Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

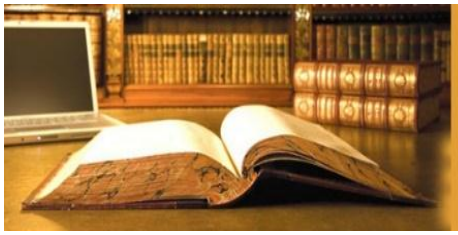
Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

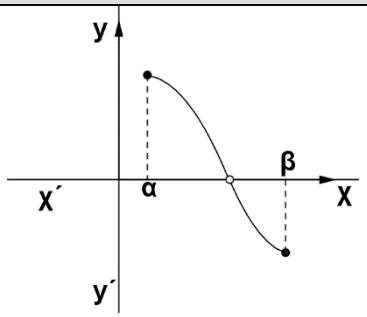
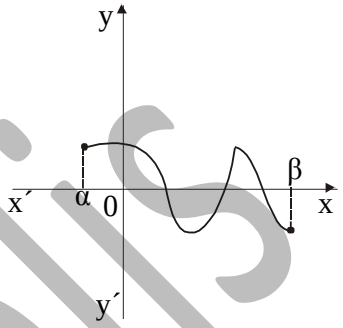
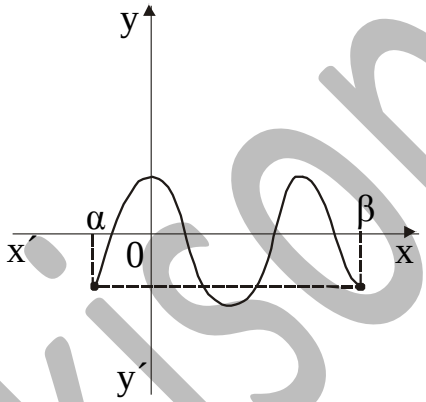
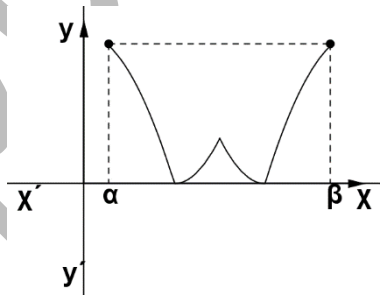
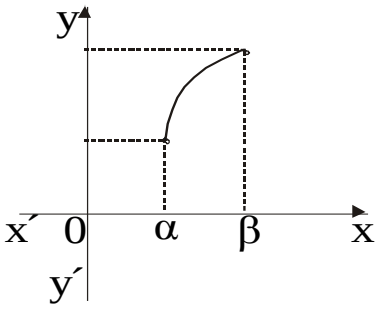
9ο Διαγώνισμα

9 - 5 - 2020

Θέμα Α

Α1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένο τον πίνακα 2, αφού αντιστοιχίσετε κάθε θεώρημα της στήλης Α του πίνακα 1 σε όσες συναρτήσεις της στήλης Β μπορεί να εφαρμοστεί στο $[\alpha,\beta]$.

Πίνακας 1

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. Θεώρημα Bolzano	 **α.**  **β.**
2. Θεώρημα Rolle	 **γ.**  **δ.**
3. Θεώρημα μέσης τιμής	 **ε.**

Πίνακας 2

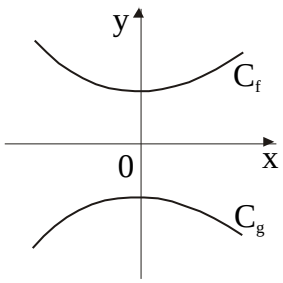
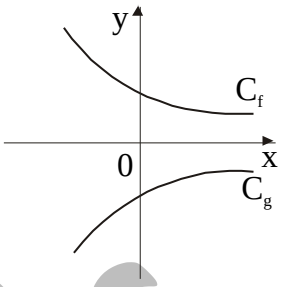
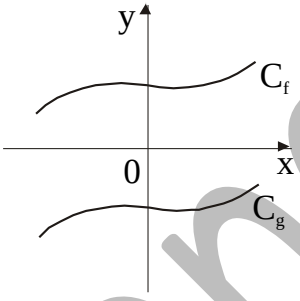
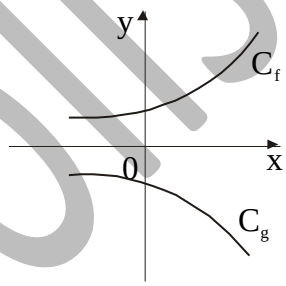
1	**2**	**3**

