ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΙΑ σελ 334-335 : θεώρημα σταθερής , αντικαταστάσεις

Α2. ΘΕΩΡΙΑ σελ 246   Α3. ΟΡΙΣΜΟΣ σελ 222   Α4. Λ Σ Σ Λ Σ

ΘΕΜΑ Β

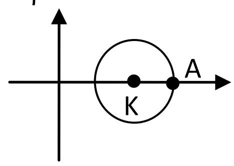
Β1. Για το γ.τ του z :

1ος τρόπος: $(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow (z-2)\overline{(z-2)}+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0 \Leftrightarrow$

$|z-2|=1$ ή $|z-2|=-2$ που απορρίπτεται. Άρα ο Γ.Τ των Μ(z) είναι ο μοναδιαίος κύκλος με $K(2,0)$ και $\rho=1$.

2ος τρόπος: Αν $z=x+yi$, τότε.... $(x-2)^2+y^2+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2 \Leftrightarrow \ldots.(x-2)^2+y^2=1$ Άρα .....

Για $|z|\le 3$(μ 3):



1ος τρόπος: $1=|z-2|\ge ||z|-2| \Leftrightarrow ||z|-2|\le 1 \Leftrightarrow -1\le |z|-2\le 1 \Leftrightarrow 1\le |z|\le 3$

2ος τρόπος: Είναι $|z|_{max}=|\vec{OA}|=3$, άρα $|z|\le |z|_{max}=3$

3ος τρόπος: $|z-2|^2+|z-2|=2$. Αν $0<|z-2|<1$, τότε $|z-2|^2+|z-2|<2$. Αν $|z-2|>1$, τότε

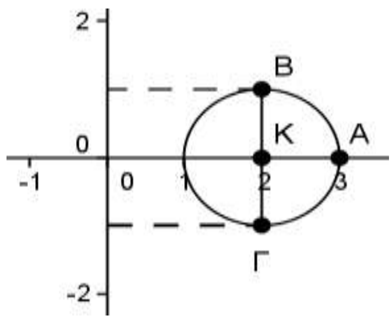
$|z-2|^2+|z-2|>2$, άρα $|z-2|=1$

Β2. [9] 1ος τρόπος: Αν $z_1=x+yi$, τότε $z_2=\overline{z_1}=x-yi$. $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2 \Leftrightarrow |2y|=2 \Leftrightarrow y=\pm 1$.

Τότε $|z-2|=1 \Leftrightarrow (x-2)^2+1=1 \Leftrightarrow x=2$,άρα $z_1=2+i$ και $z_2=2-i$.

Είναι $z_1+z_2=-\beta \Leftrightarrow \beta=-4$, $z_1z_2=\gamma \Leftrightarrow \gamma=2^2+1^2=5$

Όμοια με αντικατάσταση του z_1.



2ος τρόπος: $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2 \Leftrightarrow |z_1-z_2|=2$. Επειδή οι εικόνες Β,Γ των z_1,z_2 είναι σημεία ομοκυκλικά και αφού είναι συζυγείς η ΒΓ είναι κάθετη στον χ΄χ. Όμως η χορδή που είναι κάθετη στον χ΄χ και έχει μέγιστο μήκος είναι η $B\Gamma=2\rho=2$, άρα $B(2,1),\Gamma(2,-1)$. Δηλαδή $z_1=2+i$ και $z_2=2-i$.

Είναι $z_1+z_2=-\beta \Leftrightarrow \beta=-4$, $z_1z_2=\gamma \Leftrightarrow \gamma=2^2+1^2=5$. Όμοια με αντικατάσταση του z_1.

Β3. [8] $\nu^3+\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0=0 \Leftrightarrow \alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0=-\nu^3$, άρα και $|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0|=|\nu|^3$.

$|\nu|^3=|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0|\le |\alpha_2||\nu|^2+|\alpha_1||\nu|+|\alpha_0|\le 3|\nu|^2+3|\nu|+3=3\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)$.

