# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
# Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
# ΤΡΙΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003
# ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
# ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
# ΛΥΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ 1ο

**Α.α.** Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in R$, είναι μια παράγουσα της $f$ στο Δ, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

**β.** Εστω G είναι μια άλλη παράγουσα της $f$ στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

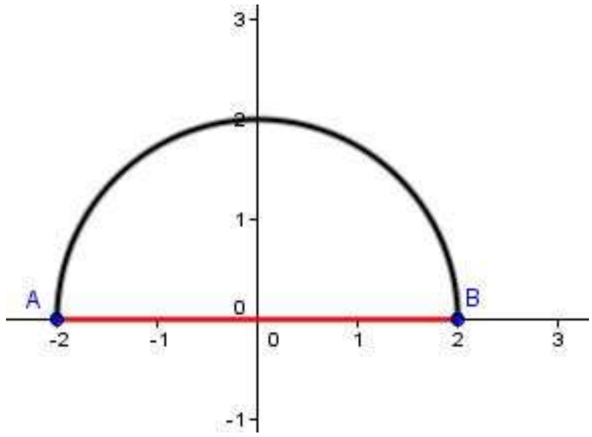
Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

**Β. α.** Σ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Σ

**Γ.** Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$.



## ΘΕΜΑ 2ο




**α.** Επειδή $|z|=2$, οι εικόνες Μ του μιγαδικού z βρίσκονται στον κύκλο που έχει κέντρο O(0,0) και ακτίνα $\rho=2$. Επειδή $\mathrm{Im}\,(z)\geq 0$, το σύνολο (Σ) αποτελείται από τα σημεία του ημικύκλιου ΑΒ που βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x, μαζί με τα σημεία Α και Β.

**β.** Εστω $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$. Είναι $|z|=2\Leftrightarrow x^2+y^2=4$ και $\mathrm{Im}(z)\geq 0\Leftrightarrow y\geq 0$. Τότε :

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{4}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(x+yi+\frac{4}{x+yi}\right)=\frac{1}{2}\left[x+yi+\frac{4(x-yi)}{x^2+y^2}\right]=\frac{1}{2}\left[x+yi+\frac{4(x-yi)}{4}\right]\Leftrightarrow$$

$$w=\frac{1}{2}(x+yi+x-yi)=x.$$

Επειδή για τις τετμημένες των σημείων του συνόλου (Σ) ισχύει : $-2\leq x\leq 2$, η εικόνα του μιγαδικού w βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

## ΘΕΜΑ 3ο

**α.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1-x^2}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}\right] = 0$

**β.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}{x} = -2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+2x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}\right] = 0$

Οπότε η $y=-2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

**γ.** $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ οπότε

$f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x = x-\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x = 0$

**δ.** $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx \overset{(\gamma)}{=} \int_0^1 -\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = -\Big[\ln|f(x)|\Big]_0^1 = -\ln f(1) = -\ln\left(\sqrt{2}-1\right) =$

$= \ln\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \ln\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{1} = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

## ΘΕΜΑ 4ο

**α.** Επειδή $f'(x)\neq 0$ και συνεχής, η $f'$ διατηρεί πρόσημο άρα η f είναι γνήσια μονότονη.

**β.** Για $x=1$ είναι $f(1)=-f(1)\Leftrightarrow 2f(1)=0\Leftrightarrow f(1)=0$ και f γνησίως μονότονη, άρα η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

**γ.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{f(x)}{f'(x)}}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{f(x)}{x-1}\dfrac{1}{f'(x)}\right) = f'(1)\dfrac{1}{f'(1)} = 1.$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον x΄x, τότε $g'(1)=\varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Rightarrow \omega = 45^\circ$.