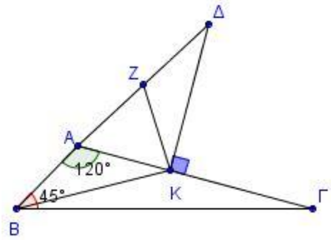
1737. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^\circ\right)$ και το ύψος του ΑΗ. Ονομάζουμε Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν Μ είναι το σημείο τομής του τμήματος ΗΔ με την πλευρά ΑΒ και Ν είναι το σημείο τομής του ΗΕ με την πλευρά ΑΓ, να αποδείξετε ότι:
α) $ΑΗ = ΑΔ = ΑΕ$.
β) Η γωνία ΕΗΔ είναι ορθή.
γ) Τα σημεία Ε,Α και Δ είναι συνευθειακά και ΜΝ=ΔΕ/2.

1738. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β} = 2\hat{Γ}$ και η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας Β. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.
β) Το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές.
γ) $ΑΝ \perp ΒΓ$.

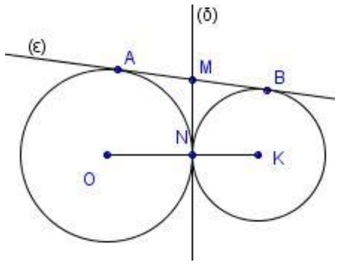


1759. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία Α αμβλεία, ισχύει ότι $ΑΒ = 2ΑΔ$. Τα σημεία Ε και Ζ, είναι μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ρόμβος.
β) Το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισοσκελές.
γ) Το τμήμα ΗΕ, είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΗΓ.

1761. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α ίση με 120° και γωνία Β ίση με 45°. Στην προέκταση της ΒΑ προς το Α, παίρνουμε τμήμα $ΑΔ = 2ΑΒ$. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΓ που την τέμνει στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι:
α) $Α\hat{Δ}Κ = 30^\circ$
β) Το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές.
γ) Αν Ζ το μέσο της ΔΑ, τότε $Ζ\hat{Κ}Β = 90^\circ$.
δ) Το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΔ.

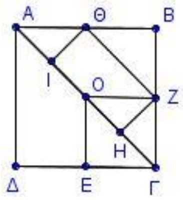


1771. Δύο κύκλοι $(Ο,ρ_1)$, $(Κ,ρ_2)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία ε εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α,Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την ε στο Μ. Να αποδείξετε ότι:



α) Το Μ είναι μέσο του ΑΒ.
β) $Ο\hat{Μ}Κ = 90^\circ$
γ) $Α\hat{Ν}Β = 90^\circ$

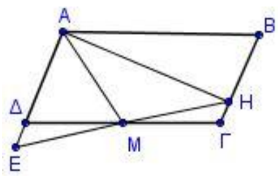
1781. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη διαγώνιο ΑΓ θεωρούμε σημεία Ι, Ο, Η ώστε $ΑΙ = ΙΟ = ΟΗ = ΗΓ$. Αν Ε, Θ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΔΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο.
β) $ΖΗ = \frac{ΑΓ}{4}$.
γ) Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο με $ΘΖ = 2ΘΙ$.

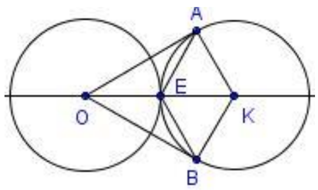
1806. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του ΑΜ και σε τυχαίο σημείο Κ αυτής φέρουμε κάθετη στην ΑΜ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η είναι το μέσο του ΔΕ να αποδείξετε ότι:
α) $Β = ΒΑΜ$.
β) $Α\hat{Δ}Η = Δ\hat{Α}Η$.
γ) Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ.

1787. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 2ΒΓ$,τη γωνία Α αμβλεία και Μ το μέσο της ΓΔ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:



α) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ.
β) Τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται.
γ) $\hat{Ε} = Δ\hat{Μ}Α$.

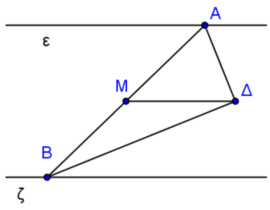
1796. Δύο ίσοι κύκλοι $(Ο,ρ)$ και $(Κ,ρ)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο $(Κ,ρ)$, να αποδείξετε ότι:



α) $ΑΕ = ΒΕ$.
β) $Α\hat{Ο}Κ = 30^\circ$.
γ) Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος.

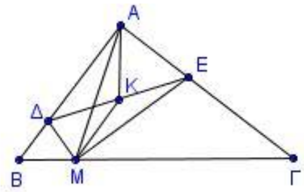
1808. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και Δ,Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $ΕΛ = ΑΕ$ και στη προέκταση της ΕΔ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο, ώστε $ΔΚ = ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΚΔ = ΛΕ$.
β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ορθογώνια.
γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα.

1811. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες (ε) και (ζ) και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:



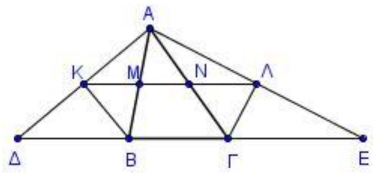
α) $\mathrm{B\hat{\Delta}A} = 90^\circ$ **β)** $\mathrm{B\hat{M}\Delta} = 2\mathrm{M\hat{\Delta}A}$ **γ)** $\mathrm{M\Delta} \parallel \varepsilon$

1812. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών ΒΜΑ και ΑΜΓ οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.



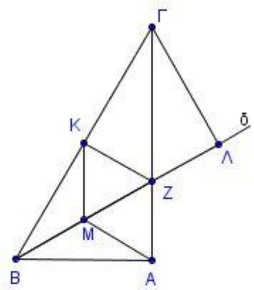
α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΜΕ είναι ορθή.
β) Αν Κ το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι $\mathrm{MK} = \mathrm{KA}$.

1824. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{AB}$ ενώ στη προέκταση της ΒΓ προς το Γ, θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\Gamma\mathrm{E} = \mathrm{A}\Gamma$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνουν τις ΑΔ και ΑΕ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα και η ΚΛ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



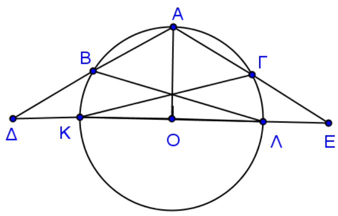
α) Τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.
β) Τα τρίγωνα ΚΜΑ και ΑΝΛ είναι ισοσκελή.
γ) $\mathrm{K\Lambda} = \dfrac{\mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{B\Gamma}}{2}$

1872. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$ και $\hat{\mathrm{B}} = 60^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Τα σημεία Μ και Κ είναι τα μέσα των ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στη διχοτόμο Βδ, να αποδείξετε ότι:



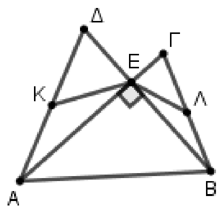
α) Το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές.
β) Το τετράπλευρο ΑΜΚΖ είναι ρόμβος.
γ) $\Gamma\mathrm{Z} = 2\mathrm{ZA}$
δ) $\mathrm{B\Lambda} = \mathrm{A\Gamma}$

1874. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο $\mathrm{K\Lambda} = 2\rho$. Έστω Α σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα ΟΑ να είναι κάθετη στην ΚΛ. Φέρουμε τις χορδές $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = \rho$. Έστω Δ και Ε τα σημεία τομής των προεκτάσεων των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου ΚΛ. Να αποδείξετε ότι:



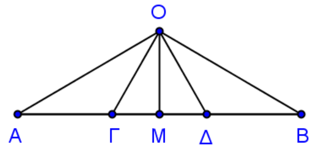
α) $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 120^\circ$
β) Τα σημεία Β και Γ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.
γ) $\mathrm{K\Gamma} = \mathrm{\Lambda B}$

1876.Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΒΔ (ΒΑ=ΒΔ), τέτοια ώστε οι πλευρές τους ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

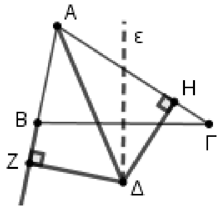


α) ΕΔ=ΕΓ .
β) ΔΓ//ΑΒ .
γ) Το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές και ΚΛ//ΑΒ.

