ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. $z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)\cdot\rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2) = \rho_1\rho_2[(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)]$

$= \rho_1\rho_2[(\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2 - \eta\mu\theta_1\eta\mu\theta_2) + i(\eta\mu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2 + \sigma\upsilon\nu\theta_1\eta\mu\theta_2)]$

$= \rho_1\rho_2[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2) + i\eta\mu(\theta_1+\theta_2)]$.

Β. α. Λ **β.** Σ **γ.** Σ **δ.** Λ **ε.** Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \dfrac{e^x\cdot(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

Είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$, οπότε είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.

Εστω $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{e^x-1}{e^x+1} = y \Leftrightarrow e^x\cdot y + y = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x\cdot y - e^x = -y-1 \Leftrightarrow$
$e^x(y-1) = -(y+1) \Leftrightarrow e^x(1-y) = 1+y$.

Αν $y=1$ τότε $e^x\cdot 0 = 2$ που είναι αδύνατο. Άρα για $y \neq 1$. Είναι: $e^x = \dfrac{1+y}{1-y}$ (1).

Πρέπει: $\dfrac{1+y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow (1+y)\cdot(1-y) > 0 \Leftrightarrow -1 < y < 1$. Τότε η (1) γίνεται:

$x = \ln\dfrac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln\dfrac{1+y}{1-y}, \quad -1<y<1$. Άρα $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}, \quad x\in(-1,1)$.

β. $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) = f(0) \Leftrightarrow x = f(0) = \dfrac{e^0-1}{e^0+1} = 0$.

Οπότε η x=0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f^{-1}(x)=0$.

γ. $I = \displaystyle\int_{-\frac12}^{\frac12} f^{-1}(x)dx = \int_{-\frac12}^{\frac12} \ln\frac{1+x}{1-x}dx = \int_{-\frac12}^{\frac12}(x)'\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \left[x\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}\right]_{-\frac12}^{\frac12} - \int_{-\frac12}^{\frac12} x\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' dx =$

$$= \frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\cdot\frac{2}{1-x^2}\,dx = \cancel{\frac{1}{2}\ln 3}-\cancel{\frac{1}{2}\ln 3}+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\left(1-x^2\right)'}{1-x^2}\,dx=\left[\ln\left|1-x^2\right|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\ln\frac{3}{4}-\ln\frac{3}{4}=0$$

ΘΕΜΑ 3ο

Είναι : $f(x)=\dfrac{|x-z|^2-|x+\bar z|^2}{x^2+|z|^2}=\dfrac{(x-z)\cdot\left(x-\bar z\right)-\left(x+\bar z\right)\cdot(x+z)}{x^2+|z|^2}\Leftrightarrow$

$$f(x)=\frac{\cancel{x^2}-\bar z\cdot x-z\cdot x+\cancel{z\cdot\bar z}-\cancel{x^2}-z\cdot x-\bar z\cdot x-\cancel{z\cdot\bar z}}{x^2+|z|^2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{-2\left(z+\bar z\right)x}{x^2+|z|^2}.$$

Όμως $z+\bar z=2\mathrm{Re}(z)=2\alpha\neq 0$ και $|z|^2=\alpha^2+\beta^2$, άρα $f(x)=\dfrac{-4\alpha x}{x^2+\alpha^2+\beta^2}$, $A_f=\mathbb{R}$.

α. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4\alpha x}{x^2+\alpha^2+\beta^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4\alpha x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4\alpha}{x}=0$. Όμοια και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

β. $|z+1|>|z-1|\Leftrightarrow|z+1|^2>|z-1|^2\Leftrightarrow(z+1)\left(\bar z+1\right)>(z-1)\left(\bar z-1\right)\Leftrightarrow$

$\cancel{z\cdot\bar z}+z+\bar z+\cancel{1}>\cancel{z\cdot\bar z}-z-\bar z+\cancel{1}\Leftrightarrow 2\left(z+\bar z\right)>0\Leftrightarrow 2\cdot 2\alpha>0\Leftrightarrow\alpha>0$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\frac{-4\alpha\cdot\left(x^2+\alpha^2+\beta^2\right)+4\alpha x\cdot 2x}{\left(x^2+\alpha^2+\beta^2\right)^2}=\frac{4\alpha\cdot\left(x^2-\alpha^2-\beta^2\right)}{\left(x^2+\alpha^2+\beta^2\right)^2}$$

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 4\alpha\left(x^2-\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right)\geq 0\Leftrightarrow x^2-\left(\alpha^2+\beta^2\right)\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq|z|^2\Leftrightarrow|x|\geq|z|\Leftrightarrow$

$x\leq-|z|$ ή $x\geq|z|$.

