Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στη Γεωμετρία της Α΄ Λυκείου από το Askisopolis 2023 - 2024

Αντώνης Βαλέργας

Αποστόλης Κακαβάς

Στέλιος Μιχαήλογλου

Άγγελος Μπλιάς

Θανάσης Νικολόπουλος

Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης

Νίκος Σαμπάνης

Βαγγέλης Τόλης

Νίκος Τούντας

Ισαάκ Χιονίδης

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας 2 ωρών στο 1ο κεφάλαιο

2023-2024

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:
α) Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
β) Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

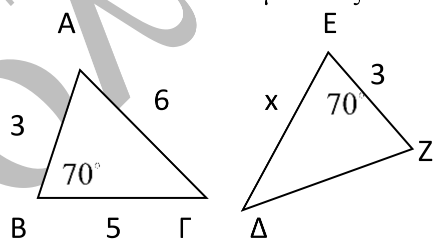
6 μονάδες

Α2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα της ερώτησης και τον αριθμό της απάντησης που θεωρείτε σωστή σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις:
α) Σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ ισχύουν ΑΒ=ΔΕ και ΒΓ=ΕΖ. Τα τρίγωνα είναι ίσα όταν :

i. $\hat{B} = \hat{E}$ **ii.** $\hat{A} = \hat{\Delta}$ **iii.** $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ **iv.** $\hat{B} = \hat{\Delta}$

2 μονάδες

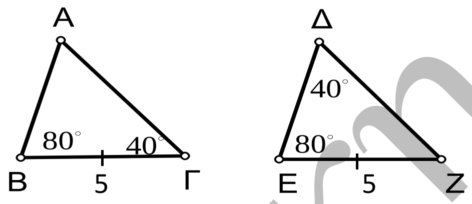
β) Τα διπλανά τρίγωνα είναι ίσα. Πόσο είναι η πλευρά x;

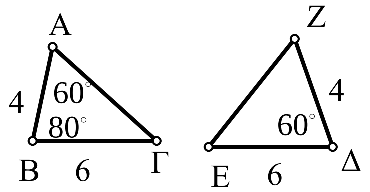


i. 3 **ii.** 5 **iii.** 6 **iv.** Δεν γνωρίζουμε

2 μονάδες

Α3. Να εξετάσετε αν είναι ίσα τα τρίγωνα στα παρακάτω σχήματα. Αν είναι ίσα να γράψετε το κριτήριο ισότητας τριγώνων που χρησιμοποιήσατε.





3 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι ίσα .

β) Δύο τρίγωνα που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.

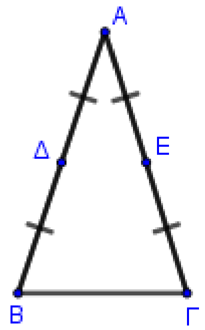
γ) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα όταν οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες.

δ) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις οξείες τους γωνίες ίσες μία προς μία.

ε) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.

10 μονάδες

Θέμα Β



Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ

και Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα .

Β1. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα.

7 μονάδες

Β2. Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΕ τέμνονται στο Μ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές .

6 μονάδες

Β3. Ο Νίκος ισχυρίζεται πως η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$. Συμφωνείτε μαζί του ; να δικαιολογηθεί η απάντησή σας .

7 μονάδες

Β4. Έστω ότι η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$. Πόσες μοίρες είναι η γωνία ΑΚΒ όπου Κ το σημείο τομής της προέκτασης της ΑΜ με την ΒΓ ;

5 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στις ίσες πλευρές του ΑΒ και ΑΓ θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΔ = ΑΕ. Προεκτείνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ (προς το Ε) και ΓΔ (προς το Δ) θεωρώντας σημεία Ζ και Η αντίστοιχα , τέτοια ώστε ΕΖ = ΔΗ και τα σημεία Η,Α,Ζ να μην είναι συνευθειακά.

Γ1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ είναι ίσα .

5 μονάδες

Γ2. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΗΖ είναι ισοσκελές.