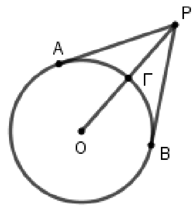
1895. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ (ΑΓ=ΓΒ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΚ και ΓΛ. Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές.
β) Η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ.



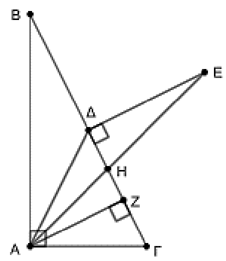
13540.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε η διαγώνιός του ΑΓ να είναι κάθετη στη ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. ΓΕ = ΖΗ **ii.** Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\Gamma E$.
β) Αν $\Delta H = \dfrac{AB}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισόπλευρο.



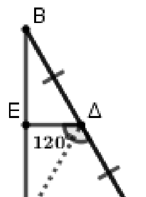
13522.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει την μεσοκάθετο (ε) της ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔΖ και ΔΗ προς τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΔ.
β) Να αποδείξετε ότι ΒΖ = ΗΓ.
γ) Αν η γωνία $\hat{A} = 60^\circ$ και Μ το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι ΗΜ = ΖΔ.



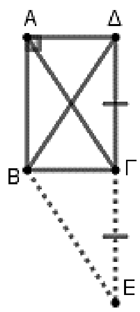
13520.Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και σημείο Ρ εκτός του κύκλου. Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Η ΡΟ τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο ΑΒ στο Γ και $APB = 60^\circ$.Να αποδείξετε ότι:
α) ΟΡ = 2ρ. **β)** $A\hat{\Gamma}B = 120^\circ$
γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος. Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.



13672.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και ΑΒ > ΑΓ. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε κάθετη στη ΒΓ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο ΑΗ της γωνίας Α στο σημείο Ε. Έστω ΑΖ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:
α) $\Gamma\hat{A}Z = \Delta\hat{A}B$.
β) ΑΔ = ΔΕ.
γ) $Z\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma} - \hat{B}$



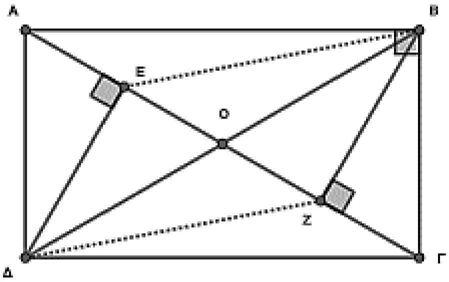
13855.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΑΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι
$E\hat{\Delta}\Gamma = 120^\circ$, τότε:
α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνία $\Delta\hat{\Gamma}A$.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο.
γ) Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΖ=ΑΓ και την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma H = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι $A\hat{H}Z = 90^\circ$.



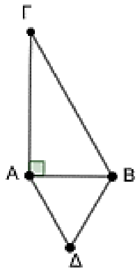
13851.Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΕ=ΔΓ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Αν $\Delta\hat{B}E = 120^\circ$ να αποδείξετε ότι ΒΔ=2ΑΔ.

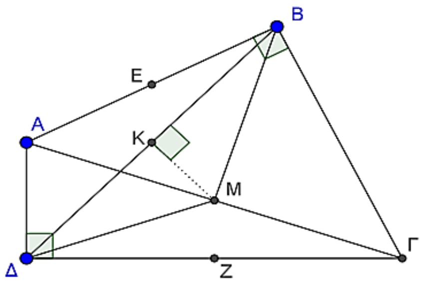
13852.Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΑΔ και με κέντρο Ο. Αν ΒΖ και ΔΕ είναι οι αποστάσεις των κορυφών Β και Δ από τη διαγώνιο ΑΓ, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Αν $\Delta\hat{A}E = 60^\circ$ και ΟΕ=5, να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΔ.



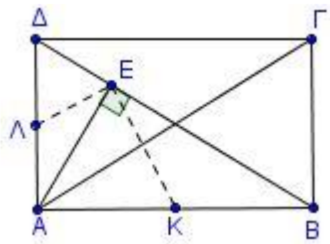
13853.Στο παραπάνω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.Επίσης οι ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Αν η περίμετρος του ΑΒΔ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του ΑΒΓ.
γ) Αν το σημείο Κ είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το ΑΔΒΚ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου Κ. Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το ΑΔΒΚ; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



14566.Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{\Delta} = B = 90^0$. Αν τα σημεία Ε, Ζ, Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ, και ΑΓ αντιστοίχως και το ΜΚ είναι κάθετο στην ΒΔ, να αποδείξετε ότι :
α) Το τρίγωνο ΒΜΔ είναι ισοσκελές και το Κ είναι το μέσο του ΒΔ.
β) i. $EK = \frac{A\Delta}{2}$.
ii. ΜΖ=ΕΚ.
γ) Το τετράπλευρο ΚΕΜΖ είναι παραλληλόγραμμο.

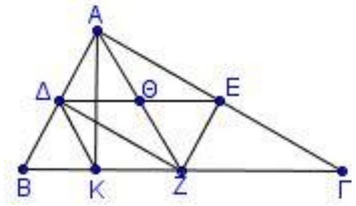


14879. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Α φέρουμε $AE \perp B\Delta$. Έστω Κ,Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντιστοίχως, τότε:
α) i. Να αποδείξετε ότι: $K\hat{E}\Lambda = 90^\circ$
ii. $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$
β) Αν $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $K\Lambda = B\Gamma$.



14881. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και ΑΜ η διάμεσός του. Από το Μ φέρουμε ΜΚ κάθετη στην ΑΒ και ΜΛ κάθετη στην ΑΓ. Αν Ν, Ρ είναι τα μέσα των ΒΜ και ΓΜ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) $N\hat{K}M = N\hat{M}K$.
β) Η ΜΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΝΜΑ.
γ) $AM = KN + \Lambda P$.

14886. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$, τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ. Αν Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ, ΔΕ, τότε:



α) Να αποδείξετε ότι:

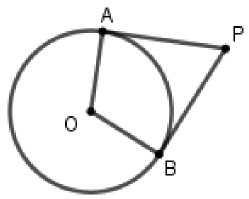
i. Το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο.

ii. $A\Theta=\Theta E=\dfrac{B\Gamma}{4}$

β) Αν επιπλέον είναι $\hat{\Gamma}=30^\circ$,

i. να βρείτε τη γωνία ΑΖΒ. **ii.** να αποδείξετε ότι $BK=\dfrac{B\Gamma}{4}$.

34315. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας 4 cm και εξωτερικό του σημείο Ρ. Έστω ΡΑ, ΡΒ τα εφαπτόμενα τμήματα που φέρονται από το Ρ, τα σημεία επαφής τους Α, Β με τον κύκλο αντίστοιχα και τέτοια ώστε η γωνία $A\hat{P}B$ να ισούται με 60^0.

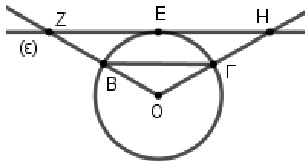


α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο της γωνίας $A\hat{O}B$ είναι ίσο με 120^0.

β) Αν ΡΟ η διακεντρική ευθεία του σημείου Ρ, τότε να υπολογίσετε:

i. το μέτρο της γωνίας $A\hat{P}O$ **ii.** το μήκος του τμήματος ΟΡ.

