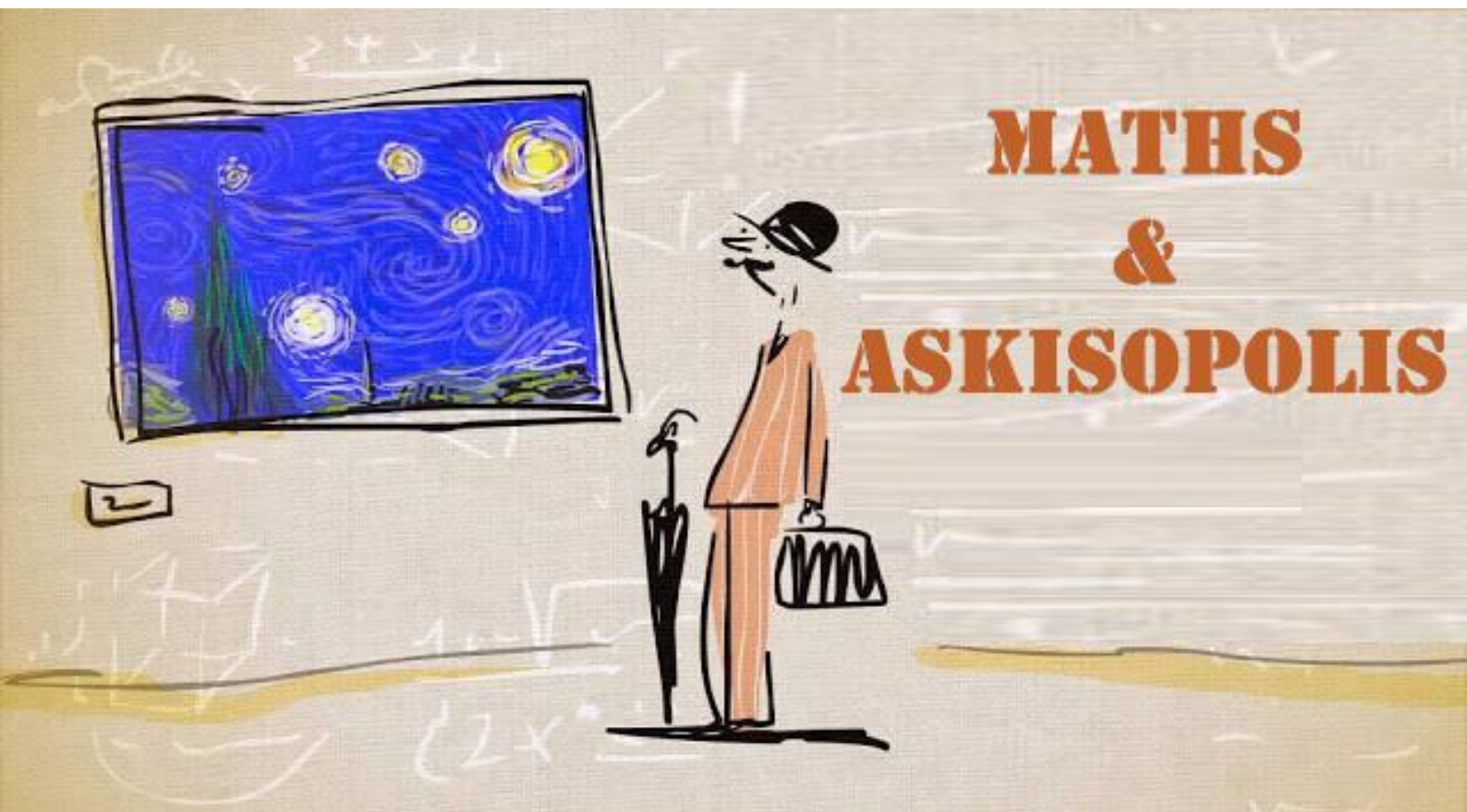


Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis



Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας



2019 - 2020



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

3ο Διαγώνισμα

28-3-2020

Θέμα Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ ;

μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Υπάρχει συνάρτηση συνεχής στο \mathbb{R} μη σταθερή που παίρνει μόνο ακέραιες τιμές».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

A4. Να βρείτε το λάθος στην παρακάτω διαδικασία και να εξηγήσετε γιατί είναι λάθος:

Έστω $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$, τότε $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

επομένως $-1 < 1 \Rightarrow f(-1) > f(1) \Rightarrow -1 > 1$.

μονάδες 4

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το A και B αντίστοιχα τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

β) Αν $P(x)$ πολυωνυμική μη σταθερή συνάρτηση και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{P(x)}$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{P(x)} = +\infty$.

γ) Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\beta |f(x)| dx$.

μονάδες 6

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x} - x^2 - 1, x > 0$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

Μονάδες 6

B2. Να δείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 4

B3. Να μελετήσετε αν η f έχει ασύμπτωτες και να χαράξετε πρόχειρα την γραφική της παράσταση έτσι ώστε να διακρίνεται το πρόσημό της, η μονοτονία της, η κυρτότητά της και η τιμή $f(1)$.

Μονάδες 6

B4. Ένα σημείο υλικό σημείο M κινείται επί της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ταχύτητα 1 m/sec . Την χρονική στιγμή $t = 1 \text{ sec}$ διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$. Να βρείτε:

α) Τη χρονική στιγμή $t > 0$ κατά την οποία το M έχει την μέγιστη τεταγμένη.

Μονάδες 4

β) Την ταχύτητα απομάκρυνσης από το σημείο $B(1, 1)$ την χρονική στιγμή $t = 1 \text{ sec}$.

Μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g, h: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $h(x) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(x+u) - g(x-u)}{2u}$

- $f(x) = e^{\frac{g(x)}{x}}, x > 0.$

- $h^3(x) + h(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$

- $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \ln x.$

Γ1. Να δείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε το πρόσημο της h και να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

μονάδες 2+3

Γ3. α) Να δείξετε ότι $g(0) = 0.$

β) Να δείξετε ότι η g είναι κυρτή και στη συνέχεια ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

μονάδες 2+4

$$\text{Αν } g(1) = 1 :$$

Γ4.α) να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $g(\xi) = \frac{1}{2}$

β) να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ τέτοιοι ώστε $g'(\xi_1) + g'(\xi_2) = 2$

γ) να δείξετε ότι υπάρχουν $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ τέτοιοι ώστε $\frac{1}{g'(\theta_1)} + \frac{1}{g'(\theta_2)} = 2$

μονάδες 3+3+3

Θέμα Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda e^x + e^{-x}}{e^x + \mu}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

Δ1. Να βρείτε τα λ, μ για τα οποία η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα y' και οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 1$

μονάδες 7

Έστω $\lambda = 1$ και $\mu = -1$

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-\infty, 0)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

μονάδες 7

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) - f(x_0) = 0.$

μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(\ln x - x + 1).$

μονάδες 5

Καλή τύχη!