Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Άλγεβρα Β΄ Λυκείου

Εκφωνήσεις

2024-2025

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr

Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Θέμα 2ο

15011. Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20 € και 50 €. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20 € και 50 € αντίστοιχα.

α) i. Δίνονται οι εξισώσεις: 1. $y = 15 - x$ 2. $y - x = 15$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480 €. Δίνονται, ακόμα, οι εξισώσεις:

3. $50y - 20x = 480$ 4. $20x + 50y = 480$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα αi) και αii) να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και 50 € κατάθεσε ο Κώστας.

15016. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος (0,4) δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος .

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x + 2y = 8$ και $(\varepsilon_2): 2x - y = 3$.

15849. Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά.

Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α) Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

Α. $\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$ **Β.** $\begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$

Γ. $\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$ **Δ.** $\begin{cases} y = x + 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$

β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι.

18431. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + ky = 8 \end{cases}$ με αγνώστους x,y και k παράμετρος.

α) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 2$.

β) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 1$.

21227.α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$.

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες (ε_1): $5x - y = 5$ και (ε_2): $-5x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

31570.Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$.

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο Μ.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon_3 : 3x + y = 8$ διέρχεται από το Μ.

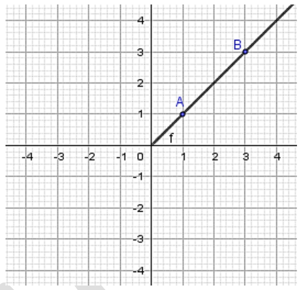
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 2ο

(16 ασκήσεις)

14971.Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1), B(3,3)$.



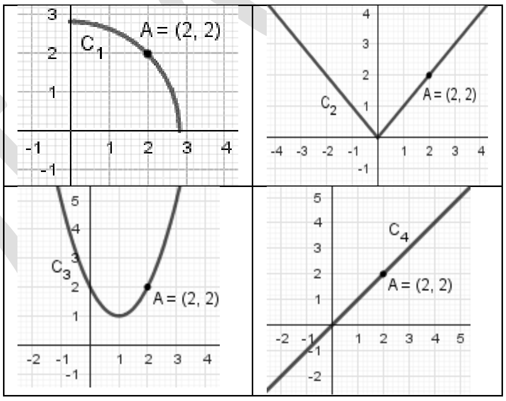
α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση f , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα Α και Β.

i) είναι σταθερή συνάρτηση

ii) είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f, η οποία διέρχεται από τα Α,Β και είναι περιττή.

14976.Δίνονται τα διπλανά σχήματα:



α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1 ,C_2 ,C_3 ,C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή.

β) Για τις συναρτήσεις C_2 ,C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2, k)$, αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης.

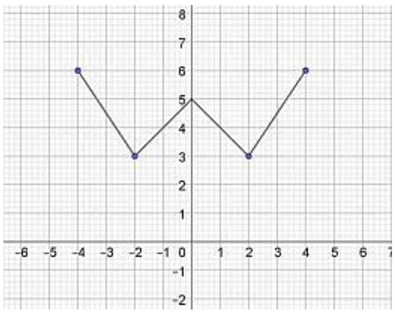
15019.Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(-1) = 2$ και $f(1) = 0$. Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

α) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι άρτια .

β) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι περιττή.

γ) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

15024.Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το
[-4, 4] φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

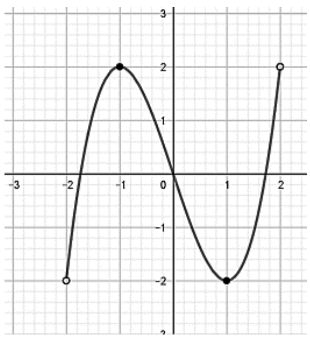


α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και για ποιες τιμές του x τις παρουσιάζει.

15112.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2,2)$.



α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

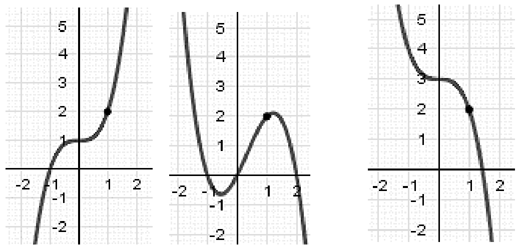
γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

15114. Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο A(1,2).

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο B(2,9); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Ποια από τις διπλανές γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i. ii. iii.

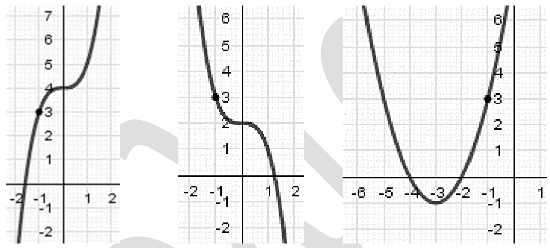


15115. Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathbf{A}(-1,3)$.

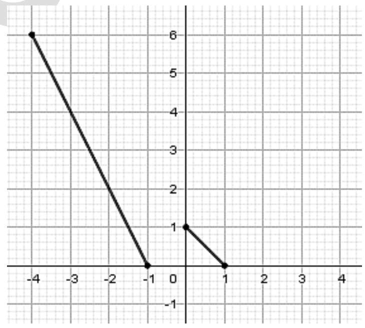
α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο B(2,5); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i. ii. iii.



15116. Στο διπλανό σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4,4]$.



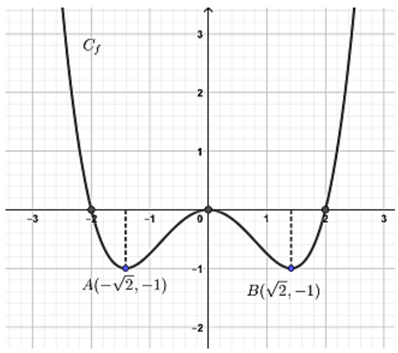
α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f .

β) Να βρείτε

i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

15349. Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

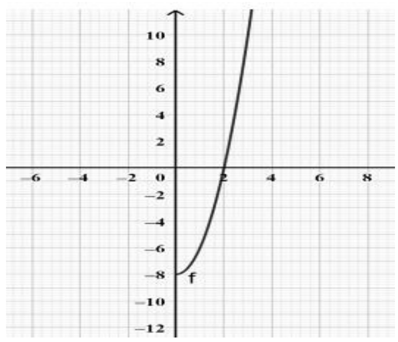


α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

β) Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία $A\left(-\sqrt{2},-1\right)$ και $B\left(\sqrt{2},-1\right)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

γ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x)=0$.

15372. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



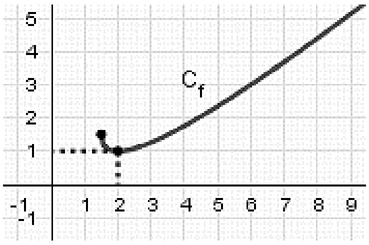
α) Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει.
Να αιτιολογήσετε την απάντησής σας.

β) Να βρείτε:

i. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

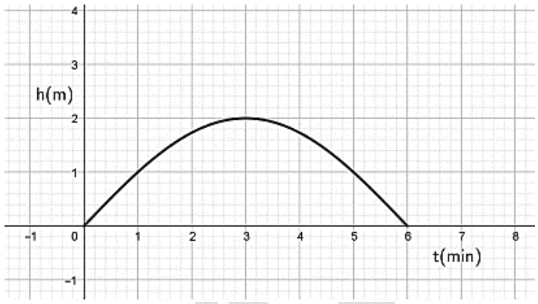
ii. Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει.

15437. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\sqrt{2x-3}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



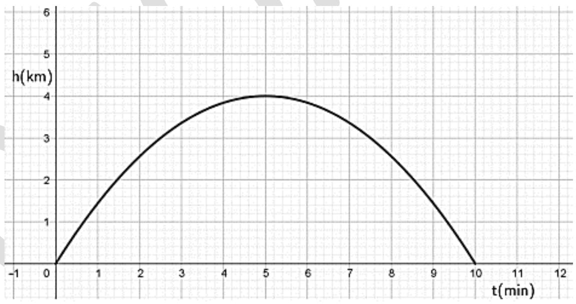
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
β) Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού.
γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι
i. γνησίως φθίνουσα **ii.** γνησίως αύξουσα

15645. Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το ύψος h του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή t . Να βρείτε:



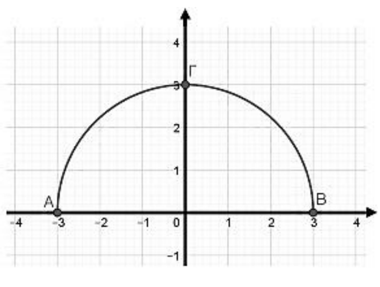
α) Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει 1m από το έδαφος.
β) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει.
γ) Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος.

