ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1)

  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι. $f(x_1) = f(x_2)$. Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2. Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Α3. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

Α4. α) Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$.

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 - 2) + 2(x - 1)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + y^2 - 2 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

. Άρα $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$.

Β2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1 + 2i + i^2}{1+1} = \dfrac{2i}{2} = i$

άρα $w = 3\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{39} = 3i^{39} = 3i^{4\cdot 9+3} = 3(-i) = -3i$

Β3. $|u + w| = |4z_1 - z_2 - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |4 + 4i - 1 + i - i| = |3 + 4i| = 5$, άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας Μ του μιγαδικού u είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = 1 - \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{1}{e^x + 1}$ και

$$h''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0 \Rightarrow h' \downarrow \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{h κοίλη στο } \mathbb{R}.$$

Γ2. <u>**1ος τρόπος:**</u> Είναι $h'(x) = \dfrac{1}{e^x + 1} > 0 \Rightarrow h \uparrow \mathbb{R}$.

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < \ln\frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < h(1) \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(x) < h'(0) \quad (1)$$

Επειδή η h είναι κοίλη η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε από την (1) έχουμε: $x>0$

2ος τρόπος:

$$e^{h(2h'(x))}<e^{\ln\frac{e}{e+1}} \Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right)<1-\ln(e+1)=h(1)\Leftrightarrow 2h'(x)<1\Leftrightarrow h'(x)<\frac{1}{2}=h'(0)\Leftrightarrow x>0$$

Γ3. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(e^x+1\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$. Άρα η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας x΄x, είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}\right)=1$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(e^x+1\right)\cdot\frac{1}{x}\right]=0$, αφού

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^x+1\right)\underset{u\to0}{\overset{e^x=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}\ln(u+1)=\ln1=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(h(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\ln\left(e^x+1\right)\right)\underset{u\to0}{\overset{e^x=u}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\ln(u+1)\right)=0$.

Η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

Γ4. $\varphi(x)=0\Leftrightarrow h(x)=-\ln2\Leftrightarrow\ln\frac{e^x}{e^x+1}=\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow2e^x=e^x+1\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$

Πρόσημο της φ

<u>1ος τρόπος:</u> Είναι $\varphi(x)=e^x\left(\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)+\ln2\right)=e^x\ln\frac{2e^x}{e^x+1}$

Για κάθε $x\ge0$ είναι $e^x\ge1\Leftrightarrow2e^x\ge e^x+1\Leftrightarrow\frac{2e^x}{e^x+1}\ge1\Leftrightarrow\ln\frac{2e^x}{e^x+1}\ge0\Leftrightarrow\varphi(x)\ge0$.

<u>2ος τρόπος:</u> Είναι $\varphi(x)=e^x\left(h(x)+\ln2\right)=e^x\left(h(x)-h(0)\right)$

Οπότε $\varphi(x)\ge0\Leftrightarrow e^x\left(h(x)+\ln2\right)\ge0\Leftrightarrow h(x)\ge-\ln2\Leftrightarrow h(x)\ge h(0)\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}x\ge0$.

<u>3ος τρόπος:</u> Λόγω του Θ.Μ.Τ για την h, $\exists\xi\in(0,x)$, $x>0$:

$h'(\xi)=\frac{h(x)-h(0)}{x}\Leftrightarrow xh'(\xi)=h(x)-h(0)\Rightarrow xe^xh'(\xi)=e^x\left(h(x)-h(0)\right)$, άρα $\varphi(x)>0$

Επειδή η φ είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων και $\varphi(x)\ge0$ στο $[0,1]$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_0^1\varphi(x)dx=\int_0^1(x+\ln2)e^xdx-\int_0^1e^x\ln\left(e^x+1\right)dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\int_0^1(x+\ln2)\left(e^x\right)'dx-\int_0^1\left(e^x+1\right)'\ln\left(e^x+1\right)dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\left[(x+\ln2)e^x\right]_0^1-\int_0^1e^xdx-\left[\left(e^x+1\right)\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1+\int_0^1\cancel{\left(e^x+1\right)}\frac{e^x}{\cancel{e^x+1}}dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=(1+\ln2)e-\ln2-\cancel{\left[e^x\right]_0^1}-(e+1)\ln(e+1)+2\ln2+\cancel{\left[e^x\right]_0^1}\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=e+e\ln2+\ln2-(e+1)\ln(e+1)=e+(e+1)\ln2-(e+1)\ln(e+1)=e+(e+1)\ln\frac{2}{e+1}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x}{1}=1=f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Για κάθε $x \neq 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$.