34318. Θεωρούμε κύκλο (Ο, ρ) και Ε το μέσο του τόξου του ΒΓ. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο στο Ε. Οι προεκτάσεις των ΟΒ, ΟΓ (προς το Β και το Γ αντίστοιχα) τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα.



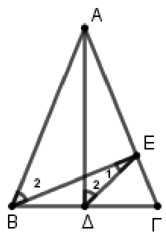
α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΒΓ // (ε).

ii. ΟΖ = ΟΗ.

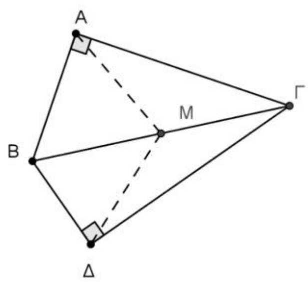
β) Αν το σημείο Β είναι το μέσο του ΟΖ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΟΗ.

34321. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:



α) ΒΓ = 2ΕΔ **β)** $\hat{E}_1=\dfrac{\hat{A}}{2}$ **γ)** $\hat{B}_2=\hat{\Delta}_2$

34330. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ και ΔΒΓ $\left(\hat{\Delta}=90^\circ\right)$ με τις κορυφές τους Α και Δ εκατέρωθεν της ΒΓ και το μέσο Μ της ΒΓ.



Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές,

β) $A\hat{M}\Delta=2A\hat{\Gamma}\Delta$.

γ) τα Α, Β, Δ και Γ είναι σημεία ενός κύκλου, τον οποίο και να κατασκευάσετε.

34334. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{B}<\hat{\Gamma}$) θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Η η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

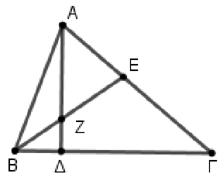
α) ΗΕ=ΕΓ και ΗΖ= ΖΓ.

β) το τετράπλευρο ΔΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

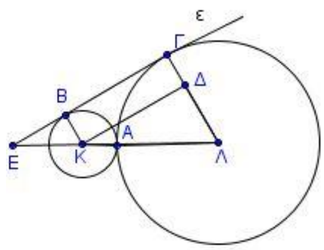
γ) $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{H}E$.
δ) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνει την ΒΕ στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά.

37075. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ,Δ ώστε να ισχύει $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Επίσης θεωρούμε σημείο Ο εκτός του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έτσι ώστε να ισχύουν $O\Gamma = A\Gamma$ και $\Delta B = O\Delta$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $\Gamma\hat{O}\Delta = 60^\circ$ **ii.** $O\hat{A}\Gamma = O\hat{B}\Delta = 30^\circ$
β) Αν Μ το μέσον του τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι $2OM = OA$.

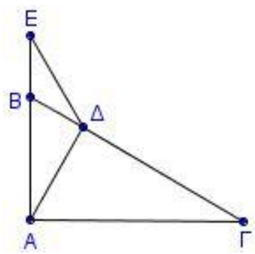
37082. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και έστω ΑΔ ύψος και ΒΕ διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Ζ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $\hat{B} = 60^\circ$ και $AZ = BZ$
ii. $A\Delta = \dfrac{3}{2}BZ$
β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου.



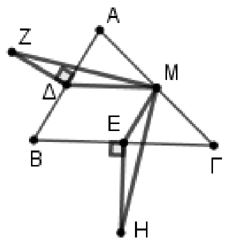
37088. Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Α.
Μια ευθεία εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο.
β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{K}\Lambda = 30^\circ$.
γ) Να αποδείξετε ότι $E\Lambda = 6\rho$.



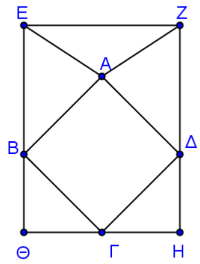
37100. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$.
Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο, ώστε $BE = B\Delta$.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ.
β) Να αποδείξετε ότι:
i. $BE = \dfrac{AB}{2}$ **ii.** $AE = \Gamma\Delta$



37101. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με τις γωνίες Β και Γ οξείες και Δ,Μ και Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των ΑΒ και ΒΓ και εκτός του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $\Delta Z = \dfrac{AB}{2}$ και $EH = \dfrac{B\Gamma}{2}$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο.
ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα.
β) Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $A = 90^\circ$.

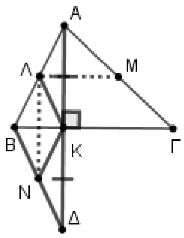


37126. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΕΖΗΘ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο Α της μεσοκαθέτου του τμήματος ΕΖ και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους ΕΘ, ΘΗ, ΗΖ στα σημεία Β, Γ και Δ αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης Α. Για τη διαδρομή $Α \to Β \to Γ \to Δ \to Α$ που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ. η γωνία ΑΒΕ) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία ΘΒΓ) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45°.



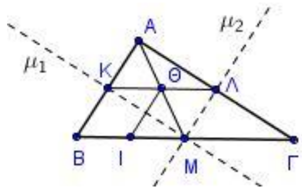
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ είναι ίσα.
ii. Η διαδρομή ΑΒΓΔΑ της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο.
β) Αν η ΑΖ είναι διπλάσια από την απόσταση του Α από τον τοίχο ΕΖ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΖ.

37132.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $ΑΚ = ΚΔ$. Έστω Λ, Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων ΑΒ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.
β) Το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος .
γ) $ΛΜ \perp ΛΝ$.

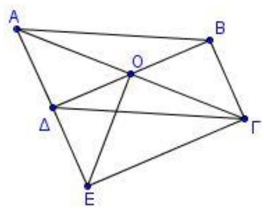
37133. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ,Λ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Φέρουμε τις μεσοκαθέτους $μ_1$, $μ_2$ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο μέσο Μ της ΒΓ.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{Α} = 90^\circ$.
ii. Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο.
iii. $ΛΘ = \frac{ΒΓ}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των ΑΜ και ΚΛ.

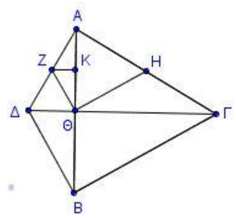
β) Αν Ι σημείο της ΒΓ τέτοιο, ώστε $ΒΙ = \frac{ΒΓ}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο.

37136. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην ΑΓ στο κέντρο του Ο, αυτή να τέμνει την προέκταση της ΑΔ σε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΔΕ = ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι:



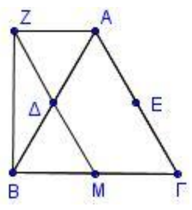
α) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.
β) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

37138. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με βάση την ΑΒ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, εκτός του τριγώνου ΑΒΓ, με $\hat{Δ} = 120^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Η των πλευρών ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.



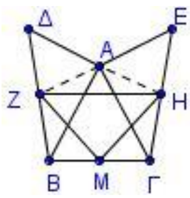
α) Να αποδείξετε ότι η ΔΓ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.
β) Αν η ΔΓ τέμνει την ΑΒ στο Θ, να αποδείξετε ότι η γωνία ΖΘΗ είναι ορθή.
γ) Αν η ΖΚ είναι κάθετη στην ΑΒ από το σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $ΖΚ = \frac{ΑΔ}{4}$.

37140. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ,Ε και Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στη προέκταση του ΜΔ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z = \Delta M$. Να αποδείξετε ότι:



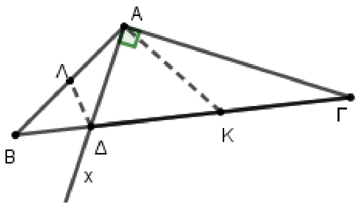
α) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΜΔ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Τα τμήματα ΖΕ και ΑΔ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.
δ) Η ΒΖ είναι κάθετη στη ΖΑ.