1ος τρόπος Αν $|\nu|>1$, τότε $|\nu|^3\le |\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0|\le 3\dfrac{|\nu|^3-1}{|\nu|-1}=3\left(\dfrac{|\nu|^3}{|\nu|-1}-\dfrac{1}{|\nu|-1}\right)<3\dfrac{|\nu|^3}{|\nu|-1} \Leftrightarrow \cancel{|\nu|^3}<3\dfrac{\cancel{|\nu|^3}}{|\nu|-1} \Leftrightarrow$

$|\nu|-1<3 \Leftrightarrow |\nu|<4$.   Αν $|\nu|\le 1 \Rightarrow |\nu|<4$.

2ος τρόπος: $|\nu|^3\le 3|\nu|^2+3|\nu|+3<3|\nu|^2+3|\nu|+4 \Leftrightarrow |\nu|^3-3|\nu|^2-3|\nu|-4<0 \Leftrightarrow (|\nu|-4)\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)<0 \Leftrightarrow |\nu|<4$

αφού $|\nu|^2+|\nu|+1>0$.

3ος τρόπος: $|\nu|^3\le 3|\nu|^2+3|\nu|+3 \Leftrightarrow |\nu|^3-3|\nu|^2-3|\nu|-3\le 0$. Έστω $f(x)=x^3-3x^2-3x-3,\ x\ge 0$.

Είναι $f'(x)=3\left(x^2-2x-1\right)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1+\sqrt{2}$

Είναι $f(3)=-12<0$, $f(4)=1>0$, άρα από το Θ.Β $\exists x_0(3,4): f(x_0)=0$

x	0	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
f΄	−	+	
f	↘	↗	

Για κάθε $1+\sqrt{2}\le x\le x_0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)\le f(x_0)=0$, για κάθε $x>x_0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_0)=0$

και για κάθε $0\le x<1+\sqrt{2} \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f\left(1+\sqrt{2}\right)<f(x)\le f(0)=-3<0$.

Άρα $f(x)\le 0$ για κάθε $x\le x_0<4$, άρα $f(|\nu|)\le 0 \Leftrightarrow |\nu|\le x_0<4 \Leftrightarrow |\nu|<4$.

4ος τρόπος: $|\nu|^3-1<|\nu|^3\le 3|\nu|^2+3|\nu|+3 \Leftrightarrow (|\nu|-1)\cancel{\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)}<3\cancel{\left(|\nu|^2+|\nu|+1\right)} \Leftrightarrow |\nu|-1<3 \Leftrightarrow |\nu|<4$.

5ος τρόπος :Έστω |ν|≥4.Τότε : $|\nu|^3\le|\alpha_2||\nu|^2+|\alpha_1||\nu|+|\alpha_0| \Leftrightarrow 1\le\frac{|\alpha_2|}{|\nu|}+\frac{|\alpha_1|}{|\nu|^2}+\frac{|\alpha_0|}{|\nu|^3}\le\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}=\frac{63}{64}$.Άτοπο.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)=x \Leftrightarrow 2\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)=2x \Leftrightarrow \left[\left(f(x)+x\right)^2\right]'=\left(x^2\right)' \Leftrightarrow$

$\left(f(x)+x\right)^2=x^2+c,\ c\in\mathbb{R}$ Για $x=0$ είναι $c=1$

Άρα $\left(f(x)+x\right)^2=x^2+1\neq 0 \Leftrightarrow f(x)+x\neq 0$ και επειδή η $f(x)+x$ είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. .

Επειδή $f(0)+0=1>0$ είναι $f(x)+x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $f(x)+x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}$ **.**

Γ2. 1ος τρόπος $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ **.** Είναι

$1+x^2>x^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}=|x| \Leftrightarrow -\sqrt{1+x^2}<x<\sqrt{1+x^2}$, άρα $x-\sqrt{1+x^2}<0$, οπότε $f'(x)<0$ και $f\downarrow\mathbb{R}$

Είναι: $f\left(g(x)\right)=1=f(0) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} g(x)=0$

$g'(x)=3x^2+3x=3x(x+1)$. Στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$, είναι

$g(\Delta_1)=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$, $0\notin g(\Delta_1)$.Στο $\Delta_2=[-1,0]$ είναι $g(\Delta_2)=\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$, $0\notin g(\Delta_2)$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g'		+		-		+	
g		↗		↘		↗	

Στο $\Delta_3=[0,+\infty)$, είναι $g(\Delta_3)=[-1,+\infty)$, $0\in g(\Delta_3)$ και $g\uparrow\Delta_3$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_3: g(x_1)=0$.