15787. Προκειμένου να ελεγχθεί μηχανισμός εκτόξευσης πυραύλων δημιουργήσαμε το παρακάτω σχήμα στο οποίο φαίνεται η απόσταση του πυραύλου από το έδαφος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



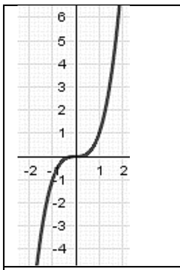
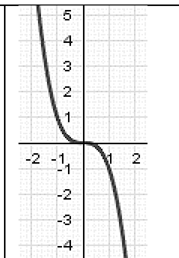
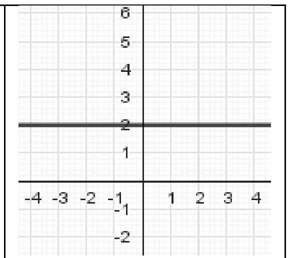
α) Να βρείτε:
i. Τον συνολικό χρόνο κίνησης του πυραύλου.
ii. Το μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.
β) Σε επανάληψη του ελέγχου η εκτόξευση πραγματοποιείται από ύψος 1 km.
i. Να μεταφέρεται στην κόλλα σας την αποτύπωση της πρώτης εκτόξευσης και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την δεύτερη.
ii. Το νέο μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.

16129. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.
γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων.

21164. Δίνεται το σημείο $A(-2,8)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας περιττής και γνησίως μονότονης συνάρτησης f.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός ακόμα σημείου, το οποίο να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.
β) Να βρείτε αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.
γ) Αν μία από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση f να αιτιολογήσετε ποια μπορεί να είναι:

		
Γραφική παράσταση (α)	Γραφική παράσταση (β)	Γραφική παράσταση (γ)

Θέμα 4ο

15022. Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3,3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1) < f(2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3,3]$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f. Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

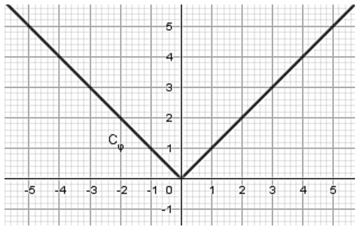
α. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ β. $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$ γ. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ δ. $f(x) = -\sqrt{x^2 - 9}$

Οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση

Θέμα 2ο

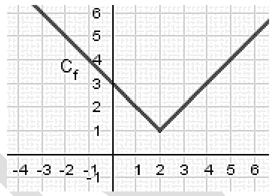
(13 ασκήσεις)

14972. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις $g(x)=|x-2|,\ x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=|x-2|+1,\ x\in\mathbb{R}$.



α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g, f και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της

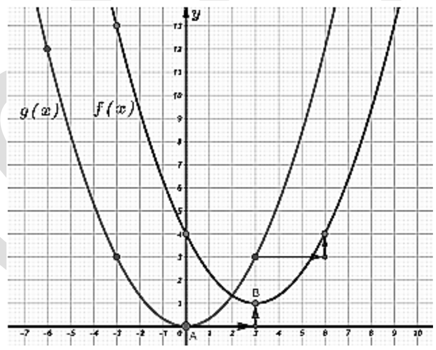
β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f, η οποία δίνεται παρακάτω, να βρείτε:



i. Τα διαστήματα στα οποία η είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα.

ii. Το ολικό ακρότατο της και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

14983. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{3}x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της g(x) κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.



α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.

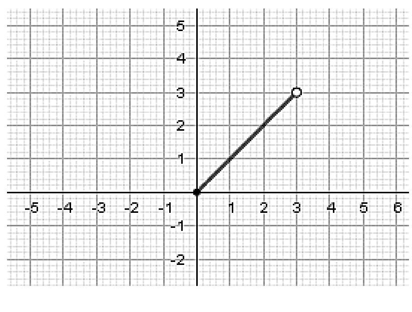
(i) $f(x)=g(x+3)+1$ **(ii)** $f(x)=g(x+3)-1$

(iii) $f(x)=g(x-3)+1$ **(iv)** $f(x)=g(x-3)-1$

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου.

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

15017. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha,3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2,2)$.

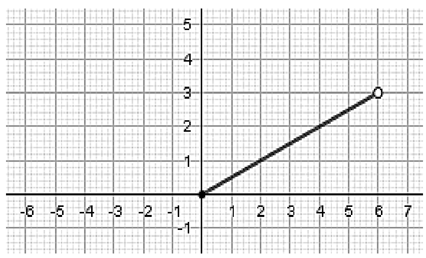


α) Να βρείτε την τιμή του α.

β) Να βρείτε το $f(-2)$.

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[0,3)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

15018. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha,6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4,2)$.

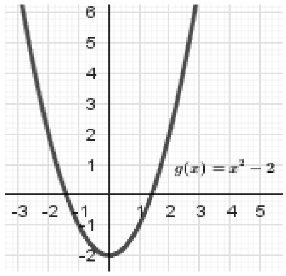


α) Να βρείτε την τιμή του α.

β) Να βρείτε το $f(-4)$.

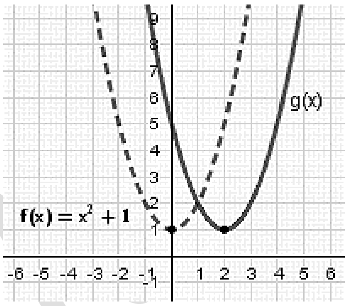
γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

15811. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 2,\ x \in \mathbb{R}$.



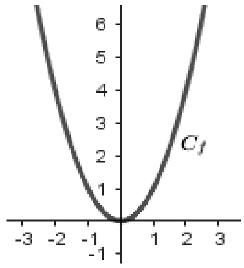
α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,
i. να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια.
ii. να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού.
β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

20671. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$ με $x \in \mathbb{R}$.



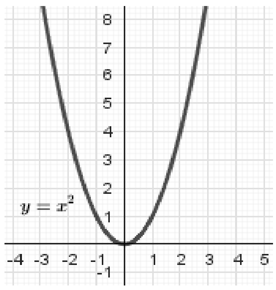
α) i. Είναι η f άρτια ή περιττή συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
ii. Έχει η f μέγιστη τιμή ή ελάχιστη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) i. Με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f προέκυψε η γραφική παράσταση της g ;
ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

21673. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$.



α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\varphi(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε μια μονάδα, προς τα πάνω.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$.
γ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $\varphi(x)$.

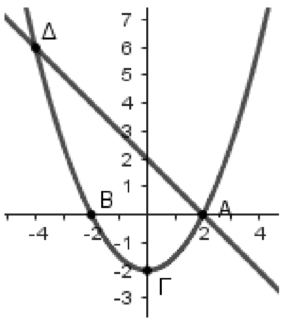
32674. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5,\ x \in \mathbb{R}$.



α) Να δείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x-2)^2 + 1$.
β) Να αναφέρετε με ποιες μετατοπίσεις της $y(x) = x^2$ προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την οποία και να χαράξετε στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί.

Θέμα 4ο

14294. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.



α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ .
β) Αν $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.
γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

14973. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x)=3x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=3x^2-6x+8,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση φ(x) είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=3(x-1)^2+5,\ x\in\mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης

της συνάρτησης φ , να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

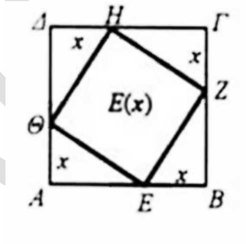
γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης , να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης .

ii. Το ολικό ακρότατο της και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

iii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της και της ευθείας με εξίσωση $y=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

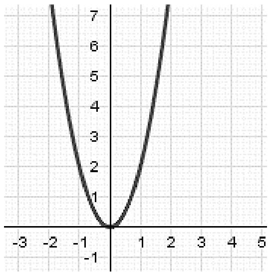
20713. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με πλευρά 2 cm, παίρνουμε τα εσωτερικά σημεία Ε,Ζ,Η,Θ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, αντίστοιχα, ώστε $ΕΒ=ΖΓ=ΗΔ=ΘΑ=x$ και σχηματίζεται το τετράγωνο ΕΖΗΘ .



α) Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ ως συνάρτηση του x και να βρείτε τις δυνατές τιμές του x.

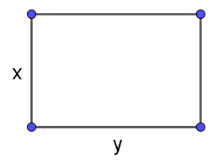
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ συναρτήσει της πλευράς x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x)=2(x-1)^2+2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.

γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2$. Μετατοπίζοντας την κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ΕΖΗΘ να γίνεται ελάχιστο.