37142. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα ΑΔ κάθετο στην ΑΒ και τμήμα ΑΕ κάθετο στην ΑΓ με $A\Delta = AE$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ,Η και Μ των ΔΒ, ΕΓ και ΒΓ αντίστοιχα.



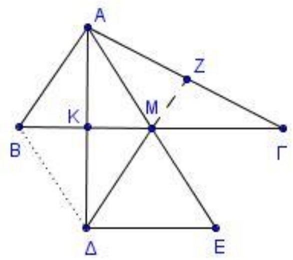
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.
ii. Το τρίγωνο ΖΑΗ είναι ισοσκελές.
iii. Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΖΗ.
β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έγραψε τα εξής:
« 1. $A\Delta = AE$ από την υπόθεση
2. $AB = A\Gamma$ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου
3. $\Delta\hat{A}B = E\hat{A}\Gamma$ ως κατακορυφήν
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία ίσα».
Ο καθηγητής είπε ότι η λύση περιέχει λάθος, μπορείς να το εντοπίσεις;

37156.Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΓ με $\hat{A} = 120^\circ$ Φέρουμε ημιευθεία Αx κάθετη στην ΑΓ στο Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Έστω Λ το μέσο του ΑΒ και Κ το μέσο του ΔΓ.
Να αποδείξετε ότι:



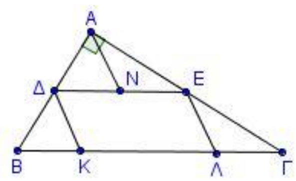
α) Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές
β) $\Delta\Gamma = 2 \cdot B\Delta$
γ) ΛΔ // ΑΚ
δ) $AK = 2 \cdot \Lambda\Delta$

37157. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ τέτοια, ώστε $AM = AB$. Φέρουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $K\Delta = AK$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι:

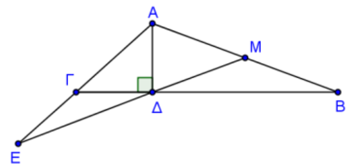


α) $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$.
β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ρόμβος.
δ) Η προέκταση της ΔΜ τέμνει την ΑΓ στο μέσον του Ζ.

37158. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και Δ,Ε και Ν τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα. Στο τμήμα ΒΓ θεωρούμε σημεία Κ και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$.Να αποδείξετε ότι:



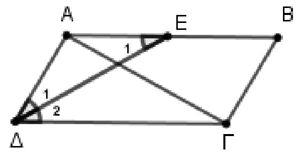
α) $\Delta\hat{K}\Lambda = 2\hat{B}$ και $E\hat{\Lambda}K = 2\hat{\Gamma}$.
β) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) $\Delta E = 2\Delta K$



37159. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ$\left(\text{ΑΒ} > \text{ΑΓ}\right)$, ΑΔ το ύψος του και Μ το μέσο του ΑΒ. Η προέκταση της ΜΔ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε ώστε $\text{ΓΔ} = \text{ΓΕ}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\text{Β}} = \hat{\text{Ε}}$ **β)** $\hat{\Gamma} = 2\hat{\text{Β}} = \text{Α}\hat{\text{Μ}}\Delta$ **γ)** $\text{ΓΕ} < \text{ΑΓ}$

3ο Θέμα



12165. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{\text{Α}} = 120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ που τέμνει την ΑΒ στο μέσο της Ε.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΒ = 2·ΑΔ.

β) Αν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο Ε στην ΓΔ την τέμνει στο Η, τότε να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta\text{Ε}}{\text{ΗΕ}} = 2$.

γ) Αν Μ είναι το μέσο της ΓΔ, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΑΔ είναι ισόπλευρο.

δ) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{\text{Α}}\Gamma = 90^\circ$.

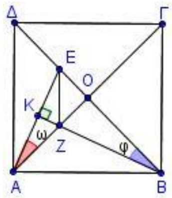
Βαρύκεντρο – Ορθόκεντρο

Θέμα 4ο

1706. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:
Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β=γ, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.
α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση *Π*, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της *Π* και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.
γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η *Π* και η αντίστροφή της ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση.

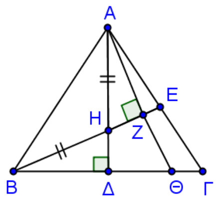
1728. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $\mathrm{A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma}$.
γ) Οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

1748. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ο το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε του τμήματος ΟΔ. Φέρνουμε την κάθετη από το Β στην ΑΕ, που τέμνει το τμήμα ΑΟ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



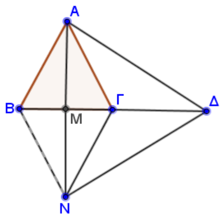
α) Οι γωνίες ω και φ του σχήματος είναι ίσες.
β) $\mathrm{BZ = AE}$ και $\mathrm{\Gamma Z = BE}$.
γ) Το τμήμα ΕΖ είναι κάθετο στο ΑΒ.

1754. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\mathrm{AB = A\Gamma})$ και το ύψος του ΑΔ. Στο ΑΔ θεωρούμε σημείο Η τέτοιο, ώστε $\mathrm{HA = HB}$. Έστω ότι Ε είναι το σημείο τομής της ΒΗ με την ΑΓ. Φέρνουμε την ΑΖ κάθετη στη ΒΕ, η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Θ.



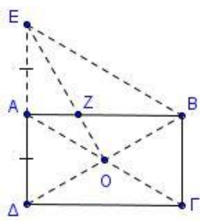
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τρίγωνα ΗΔΒ και ΗΖΑ είναι ίσα.
ii. $\mathrm{\Delta\Theta = \Theta Z}$
iii. Η ευθεία ΘΗ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.
β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΗΒ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1760. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ$(\mathrm{AB = A\Gamma})$ και ΑΜ το ύψος του στη πλευρά ΒΓ. Στην προέκταση του ΑΜ θεωρούμε τμήμα $\mathrm{MN = AM}$. Στη προέκταση του ΒΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\mathrm{\Gamma\Delta = B\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:



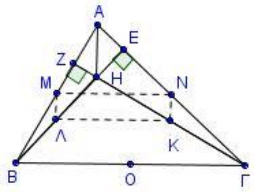
α) Το τετράπλευρο ΑΒΝΓ είναι ρόμβος.
β) Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές.
γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ.

1764. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και $\mathrm{AB > B\Gamma}$, $\mathrm{A\Gamma = 2B\Gamma}$. Στην προέκταση της πλευράς ΔΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $\mathrm{\Delta A = AE}$. Να αποδείξετε ότι:

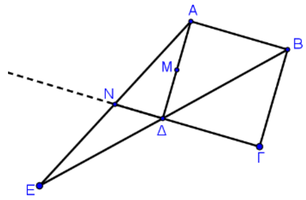


α) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο.

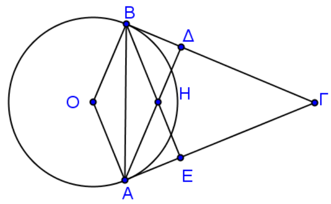
γ) Αν η ΕΟ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ.
να αποδείξετε ότι $\Delta Z \perp EB$.



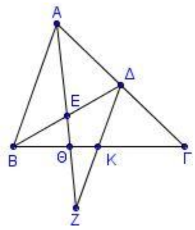
1777. Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη από τις κορυφές Β,Γ αντίστοιχα και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα Μ, Ν, Κ, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΗ, ΒΗ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $MN = \Lambda K$
ii. $NK = M\Lambda = \dfrac{AH}{2}$
iii. Το τετράπλευρο ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο.
β) Αν Ο είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $M\hat{O}K = 90^\circ$.



