

# Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis



**Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:**

**Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς**

**Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς**

**Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας**



**2020 - 2021**



**Ασκησόπολις**  
ο πιο πλούσιος κόσμος  
θεμάτων και ασκήσεων

## 13ο Διαγώνισμα

18-5-2021

**Θέμα Α**

**A1.** Αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f + g$

$$\text{είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 \text{ και ισχύει: } (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) .$$

μονάδες 7

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ ;

μονάδες 4

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Δεν υπάρχει συνάρτηση που να έχει περισσότερες από μία κατακόρυφες ασύμπτωτες».

**α)** Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

μονάδες 1+3

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

**β)** Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[a, \beta]$  και σημείο  $x_0 \in [a, \beta]$  στο οποίο η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι  $f'(x_0) = 0$ .

**γ)** Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .

**δ)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, \beta]$  και υπάρχει  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει  $f(a)f(\beta) < 0$ .

**ε)** Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $x_1 \neq x_2$ , τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

μονάδες 10

**Θέμα Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  και  $g(x) = e^x$ .

**B1.** Να βρείτε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

μονάδες 3

**B2.** Έστω  $\varphi(x) = (f \circ g)(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να μελετήσετε την  $\varphi$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

**B3.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $\varphi$ .

μονάδες 4

**B4.** Να βρείτε την  $\varphi^{-1}$ .

μονάδες 5

**B5.** Να μελετήσετε την  $\varphi$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

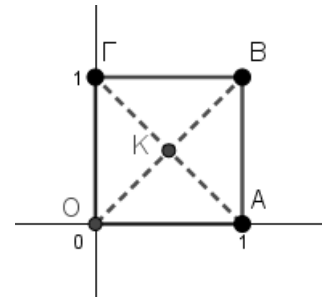
μονάδες 3

**B6.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $\varphi$  και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

μονάδες 6

### Θέμα Γ

Δίνεται το τετράγωνο OABΓ του διπλανού σχήματος και μία παραγωγίσιμη στο  $[0,1]$  συνάρτηση  $f$  της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό .



Γ1. Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου.

μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει την διαγώνιο ΑΓ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη  $\alpha$  και την διαγώνιο OB σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη  $\beta$ .

μονάδες 6

Γ3. Αν  $\alpha < \beta < \frac{1}{2}$  ( $\alpha, \beta$  από ερώτημα Γ2) ,να αποδείξετε ότι :

α) υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  αμβλεία γωνία.

β) υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi)(2f(\xi)-1) = 2\xi - 1$  .

μονάδες 5+5=10

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$  που απέχει από το σημείο  $\Gamma(0,1)$  λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$  που απέχει από το σημείο  $\Gamma(0,1)$  περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

μονάδες 5

### Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $(0, +\infty)$  για την οποία ισχύει ότι  $f^2(x) = \ln^2 x$  για κάθε  $x > 0$ .

Δ1. Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της  $f$ .

μονάδες 5

$$\text{Έστω } f(x) = |\ln x|, x > 0$$

Δ2. Να κάνετε την γραφική παράσταση της  $f$ .

μονάδες 2

Δ3. Να βρείτε δύο σημεία της  $C_f$  στα οποία οι εφαπτομένες είναι κάθετες.

μονάδες 5

Δ4. Έστω  $A(\alpha, f(\alpha))$ ,  $\alpha \in (0,1)$  και  $B(\beta, f(\beta))$  δύο υλικά σημεία της  $C_f$  τέτοια, ώστε  $AB \parallel x'x$ .

Αν το τμήμα AB αυξάνει το μήκος του με ρυθμό 1cm/sec, να βρείτε την ταχύτητα με την οποία ανυψώνεται, την χρονική στιγμή που απέχει 1cm από τον άξονα  $x'x$ .

μονάδες 6

Δ5. Να βρείτε σημείο της  $C_f$  με τετμημένη στο διάστημα  $(0,1)$  στο οποίο η εφαπτομένη της  $C_f$  σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με μέγιστο εμβαδό.

μονάδες 7

Ευχόμαστε Επιτυχία!