μονάδες 6

Α2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένο τον πίνακα 4, αφού αντιστοιχίσετε σε κάθε σχέση της στήλης Α ένα γράφημα από τη στήλη Β του πίνακα 3. Οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

Askisopolis

Πίνακας 3

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\left(f(x)-g(x)\right)'\geq 0$	 **α.**
2. $\left(f(x)-g(x)\right)'=0$	 **β.**
3. $\left(f(x)-g(x)\right)'\leq 0$	 **γ.**
4. $\left(f(x)-g(x)\right)'>0$, για $x>0$ και $\left(f(x)-g(x)\right)'<0$, για $x<0$	 **δ.**

Πίνακας 4

1	2	3	4

μονάδες 8

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι:

η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

μονάδες 7

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.

Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 ,τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0)=0$».

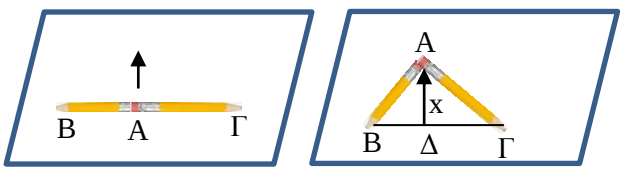
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Θέμα Β

Δύο μολύβια ΑΒ και ΑΓ με μήκη $3\sqrt{2}$ cm και $4\sqrt{2}$ cm αντίστοιχα είναι τοποθετημένα στο δάπεδο έτσι ώστε να ακουμπάνε στο σημείο Α και η γωνία ΒΑΓ να είναι 180°.



Τα πιάνουμε από το σημείο Α και τα ανασηκώνουμε κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα 0,2 cm/sec, έτσι ώστε οι άκρες Β και Γ να ακουμπάνε πάντα στο δάπεδο. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζεται

Askisopolis

ένα μεταβλητό τρίγωνο ΑΒΓ . Αν $A\Delta = x\,cm$, $x \in \left[0, 3\sqrt{2}\right)$, και Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΓ, να δείξετε ότι:

Β1. $E(x) = \frac{1}{2} x\sqrt{32 - x^2}$

μονάδες 5

Β2. Να βρείτε μετά από πόσα δευτερόλεπτα το τρίγωνο ΑΔΓ έχει μέγιστο εμβαδό.

μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $A\hat{B}\Delta = \theta$ τη χρονική στιγμή που το τρίγωνο ΑΔΓ έχει μέγιστο εμβαδό.

μονάδες 6

Β4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική χρονική στιγμή που το τρίγωνο ΑΔΓ έχει εμβαδό $5\,cm^2$.

μονάδες 7

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,\pi]$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = f(x)\eta\mu x$ για κάθε $x \in (0,\pi)$ με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x,\ x \in [0,\pi]$.

μονάδες 5

Γ2. α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $[0,\pi]$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

μονάδες 5+3+3

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot x + 2020$ και να βρεθεί η εξίσωση της.

μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,\pi)$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 0$.

μονάδες 4

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$\left|f(x) - f(y) - x^2\eta\mu\frac{1}{x} + y^2\eta\mu\frac{1}{y}\right| \le (x-y)^{2020}$ για κάθε $x, y \in (0,+\infty)$, $f\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$ και η συνάρτηση

$g(x) = \begin{cases} f(x) & ,\ x > 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x^2\eta\mu\frac{1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.

μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ότι ο άξονας x΄x είναι η εφαπτομένη της C_g στην αρχή των αξόνων.

μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι ο άξονας x΄x έχει με την C_g άπειρα κοινά σημεία.