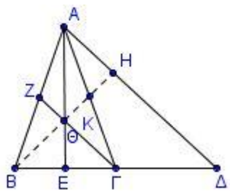
1780. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΒΔ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = \Delta B$. Έστω Μ το μέσο της ΑΔ και Ν το σημείο τομής των ευθειών ΑΕ και ΓΔ.
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta N = \Delta M$
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΝΜΔ.
γ) Να αποδείξετε ότι: **i.** $MN \perp A\Gamma$ **ii.** $\Gamma M \perp AN$



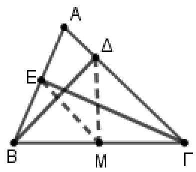
1823. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δύο μη αντιδιαμετρικά σημεία του Α και Β. Φέρουμε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Α και Β οι οποίες τέμνονται σε σημείο Γ. Φέρουμε επίσης και τα ύψη ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ τα οποία τέμνονται στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές.
β) Το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι ρόμβος.
γ) Τα σημεία Ο,Η,Γ είναι συνευθειακά.



1827. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου ΒΔ. Στην προέκταση της ΑΕ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $EZ = AE$ και έστω Θ το σημείο τομής της ΑΖ με την πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΖ.



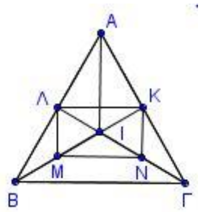
1878. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε το ΒΓ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τις διαμέσους ΑΕ και ΓΖ του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Θ. Το ΒΘ προεκτεινόμενο, τέμνει το ΑΓ στο Κ και το ΑΔ στο Η. Να αποδείξετε ότι:
α) Το ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $AH = \Theta\Gamma$
γ) $AH = 2Z\Theta$



37085. Στο διπλανό σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $M\Delta = ME$
ii. Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα την ΒΓ και ότι $A\hat{H}\Delta = \hat{\Gamma}$, όπου Γ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ.

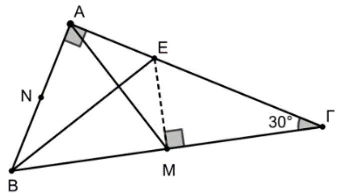
β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΗ.

37087. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ, τα οποία τέμνονται στο Ι. Αν τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των ΒΙ και ΓΙ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.
β) Τα τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ είναι ίσα.
γ) Το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ.
δ) Το τετράπλευρο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

37104.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ με Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.



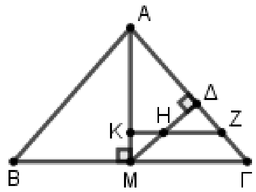
α) Να αποδείξετε ότι:

i) η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

ii) $AE = \frac{\Gamma E}{2}$.

iii) η ΒΕ είναι μεσοκάθετος της διαμέσου ΑΜ.

37116. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε τη ΜΔ κάθετη στην ΑΓ και θεωρούμε σημείο Η το μέσο του ΜΔ. Από το Η φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΜ και ΑΓ στα σημεία Κ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

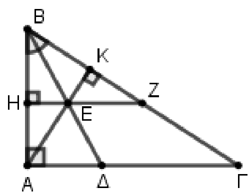


α) $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$

β) $MZ \parallel B\Delta$

γ) Η ευθεία ΑΗ είναι κάθετη στη ΒΔ.

37137. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ με ΒΔ διχοτόμο και ΑΚ ύψος ,που τέμνονται στο Ε.Η κάθετη από το Ε στην ΑΒ τέμνει τις ΑΒ και ΒΓ στα Η και Ζ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι :

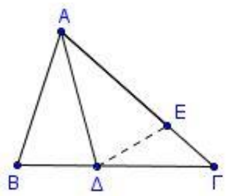
i) Τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα.

ii) Το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές.

iii) Η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΖ.

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

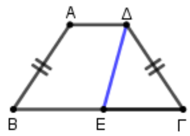
37163. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $AE = AB$.Να αποδείξετε ότι:



α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα.
β) η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΕ.
γ) αν το ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΔ στο Η τότε η ευθεία ΕΗ είναι κάθετη στην ΑΒ.

Τραπέζιο

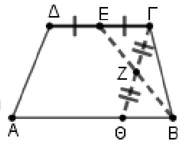
2ο Θέμα



13497. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με ΒΓ > ΔΓ. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΓΕ = ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$.

β) Αν $\hat{\mathrm{A}} = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο.

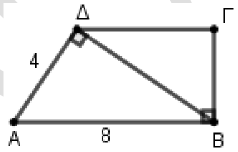


13824. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΓΔ και ΒΕ αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της ΑΒ και της προέκτασης της ΓΖ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΓΕΖ, ΘΒΖ είναι ίσα.

β) ΕΓ=ΘΒ.

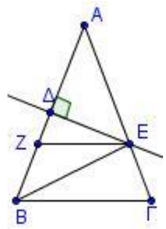
γ) Το τετράπλευρο ΕΒΘΔ είναι παραλληλόγραμμο.



13828. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ. Αν ΑΔ=4 και ΑΒ=8 τότε:

α) Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$.

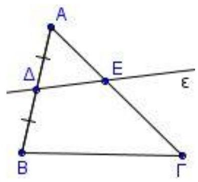
β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ.



34385. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma)$. Στο μέσο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{AE} = \mathrm{BE}$.

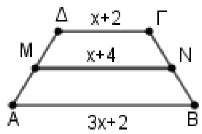
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



34392. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Ε. Η ευθεία (ε) χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα τρίγωνο ΑΔΕ κι σε ένα τετράπλευρο ΒΔΕΓ.

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

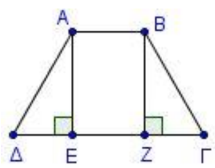
β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



34409. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\mathrm{AB} // \Gamma\Delta$, $\mathrm{AB} > \Gamma\Delta$, $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{B}\Gamma$ και ΜΝ η διάμεσός του.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι ΑΒ = 3x + 2, ΓΔ = x + 2 και το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου είναι ΜΝ = x + 4, τότε να δείξετε ότι x = 2.

β) Αν η γωνία Γ^ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.

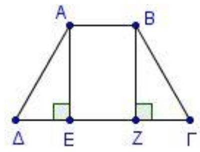


34488. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(\mathrm{AB} \parallel \Gamma\Delta)$ με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$ και τα κάθετα τμήματα ΑΕ, ΒΖ στη ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\mathrm{E} = \Gamma\mathrm{Z}$.

β) το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ορθογώνιο.

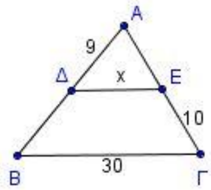
34491. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(AB \parallel \Gamma\Delta\right)$. Από τα σημεία Α και Β φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΑΕ και ΒΖ αντίστοιχα στη ΔΓ.



Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta E = \Gamma Z$ **β)** $AZ = BE$

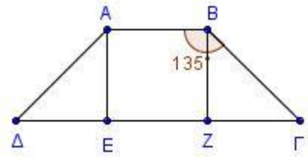
34509. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στην ΑΒ έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω Κ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta Z = \Gamma E$.
β) Τα τρίγωνα ΕΚΖ και ΔΚΓ είναι ισοσκελή.

36092. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $A\Delta = 9$, $E\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 30$.



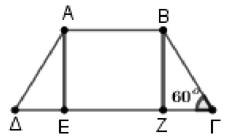
α) Να υπολογίσετε
i. το μήκος x του τμήματος ΔΕ.
ii. την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

36106. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ>ΑΒ και $\hat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές Α και Β φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.



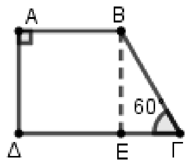
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.
β) Να αποδείξετε ότι ΑΕ=ΕΔ=ΒΖ=ΓΖ.

36112. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(AB \parallel \Gamma\Delta\right)$ με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα.



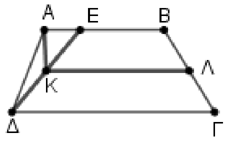
α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα.
γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του ΑΒΓΔ.

