

13η Άσκηση

Έως θεώρημα Bolzano

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ ακριβώς σε ένα σημείο $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

β) Κάνοντας κατάλληλο σχήμα, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ ακριβώς σε ένα σημείο $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της f στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\sin x}{f(x)}$$

δ) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

ε) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - 2x}{f^2(x)}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f^2(x) - 4f(x) + 2}{f^2(x) + f(x)}$

iii. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[(x - x_0) \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right]$

στ) Έστω $f_1(x) = f(x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Να δείξετε ότι

i. Η f_1 αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.

ii. Η f_1^{-1} διέρχεται από το σημείο $A(2, 0)$.

ζ) Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τα οποία είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x) + \beta}{x} = 2$

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Είναι $f(0) = \sin 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 2 > 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - 2 \frac{\pi}{2} + 1 = -\pi + 1 < 0$, δηλαδή $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ και

επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα

Bolzano, υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Έστω $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, τότε $\sin x_1 > \sin x_2$ (1), $-2x_1 > -2x_2 \Leftrightarrow -2x_1 + 1 > -2x_2 + 1$ (2).

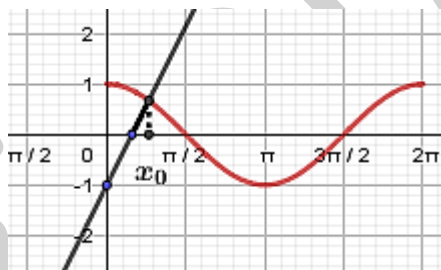
Από (1)+(2) $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f στο διάστημα αυτό.

β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 2x - 1$

Για να αποδείξουμε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, αρκεί να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις

$y = \sin x$ και $y = 2x - 1$ τέμνονται σε ένα μόνο σημείο στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Για το λόγο αυτό κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της $y = \sin x$ και της ευθείας $y = 2x - 1$.



Παρατηρούμε ότι τέμνονται σε σημείο του οποίου η τετμημένη βρίσκεται στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Για κάθε $0 < x < x_0 \xrightarrow{f \searrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ και για κάθε $x_0 < x < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{f \searrow} f(x_0) > f(x) \Leftrightarrow f(x) < 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\sin x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[\sin x \frac{1}{f(x)} \right] = -\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)} \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ u \rightarrow 0^-}} \frac{1}{u} = -\infty$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\sin x}{x} - 2 + \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty (0 - 2 + 0) = -\infty$$

$$\epsilon) \text{ i. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - 2x}{f^2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[(\sin x - 2x) \frac{1}{f^2(x)} \right] = (-1)(+\infty) = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\sin x - 2x) = \sin x_0 - 2x_0 = -1 \text{ αφού } f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \sin x_0 - 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x_0 - 2x_0 = -1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f^2(x)} \stackrel{f^2(x)=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ u \rightarrow 0^+}} \frac{1}{u^2} = +\infty$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f^2(x) - 4f(x) + 2}{f^2(x) + f(x)} \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \Rightarrow \\ u \rightarrow -\infty}} \frac{3u^2 - 4u + 2}{u^2 + u} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{3\cancel{u^2}}{\cancel{u^2}} = 3$$

iii. Για $x \neq x_0$ είναι

$$\left| (x - x_0) \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right| = |x - x_0| \left| \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right| \leq |x - x_0| \Leftrightarrow -|x - x_0| \leq (x - x_0) \eta \mu \frac{1}{f(x)} \leq |x - x_0|$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} (-|x - x_0|) = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[(x - x_0) \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right] = 0 .$$

στ) i. Η f_1 είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Επειδή η f_1 είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, έχει σύνολο τιμών το

$$f(\Delta) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(0) \right] = [1 - \pi, 2] , \text{ άρα } \tau D_{f_1^{-1}} = [1 - \pi, 2]$$

ii. Αρκεί $f_1^{-1}(2) = 0 \Leftrightarrow f(f_1^{-1}(2)) = f(0) \Leftrightarrow 2 = f(0)$ που ισχύει

ζ) Έστω $g(x) = \frac{\alpha f(x) + \beta}{x}$, $x \neq 0$ με $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$.

Τότε $xg(x) = \alpha f(x) + \beta$ και $\lim_{x \rightarrow 0} [xg(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} [\alpha f(x) + \beta] \Leftrightarrow 0 = \alpha f(0) + \beta \Leftrightarrow \beta = -2\alpha$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x) + \beta}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\sigma\upsilon\nu x - 2x + 1) - 2\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha \frac{\sigma\upsilon\nu x - 2x + 1 - 2}{x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\alpha \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - \frac{2x}{x} \right) \right] = 2 \Leftrightarrow \alpha(0 - 2) = 2 \Leftrightarrow -2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ και } \beta = -2(-1) = 2$$