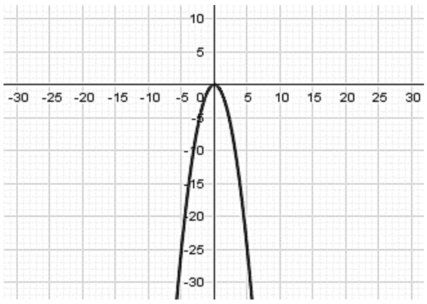
δ) Τι συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία Ε,Ζ,Η,Θ στην περίπτωση που το εμβαδόν του ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο.

20715. Με συρματόπλεγμα μήκους 20 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις x και y, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



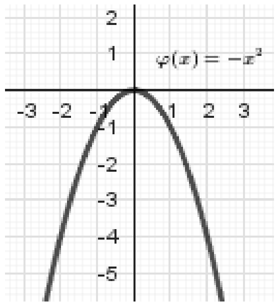
α) Να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς x.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x)=-(x-5)^2+25$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.



γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράστασης της συνάρτησης $g(x)=-x^2$. Μετατοπίζοντάς τη κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο.

δ) Για την τιμή του x που βρήκατε στο ερώτημα γ), να βρείτε την πλευρά y και να προσδιορίσετε το είδος του ορθογωνίου.



32677. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2,\ x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa,\ \kappa < 2.$ Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

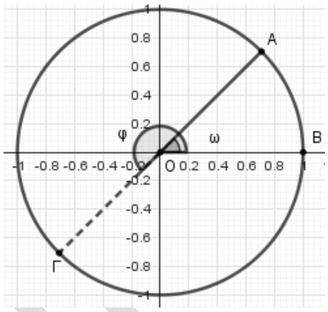
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

Θέμα 2ο

(4 ασκήσεις)

15079. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega} = B\hat{O}A$.



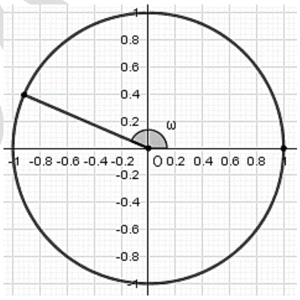
α) Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί $συνω = \frac{3}{5}$.

β) Η προέκταση του τμήματος ΑΟ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να εκφράσετε την γωνία $\hat{\varphi} = B\hat{O}\Gamma$ με την βοήθεια της γωνίας $\hat{\omega}$.

ii. Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το συνφ .

15191. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με ημω = 0,4.



α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το $ημ(-ω)$.

18868. α) Να αποδείξετε ότι $εφ500^\circ = εφ140^\circ$.

β) i. Να βρείτε το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $εφ500^o$.

ii. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = εφ500^0 \cdot ημ250^0 \cdot συν300^o$.

21161. Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ θεωρούμε ένα τόξο ΑΒ με μήκος ίσο με 2ρ.
α) Να βρείτε πόσα ακτίνια είναι η αντίστοιχη στο τόξο ΑΒ, επίκεντρη γωνία ω.
β) Αν ω=2 ακτίνια, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω.

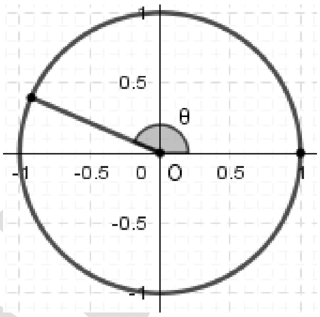
Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Θέμα 2ο

(8 ασκήσεις)

15046. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\text{συν}A = -\dfrac{3}{5}$.

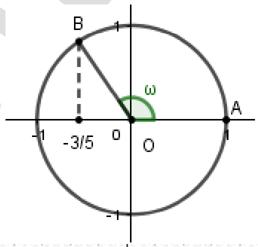
α) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.
β) Να βρείτε το $\text{ημ}A$.



15060. Στον τριγωνομετρικό κύκλο του σχήματος θεωρούμε το σημείο $M\left(x, \dfrac{1}{2}\right)$ και τη γωνία θ με $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ η οποία έχει αρχική πλευρά την ΟΑ και τελική την ΟΜ.

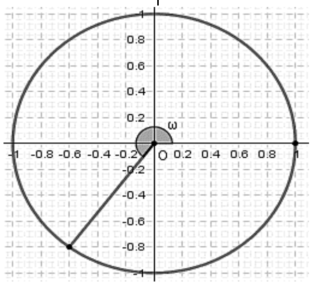
α) Να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $\text{ημ}\theta = \dfrac{1}{2}$.

β) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας θ.
γ) Να βρείτε τη γωνία θ.



15185. α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του διπλανού σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

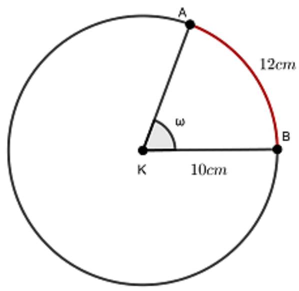
β) Αν $\text{συν}\omega = -\dfrac{3}{5}$, να βρείτε το ημω.



15192. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.

α) Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί $\text{συν}\omega = -\dfrac{3}{5}$.

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς
i. ημω .
ii. εφω



15814. Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα
10cm . Επίσης δίνεται το τόξο ΑΒ με μήκος 12cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω.
α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι 1, 2 rad .
ii. Με χρήση του αι) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία.

β) Αν $\text{συν}\omega = \dfrac{9}{25}$, να βρείτε το ημω . (Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$)

16000. α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $\text{ημ}\theta = \dfrac{1}{2}$ και $\text{συν}\theta = \dfrac{1}{2}$.

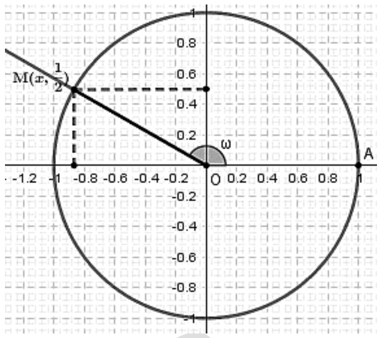
β) Έστω θ μια γωνία με $\theta \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ για την οποία ισχύει $\text{συν}\theta = \dfrac{1}{2}$. Να βρείτε το $\text{ημ}\theta$.

20817. Δίνεται γωνία ω, με $\pi < \omega < \dfrac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει $\text{συν}\omega = -\dfrac{4}{5}$.

α) Να δείξετε ότι $\text{ημ}\omega = -\dfrac{3}{5}$.

β) Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\dfrac{\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega}{1+\varepsilon\varphi\omega}$.

20824. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{x}=\omega$, $\dfrac{\pi}{2}<\omega<\pi$ και το σημείο $\mathrm{M}\left(\mathrm{x},\dfrac{1}{2}\right)$.



α) Να βρείτε το $\eta\mu\omega$. Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω ισούται η τετμημένη x του σημείου M;

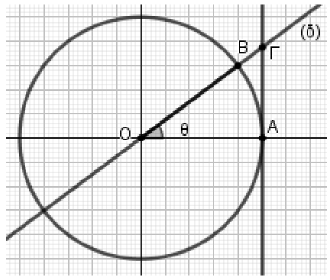
β) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Θέμα 2ο

(13 ασκήσεις)

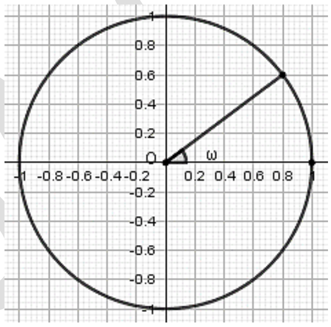
15092.Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Η τελική πλευρά ΟΒ της θετικής γωνίας $\mathrm{A\hat{O}B}=\hat{\theta}$,αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ.



Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta=\frac{3}{5}$.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό συνθ και στη συνέχεια τον αριθμό εφθ.
β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

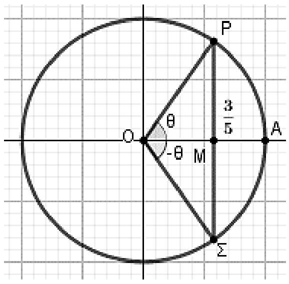
15193.Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\sigma\upsilon\nu\omega=0{,}8$.



α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα $[0,\ 2\pi]$, των οποίων το συνημίτονο είναι $-0{,}8$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία $\hat{\omega}$.

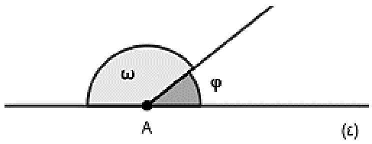
15266.Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-\theta$.



α) Να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{3}{5}$

β) Να βρείτε το ημθ.
γ) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας –θ.