μονάδες 3

Askisopolis

Δ4. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\left[\frac{2}{\pi},+\infty\right)$.

μονάδες 6

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{2021\pi},\frac{1}{2020\pi}\right)$ τέτοιο ώστε $\sigma\varphi\frac{1}{\xi}=2\xi$.

μονάδες 6

Askisopolis

Καλή τύχη!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1.

1	2	3
β	γ	γ, ε

Α2.

1	2	3	4
δ	γ	β	α

Α3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

  Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1)

  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι. $f(x_1) = f(x_2)$.Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α4. α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ αφού $f(x) \geq 0 = f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό και δεν ορίζεται το $f'(0)$.

Θέμα Β

Β1. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$\Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2 - A\Delta^2 = 32 - x^2 \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \sqrt{32 - x^2} \text{ και } E(x) = \frac{1}{2}\Delta\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2}x\sqrt{32 - x^2}$$

Β2. 1ος τρόπος

Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 3\sqrt{2})$ με:

$$E'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{32 - x^2} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{32 - x^2}} = \frac{32 - x^2 - x^2}{2\sqrt{32 - x^2}} = \frac{32 - 2x^2}{2\sqrt{32 - x^2}}$$

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{32 - 2x^2}{2\sqrt{32 - x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow 32 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 16 \Leftrightarrow x \leq 4.$$

Για κάθε $x \in (0, 4)$ είναι $E'(x) > 0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο διάστημα $(0, 4]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x \in (4, 3\sqrt{2})$ είναι $E'(x) < 0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο διάστημα $[4, 3\sqrt{2})$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Η Ε έχει μέγιστο για $x = 4\text{cm}$. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ που ξεκινήσαμε να ανασηκώνουμε το

Askisopolis

σημείο Α ήταν $x=0$, αν t η χρονική στιγμή που $x=4$ τότε $\upsilon=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\Leftrightarrow 0,2=\dfrac{4}{t}\Leftrightarrow\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{t}\Leftrightarrow t=20\sec$, δηλαδή μετά από 20 δευτερόλεπτα το τρίγωνο ΑΔΓ έχει μέγιστο εμβαδό.

2ος τρόπος

Είναι $x'(t)=0,2\Leftrightarrow x(t)=0,2t+c,\ c\in\mathbb{R}$. Είναι $x(0)=0\Leftrightarrow c=0$ άρα $x(t)=0,2t$.

$$E(t)=\frac{1}{2}x(t)\sqrt{32-x^2(t)}=\frac{1}{2}\cdot 0,2t\sqrt{32-0,04t^2}=0,1t\sqrt{32-0,04t^2}$$

Επειδή $x(t)\in\left[0,3\sqrt{2}\right)$ είναι $0\le 0,2t<3\sqrt{2}\Leftrightarrow 0\le t<15\sqrt{2}$

$$\text{Είναι } E'(t)=0,1\sqrt{32-0,04t^2}+0,1t\frac{-0,08t}{2\sqrt{32-0,04t^2}}=0,1\frac{32-0,04t^2-0,04t^2}{\sqrt{32-0,04t^2}}=0,1\frac{32-0,08t^2}{\sqrt{32-0,04t^2}}$$

$$E'(t)\ge 0\Leftrightarrow 0,1\frac{32-0,08t^2}{\sqrt{32-0,04t^2}}\ge 0\Leftrightarrow 32-0,08t^2\ge 0\Leftrightarrow t^2\le 400\Leftrightarrow t\le 20$$

Όταν $t\in(0,20)$ είναι $E'(t)>0\Rightarrow E\nearrow[0,20]$ και για $t\in\left(20,15\sqrt{2}\right)$ είναι $E'(t)<0\Rightarrow E\searrow\left[20,15\sqrt{2}\right)$.

