Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

10ο Διαγώνισμα

16 - 5 - 2020

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και είναι ίσες με τη πρώτη τους παράγωγο».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεση τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

ε) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 10

Θέμα Β

Οι πολεοδόμοι μιας πόλης εκτιμούν ότι, όταν ο πληθυσμός της πόλης είναι *x* εκατοντάδες χιλιάδες άτομα, θα υπάρχουν στην πόλη $f(x)=10\sqrt{2(x^2+x)}$ $x\geq 0$ χιλιάδες αυτοκίνητα.

Β1. Να αποδείξετε ότι όταν αυξάνεται ο πληθυσμός της πόλης αυξάνεται και ο αριθμός των αυτοκινήτων.

μονάδες 5

Β2. α) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f.

μονάδες 9

β) Τι εκφράζει η αντίστροφη της συνάρτησης f;

μονάδες 2

γ) Να βρείτε τον πληθυσμό της πόλης όταν ο αριθμός των αυτοκίνητων είναι 120000.

μονάδες 4

Β3. Αν ο πληθυσμός της πόλης αυξάνεται με ρυθμό $x'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ όπου $t\geq 1$ ο χρόνος σε έτη και τη χρονική στιγμή t=1 ο πληθυσμός της πόλης είναι 500000, να βρείτε ποια χρονική στιγμή θα υπάρχουν 120000 αυτοκίνητα.

μονάδες 5

(Δίνεται $\sqrt{7225}=85$)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε την παράγωγο της f.

μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

Γ3. Δείξτε ότι για κάθε εφαπτόμενη της C_f υπάρχει ακριβώς μία εφαπτόμενη κάθετη σε αυτή.

μονάδες 7

Γ4. Έστω τα σημεία $A(x,f(x))$ και $B(-x,f(-x))$, $x\geq 1$. Αν το σημείο Α ξεκινά από τη θέση $x=1$ να απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με ταχύτητα 0,4t μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο, όπου t ο χρόνος σε sec.

Τη χρονική στιγμή που το Α διέρχεται από το σημείο $(8,4)$, να βρείτε :

α) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ,

β) την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από τον άξονα x΄x.

μονάδες 5+4

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι:

- η f είναι συνεχής
- $f^2(x)-2xf(x)e^{-x}-2f(x)e^{-x}=\eta\mu^2\left(f(x)-(x+1)e^{-x}\right)-x^2e^{-2x}-2xe^{-2x}-e^{-2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $e^{\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}-g(x)}-2=g(x)-\dfrac{x^3}{6}e^{-x}-\dfrac{x^2}{2}e^{-x}-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=(x+1)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι $g(x)=\left(\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}\right)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 7

Δ3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)+g(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 5

Δ4. Αν για τη συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{h(x)}-h(x)-\dfrac{h^3(x)}{6}\right)=1$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$.

μονάδες 6

Καλή τύχη!