15652.Δίνεται $\eta\mu\varphi=\frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του διπλανού σχήματος.



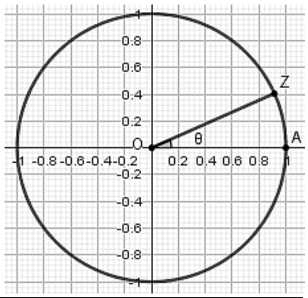
α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ.
β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας ω του σχήματος.

15999.Δίνεται η παράσταση $A=2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\eta\mu(-\theta)$.

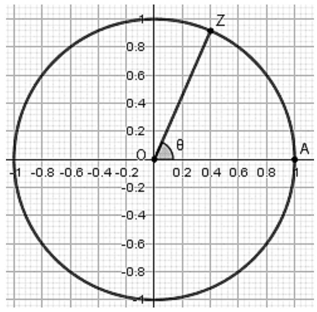
α) Να αποδείξετε ότι $A=\eta\mu\theta$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης Α, όταν $\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{12}{13}$.

17933.Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\mathrm{A\hat{O}Z}=\theta$.



α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi+\theta$ και $4\pi-\theta$.
β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί ημθ = 0, 4 .
ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu(3\pi+\theta)$ και $\eta\mu(4\pi-\theta)$.



17936. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $A\hat{O}Z = \theta$.

α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $\frac{\pi}{2} + \theta$.

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί συνθ = 0, 4 .
ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\sigma\upsilon\nu\left(3\pi + \theta\right)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$.

18229. Έστω θ μια γωνία για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{2}{3}$ και $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

α) Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

β) Αν $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

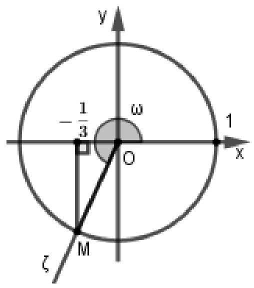
$$A = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \theta\right)\sigma\upsilon\nu(-\theta) - \eta\mu\left(\pi - \theta\right)\eta\mu(-\theta).$$

20761. Δίνεται γωνία ω η οποία είναι ίση με -1125^0.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω ισούται με $\frac{-25\pi}{4}$ ακτίνια (rad).

β) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

20942. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται γωνία $x\hat{O}\zeta = \omega$ με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$.



α) Να αιτιολογήσετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{3}$.

β) Να υπολογίσετε το ημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας ω.
γ) Να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $\pi - \omega$.

21237. Δίνεται ότι $\eta\mu\theta = \dfrac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}}$.

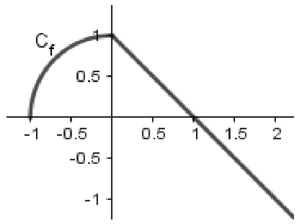
α) Να δείξετε ότι: **i.** $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **ii.** $\eta\mu\theta = \sqrt{3} - 1$

β) Αν για την γωνία θ έχουμε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\theta$.

22002. Δίνεται ότι $\eta\mu 18^o = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) $\sigma\upsilon\nu 72^o$ **β)** $\sigma\upsilon\nu 108^o$ **γ)** $\eta\mu 162^o$

Θέμα 4ο



18231. Έστω $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(-\frac{3}{5}\right)$, $f\left(-\frac{5}{9}\right)$.

γ) Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & x>0\end{cases}$, να βρείτε τους αριθμούς $f(\sigma\upsilon\nu 120^{o})$, $f(\eta\mu 120^{o})$.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x-2)$, $x\ge 1$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 2ο

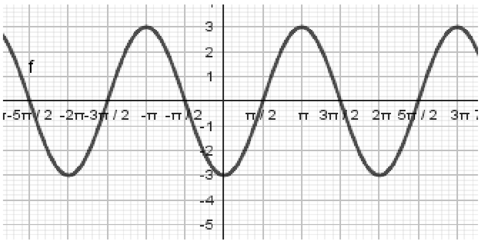
(24 ασκήσεις)

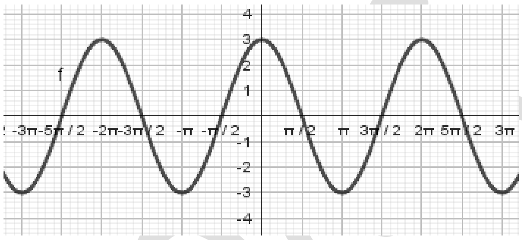
15009.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3συνx,\ x \in \mathbb{R}$.

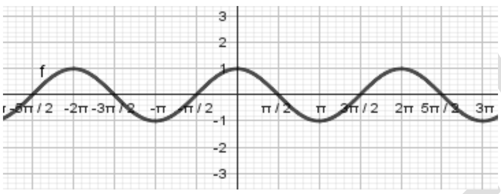
α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

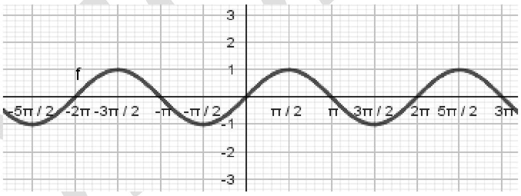
β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f, να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x) = -3συνx$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή
σας.

Α. 

Β. 

Γ. 

Δ. 

15091.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2} \cdot συνx,\ x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

ii. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμής της.

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(2025π)$.

15172.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4ημ(11π - x),\ x \in \mathbb{R}$.

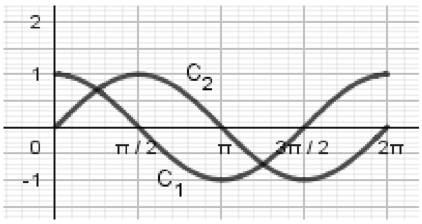
α) Να δείξετε ότι:

i. $ημ(11π - x) = ημx,\ x \in \mathbb{R}$.

ii. $f(x) = 4ημx,\ x \in \mathbb{R}$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4ημx$ όταν $x \in [0, 2π]$.

15644.Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 για $x \in [0, 2π]$.

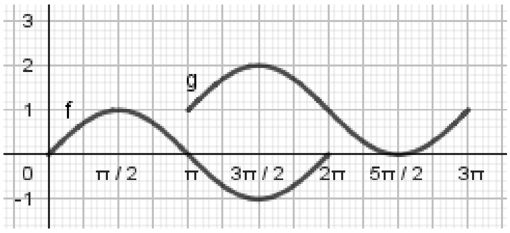


α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = συνx$ και $g(x) = ημx$ για $x \in [0, 2π]$ ποια από τις C_1, C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = συνx$ και ποια της $g(x) = ημx$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $ημx = συνx$ στο διάστημα $[0, 2π]$.

15788. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$ στο διάστημα [0, 2π] και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις.



Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:
α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά.
β) i. τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g .
ii. τον τύπο της g .

15809. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu 2x,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g .
β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	π/4	π/2	3π/4	π
2x					
f(x)=ημ2x					

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μίας περιόδου.

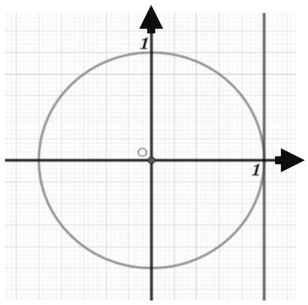
15810. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\sigma\upsilon\nu 2x,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .
β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	π/4	π/2	3π/4	π
2x					
f(x)=συν2x					

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g σε διάστημα μίας περιόδου.

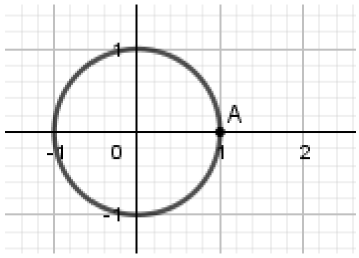
16131. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\varepsilon\varphi x\ ,\ x\in\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}\ \text{όπου}\ k\in\mathbb{Z}\ .$$



α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$ στο διάστημα $(0,2\pi)$.
β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το διπλανό σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.

17793. Στον τριγωνομετρικό κύκλο έχει σημειωθεί το σημείο Α.



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλα σας και να τοποθετήσετε κατά προσέγγιση στον τριγωνομετρικό κύκλο σημεία B,Γ,Δ ώστε να δημιουργηθούν τόξα $AB=1\text{rad}$, $A\Gamma=2\text{rad}$ και $A\Delta=4\text{rad}$.
β) Για κάθε ένα τόξο του α) ερωτήματος να αποφανθείτε αν το συνημίτονο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

20660. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu(180^\circ-x)+\sigma\upsilon\nu(90^\circ-x),\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=2\eta\mu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
β) i. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \le x \le 2\pi$.