Για κάθε $x<-|z|$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\left(-\infty,-|z|\right]$.

Για κάθε $x\in\left(-|z|,|z|\right)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow\left[-|z|,|z|\right]$ και

για κάθε $x>|z|$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\left[|z|,+\infty\right)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=-|z|$ το

$f\left(-|z|\right)=\dfrac{4\alpha\cdot|z|}{|z|^2+|z|^2}=\dfrac{4\alpha\cdot|z|}{2|z|^2}=\dfrac{2\alpha}{|z|}=\dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ και τοπικό ελάχιστο το $f\left(|z|\right)=\dfrac{-2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

γ. Στο διάστημα $\Delta_1=\left(-\infty,-|z|\right]$ η f είναι συνεχής και $\nearrow$, άρα:

$$f\left(\Delta_1\right)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x),f\left(-|z|\right)\right]=\left(0,\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right].$$

Στο διάστημα $\Delta_2=\left[-|z|,|z|\right]$, η f είναι συνεχής και $\searrow$, άρα:

$$f(\Delta_2)=\left[f(|z|),f(-|z|)\right]=\left[-\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right].$$

Τέλος στο διάστημα $\Delta_3=\left[|z|,+\infty\right)$, η f είναι συνεχής και $\nearrow$, άρα:

$$f(\Delta_3)=\left[f(|z|),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[\frac{-2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},0\right).$$

Το σύνολο τιμών της f είναι :

$$f(A)=\left(0,\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]\cup\left[-\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]\cup\left[\frac{-2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},0\right)=\left[-\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right].$$

Επειδή το μηδέν ανήκει στο διάστημα $f(\Delta_2)$ υπάρχει $x_0\in\Delta_2$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2, το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f στο Δ_2.

Επειδή το $0\notin f(\Delta_1)$ και $0\notin f(\Delta_2)$ η εξίσωση f(x)=0 έχει μόνο μια ρίζα, το x_0.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Εχουμε :

$$f''(x)f(x)+\left(f'(x)\right)^2=f(x)f'(x)\Leftrightarrow\left(f'(x)\cdot f(x)\right)'=f'(x)\cdot f(x)\Leftrightarrow f'(x)f(x)=c_1e^x$$

με $c\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ είναι $f'(0)f(0)=c_1e^0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot1=c_1\Leftrightarrow c_1=\frac{1}{2}$. Οπότε $f'(x)f(x)=\frac{1}{2}e^x\Leftrightarrow$

$2f'(x)f(x)=e^x\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow f^2(x)=e^x+c_2$.

Για $x=0$ έχουμε $f^2(0)=e^0+c_2\Leftrightarrow1=1+c_2\Leftrightarrow c_2=0$.

Άρα $f^2(x)=e^x\neq0\Rightarrow f(x)\neq0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή όμως $f(0)=1$ είναι $f(x)=\sqrt{e^x}=e^{\frac{x}{2}}$.

β. Εστω $h(x)=2x-\int_0^x\frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt-1$, $x\in[0,1]$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[0,1]$, η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με

$$h'(x)=2-\frac{g(x)}{1+f^2(x)}.$$

Είναι $h(0)=-1<0$ και $h(1)=1-\int_0^1\frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt$.

Επειδή το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι το $[0,1]$, για κάθε $t\in[0,1]$ είναι

$0\le g(t)\le1\Leftrightarrow\frac{g(t)}{1+f^2(t)}\le\frac{1}{1+f^2(t)}\Leftrightarrow\frac{g(t)}{1+f^2(t)}\le\frac{1}{1+e^t}<1$ (γιατί $1+e^t>1$).

Άρα $1-\frac{g(t)}{1+f^2(t)}>0$ ή $\int_0^1\left(1-\frac{g(t)}{1+f^2(t)}\right)dt>0\Leftrightarrow1-\int_0^1\frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt>0$ άρα $h(1)>0$.

Οπότε από το Θ.Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1):h(x_0)=0$.

Επειδή $h'(x)=2-\frac{g(x)}{1+f^2(x)}>1-\frac{g(x)}{1+f^2(x)}>0$, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και η ρίζα x_0 που βρήκαμε είναι μοναδική.