Το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο τη χρονική στιγμή $t=20\sec$

Β3. Είναι $\eta\mu A\hat{B}\Delta=\dfrac{A\Delta}{AB}\Leftrightarrow\eta\mu\theta(t)=\dfrac{x(t)}{3\sqrt{2}}$ και

$$\left[\eta\mu\theta(t)\right]'=\left[\frac{x(t)}{3\sqrt{2}}\right]'\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta(t)\cdot\theta'(t)=\frac{x'(t)}{3\sqrt{2}}=\frac{0,2}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{30}$$

Τη χρονική στιγμή $t=20$ είναι $\sigma\upsilon\nu\theta(20)\cdot\theta'(20)=\dfrac{\sqrt{2}}{30}\Leftrightarrow\theta'(20)=\dfrac{\sqrt{2}}{30\cdot\sigma\upsilon\nu\theta(20)}$

Είναι $x(20)=0,2\cdot 20=4\text{cm}$ και $B\Delta^2=AB^2-A\Delta^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-4^2=2\Leftrightarrow B\Delta=\sqrt{2}$,

οπότε $\sigma\upsilon\nu\theta(20)=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}$ και $\theta'(20)=\dfrac{\sqrt{2}}{30\cdot\frac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}\text{rad/sec}$

Β4. Είναι $E(0)=0$, $E(20)=0,1\cdot 20\sqrt{32-0,04\cdot 20^2}=8$ και

$$E\left(15\sqrt{2}\right)=0,1\cdot 15\sqrt{2}\sqrt{32-0,04\cdot\left(15\sqrt{2}\right)^2}=\frac{15}{10}\sqrt{2}\cdot\sqrt{32-\frac{4}{10\cancel{0}}\cdot 45\cancel{0}}\Leftrightarrow$$

$$E\left(15\sqrt{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{14}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\sqrt{7}=3\sqrt{7}$$

Στο διάστημα $\Delta_1=[0,20]$ η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_1)=[0,8]$.

Στο διάστημα $\Delta_2=\left(20,15\sqrt{2}\right)$ η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_2)=\left(3\sqrt{7},8\right)$.

Είναι $5<3\sqrt{7}$ γιατί $5^2<\left(3\sqrt{7}\right)^2\Leftrightarrow 25<63$, οπότε το 5 περιέχεται στο $E(\Delta_1)$ και δεν περιέχεται στο $E(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδική χρονική στιγμή $t\in(0,20)$ έτσι ώστε $E(t)=5\text{cm}^2$.

Askisopolis

Θέμα Γ

Γ1. 1ος τρόπος

$$f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = f(x)\eta\mu x \overset{\eta\mu x\neq 0 \text{ στο } (0,\pi)}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)' = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} = ce^x, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = ce^x\cdot\eta\mu x.$$

Για $x=\frac{\pi}{2}$ έχουμε $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = ce^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{2}} = ce^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow c=1$ οπότε $f(x) = e^x\cdot\eta\mu x, x\in(0,\pi)$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$ και $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = f(\pi) \Leftrightarrow f(\pi) = 0$.

Άρα $f(x) = e^x\cdot\eta\mu x, x\in[0,\pi]$.

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x} - e^x, x\in(0,\pi)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x) = \frac{\eta\mu x\cdot f'(x) - \sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)}{\eta\mu^2 x} - e^x = \frac{f(x)\cancel{\eta\mu x}}{\eta\mu^{\cancel{2}} x} - e^x = g(x)$

οπότε $g(x) = ce^x, c\in\mathbb{R}$.

Για $x=\frac{\pi}{2}$ έχουμε $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = ce^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}} = ce^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow c=0$ οπότε

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} - e^x = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x\cdot\eta\mu x, x\in(0,\pi)$$

Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$ και $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = f(\pi) \Leftrightarrow f(\pi) = 0$.

Άρα $f(x) = e^x\cdot\eta\mu x, x\in[0,\pi]$.

Γ2. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f'(x) = e^x\cdot(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$.

Για το πρόσημο της παραγώγου έχουμε :

$$f'(x) = 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ αφού } x\in[0,\pi].$$

Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\eta\mu\frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0$ και

για $x=\pi$ είναι $f'(\pi) = e^{\pi}\cdot(\eta\mu\pi + \sigma\upsilon\nu\pi) = -e^{\pi} < 0$.