20807. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi + x) + \eta\mu(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

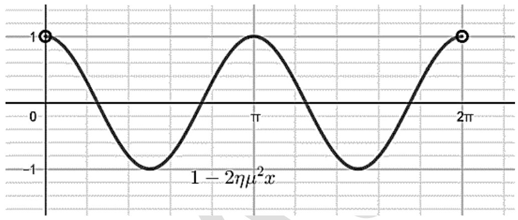
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο αυτής.

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	π/2	π	3π/2	2π
$f(x) = -2\eta\mu x$					

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0 \le x \le 2\pi$.

20867.Δίνεται η παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x$.



α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 0$.

β) Να δείξετε ότι $A = 1 - 2\eta\mu^2 x$.

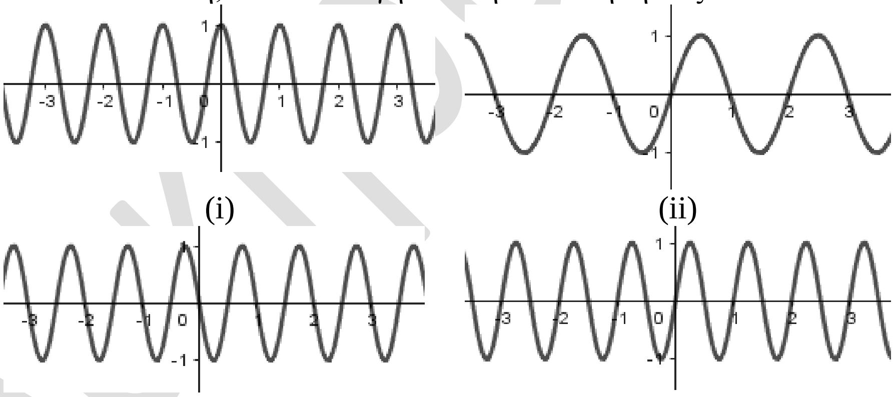
γ) Με χρήση της παρακάτω γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1 - 2\eta\mu^2 x$ και του ερωτήματος β), να λύσετε την εξίσωση $A = 1$, για $0 < x < 2\pi$.

22003.Δίδεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu(2\pi x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο T = 1.

β) Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

γ) Μία από τις παρακάτω τέσσερεις καμπύλες αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Ποια είναι αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



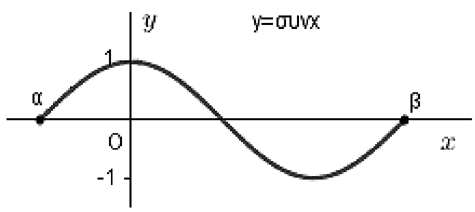
(i) (ii) (iii) (iv)

21235.Δίνεται η παράσταση $A = \dfrac{\eta\mu(180^\circ - 20^\circ)\cdot\sigma\upsilon\nu(-3x)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - 20^\circ)}$.

α) Να δείξετε ότι

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή και την περίοδο της συνάρτησης

22007.Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης συνx.



α) Να βρείτε τα α και β.

β) Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετατοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπέσει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ημx ;

31568. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης f;
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

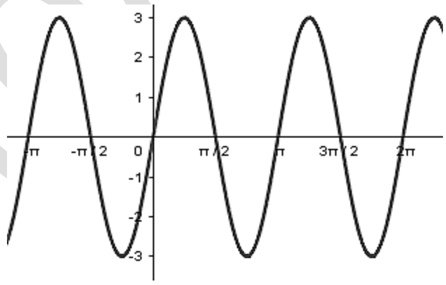
31569. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3\sigma\upsilon\nu 2x$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.
β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$2x$					
$\sigma\upsilon\nu 2x$					
$f(x)=-3\sigma\upsilon\nu 2x$					

Θέμα 4ο

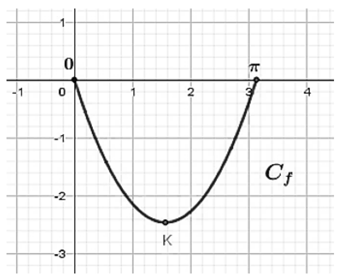
15062. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu(\alpha x), x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\rho>0$.



α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.
β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ.
Έστω ρ = 3 και α = 2. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=x^4-2x^2+5,\ x\in\mathbb{R}$.
γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.
δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

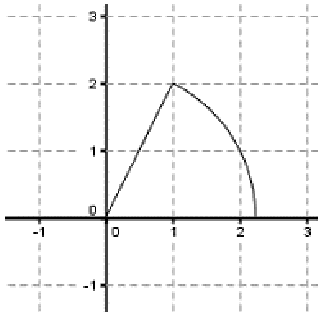
15095. Οι εξισώσεις των γραμμών που αποτελούν την περίμετρο μιας επίπεδης μεμβράνης όπως φαίνεται κάτω από ένα μικροσκόπιο, είναι: $x=0$, $y=x^2-\pi x$, $y=\frac{1}{2}+\eta\mu x$ και $x=3$.

Η μεμβράνη πρόκειται να καλυφθεί με ένα γυάλινο ορθογώνιο πλακίδιο.
α) i. Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-\pi x,\quad x\in[0,\pi]$ είναι το τμήμα της παραβολής που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $K\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi^2}{4}\right)$.



Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{2}+\eta\mu x$, $x\in[0,\pi]$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.
i. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα ακρότατα των δύο συναρτήσεων και τα διαστήματα μονοτονίας τους.
β) Να βρείτε την μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.
γ) Να βρείτε τις ελάχιστες διαστάσεις του ορθογώνιου πλακιδίου.

15689.Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\sqrt{5},\ \sqrt{5}]$. Στο διπλανό σχήμα δίνεται, για τις μη αρνητικές τιμές του x, η γραφική της παράσταση. Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, τότε:



α) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για τις αρνητικές τιμές του x.
β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της, την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν οι ακρότατες τιμές της;
γ) Έστω θ ένας αριθμός με $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:
i. $\eta\mu\theta$ και $\sigma\upsilon\nu\theta$. **ii.** $f(\eta\mu\theta)$ και $f(\sigma\upsilon\nu\theta)$

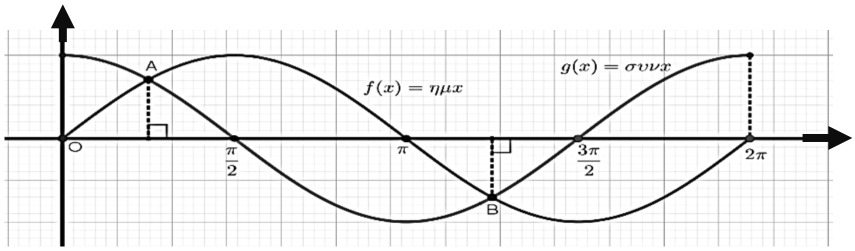
15992.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho\eta\mu(\alpha x), g(x) = \eta\mu(\omega x)$ όπου $\omega, \rho > 0$.
α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω, αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι- 2 και η περίοδος της g είναι π. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
β) i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu x,\ x \in [0, \pi]$ και $g(x) = \eta\mu(2x),\ x \in [0, \pi]$.
ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\frac{10\pi}{9}$.

18234. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - 1,\ x \in [0,\ 2\pi]$.
α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

20870.Το βάθος y, σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι $5{,}8$ μέτρα και συμβαίνει στις $3:00$ π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι $2{,}6$ μέτρα και συμβαίνει στις $9:00$ π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y = \alpha\eta\mu(\omega t) + \beta$, με $\alpha, \omega, \beta > 0$ και $0 \le t \le 24$.
α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, ω και β.
β) Αν $\alpha = 1{,}6$, $\omega = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = 4{,}2$,
i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 1{,}6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) + 4{,}2$, με $0 \le t \le 24$.
ii. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι;
iii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον $4{,}2$ μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

3ο Θέμα

15391. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

β) Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης g στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και την μονοτονία της συνάρτησης f στο $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

γ) Με την βοήθεια του ερωτήματος β) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να συγκρίνετε, με δικαιολόγηση, τους αριθμούς:

i. $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}$.

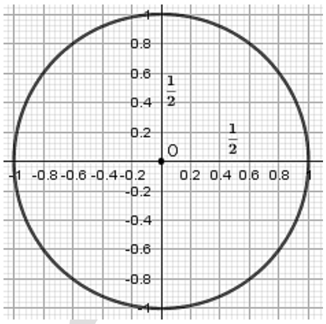
ii. $\eta\mu\frac{5\pi}{3}$ και $\eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Θέμα 2ο

(25 ασκήσεις)

14977.α) Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα [0,2π), με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox, οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.



β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ για $x \in \mathbb{R}$.

15036.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.
ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο $\mathbb{R}$.

15969.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) - 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$.

