

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος

$$\text{μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει } \xi \in (x_1, x_2) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

A2. Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

A3. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

A4. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 - 2) + 2(x-1)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + y^2 - 2 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases} . \text{ Άρα } z_1 = 1 + i \text{ και } z_2 = 1 - i .$$

B2.
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$$

άρα $w = 3 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{39} = 3i^{39} = 3i^{4 \cdot 9 + 3} = 3(-i) = -3i$

B3. $|u + w| = |4z_1 - z_2 - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |4 + 4i - 1 + i - i| = |3 + 4i| = 5$, άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας M του μιγαδικού u είναι κύκλος με κέντρο $K(0, 3)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$ και

$$h''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0 \Rightarrow h' \downarrow \mathbb{R} \Leftrightarrow h \text{ κοίλη στο } \mathbb{R} .$$

Γ2. 1^{ος} τρόπος: Είναι $h'(x) = \frac{1}{e^x + 1} > 0 \Rightarrow h \uparrow \mathbb{R}$.

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < \ln \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < h(1) \stackrel{h \uparrow}{\Leftrightarrow} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(x) < h'(0) \quad (1)$$

Επειδή η h είναι κοίλη η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , οπότε από την (1) έχουμε: $x > 0$

2^{ος} τρόπος:

$$e^{h(2h'(x))} < e^{\frac{\ln e}{e+1}} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < 1 - \ln(e+1) = h(1) \Leftrightarrow 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} = h'(0) \Leftrightarrow x > 0$$

Γ3. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$ γιατί

$\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$. Άρα η ευθεία $y = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$, είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \right) = 1$ γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln(e^x + 1) \cdot \frac{1}{x} \right] = 0$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) \stackrel{e^x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \ln(u + 1) = \ln 1 = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(e^x + 1)) \stackrel{e^x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} (-\ln(u + 1)) = 0.$$

Η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

Γ4. $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = -\ln 2 \Leftrightarrow \ln \frac{e^x}{e^x + 1} = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^x = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Πρόσημο της φ

1ος τρόπος: Είναι $\varphi(x) = e^x (\ln e^x - \ln(e^x + 1) + \ln 2) = e^x \ln \frac{2e^x}{e^x + 1}$

Για κάθε $x \geq 0$ είναι $e^x \geq 1 \Leftrightarrow 2e^x \geq e^x + 1 \Leftrightarrow \frac{2e^x}{e^x + 1} \geq 1 \Leftrightarrow \ln \frac{2e^x}{e^x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \geq 0$.

2ος τρόπος: Είναι $\varphi(x) = e^x (h(x) + \ln 2) = e^x (h(x) - h(0))$

Οπότε $\varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x (h(x) + \ln 2) \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq -\ln 2 \Leftrightarrow h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow x \geq 0$.

3ος τρόπος: Λόγω του Θ.Μ.Τ για την h , $\exists \xi \in (0, x)$, $x > 0$:

$$h'(\xi) = \frac{h(x) - h(0)}{x} \Leftrightarrow xh'(\xi) = h(x) - h(0) \Rightarrow xe^x h'(\xi) = e^x (h(x) - h(0)), \text{ άρα } \varphi(x) > 0$$

Επειδή η φ είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων και $\varphi(x) \geq 0$ στο $[0, 1]$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 (x + \ln 2) e^x dx - \int_0^1 e^x \ln(e^x + 1) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \int_0^1 (x + \ln 2) (e^x)' dx - \int_0^1 (e^x + 1)' \ln(e^x + 1) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \left[(x + \ln 2) e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx - \left[(e^x + 1) \ln(e^x + 1) \right]_0^1 + \int_0^1 (e^x + 1) \frac{e^x}{e^x + 1} dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = (1 + \ln 2)e - \ln 2 - \left[e^x \right]_0^1 - (e + 1) \ln(e + 1) + 2 \ln 2 + \left[e^x \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = e + e \ln 2 + \ln 2 - (e + 1) \ln(e + 1) = e + (e + 1) \ln 2 - (e + 1) \ln(e + 1) = e + (e + 1) \ln \frac{2}{e + 1}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1 = f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Για κάθε $x \neq 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$.

Έστω $g(x) = xe^x - e^x + 1, x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = xe^x + e^x - e^x = xe^x$

Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) = 0$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow (-\infty, 0]$. Για κάθε $x < 0$ είναι $g(x) > g(0) = 0$.

Είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Δ2. α) Πρόσημο f

1ος τρόπος: Για κάθε $x > 0$ είναι $e^x > 1$, άρα $f(x) = \frac{e^x - 1}{x} > 0$ και για κάθε $x < 0$ είναι $e^x < 1$, άρα

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} > 0. \text{ Δηλαδή } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

2ος τρόπος: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(e^x - 1) \frac{1}{x} \right] = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{DLH} \frac{e^x}{1} = +\infty$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , άρα έχει σύνολο τιμών $f(\mathbb{A}) = (0, +\infty)$,
οπότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επίλυση εξίσωσης

1ος τρόπος: Έστω $F(x) = \int_1^x f(t) dt, x \in \mathbb{R}$. Είναι $F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow F \uparrow \mathbb{R}$

$$\int_1^{2f'(x)} f(u) du = 0 \Leftrightarrow F(2f'(x)) = F(1) \Leftrightarrow 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\text{Είναι } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{DLH} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{DLH} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1 στο \mathbb{R} .

$$\text{Η (1) γίνεται: } f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow x = 0$$

2ος τρόπος: Επειδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $\int_\alpha^\beta f(u) du > 0$ με $\alpha < \beta$ και $\int_\alpha^\beta f(u) du < 0$ με $\alpha > \beta$.

$$\text{Άρα για να είναι } \int_\alpha^\beta f(u) du = 0 \text{ πρέπει } \alpha = \beta, \text{ δηλαδή } f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \dots$$

Δ2.β) Είναι $y(t) = f(x(t))$ και $y'(t) = f'(x(t))x'(t)$.

$$\text{Είναι } x'(t) = 2y'(t) \Leftrightarrow y'(t) = \frac{1}{2}x'(t)$$

$$y'(t) = f'(x(t))x'(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x'(t) = f'(x(t))x'(t) \Leftrightarrow f'(x(t)) = \frac{1}{2} = f'(0) \Leftrightarrow x = 0$$

Τότε $y(t) = f(0) = 1$, άρα ζητούμενο σημείο το $(0, 1)$.

Δ3. Είναι $g(x) = (xf'(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2 = (e^x - e)^2 (x - 2)^2, x > 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = 2(e^x - e)(x - 2)[(x - 1)e^x - e]$.

Έστω $h(x) = (x - 1)e^x - e, x > 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $h'(x) = xe^x$. Για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) > 0 \Rightarrow h \uparrow (0, +\infty)$.

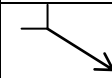
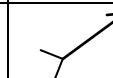
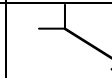
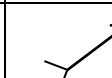
Ρίζα της h

1ος τρόπος: Είναι $h(1) = -e < 0, h(2) = 2e^2 - e > 0$, δηλαδή $h(1)h(2) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[1, 2]$, από το θ.Β υπάρχει $\rho \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho) = 0$.

2ος τρόπος: Είναι $g(1) = g(2)$ και g συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, οπότε λόγω του

θ. Rolle υπάρχει $\rho \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\rho) = 0 \Leftrightarrow h(\rho) = 0$

Για κάθε $0 < x < \rho$ είναι $h(x) < h(\rho) = 0$ και για κάθε $x > \rho$ είναι $h(x) > h(\rho) = 0$.

| x | 0 | 1 | ρ | 2 | $+\infty$ |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $e^x - e$ | - | + | + | + | + |
| $x - 2$ | - | - | - | + | + |
| $h(x)$ | - | - | + | + | + |
| g' | - | + | - | - | - |
| g |  |  |  |  | |

Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow (0,1]$. Για κάθε $x \in (1,\rho)$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow [1,\rho]$.

Για κάθε $x \in (\rho,2)$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow [\rho,2]$ και για κάθε $x \in (2,+\infty)$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow [2,+\infty)$.

Η g έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.

2ος τρόπος για όλο το Δ3

Παρατηρούμε ότι $g(x) \geq g(1)$ και $g(x) \geq g(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο στα $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ θα παρουσιάζει μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό, η οποία είναι διαφορετική από τα άκρα 1 και 2, οπότε θα παρουσιάζεται σε εσωτερικό σημείο ρ του $(1,2)$. Άρα η g έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.