5 μονάδες

Γ3. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $H\hat{A}\Delta$ και $Z\hat{A}E$ είναι ίσες

5 μονάδες

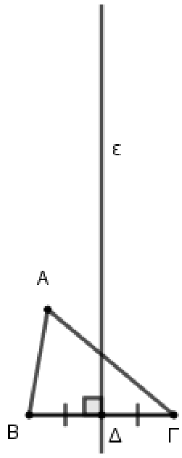
Γ4. Έστω ότι τα τμήματα ΗΒ και ΖΓ τέμνονται στο Μ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές .

5 μονάδες

Γ5. Να δείξετε ότι η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΗΖ

5 μονάδες

Θέμα Δ



Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και έστω ε η μεσοκάθετος της ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε και την ΑΒ στο Ζ.
Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $A\hat{B}E = \hat{\Gamma}$

9 μονάδες

Δ2. $A\hat{\Gamma}Z = \hat{\Gamma}$

8 μονάδες

Δ3. Το Ε ισαπέχει από τις ΒΖ και ΓΖ.

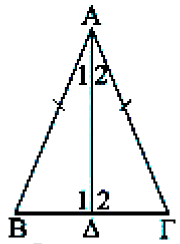
8 μονάδες

Καλή τύχη!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1.α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ . Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ.



Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΒΔ = ΔΓ, οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$.

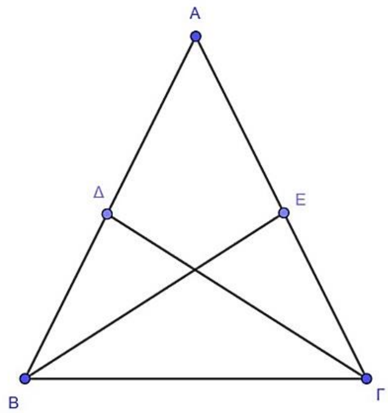
β) Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ$ προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^\circ$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.

Α2. α) i **β)** ii

Α3. δεν είναι ίσα
Α4. α) Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ

Θέμα Β

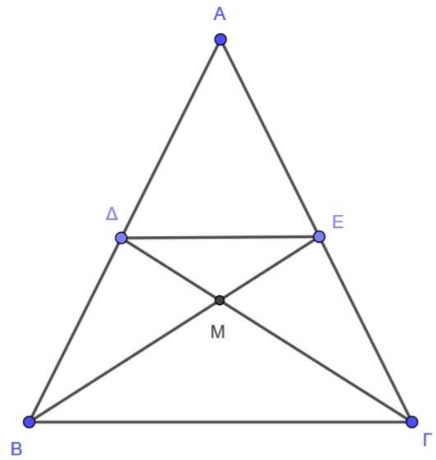
Β1. Συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ που σχηματίζονται έχουμε :



$$\left.\begin{array}{l} \text{i)}\ B\Delta = \Gamma E \ (\text{μισά ίσων πλευρών}) \\ \text{ii)}\ \hat{B} = \hat{\Gamma} (\text{ισοσκελές}) \\ \text{iii)}\ B\Gamma \ \text{κοινή} \end{array}\right\} \overset{(\Pi-\Gamma-\Pi)}{\Rightarrow} \quad \overset{\triangle}{\mathbf{B\Delta\Gamma}} = \overset{\triangle}{\mathbf{\Gamma E B}}$$

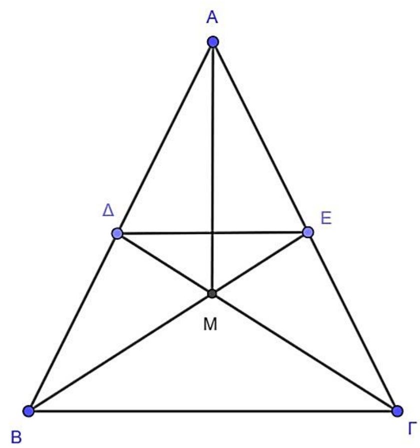
Β2. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα, άρα ΒΕ = ΓΔ (1) και $\Delta\hat{\Gamma}B = E\hat{B}\Gamma$.
Άρα το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές, επομένως ΒΜ=ΓΜ (2)
Τελικά, αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) έχουμε :

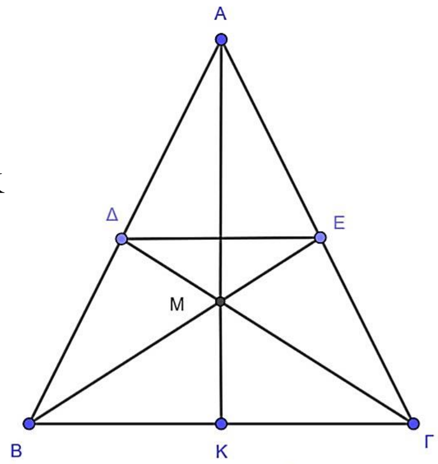
ΒΕ – ΒΜ = ΓΔ – ΓΜ , δηλαδή ΜΕ = ΜΔ , άρα $\overset{\triangle}{\Delta M E}$ ισοσκελές.