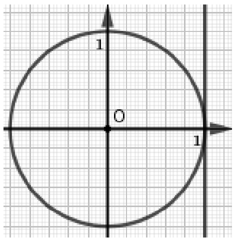
β) Να δείξετε ότι $f(x) = -4\sigma\upsilon\nu x$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

16131. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ όπου $k \in \mathbb{Z}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.



16298.Δίνεται γωνία ω, με $0 \leq \omega < 2\pi$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2}$ και $\eta\mu\omega > 0$.

α) Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και να βρείτε το μέτρο της.

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $\varphi \in \mathbb{R}$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{1}{2}$.

21995.Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

α) α = 1 **β)** α = 2

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

32675. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

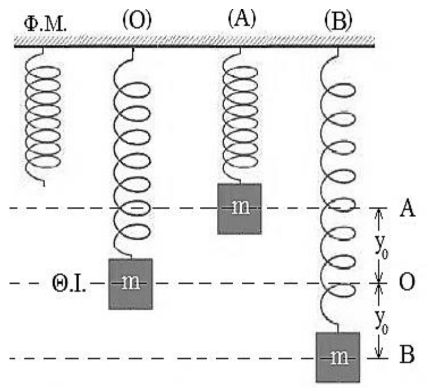
α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

Θέμα 4ο

14975. Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση Ο (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.
Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση Ο, εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_o$.
Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t)=1+0,2\cdot ημ\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

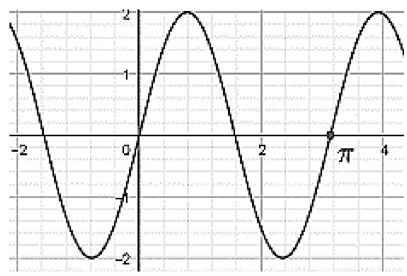


α) Να βρείτε το y_o και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β της ταλάντωσης.
β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.
γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t\in[0,4]$.
δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1,1 μέτρα, για $t\in[0,2]$.

15003. Δίνεται η συνάρτηση

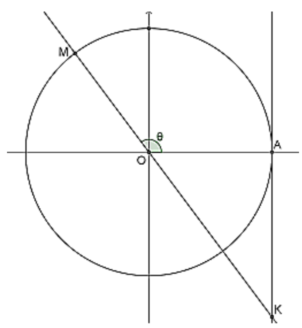
$$f(x)=ημαx\cdot\left[συν\left(\frac{\pi}{2}-αx\right)+2\right]-συναx\cdot συν(\pi-αx)-1,\ α\in\mathbb{R}.$$

α) i. Να δείξετε ότι $f(x)=2ημαx,\ x\in\mathbb{R}$.
ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Να δείξετε ότι α = 2.
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία ε: y = 1 για $x\in[0,\pi]$.



15014. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=αημβx$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.
α) Να βρείτε την τιμή του α, αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2 .
β) Αν α = 2 , να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία $f\left(\frac{\pi}{16}\right)=2$ είναι β = 8.
γ) Αν $α=2$ και $β=8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

15025. Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια γωνία $θ=A\hat{O}M$ με $ημθ=\frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ και την ευθεία x = 1 στο σημείο Κ.
α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συνθ, εφθ, σφθ.



β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ και Κ .

γ) Έστω μια γωνία $\varphi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\etaμ\varphi = \dfrac{3}{5}$ και συνθ < 0.

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία φ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο.

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί θ < φ .

15026.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2\etaμ\left(\dfrac{\pi x}{2}\right), x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x .

δ) Να αποδείξετε ότι $\left(f(x) - 1\right)^2 + \left(f(1 - x) - 1\right)^2 = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15049.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \etaμ\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \etaμ(\pi + x), x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = συνx - \etaμx$.

β) Να αποδείξετε ότι $-2 \le f(x) \le 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα y΄y.

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον x΄x .

15050. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2συνx, \ x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία y = 1.

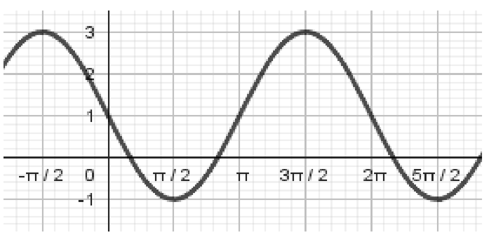
γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα [0, 2π].

15288.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\etaμ3x + 1, \ x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο Τ , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = α\etaμβx + γ$, με $α, β, γ \in \mathbb{R}, \ β > 0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, και γ.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Για $α = -2, \ β = 1$ και $γ = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$.

15347.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2συν^2(\pi - x) - 3\etaμ\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + α, \ α \in \mathbb{R}$.

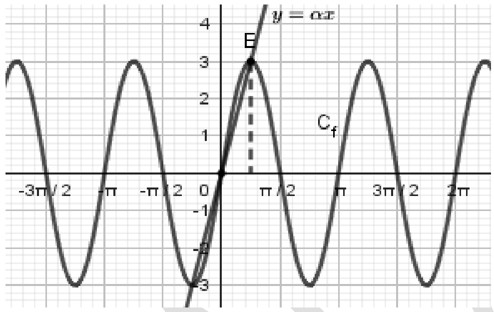
α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2συν^2x - 3συνx + α$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3},1\right)$.

δ) Για α =2 και $g(x)=2\eta\mu^2x+9\sigma\upsilon\nu x-9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

15287.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η ευθεία $y=\alpha x,\ \alpha\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x),\quad$ όπου $\omega>0,\ \rho>0$ και $x\in\mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,



α) Να δείξετε ότι ρ = 3 και ω = 2 .
β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α .
γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$.

15422.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2\eta\mu(\pi+2x),\ \alpha>0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=(\alpha+2)\eta\mu2x$.
β) i. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι α = 2.
ii. Να βρείτε την περίοδο της f.
γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.
δ) Αν $g(x)=5-\sigma\upsilon\nu^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g, όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα.

15821.α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x=0$.
β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x=3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\varepsilon\varphi x=\sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0,2\pi]$.
γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{3}\cdot\eta\mu x$ και $g(x)=3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0,2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).
δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x<3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.

18234. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu x-1,\ x\in[0,\ 2\pi]$.
α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha)=f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

20645.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ g(x)=\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$.

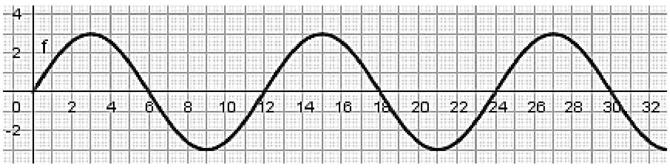
α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση
της f.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f\left(x\right)+1=0$.

20712. Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f, που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :



α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).

β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.

γ) τον τύπο της συνάρτησης f.

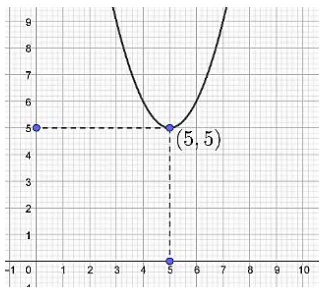
δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.

20747. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=3+\sqrt{3}\text{εφω}\cdot\text{ημ}x,\ x\in\mathbb{R}$. Αν για τη γωνία ω ισχύει η σχέση $-2\text{συν}^2\omega+\text{ημ}\omega=-1,\ \omega\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, τότε:

α) i. Να αποδείξετε ότι $\text{εφ}\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ii. Για $\text{εφ}\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

β) Δίνεται η συνάρτηση $g\left(x\right)=x^2-10x+30$, $x\in\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο παρακάτω σχήμα.



i. Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g.

ii. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κοινά σημεία. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

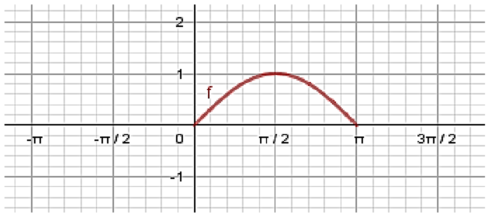
21244. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\frac{\alpha+1}{2}\text{συν}\left(\beta x\right)$, με $\alpha,\beta>0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=3$ και $\beta=4$.

β) Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\text{εφ}\left(\pi-x\right)\cdot\text{ημ}\left(2\pi+x\right)}{\text{συν}\left(3\pi-x\right)\cdot\text{σφ}\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\cdot\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$. Να δείξετε ότι $A=-1$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=2A$, στο διάστημα $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Θέμα 3ο



15789.Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\text{ημ}x$ με $x\in[0,\pi]$.

α) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και μετατοπίζοντας κατάλληλα την f να σχεδιάσετε την συνάρτηση $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

ii. Ποιος είναι ο τύπος της g και σε ποιο διάστημα ορίζεται;

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

Πολυώνυμα

Πολυώνυμα (3 ασκήσεις)

Θέμα 2ο

15113. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x)=-2x^3+4x^2+2(x^3-1)+9$ και $Q(x)=\alpha x^2+7,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Είναι το πολυώνυμο P(x) 3ου βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

20640. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-8x^2+7x-1$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.
β) Έστω Q(x) πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.
i. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_1(x)=P(x)+Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.
ii. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_2(x)=P(x)\cdot Q(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

21998. Δίδεται το πολυώνυμο $P(x)=(x-2)(x^6+1)$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου P(x); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου P(x).

Διαίρεση πολυωνύμων (7 ασκήσεις)

Θέμα 2ο

14981. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x+6$.

α) Να υπολογίσετε το $P(-2)$.
β) Να αποδείξετε ότι το $x+2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
γ) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

15012. Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-3$ έχει πηλίκο x^2+2 και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.
β) Να δείξετε ότι $P(x)=x^3-3x^2+2x-2$.
γ) Είναι το x = 3 ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$;Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

15096. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-3x+1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.
β) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x):(x^2+x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

15642. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2(x-1)^{20}-3(x-1)^{10}+5x^2-3x-2$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.
β) i. Να υπολογίσετε την τιμή P(0).
ii. Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

15643.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-3x^2-11x+6$.

α) i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-3$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $P(x):(x-3)$.

β) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-3)(2x-1)$.

20941.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x^2+x+3$.
α) Να δείξετε ότι το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.
β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης
γ) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+2)$.

21997.Δίδεται το πολυώνυμο $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$.
α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου P(x); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Ποιο είναι το πηλίκο π(x) και το υπόλοιπο υ(x) που προκύπτει από την διαίρεση P(x): (x − 2);

Πολυωνυμικές εξισώσεις - ανισώσεις

Θέμα 2ο

37 ασκήσεις

15040.Δίνεται η εξίσωση $x^3-7x+6=0$
α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.
β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3-7x+6):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3-7x+6=0$.

15047.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-x^3-5x^2+7x-2$.
α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.
β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

15175.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2+x-1$.
α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.
β) Να αποδείξετε ότι $P(x)=(x-1)(x^2+1)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

15176.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2+3x-2$.
α) Να αποδείξετε ότι το $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.
β) Αν $P(x)=(x-1)(x^2-x+2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x)>0$.

15246.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2-x-1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

β) Αν $P(x)=(x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

15247.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

β) Αν $P(x)=(2x-1)(x^2+1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

15248. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x-1$ δίνει πηλίκο x^2-2 και υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

β) Αν $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

15618.α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

15653.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2+2x+2$.

α) i. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+1)$.

β) Αν $P(x)=(x-1)(x^2+2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

15654.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-7x+6$.

α) Να δείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

15674.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3-x^2-x+2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Αν $P(x)=(x-1)(3x^2+2x+1)+3$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<3$.

15695.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)+6=0$.

15989. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-2x+4$.

α) Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ακέραια ρίζα. Να προσδιορίσετε τη μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(x)$ και να το γράψετε ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

17241.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x+2$.

α) i. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$.

ii. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x+1)$.

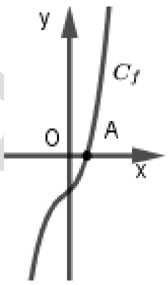
β) Αν $P(x)=(x+1)(x^2-x+2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

18583.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2-8x+4$.

α) i. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

β) Αν $P(x)=(2x-1)(x^2-4)$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.



20856. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

β) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

i. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ρίζα.

ii. Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο (0,1).

18230.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-8x-4$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x-2)$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

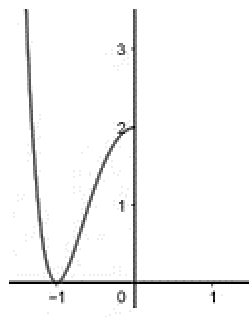
Θέμα 4ο

14955.Η μέση θερμοκρασία Τ (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x)=x^3-10x^2+31x-30$.

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν ^oC.

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με α < β < γ ώστε να ισχύει $T(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία Τ είναι συνεχώς κάτω από μηδέν ^oC .Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;



15005.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^6-3x^2+2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x′x.

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x\le 0$. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για x > 0.

δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

15066.Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=2x^4-5x^3+4x^2-5x+2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

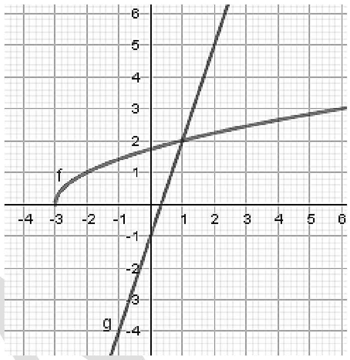
ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

γ) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

δ) Να λύσετε την ανίσωση P(x) < 0.

15037.Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{x+3}$ και $g(x)=3x-1$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g.

β) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = g(x).

γ) i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση f(x) < g(x).

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος.

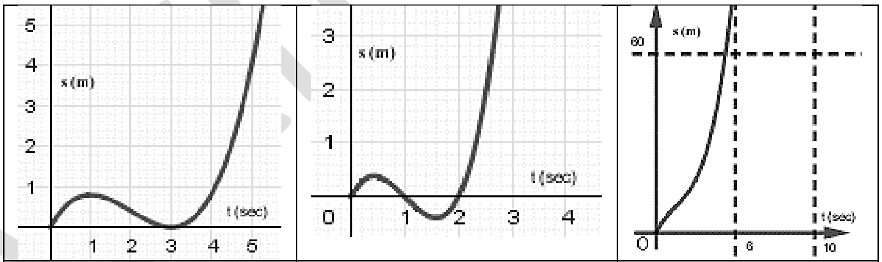
15094.Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t)=2t^3-6t^2+10t$.

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές t = 0 και t = 2.)

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



(I) (II) (III)

15174.Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^4+x^3+\alpha x-4$ και $\delta(x)=x^2-3x+2$.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x)=24x-24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.

β) Για α = 2,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα x΄x με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

15250. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta$ το οποίο διαιρούμενο με το x^2-4 δίνει υπόλοιπο $4x+1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-4)$.

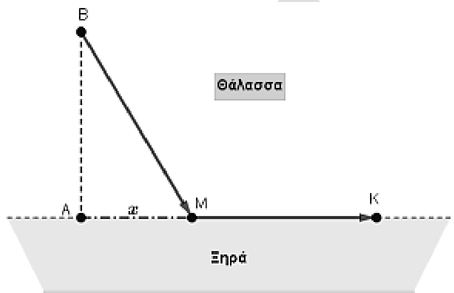
β) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

γ) Έστω $\alpha=4$ και $\beta=5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$ είναι το $\pi(x)=x^3-1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$.

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x)<4x+1$.

15436. Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο Β σε απόσταση 2 km από το κοντινότερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο Κ της ακτής, το οποίο απέχει 4km από το Α. Η διαδρομή που κάνει είναι η ΒΜ κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα 3km/h και η ΜΚ τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα 5km/h. Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος που διανύεται, της ταχύτητας και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης , είναι $\upsilon=\frac{s}{t}\Leftrightarrow t=\frac{s}{\upsilon}$.



Αν το σημείο Μ απέχει από το Α απόσταση x km, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM=\sqrt{4+x^2}$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η: $t(x)=\frac{\sqrt{4+x^2}}{3}+\frac{4-x}{5},\ x\in[0,4]$.

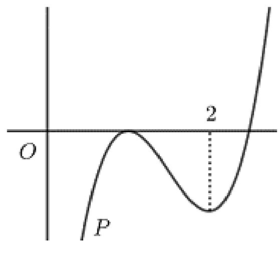
γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

15431.α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x-5$, με $x\in\mathbb{R}$.

i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$ είναι – 1,να δείξετε ότι: $\begin{cases}2\alpha+\beta=-6\\ \text{και}\\ \alpha+\beta=3\end{cases}$.

ii. Να δείξετε ότι α = −9 και β = 12.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)=2x^3-9x^2+12x-5$ είναι κάτω από τον άξονα x΄x.



γ) Αν η γραφική παράσταση της P(x) είναι η διπλανή, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

15677. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-2x^3-x^2+\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τίς τιμές των α, β, αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-2x+1$.

β) Για $\alpha=4,\ \beta=-2$

i. Να κάνετε τη διαίρεσης $P(x):(x^2+5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. Αν $P(x)=(x^2+5)(x^2-2x-6)+14x+28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=14(x+2)$.