36113. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(AB \parallel \Gamma\Delta\right)$ με $AB = B\Gamma = 4$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\Gamma = 60^\circ$. Φέρνουμε το ύψος ΒΕ από την κορυφή Β.



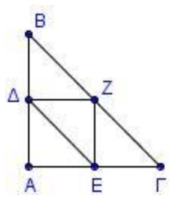
α) Να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι $2E\Gamma = B\Gamma$.
γ) Αν Μ,Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ,ΒΓ αντίστοιχα, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΜΝ.

36166. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(AB \parallel \Gamma\Delta\right)$ με $AB = 3$, $\Gamma\Delta = 4$. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΒ ώστε $AE = 1$. Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ θεωρούμε τα Κ και Λ, μέσα των ΕΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

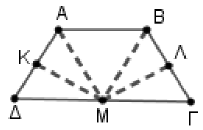


α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΚΛ του τραπεζίου ΕΒΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.

36337. Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

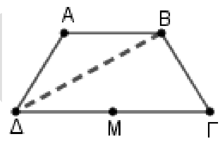


α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι τετράγωνο.
β) Το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



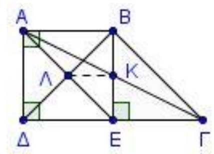
36340. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΔΓ και ΑΔ = ΒΓ), το μέσο Μ της πλευράς ΔΓ και τα μέσα Κ και Λ των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) τα τμήματα ΚΜ και ΛΜ είναι ίσα.
β) Τα τμήματα ΑΜ και ΒΜ είναι ίσα.

37010. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB = 8$ και $\Delta\Gamma = 12$. Αν ΑΗ και ΒΘ τα ύψη του τραπεζίου,
α) να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$.
β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου.

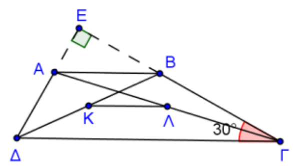


37011. Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχουμε $AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, $\hat{\Delta} = 60^\circ$ και Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:
α) η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.
β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

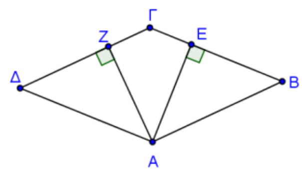
4ο Θέμα



1727. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:
α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ **β)** $B\Delta = AE$ **γ)** $K\Lambda = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$



1736. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω Κ,Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) $AB = 2AE$
β) $K\Lambda = A\Delta$
γ) Σε ποια περίπτωση το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο;
Να αιτιολογήσετε τη απάντησή σας.



1742. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με $\hat{B} \neq 60^\circ$. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές.
β) Η ευθεία ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΖΕ.
γ) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΝΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1747. Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο ΑΒ και δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ΄ ένα σημείο του Ε και τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα.
α) Αν το σημείο Ε δεν είναι το μέσο του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι:
i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.
ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$
β) Αν το σημείο Ε βρίσκεται στο μέσον του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΒ

είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΔΓΒ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

1755. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(AB \parallel \Gamma\Delta\right)$ είναι $AB = A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι ρόμβος.

γ) Αν επιπλέον είναι $B\hat{A}\Delta = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο Ο, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΟΒΓ.

1757. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$.

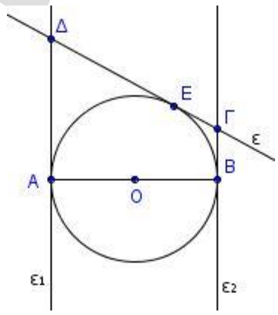
Επιπλέον φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ) Αν Κ,Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η ΑΓ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΚ.

1758. Δίνεται κύκλος (Ο,R) με διάμετρο ΑΒ και ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Ε, η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

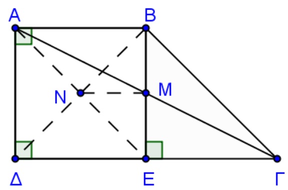


α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$

β) Το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο.

γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ανάλογα με τη θέση του σημείου Ε στο ημικύκλιο ΑΒ.

1767. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Μ. Φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο σημείο Ν.



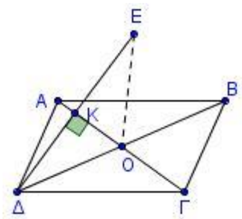
Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) $AE \perp B\Delta$

1770. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔΚ κάθετο στην ΑΓ και στην προέκταση του προς το Κ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε $KE = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:

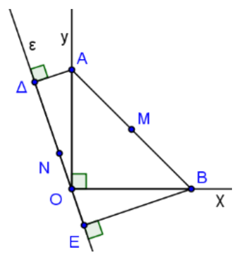


α) $EO = \frac{B\Delta}{2}$

β) $\Delta\hat{E}B = 90^\circ$

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

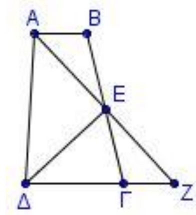
1778. Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y = 90^\circ$ και Α,Β σημεία των ημιευθειών Οy, Οx με $OA = OB$. Η ευθεία (ε) διέρχεται από το Ο και αφήνει τις ημιευθείες Οx, Οy στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο Α στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο Β στην (ε) την τέμνει στο Ε. Να αποδείξετε ότι:



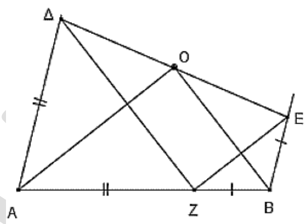
α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ είναι ίσα.

β) $A\Delta + BE = \Delta E$

γ) $MN = \dfrac{\Delta E}{2}$, όπου ΜΝ το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των ΔΕ και ΑΒ.
δ) Το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

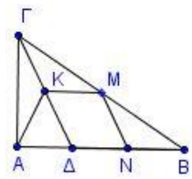


1783. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ ισχύει ότι $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τη ΒΓ στο Ε και την προέκταση της ΔΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές.
β) Το Ε είναι το μέσο της ΒΓ.
γ) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραπεζίου.

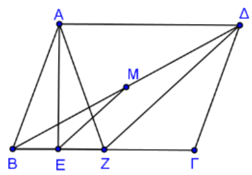


1784. Δίνεται τραπέζιο ΑΔΕΒ, με ΑΔ//ΒΕ, στο οποίο ισχύει ότι ΑΒ=ΑΔ+ΒΕ, και Ο το μέσον της ΔΕ. Θεωρούμε σημείο Ζ στην ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΖ=ΑΔ και ΒΖ=ΒΕ . Αν γωνία $\Delta\hat{A}Z = \varphi$,
α) να εκφράσετε τη γωνία ΑΖΔ σε συνάρτηση με τη φ.
β) να εκφράσετε τη γωνία ΕΖΒ σε συνάρτηση με τη φ.
γ) να αποδείξετε ότι οι ΟΑ και ΟΒ είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔΖ και ΖΕ αντίστοιχα.

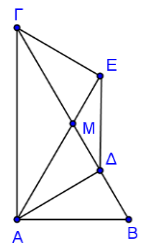
1786. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$ και τη γωνία Β αμβλεία. Από την κορυφή Α φέρουμε την ΑΕ κάθετη στην ευθεία ΒΓ και έστω Μ,Ν τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι ρόμβος.
β) Το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
γ) Η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΕΓ.



1789. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Έστω Κ,Μ,Ν τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο ΑΚΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
γ) Η διάμεσος του τραπεζίου ΑΚΜΝ είναι ίση με ΑΒ/2.



1790. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τη γωνία του Β να είναι ίση με 70° και το ύψος του ΑΕ. Έστω Ζ σημείο της ΒΓ ώστε $BE = EZ$.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΖΓΔ.
γ) Αν Μ το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι $EM = \dfrac{A\Gamma}{2}$.