Β3. Ο ισχυρισμός του Νίκου είναι σωστός , διότι τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΜ είναι ίσα (έχουν τρείς πλευρές ίσες : ΑΒ = ΑΓ, ΒΜ = ΓΜ , ΑΜ κοινή) οπότε έχουν όλα τους τα στοιχεία ίσα , άρα οι γωνίες $B\hat{A}M$ και $\Gamma\hat{A}M$ είναι ίσες , άρα ΑΜ διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ.

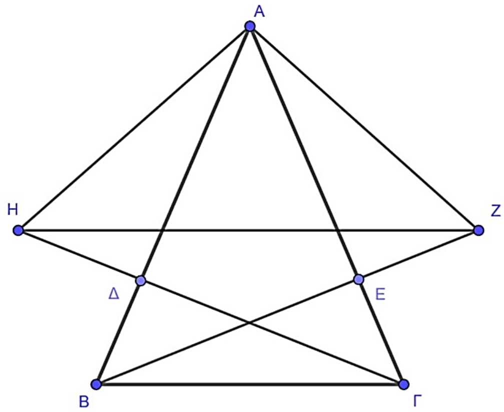
2ος τρόπος
Είναι ΑΔ=ΑΕ(μισά ίσων πλευρών) ,ΜΔ=ΜΕ άρα ΑΜ μεσοκάθετος του ΔΕ.
Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές άρα ΑΜ διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ.





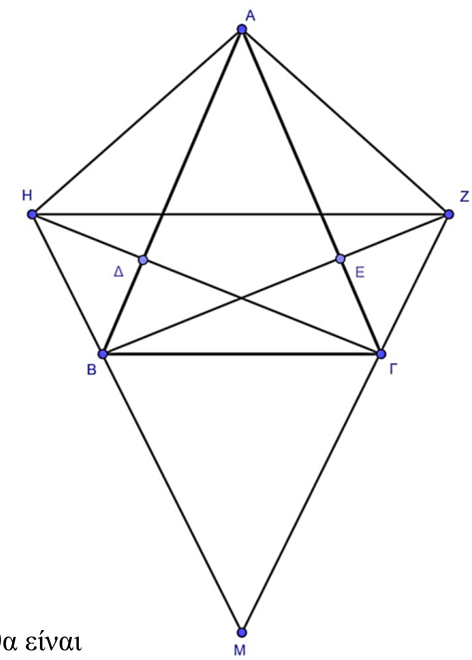
Β4. $A\hat{K}B = 90^o$ διότι στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η διχοτόμος ΑΚ που άγεται από την κορυφή είναι ύψος και διάμεσος

Θέμα Γ



Γ1. Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ είναι ίσα διότι έχουν
i) ΒΓ κοινή ,
ii) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ισοσκελές ΑΒΓ) και
iii) ΕΓ = ΒΔ διότι ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ = ΑΕ . (Κριτήριο ΠΓΠ)

Γ2. Επειδή τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ είναι ίσα θα ισχύει ότι
$BE = \Gamma\Delta$ και $E\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}B$.
Τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΑΖΒ είναι ίσα διότι έχουν
i) ΑΒ = ΑΓ (Υ)
ii) ΗΓ = ΒΖ (ως άθροισμα ίσων τμημάτων ΒΕ = ΓΔ και
ΕΖ = ΔΗ (Υ).
iii) $A\hat{\Gamma}H = A\hat{B}Z$ (ως διαφορές ίσων γωνιών $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $E\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}B$
(Κριτήριο ΠΓΠ) .
Άρα έχουν όλα τους τα στοιχεία ίσα , οπότε ΑΗ = ΑΖ άρα
ΑΗΖ ισοσκελές.