2ος τρόπος: $f\left(g(x)\right)=1 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x)+1}-g(x)=1 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x)+1}=g(x)+1\ (1)$.

Πρέπει: $g(x)+1\ge 0 \Leftrightarrow x^3+\frac{3x^2}{2}\ge 0 \Leftrightarrow x^2\left(x+\frac{3}{2}\right)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge-\frac{3}{2}$. Τότε:

$(1)\Rightarrow g^2(x)+1=g^2(x)+2g(x)+1 \Leftrightarrow g(x)=0$.

$g'(x)=3x^2+3x=3x(x+1)$. Στο $\Delta_1=\left[-\frac{3}{2},-1\right]$, είναι $g(\Delta_1)=\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$, $0\notin g(\Delta_1)$.Στο $\Delta_2=[-1,0]$ είναι

$g(\Delta_2)=\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$, $0\notin g(\Delta_2)$.

Στο $\Delta_3=[0,+\infty)$, είναι $g(\Delta_3)=[-1,+\infty)$, $0\in g(\Delta_3)$ και $g\uparrow\Delta_3$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_3: g(x_1)=0$.

Γ3. 1ος τρόπος (Bolzano): Έστω $h(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x+\int_0^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η $x-\frac{\pi}{4}$ παραγωγίσιμη, άρα η συνάρτηση $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και επειδή οι συναρτήσεις $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, εφx είναι παραγωγίσιμες, η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

$h(0)=\int_0^{-\frac{\pi}{4}}f(t)dt=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt<0$, γιατί $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x>0$, αφού $\sqrt{x^2+1}>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε και

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt > 0$. Ακόμη $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = f(0) = 1 > 0$,

δηλαδή $h(0)h\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, οπότε από το Θ.Β υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\text{εφ}x_0$$

2ος τρόπος: Έστω $h(x) = \text{ημ}x\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η $x - \frac{\pi}{4}$ παραγωγίσιμη, άρα η συνάρτηση $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και επειδή η ημx είναι παραγωγίσιμη, η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = \text{συν}x\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt + \text{ημ}x f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, οπότε η h είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $h(0) = h\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, από το Θ.Rolle υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε $h'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\text{συν}x_0\int_0^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)dt + \text{ημ}x_0 f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\text{εφ}x_0 .$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[5\frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} + \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}\right] = 6f'(1)$,

γιατί $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+kh) - f(1)}{kh} \underset{u\to 0}{\overset{kh=u}{=}} \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+u) - f(1)}{u} = f'(1)$, άρα $6f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$.

Για κάθε $0 < x < 1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) = 0 \Rightarrow f\downarrow(0,1]$ και για κάθε $x > 1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) = 0 \Rightarrow f\uparrow[1,+\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$.

Δ.2 Επειδή η συνάρτηση $\frac{f(t) - 1}{t - 1}$ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = \frac{f(x) - 1}{x - 1}$. **Για το πρόσημο της g' υπάρχουν δύο επιλογές:**

1ος τρόπος: Για κάθε $x > 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) = 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 > 0$, άρα και $g'(x) = \frac{f(x) - 1}{x - 1} > 0 \Rightarrow g\uparrow(1,+\infty)$

2ος τρόπος: Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - 1}{x - 1}$. Είναι

$1 < \xi < x \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(1) < f'(\xi) < f'(x)$, άρα $f'(\xi) > 0 \Leftrightarrow g'(x) = \frac{f(x) - 1}{x - 1} > 0 \Rightarrow g\uparrow(1,+\infty)$.