Επομένως $f'(x) > 0$ στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και $f'(x) < 0$ στο $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	ΟΕ	↗	Ο.Μ	↘	ΟΕ

Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ άρα η f ↗ στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$, η f ↘ στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$,

Askisopolis

Η f έχει ολικό μέγιστο το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}$,ολικό ελάχιστο στα σημεία 0,π το $f(0)=f(\pi)=0$.

β) Θεωρούμε τα διαστήματα $A_1=\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ και $A_2=\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

Λόγω της μονοτονίας στα παραπάνω διαστήματα έχουμε :

$f(A_1)=\left[f(0),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}\right]$ και

$f(A_2)=\left[f(\pi),\lim\limits_{x\to\frac{3\pi^+}{4}}f(x)\right)=\left[0,f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\left[0,\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}\right)$

Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=\left[0,\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}\right]$.

γ) Αν $\alpha<0$ ή $\alpha>\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}$ η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $\alpha\notin f(A)$.

Αν $\alpha=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}$ έχει μοναδική ρίζα την $x_0=\frac{3\pi}{4}$.

Αν $\alpha\in\left(0,\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}\right)$ έχει δύο ακριβώς ρίζες αφού $\alpha\in f(A_1)$ και $\alpha\in f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1,x_2\in A_1,A_2$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)=0$.

Οι ρίζες είναι μοναδικές αφού η f είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα A_1,A_2.

Γ3. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=e^{\frac{\pi}{2}}$.

Αν $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της με την γραφική παράσταση της f τότε $f'(x_0)=e^{\frac{\pi}{2}}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f''(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)+e^x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f''(x)>0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ είναι $f''(x)<0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$,

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Άρα η f' παρουσιάζει μέγιστο στο $\frac{\pi}{2}$ το $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ και $f'(x_0)\le f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ με το ίσον να ισχύει μόνο $x=\frac{\pi}{2}$.

Άρα υπάρχει μοναδική εφαπτομένη με εξίσωση

$y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y-e^{\frac{\pi}{2}}=e^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y=e^{\frac{\pi}{2}}\cdot x+e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$.

Askisopolis

Γ4. Για την f ισχύει το ΘΜΤ στα διαστήματα $\left[0,\frac{2\pi}{5}\right]$ και $\left[\frac{2\pi}{5},\pi\right]$ οπότε υπάρχουν

$\xi_1\in\left(0,\frac{2\pi}{5}\right),\xi_2\in\left(\frac{2\pi}{5},\pi\right)$ τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{2}{5}\right)-f(0)}{\frac{2}{5}-0}=\dfrac{f\left(\frac{2}{5}\right)}{\frac{2}{5}}=\dfrac{5f\left(\frac{2}{5}\right)}{2}$ και

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(\pi)-f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\pi-\frac{2\pi}{5}}=-\dfrac{f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\frac{3\pi}{5}}=-\dfrac{5f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{3\pi}$.

Επομένως $2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)=\cancel{2}\dfrac{5f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\cancel{2}\pi}-\cancel{3}\dfrac{5f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\cancel{3}\pi}=\dfrac{5f\left(\frac{2\pi}{5}\right)-5f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\pi}=0$.

Θέμα Δ

Δ1. Έστω $h(x)=f(x)-x^2\eta\mu\frac{1}{x}$, $x>0$, τότε η σχέση $\left|f(x)-f(y)-x^2\eta\mu\frac{1}{x}+y^2\eta\mu\frac{1}{y}\right|\le(x-y)^{2020}$

γίνεται: $|h(x)-h(y)|\le(x-y)^{2020}$ και για $y=x_0$ είναι $|h(x)-h(x_0)|\le(x-x_0)^{2020}\Leftrightarrow$

$|h(x)-h(x_0)|\le|x-x_0|^{2020}$ και για $x\ne x_0$ είναι

$\dfrac{|h(x)-h(x_0)|}{|x-x_0|}\le|x-x_0|^{2019}\Leftrightarrow\left|\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\right|\le|x-x_0|^{2019}\Leftrightarrow$

$-|x-x_0|^{2019}\le\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\le|x-x_0|^{2019}$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|^{2019}=0=\lim\limits_{x\to x_0}\left(-|x-x_0|^{2019}\right)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=0\Leftrightarrow h'(x_0)=0$ για κάθε $x_0>0$.