Γ3. Από το Γ2 έχουμε ότι τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΑΖΒ είναι ίσα. Άρα
$H\hat{A}\Gamma = Z\hat{A}B$, οπότε $H\hat{A}\Gamma - \hat{A} = Z\hat{A}B - \hat{A} \Leftrightarrow H\hat{A}\Delta = Z\hat{A}E$.

Γ4. Τα τρίγωνα ΗΒΓ και ΖΓΒ είναι ίσα διότι έχουν :
i) ΒΓ κοινή
ii) ΗΓ=ΒΖ άθροισμα ίσων τμημάτων ΒΕ+ΕΖ=ΓΔ+ΔΗ
iii) $B\hat{\Gamma}H = Z\hat{B}\Gamma$ από 1º ερώτημα (Κριτήριο ΠΓΠ)

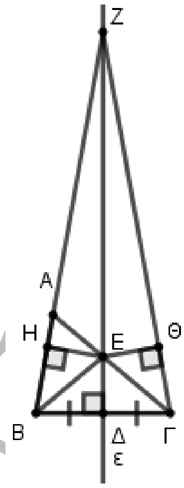
$\overset{\triangle}{HB\Gamma} = \overset{\triangle}{ZB\Gamma}$ άρα $H\hat{B}\Gamma = Z\hat{\Gamma}B$ οπότε $\Gamma\hat{B}M = B\hat{\Gamma}M$

ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών. Άρα τελικά $\overset{\triangle}{MB\Gamma}$ ισοσκελές.

Γ5. Το $\overset{\triangle}{B\Gamma M}$ είναι ισοσκελές οπότε ΜΒ = ΜΓ και από την $\overset{\triangle}{HB\Gamma} = \overset{\triangle}{ZB\Gamma}$ θα είναι
ΒΗ=ΓΖ άρα ΜΗ = ΜΖ επομένως το σημείο Μ ανήκει στην μεσοκάθετο του τμήματος ΗΖ. (1)

Όμως $\overset{\triangle}{AH\Gamma}$ ισοσκελές άρα ΑΗ = ΑΖ , οπότε το Α ανήκει στην μεσοκάθετο του τμήματος ΗΖ (2) . Άρα από (1),(2) η ΑΜ είναι η μεσοκάθετος του ΗΖ.

Θέμα Δ



Δ1. Επειδή η ε είναι μεσοκάθετος της ΒΓ , το Ε ισαπέχει από τα Β και Γ, οπότε το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, άρα $\mathrm{E\hat{B}\Gamma} = \hat{\Gamma}$.
Όμως $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{A\hat{B}E} + \mathrm{E\hat{B}\Gamma} = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{A\hat{B}E} + \hat{\Gamma} = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{A\hat{B}E} = \hat{\Gamma}$.

Δ2. Επειδή το Ζ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ ισαπέχει από τα Β και Γ, άρα το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισοσκελές. Επομένως $\mathrm{Z\hat{\Gamma}B} = \hat{B}$. Όμως $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, άρα
$\mathrm{Z\hat{\Gamma}B} = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{A\hat{\Gamma}Z} + \hat{\Gamma} = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{A\hat{\Gamma}Z} = \hat{\Gamma}$.

Δ3. Α τρόπος Έστω ΕΗ, ΕΘ οι αποστάσεις του Ε από τις ΒΖ, ΓΖ αντίστοιχα.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΗΕ και ΕΘΓ έχουν:
i. $\mathrm{Z\hat{\Gamma}E} = \mathrm{Z\hat{B}E}$
ii. ΕΒ = ΕΓ (Ε σημείο μεσοκαθέτου ΒΓ)
Επειδή τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μία οξεία γωνία του άλλου, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΕΗ = ΕΘ.

Β τρόπος Το $\overset{\triangle}{\mathrm{Z B \Gamma}}$ είναι ισοσκελές αφού ΖΔ ύψος και διάμεσος (ή Ζ σημείο μεσοκαθέτου ΒΓ) οπότε ΖΔ διχοτόμος και το Ε σημείο διχοτόμου $\mathrm{B\hat{Z}\Gamma}$ άρα ισαπέχει από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ **οπότε** ΕΗ = ΕΘ.