Για την ανίσωση:

1ος τρόπος: Έστω $h(x) = \int_x^{x+1} g(u)du = \int_2^{x+1} g(u)du - \int_2^{x} g(u)du,\ x + 1 > 1 \Leftrightarrow x > 0$ και $x > 1$, άρα $x > 1$

Είναι $h'(x) = g(x+1) - g(x)$, $x + 1 > x \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x+1) > g(x)$, άρα $h'(x) > 0 \Rightarrow h\uparrow(1,+\infty)$

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du \Leftrightarrow h\left(8x^2 + 5\right) > h\left(2x^4 + 5\right) \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} 8x^2 + \cancel{5} > 2x^4 + \cancel{5} \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 4\right) < 0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}$$
$$x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x \in (-2,0) \cup (0,2) .$$

2ος τρόπος: Έστω $h(x) = \int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du = \int_2^{8x^2+6} g(u)du - \int_2^{8x^2+5} g(u)du,\ x \in \mathbb{R}\ 8x^2 + 5 > 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Είναι $h'(x)=16x\left[g\left(8x^2+6\right)-g\left(8x^2+5\right)\right]$.

- Για κάθε $x>0$ είναι $h'(x)>0 \Rightarrow h\uparrow[0,+\infty)$. Είναι:

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du \Leftrightarrow h(x)>h\left(\frac{x^2}{2}\right) \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} x>\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 2x-x^2>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2-x>0 \Leftrightarrow 0<x<2$$

- Για κάθε $x<0$ είναι $h'(x)<0 \Rightarrow h\downarrow(-\infty,0]$. Είναι:

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du \Leftrightarrow h(x)>h\left(-\frac{x^2}{2}\right) \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} x<-\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 2x+x^2<0 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} 2+x>0 \Leftrightarrow -2<x<0$$

Δ.3. Για την κυρτότητα: Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $g''(x)=\dfrac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$.

Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$. Είναι

$1<\xi<x \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(1)<f'(\xi)<f'(x)$, άρα $\dfrac{f(x)-1}{x-1}<f'(x) \Leftrightarrow f'(x)(x-1)-(f(x)-1)>0$, άρα $g''(x)>0 \Rightarrow g$ κυρτή

Για την εξίσωση:

1^{ος} τρόπος: Η εφαπτομένη της C_g στο $x_0=\alpha$ είναι η ε: $y-\cancelto{0}{g(\alpha)}=g'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y=g'(\alpha)(x-\alpha)$.

Επειδή η g είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, άρα $g(x)\geq g'(\alpha)(x-\alpha)$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=\alpha$ (**μ 2**). Άρα η εξίσωση $g(x)=g'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow \int_\alpha^x \dfrac{f(t)-1}{t-1}dt=\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha) \Leftrightarrow$

$(\alpha-1)\int_\alpha^x \dfrac{f(t)-1}{t-1}dt=(f(\alpha)-1)(x-\alpha)$ αληθεύει μόνο για $x=\alpha$.

2^{ος} τρόπος: Έστω $\varphi(x)=(\alpha-1)\int_\alpha^x \dfrac{f(t)-1}{t-1}dt-(f(\alpha)-1)(x-\alpha)$, $x>1$. Είναι $\varphi(\alpha)=0$.

$$\varphi'(x)=(\alpha-1)\frac{f(x)-1}{x-1}-(f(\alpha)-1)=(\alpha-1)\left[\frac{f(x)-1}{x-1}-\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\right]=(\alpha-1)\left(g'(x)-g'(\alpha)\right).$$

Για κάθε $x>\alpha \overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow} g'(x)>g'(\alpha)=0 \Rightarrow \varphi'(x)>0 \Rightarrow \varphi\uparrow[\alpha,+\infty)$. Για κάθε $x>\alpha \overset{\varphi\uparrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x)>\varphi(\alpha)=0$.

Για κάθε $1<x<\alpha \overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow} g'(x)<g'(\alpha)=0 \Rightarrow \varphi'(x)<0 \Rightarrow \varphi\downarrow(1,\alpha]$. Για κάθε $1<x<\alpha \overset{\varphi\downarrow}{\Rightarrow} \varphi(x)>\varphi(\alpha)=0$.

Άρα η $x=\alpha$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x)=0$.

3^{ος} τρόπος: Προφανής ρίζα η $x=\alpha$ **.** Έστω ότι η φ έχει και άλλη ρίζα ρ. Τότε με Θ.Rolle στο (α,ρ) ή στο (ρ,α) η $\varphi'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα, που οδηγεί σε άτοπο. Όμοια αν $1<\rho<\alpha$.