Άρα για κάθε $x>0$ είναι $h'(x)=0\Leftrightarrow h(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$.

Είναι $h\left(\frac{1}{\pi}\right)=f\left(\frac{1}{\pi}\right)-\left(\frac{1}{\pi}\right)^2\eta\mu\pi=0\Leftrightarrow c=0$ και $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x^2\eta\mu\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$.

Δ2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{\cancel{2}}\eta\mu\frac{1}{x}}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to0}x\eta\mu\dfrac{1}{x}\underset{\substack{x\to0\Rightarrow\\u\to+\infty}}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}\eta\mu u=0$ γιατί για $u>0$ είναι

$\left|\dfrac{1}{u}\eta\mu u\right|=\left|\dfrac{1}{u}\right||\eta\mu u|\le\dfrac{1}{u}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{u}\le\dfrac{1}{u}\eta\mu u\le\dfrac{1}{u}$, $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}=0=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{u}\right)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής

είναι και $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}\eta\mu u=0$. Επομένως $g'(0)=0$ και ο άξονας x΄x είναι η εφαπτομένη της C_g στην αρχή των αξόνων.

Δ3. Ένα κοινό σημείο είναι το $O(0,0)$. Για $x\ne0$ είναι

$g(x)=0\Leftrightarrow x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}=0\Leftrightarrow\eta\mu\dfrac{1}{x}=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=\kappa\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\kappa\pi},\ \kappa\in\mathbb{N}^*$.

Επειδή υπάρχουν άπειρες τιμές του μη μηδενικού φυσικού αριθμού κ, η C_g έχει άπειρα κοινά σημεία με τον άξονα x΄x.

Askisopolis

Δ4. Για κάθε $x > \frac{2}{\pi}$ είναι $f'(x) = 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$.

Στη παράσταση $2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ θέτουμε $\frac{1}{x} = \omega$ και γίνεται: $\frac{2}{\omega}\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{2\eta\mu\omega - \omega\sigma\upsilon\nu\omega}{\omega}$ με

$x > \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(\omega) = 2\eta\mu\omega - \omega\sigma\upsilon\nu\omega,\ \omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\varphi'(\omega) = 2\sigma\upsilon\nu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega + \omega\eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\omega + \omega\eta\mu\omega$

για κάθε $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\varphi'(\omega) > 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ είναι $\varphi(\omega) > \varphi(0) = 0$, άρα και $\frac{2\eta\mu\omega - \omega\sigma\upsilon\nu\omega}{\omega} > 0 \Rightarrow$

$2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right)$, ως συνεχής στο διάστημα αυτό.

Δ5. $\sigma\varphi\frac{1}{x} = 2x \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{\eta\mu\frac{1}{x}} = 2x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} = 2x\eta\mu\frac{1}{x} \Leftrightarrow 0 = 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 0$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2021\pi}, \frac{1}{2020\pi}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2021\pi}, \frac{1}{2020\pi}\right)$ με

$f'(x) = 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$.

Είναι $f\left(\frac{1}{2021\pi}\right) = \left(\frac{1}{2021\pi}\right)^2 \eta\mu\frac{1}{\frac{1}{2021\pi}} = \left(\frac{1}{2021\pi}\right)^2 \eta\mu 2021\pi = 0$ και

$f\left(\frac{1}{2020\pi}\right) = \left(\frac{1}{2020\pi}\right)^2 \eta\mu\frac{1}{\frac{1}{2020\pi}} = \left(\frac{1}{2020\pi}\right)^2 \eta\mu 2020\pi = 0$, δηλαδή $f\left(\frac{1}{2020\pi}\right) = f\left(\frac{1}{2022\pi}\right)$

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{2021\pi}, \frac{1}{2020\pi}\right)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \sigma\varphi\frac{1}{\xi} = 2\xi$

Askisopolis