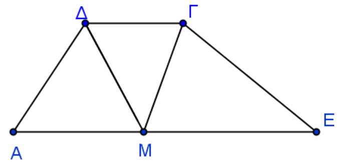


1791. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσό του ΑΜ. Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΑΜ, η οποία την τέμνει στο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο.
β) $ME = M\Delta = \dfrac{B\Gamma}{4}$
γ) Το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1797. α) Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

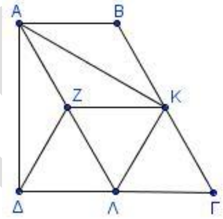
β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ,Λ,Μ,Ν των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

1815. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = A\Delta + B\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές.
β) Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές.
γ) Η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπεζίου.

1821. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ\right)$ με $B\Gamma = \Gamma\Delta = 2AB$ και Κ,Λ τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ. Η παράλληλη από το Κ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΛ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

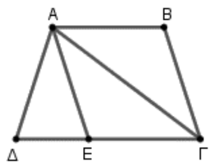


α) $B\Gamma = 2\Delta Z$.
β) Το τετράπλευρο ΖΚΓΛ είναι ρόμβος.
γ) $A\hat{K}\Lambda = 90^\circ$.

1893. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB > B\Gamma$ τέτοιο, ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60°. Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου.
ii. $AM = \frac{1}{4}A\Gamma$
β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

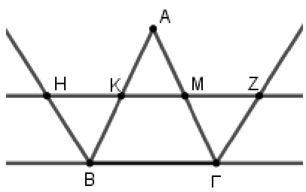
13519.Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΑΔ. Στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε ΑΕ = ΑΔ. Από το μέσο Μ της ΔΕ φέρουμε παράλληλη προς την ΔΓ που τέμνει την ΒΓ στο Κ.
α) Να αποδείξετε ΑΜ ⊥ ΔΕ.
β) Να αποδείξετε ότι 2ΜΚ = 2ΑΒ - ΑΔ.
γ) Φέρνουμε την ΕΚ που τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι ΓΖ = ΑΒ – ΑΔ.

13539.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και $\hat{A} = 108^\circ$. Στη βάση ΓΔ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε οι ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A}$.

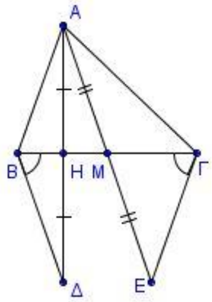


α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.
β) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
ii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος.

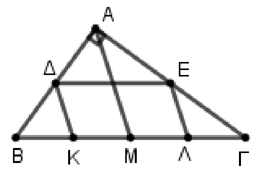
13838.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), με Κ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών Β και Γ στα σημεία Η και Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



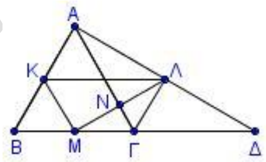
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



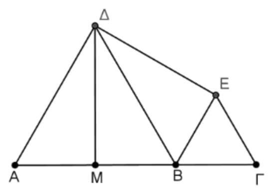
14885. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΗ κατά τμήμα $ΗΔ = ΑΗ$ και τη διάμεσό του ΑΜ κατά τμήμα $ΜΕ = ΑΜ$.
Να αποδείξετε ότι:
α) i. $ΑΒ = ΓΕ$ **ii.** $ΑΒ = ΒΔ$
β) $Γ\hat{Β}Δ = Β\hat{Γ}Ε$
γ) i. Εξετάστε αν το τμήμα ΒΔ μπορεί να είναι παράλληλο στο τμήμα ΓΕ.
ii. Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



14888. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90^\circ$.
Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Κ, Μ, Λ ώστε $ΒΚ = ΚΜ = ΜΛ = ΛΓ$. Αν τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο ΚΔΑΜ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του ισούται με $\frac{3}{8}ΒΓ$.

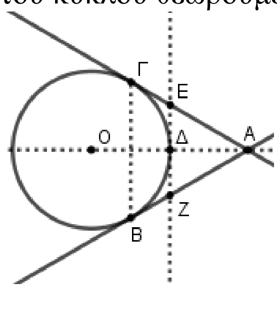


14882. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $ΓΔ = ΒΓ$. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα, τότε:
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ.
β) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή.
ii. Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.

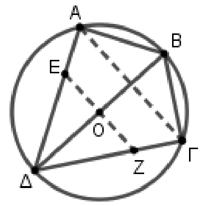


34320. Έστω Α, Β και Γ συνευθειακά σημεία με ΑΒ = 2ΒΓ. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΓ.
Να αποδείξετε ότι:
α) το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο με βάσεις τα τμήματα ΑΔ και ΒΕ.
β) τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ είναι ίσα.
γ) $Δ\hat{Μ}Β + Δ\hat{Ε}Β = 180^0$.

34324. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Από σημείο Α εξωτερικό του κύκλου θεωρούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου που εφάπτονται σε αυτόν στα σημεία Β, Γ και τέτοιες ώστε, η γωνία $Β\hat{Α}Γ$ που σχηματίζουν τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ να είναι 60^o. Έστω ότι η ευθεία ΑΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ και η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ τέμνει τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) ΟΑ=2ρ.
β) το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.
γ) ΑΖ = 2ΖΒ.
δ) το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



34328.Δίνεται τετράπλευρο με κορυφές σημεία Α, Β, Γ και Δ κύκλου (Ο, ρ), διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ, με τη ΒΔ να διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου, και με ίσες πλευρές τις ΑΒ και ΒΓ. Έστω ότι η κάθετη στη ΒΔ στο σημείο Ο τέμνει τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, οι γωνίες του $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ορθές και η γωνία του $\hat{B}$ είναι διπλάσια της γωνίας του $\hat{\Delta}$.

α) Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ του ΑΒΓΔ.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Delta}$ του ΑΒΓΔ.

ii. το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος.

iii. το τετράπλευρο ΑΓΖΕ είναι τραπέζιο.

34331.Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Έστω Κ,Λ,Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΚΛ // ΒΓ

β) i. ΜΛ = ΚΔ

ii. Το τετράπλευρο ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Οι γωνίες $K\hat{\Delta}\Lambda$ και $K\hat{M}\Lambda$ είναι ίσες.

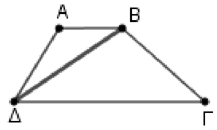
34333.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΒ. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο

σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΖΔ είναι ίσα,

β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}\Gamma$,

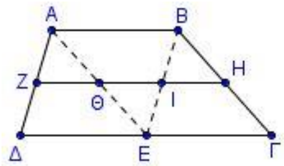
γ) το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



36172.Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΒΔ = ΒΓ. Αν $\Delta\hat{B}\Gamma = 110^\circ$ και $A\hat{\Delta}B = 25^\circ$, να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

β) τη γωνία $\hat{A}$.



37080. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ είναι $\Gamma\Delta = 2AB$. Επίσης Ζ,Η,Ε είναι τα μέσα των ΑΔ,ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα. Ακόμη η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ,ΒΕ στα σημεία Θ,Ι αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να δείξετε ότι τα σημεία Θ,Ι είναι μέσα των ΑΕ,ΒΕ αντίστοιχα.

γ) Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2}AB$.

37084. Δίνεται ευθεία (ε) και δύο σημεία Α, Β εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Φέρουμε ΑΔ,ΒΓ κάθετες στην (ε) και Μ,Ν μέσα των ΑΒ,ΓΔ αντίστοιχα.