Έστω $g(x)=xe^x-e^x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=xe^x+e^x-e^x=xe^x$

Για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)>0 \Rightarrow g\uparrow[0,+\infty)$. Για κάθε $x>0$ είναι $g(x)>g(0)=0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $g'(x)<0 \Rightarrow g\downarrow(-\infty,0]$. Για κάθε $x<0$ είναι $g(x)>g(0)=0$.

Είναι $g(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$, άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. α) **<u>Πρόσημο f</u>**

<u>1ος τρόπος:</u> Για κάθε $x>0$ είναι $e^x>1$, άρα $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}>0$ και για κάθε $x<0$ είναι $e^x<1$, άρα

$f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}>0$. Δηλαδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

<u>2ος τρόπος:</u> $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(e^x-1\right)\dfrac{1}{x}\right]=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{1}=+\infty$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα έχει σύνολο τιμών $f(A)=(0,+\infty)$,

οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επίλυση εξίσωσης

<u>1ος τρόπος:</u> Έστω $F(x)=\int_1^x f(t)dt,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $F'(x)=f(x)>0 \Rightarrow F\uparrow\mathbb{R}$

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)du=0 \Leftrightarrow F\left(2f'(x)\right)=F(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} 2f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\quad (1)$$

Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$

Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1-1$ στο $\mathbb{R}$.

Η (1) γίνεται: $f'(x)=f'(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=0$

<u>2ος τρόπος:</u> Επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $\int_\alpha^\beta f(u)du>0$ με $\alpha<\beta$ και $\int_\alpha^\beta f(u)du<0$ με $\alpha>\beta$.

Άρα για να είναι $\int_\alpha^\beta f(u)du=0$ πρέπει $\alpha=\beta$, δηλαδή $f'(x)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$......

Δ2.β) Είναι $y(t)=f\left(x(t)\right)$ και $y'(t)=f'\left(x(t)\right)x'(t)$.

Είναι $x'(t)=2y'(t)\Leftrightarrow y'(t)=\dfrac{1}{2}x'(t)$

$$y'(t)=f'\left(x(t)\right)x'(t)\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cancel{x'(t)}=f'\left(x(t)\right)\cancel{x'(t)}\Leftrightarrow f'\left(x(t)\right)=\frac{1}{2}=f'(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=0$$

Τότε $y(t)=f(0)=1$, άρα ζητούμενο σημείο το $(0,1)$.

Δ3. Είναι $g(x)=\left(xf(x)+1-e\right)^2(x-2)^2=\left(e^x-e\right)^2(x-2)^2,\ x>0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left[(x-1)e^x-e\right]$.

Έστω $h(x)=(x-1)e^x-e,\ x>0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=xe^x$. Για κάθε $x>0$ είναι $h'(x)>0\Rightarrow h\uparrow(0,+\infty)$.

Ρίζα της h

<u>1ος τρόπος :</u> Είναι $h(1)=-e<0,\quad h(2)=2e^2-e>0$, δηλαδή $h(1)h(2)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[1,2]$, από το θ.B υπάρχει $\rho\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho)=0$.

<u>2ος τρόπος :</u> Είναι $g(1)=g(2)$ και g συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, οπότε λόγω του θ.Rolle υπάρχει $\rho \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\rho)=0 \Leftrightarrow h(\rho)=0$

Για κάθε $0<x<\rho$ είναι $h(x)<h(\rho)=0$ και για κάθε $x>\rho$ είναι $h(x)>h(\rho)=0$.

x	0 1	ρ	2	+∞
$e^x - e$	–	+	+	+
$x-2$	–	–	–	+
$h(x)$	–	–	+	+
g'	–	+	–	–
g	↘	↗	↘	↗

Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $g'(x)<0 \Rightarrow g \downarrow (0,1]$. Για κάθε $x \in (1,\rho)$ είναι $g'(x)>0 \Rightarrow g \uparrow [1,\rho]$.

Για κάθε $x \in (\rho,2)$ είναι $g'(x)<0 \Rightarrow g \downarrow [\rho,2]$ και για κάθε $x \in (2,+\infty)$ είναι $g'(x)>0 \Rightarrow g \uparrow [2,+\infty)$.

Η g έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.

2ος τρόπος για όλο το Δ3

Παρατηρούμε ότι $g(x) \geq g(1)$ και $g(x) \geq g(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο στα $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ θα παρουσιάζει μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό, η οποία είναι διαφορετική από τα άκρα 1 και 2, οπότε θα παρουσιάζεται σε εσωτερικό σημείο ρ του $(1,2)$. Άρα η g έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.