4ο Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου 2017-18

Θέμα Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να «δώσετε» την γεωμετρική του ερμηνεία.

μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0\in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Μια πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού έχει πάντα σημείο καμπής.

β) Αν μια συνάρτηση f ορίζεται στο x_0 τότε η $x=x_0$ δεν μπορεί να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτή της.

γ) Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε μπορεί να υπάρχει $x_0\in\Delta$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

δ) Αν συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 ,τότε $f'(x_0)=0$.

ε) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, έχει μόνο μια παράγουσα στο Δ.

μονάδες 5x2

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

μονάδες 3

Β2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-1,f(-1))$ διαπερνά τη C_f.

μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x<0$ είναι: $f(5^x)+f(7^x)<f(6^x)+f(8^x)$.

μονάδες 5

Β4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της $\dfrac{1}{f}$, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

μονάδες 5

Β5. Να αποδείξετε ότι $\beta-\alpha<\int_\alpha^\beta ef(x)dx<e(\beta-\alpha)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

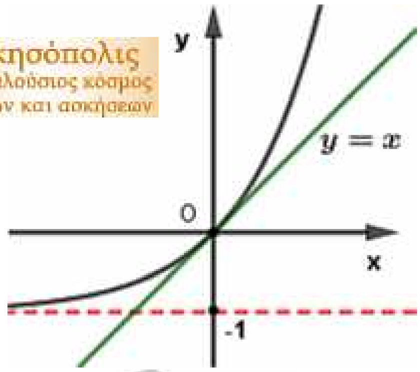
μονάδες 4

Β6. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

μονάδες 4

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x+1$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=2018$.

μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$.

μονάδες 3

Γ4. Να δείξετε ότι η f' είναι συνεχής στο $x_0=0$.

μονάδες 4

Γ5. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x f(x)+e^x-f(x)-1}{2x^2}$ και **ii.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{f^2(x)-f(x)}+f(x)\right)$

μονάδες 6

Γ6. Υλικό σημείο Μ κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1 μονάδα το δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασής του από την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(0,f(0))$.

μονάδες 4

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)+\dfrac{2x}{x^2+1}f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$. Έστω F αρχική της f με $F(1)=0$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 4

Δ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της F, τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία $x=1$.

μονάδες 5

Δ3. Να δείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\text{εφ}x)\,\text{ημ}x\,dx=\dfrac{1}{3}$.

μονάδες 5

Δ4. Να δείξετε ότι $F(x)+F\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ για κάθε $x>0$.

μονάδες 6

Δ5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2F(x)-x+1}$.

μονάδες 5

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$$,οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$, δηλαδή. $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

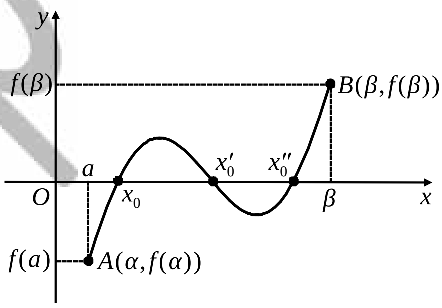
Στο $x_0=0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα. (α,β).

Γεωμετρική ερμηνεία
Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



Α3. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.

Α4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\frac{e^x\left(1+e^{x+1}\right)-\left(1+e^x\right)e^{x+1}}{\left(1+e^{x+1}\right)^2}=\frac{e^x+\cancel{e^{2x+1}}-e^{x+1}-\cancel{e^{2x+1}}}{\left(1+e^{x+1}\right)^2}=\frac{e^x(1-e)}{\left(1+e^{x+1}\right)^2}$$

Είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$.

Β.2. Αρκεί το Α να είναι σημείο καμπής της C_f .

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=\frac{(1-e)e^x\left(1-e^{x+1}\right)}{\left(1+e^{x+1}\right)^3}$.

$$f''(x)\ge 0\Leftrightarrow\frac{(1-e)e^x\left(1-e^{x+1}\right)}{\left(1+e^{x+1}\right)^3}\ge 0\underset{\left(1+e^{x+1}\right)^3>0}{\overset{(1-e)e^x<0}{\Leftrightarrow}}1-e^{x+1}\le 0\Leftrightarrow e^{x+1}\ge 1\Leftrightarrow x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1.$$

Για κάθε $x<-1$ είναι $f''(x)<0 \Rightarrow f \frown (-\infty,-1]$ και για κάθε $x>-1$ είναι $f''(x)>0 \Rightarrow f \smile [-1,+\infty)$, οπότε η C_f έχει σημείο καμπής στο Α.