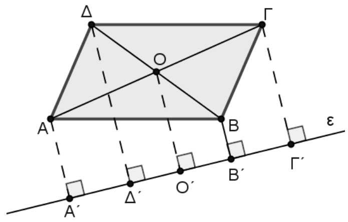
α) Αν τα Α,Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε)

i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας: 1) $A\Delta < B\Gamma$ 2) $A\Delta = B\Gamma$.

ii. να εκφράσετε το τμήμα ΜΝ σε σχέση με τα τμήματα ΑΔ, ΒΓ στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

β) Αν η (ε) τέμνει το τμήμα ΑΒ στο μέσο του Μ, να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα Μ,Ν ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

37086. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις προβολές Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ των κορυφών του Α,Β,Γ,Δ αντίστοιχα σε μια ευθεία ε.



α) Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $AA'=3$, $BB'=2$, $\Gamma\Gamma'=5$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4.

ii. Να βρείτε την απόσταση ΔΔ΄.

β) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

37089. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ. Να αποδείξετε ότι:

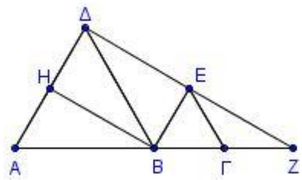
α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα.

γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ.

δ) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

37098. Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε $AB=2B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΔ και η ευθεία ΔΕ τέμνει την (ε) στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι:

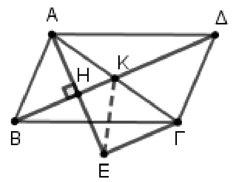


α) Το τετράπλευρο ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο.

β) Το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές.

γ) Το τετράπλευρο ΗΕΓΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

37099. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε ΑΗ κάθετη στην ΒΔ και στην προέκταση της ΑΗ (προς το Η) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $AH=HE$. Να αποδείξετε ότι:

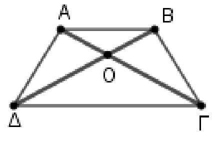


α) Το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές.

β) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο.

γ) Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

37103. Στο διπλανό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν: $A\Delta=B\Gamma$, $A\Gamma=B\Delta$ και $AB<\Gamma\Delta$.

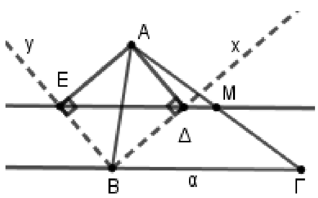


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ισοσκελή.

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{A}B=A\hat{B}\Gamma$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

37107. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του Βx της γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ και η διχοτόμος Βy της εξωτερικής γωνίας Β. Αν Δ και Ε είναι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ στην Βx και Βy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

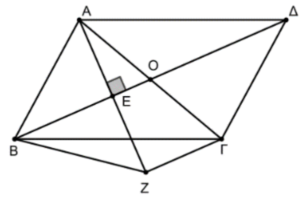


α) Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο.

β) Η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ.

γ) Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου $\alpha = \text{ΒΓ}$.

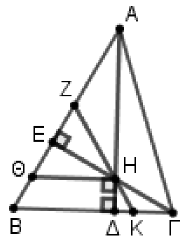
37114.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ < ΑΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ. Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στην διαγώνιο ΒΔ. Αν το Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την διαγώνιο ΒΔ και δεν συμπίπτει με το σημείο Γ, τότε να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές.
β) ΖΓ = 2ΟΕ.
γ) Το ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

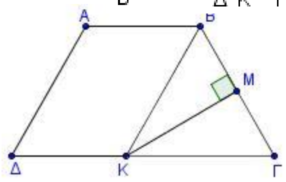
37115.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΕ = ΑΒ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα ΔΖ = ΑΔ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα.
ii. Τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά.
β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε ΚΛ // ΔΒ και $\text{ΚΛ} = \frac{3}{2}\text{ΔΒ}$.

37118. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\text{Β}} = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Φέρνουμε ΚΖ διχοτόμο της γωνίας ΕΗΑ και ΘΗ κάθετο στο ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:



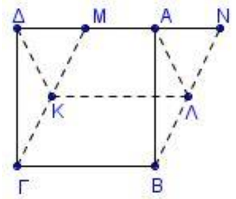
α) $\text{ΖΗ} = 2\text{ΖΕ}$
β) Το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισόπλευρο.
γ) Το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

37128. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\text{ΑΒ} \parallel \text{ΓΔ}$, $\hat{\text{Β}} = 2\hat{\text{Γ}}$ και $\text{ΑΒ} = \text{ΒΓ} = \text{ΑΔ} = \frac{\text{ΓΔ}}{2}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Β, η οποία τέμνει το ΔΓ στο Κ και η κάθετη από το Κ προς τη ΒΓ το τέμνει στο Μ.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΑΒΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος.
ii. Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ.

37129. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΑ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΑ (προς την πλευρά του Α) κατά τμήμα $\text{ΑΝ} = \frac{\text{ΑΔ}}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓΜ και ΒΝ και θεωρούμε τα μέσα τους Κ και Λ αντίστοιχα.

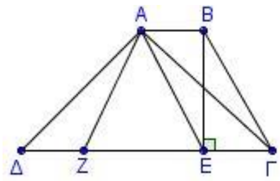


Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΜΝΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Το τετράπλευρο ΑΜΚΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

37130.Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΒΓ και $\hat{\text{Β}} < 90^\circ$ θεωρούμε σημείο Ζ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) τέτοιο ώστε ΓΖ=ΒΓ. Αν Ε είναι σημείο της ΑΒ, τέτοιο ώστε ΕΓ=ΓΒ, να αποδείξετε ότι:
α) Η γωνία ΒΕΖ είναι ορθή.
β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

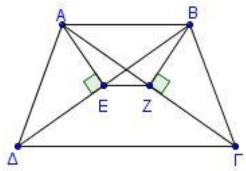
γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

37134. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\mathrm{AB} \parallel \Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4\mathrm{AB}$ και $\mathrm{B}\Gamma = 2\mathrm{AB}$. Θεωρούμε σημείο Ζ της ΓΔ, ώστε $\Delta\mathrm{Z} = \mathrm{AB}$. Αν η γωνία Γ είναι 60° και ΒΕ το ύψος του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:



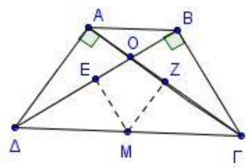
α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισόπλευρο.
γ) Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ είναι ίσα.

37135. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\mathrm{AB} \parallel \Gamma\Delta$ και $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{B}\Gamma = \mathrm{AB}$. Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



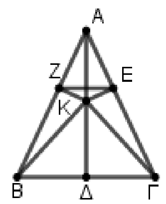
α) Τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.
β) $\mathrm{AE} = \mathrm{BZ}$.
γ) Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
δ) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

37139. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(\mathrm{AB} \parallel \Gamma\Delta)$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στη ΒΓ.
Θεωρούμε τα μέσα Μ,Ε και Ζ των ΓΔ,ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $\mathrm{ME} = \mathrm{MZ}$.
β) Η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ.
γ) Τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα.
δ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ.

37161. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma)$ και ΑΔ διάμεσος. Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΒΓ και ΚΖΕ είναι ισοσκελή.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
γ) Ένας μαθητής στο α) i. ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:
« Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση του ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές. Τα τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\mathrm{K}$ και $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Gamma}\mathrm{K}$ έχουν

1. $\mathrm{BK} = \mathrm{K}\Gamma$
2. $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K} = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K}$ επειδή ΑΚ διχοτόμος της γωνίας Α
3. $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{K}$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»
Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία - Πλευρά - Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ.

37162. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A}\Gamma$ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ,Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
β) οι γωνίες ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσες.
γ) οι γωνίες ΕΔΖ και ΕΗΖ είναι ίσες.

3ο Θέμα

12418. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ>ΓΔ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραπεζίου ΑΒΓΔ ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ με βάση ΑΒ. Αν Μ είναι το μέσο της βάσης ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ είναι ίσα.

β) Η διάμεσος ΕΜ του τριγώνου ΕΔΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΕΒ.