Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020

5ο Διαγώνισμα

11 - 4 -2020

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

μονάδες 7

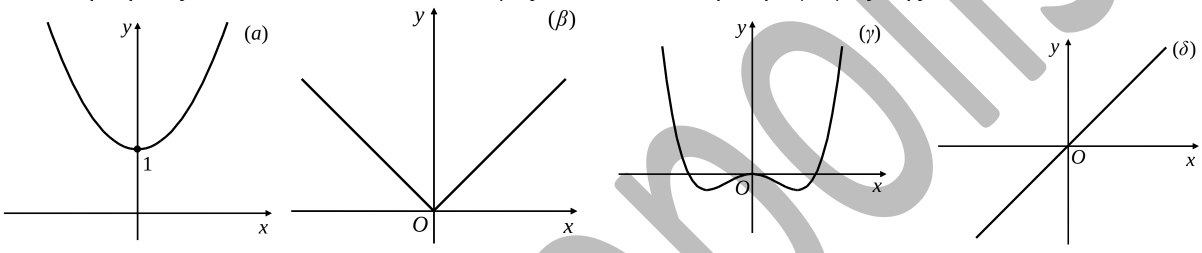
Α2. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1;

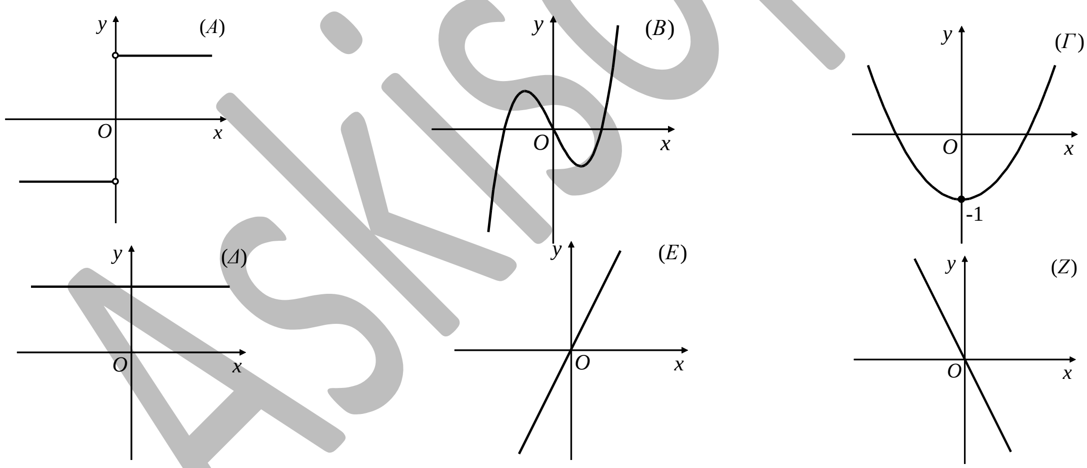
μονάδες 4

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη τον πίνακα:

α	β	γ	δ

στον οποίο θα αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.





μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$ τότε $f(\alpha)f(\beta)<0$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

β) Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^{-x}$, τότε:

i. $(g\circ f)(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}^*$ **ii.** $(f\circ g)(x)=-x,\ x\in\mathbb{R}$

γ) Αν $f(x)>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, τότε κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to 0} f(x)>1$.

μονάδες 2+2+2

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^x-\ln(x+1)+2x-1, x>-1$.

Β1. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$ και να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 6

Β2. Αν $x_2\in(-1,x_1)$ και $x_3\in(x_1,0]$ είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, να βρείτε το x_3 και να προσδιορίσετε το πρόσημο του ακρότατου της f.

μονάδες 4

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]$.

μονάδες 6

Β4. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο στο οποίο τέμνει τον άξονα y΄y, εφάπτεται και στην $h(x)=e^{x-1}+x,\ x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 4

Β5. Να εξετάσετε αν υπάρχουν σημεία της C_f στο 1ο τεταρτημόριο στα οποία οι εφαπτομένες να είναι κάθετες.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $g,h:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ με τύπους $g(x)=\eta\mu x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ και $h(x)=\sigma\upsilon\nu x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\left|g(x)-xh(x)\right|\le 1$ για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι $\beta g(\alpha)>\alpha g(\beta)$ για κάθε $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$.

μονάδες 5

Γ3. Να ορίσετε την συνάρτηση $f(x)=(g\circ h)(x)+(h\circ g)(x)$ και να βρείτε την μονοτονία της.

μονάδες 3 +5

Γ4. Αν $\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi 1)<\varepsilon\varphi 1$ και $\sigma\upsilon\nu 1<\frac{\pi}{4}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(\frac{\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x))}\right)+f(x)=1$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

μονάδες 6

Θέμα Δ

Έστω οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

- $f'(x)f(x)+g'(x)g(x)=g'(2x),\ x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=0,\ g(0)=1$

Δ1. Να δείξετε ότι $f^2(x)+g^2(x)=g(2x), x\in\mathbb{R}$

μονάδες 5

Δ2. Αν $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, να βρείτε ποια μπορεί να είναι η f.

μονάδες 8

Δ3. Έστω $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση $g(kx^2)-g(kx^4)>k\left(g(x^2)-g(x^4)\right),\ k>1$

μονάδες 6

Καλή τύχη!