Β3. Έστω $g(t)=t^x$, $t>0, x<0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(t)=xt^{x-1}<0 \Rightarrow g \searrow (0,+\infty)$.

Είναι $5<6 \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(5)>g(6) \Leftrightarrow 5^x>6^x \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(5^x)<f(6^x)$ (1) και

$7<8 \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(7)>g(8) \Leftrightarrow 7^x>8^x \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(7^x)<f(8^x)$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1),(2) προκύπτει ότι: $f(5^x)+f(7^x)<f(6^x)+f(8^x)$.

Β4. Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι το

$$E(\Omega)=\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx=\int_0^1 \frac{1+e^{x+1}}{1+e^x}dx$$

Έστω $e^x=u>0$, τότε $x=\ln u$ και $dx=\frac{1}{u}du$. Για $x=0$ είναι $u=1$ και για $x=1$ είναι $u=e$. Τότε

$$E(\Omega)=\int_0^1 \frac{1+eu}{1+u}\cdot\frac{1}{u}du=\int_0^1 \frac{1+eu}{u(u+1)}du$$

$\frac{1+eu}{u(u+1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}=\frac{Au+A+Bu}{u(u+1)}=\frac{(A+B)u+A}{u(u+1)}$. Είναι $\begin{cases}A+B=e\\ A=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}B=e-1\\ A=1\end{cases}$, άρα

$$E(\Omega)=\int_1^e \frac{1}{u}du+\int_1^e \frac{e-1}{u+1}du=[\ln u]_1^e+(e-1)[\ln(u+1)]_1^e=1+(e-1)\ln\frac{e+1}{2}$$

Β5. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}=1$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{1+e^{x+1}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{x+1}}=\frac{1}{e}.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\frac{1}{e},1\right)$, άρα

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $\frac{1}{e}<f(x)<1 \Rightarrow \int_\alpha^\beta \frac{1}{e}dx<\int_\alpha^\beta f(x)dx<\int_\alpha^\beta dx \Leftrightarrow \frac{1}{e}(\beta-\alpha)<\int_\alpha^\beta f(x)dx<\beta-\alpha \Leftrightarrow$

$\beta-\alpha<\int_\alpha^\beta ef(x)dx<e(\beta-\alpha)$.

Β6. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Είναι $A_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\left(\frac{1}{e},1\right)$.

$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}=y \Leftrightarrow 1+e^x=y+ye\cdot e^x \Leftrightarrow 1-y=ye\cdot e^x-e^x \Leftrightarrow e^x(ye-1)=1-y \Leftrightarrow e^x=\frac{1-y}{ye-1} \Leftrightarrow$

$x=\ln\frac{1-y}{ye-1}$, άρα $f^{-1}(y)=\ln\frac{1-y}{ye-1}$, $y\in\left(\frac{1}{e},1\right)$, οπότε $f^{-1}(x)=\ln\frac{1-x}{xe-1}$, $x\in\left(\frac{1}{e},1\right)$.

Θέμα Γ

Γ1. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $g(x)=f(x)-x+1 \Leftrightarrow g(x)+x-1=f(x)$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Είναι $g(x_1)<g(x_2)$ και $x_1-1<x_2-1$ οπότε και

$g(x_1)+x_1-1<g(x_2)+x_2-1 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2 Για κάθε $x>0$ είναι $g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-x+1>0 \Leftrightarrow f(x)>x-1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Για κάθε $x<0$ είναι $g(x)<0 \Leftrightarrow f(x)-x+1<0 \Leftrightarrow f(x)<x-1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\mathbb{R}$. Επειδή $2018\in f(A)$ υπάρχει μοναδικό $x_1\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=2018$.

Γ3. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι η ευθεία $y=x$ είναι εφαπτομένη της C_g στο Ο, οπότε $g'(0)=\lambda_\varepsilon=1$.

Είναι $g'(x)=\left(f(x)-x+1\right)'=f'(x)-1$, άρα $g'(0)=1\Leftrightarrow f'(0)-1=1\Leftrightarrow f'(0)=2$.

Είναι $g(0)=0\Leftrightarrow f(0)+1=0\Leftrightarrow f(0)=-1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y=2x-1$.

Γ4. Είναι $f'(0)=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}=2$. Όμως $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(f(x)+1\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}f'(x)$, άρα

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=2=f'(0)$, οπότε η f' είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Γ5 i. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x f(x)+e^x-f(x)-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x\left(f(x)+1\right)-\left(f(x)+1\right)}{2x^2}\right)=$

$\lim\limits_{x\to0}2\frac{\left(e^x-1\right)\left(f(x)+1\right)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}\cdot\frac{f(x)+1}{x}=\frac{1}{2}\cdot2=1$.

$\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}\right.$ και $\left.\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}=f'(0)=2\right)$

ii. Από το σχήμα προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)+x-1\right)=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f^2(x)-f(x)}+f(x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{f^2(x)-f(x)}+f(x)\right)\left(\sqrt{f^2(x)-f(x)}-f(x)\right)}{\sqrt{f^2(x)-f(x)}-f(x)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}2\frac{\left(\sqrt{f^2(x)-f(x)}\right)^2-f^2(x)}{\sqrt{f^2(x)\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)}-f(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{f^2(x)}-f(x)-\cancel{f^2(x)}}{-f(x)\left(\sqrt{1-\frac{1}{f(x)}}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{-f(x)}}{\cancel{-f(x)}\left(\sqrt{1-\cancelto{0}{\frac{1}{f(x)}}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

Γ6. Έστω $M\left(x(t),y(t)\right)$, όπου $y(t)=f\left(x(t)\right)$. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το Α, τότε: $x(t_0)=0,\ y(t_0)=f\left(x(t_0)\right)=f(0)=-1$ και $x'(t_0)=1$.

Είναι $(OM)(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$ και

$(OM)'(t)=\frac{2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}=\frac{x(t)x'(t)+f\left(x(t)\right)f'\left(x(t)\right)x'(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$, οπότε

$$(OM)'(t_0)=\frac{0\cdot 1+f(0)f'(0)\cdot 1}{\sqrt{0^2+(-1)^2}}=-2 \text{ μονάδες μήκους/sec}$$

Θέμα Δ

Δ1. $f'(x)+\frac{2x}{x^2+1}f(x)=0\Leftrightarrow (x^2+1)f'(x)+2xf(x)=0\Leftrightarrow \left((x^2+1)f(x)\right)'=0\Leftrightarrow (x^2+1)f(x)=c\Leftrightarrow$

$f(x)=\frac{c}{x^2+1},\ c\in\mathbb{R}$. Είναι $f(0)=1\Leftrightarrow c=1$ άρα $f(x)=\frac{1}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Είναι $F'(x)=f(x)>0\Rightarrow F\nearrow\mathbb{R}$. Για κάθε $0\le x\le 1\overset{F\nearrow}{\Rightarrow} F(x)\le F(1)=0$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $E(\Omega)=\int_0^1|F(x)|dx=-\int_0^1F(x)dx=-\int_0^1F(x)(x)'dx\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1xF'(x)dx=-F(1)+\int_0^1xf(x)dx=-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$.

Δ3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\text{εφ}x)\text{ημ}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\text{εφ}^2x+1}\text{ημ}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{συν}^2x\,\text{ημ}x\,dx=\left[-\frac{\text{συν}^3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$

Δ4. Έστω $g(x)=F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right),\ x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=F'(x)+F'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'=f(x)-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{\cancel{x^2}}\cdot\frac{1}{\frac{1+x^2}{\cancel{x^2}}}=0$$

άρα $g(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$. Είναι $g(1)=F(1)+F(1)=0$ άρα $c=0$ και $g(x)=0,\ (0,+\infty)\Leftrightarrow F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right)=0$ για κάθε $x>0$.

Δ5. Είναι $F(1)=0$ και $F'(1)=f(1)=\frac{1}{2}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x=1$ έχει εξίσωση $y-F(1)=F'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

Είναι $F''(x)=f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}<0$ για κάθε $x>0$ άρα η F είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$, οπότε βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής, δηλαδή $F(x)\le\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2F(x)-x+1\le 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Θέτουμε $2F(x)-x+1=u$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\left(2F(x)-x+1\right)=0$ και $2F(x)-x+1<0$ για κάθε $x\in(0,1)\in(1,+\infty)$, όταν $x\to 1$ τότε $u\to 0^-$, οπότε: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2F(x)-x+1}=\lim\limits_{u\to 0^-}\frac{1}{u}=-\infty$