15960. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+\kappa x-1,\ \kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ για την οποία $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

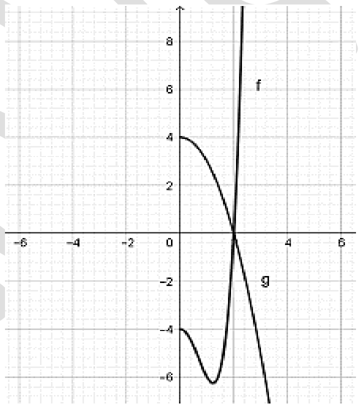
β) Για κ = 0,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$.

ii. να δείξετε ότι $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii. να βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

15790. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^4-3x^2-4$ και $g(x)=-x^2+4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



α) Να δείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ και $g(-x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

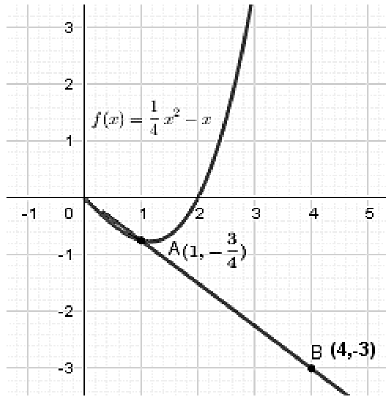
β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παρατάσεων των συναρτήσεων f και g.
Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να λύσετε, αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x)=g(x)$

ii. την ανίσωση $f(x)<g(x)$.

17919. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x,\ x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $B(4,-3)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

β) i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$.

γ) Αν η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $y=-\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f.

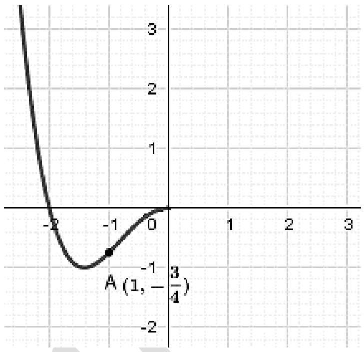
17943. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E=60m^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 2cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $x^3+x^2-3600=0$.

β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

17925.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f\left(x\right)=\frac{1}{4}x^4+\alpha x^2,\ x\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R}$ και το σημείο $A\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$ αυτής.



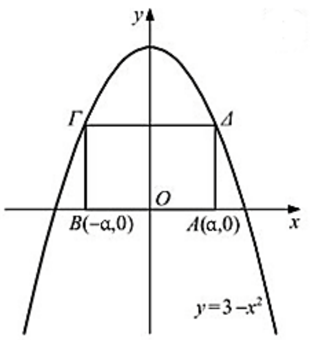
α) Να δείξετε ότι $\alpha=-1$.

β) Για $\alpha=-1$, i. Να αποδείξετε ότι $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x>0$.

γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f.

18221. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η παραβολή $y=3-x^2$ και τα σημεία της Γ,Δ. Δίνεται ακόμα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$.



α) Αν Ε είναι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

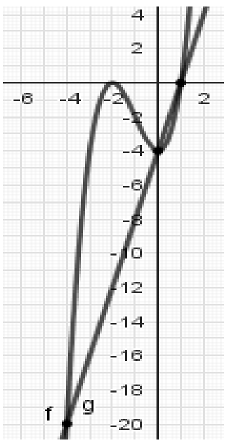
i. να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ είναι $E=f\left(\alpha\right)=-2\alpha^3+6\alpha$ τετραγωνικές μονάδες.

ii. να βρεθεί το εμβαδό Ε στη θέση $\alpha=1$.

iii. **β)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδό Ε δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες.

γ) Να βρεθεί η θέση του α, ώστε το εμβαδό Ε να πάρει τη μέγιστη τιμή του.

18696.Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f\left(x\right)=x^3+3x^2-4$ και $g\left(x\right)=4x-4$ με $x\in\mathbb{R}$.



α) Από τη γραφική παράσταση της f, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

β) Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά την εξίσωση $f\left(x\right)=g\left(x\right)$.

γ) Να βρείτε αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

21155. Στον πίνακα μιας σχολικής τάξης είναι γραμμένο το πολυώνυμο $P\left(x\right)=x^3+\alpha x^2+bx+c$, όπου οι συντελεστές α, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί. Δύο μαθητές, ο Α και ο Β, παίζουν ένα παιχνίδι, επιλέγοντας τιμές για τους συντελεστές ως εξής: πρώτα ο Α επιλέγει τιμή για κάποιον συντελεστή, μετά ο Β επιλέγει τιμή για έναν από τους δύο εναπομείναντες συντελεστές και τέλος ο Α επιλέγει τιμή για τον συντελεστή που έμεινε. Προσπαθούν να επιλέξουν τους α, b, c ώστε το $P\left(x\right)$ να ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη συνθήκη.

α) Έστω ότι ο μαθητής Α επιλέγει $\alpha=2$, μετά ο Β επιλέγει $b=1$ και τέλος ο Α επιλέγει πάλι $c=2$. Να αποδείξετε ότι το $P\left(x\right)$ θα έχει τότε ως μοναδική ρίζα τον αριθμό -2.

β) Ο μαθητής Α επιλέγει $\alpha = -1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$.

γ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c=1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει σίγουρα ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

δ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 2022$. Να αποδείξετε ότι όπως και να επιλεγούν μετά οι συντελεστές α και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 13.

22013. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο P(x) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

β) Να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους ώστε: $x^4 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1)\cdot(x^2 + \beta x + 1)$.

γ) Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση: «Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες». Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη. Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

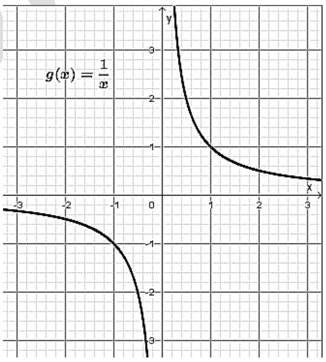
20859. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ) i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

ii. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι η παρακάτω, να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| = 1$.

37475. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

γ) $\dfrac{1}{2} < \text{συν}\theta < 1$ για κάθε γωνία $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

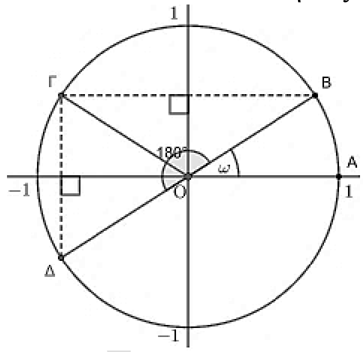
δ) $P(\text{συν}\theta) < 0$ για κάθε γωνία $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Θέμα 4ο

12 ασκήσεις

15187.Για τη γωνία ω του διπλανού σχήματος ισχύει
$5\eta\mu^3\omega-8\eta\mu^2\omega-7\eta\mu\omega+6=0$.



α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega=\dfrac{3}{5}$.

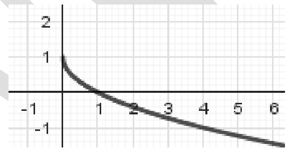
β) Να βρείτε:

i. την τιμή του συνω,

ii. τις συντεταγμένες των σημείων Β, Γ και Δ,

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών AOB, $AO\Gamma$ και $AO\Delta$.

15270.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$.



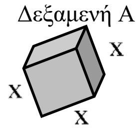
α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

β) Αν $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$ και $0<\alpha<\dfrac{1}{4}<\beta$, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $P=\big(2f(\alpha)-1\big)\big(2f(\beta)-1\big)$.

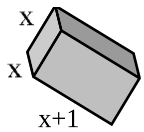
γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x)=1-\sqrt{x},\ x\ge 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y=2x$.

15377.Μία κυβική δεξαμενή Α έχει ακμή με μήκος x μέτρα.
Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή Β σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

Δεξαμενή Α



Δεξαμενή Β



α) Να βρείτε τη διαφορά Δ(x) των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x.

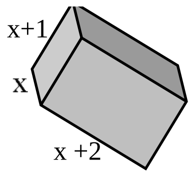
β) Αν ο όγκος της δεξαμενής Β είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:

i. Τις διαστάσεις των δεξαμενών Α και Β.

ii. Τη διαφορά των όγκων Δ(x).

γ) Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής Β κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα.
Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών Α, Β και Γ

Δεξαμενή Γ



17941. Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1) .

β) Να λύσετε την εξίσωση (1) για $\alpha=0$.

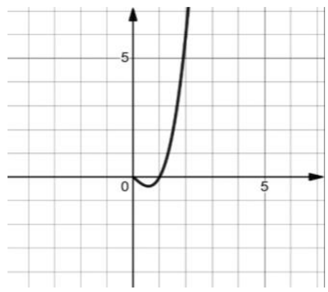
γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}$ είναι άρτια.

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) Για $\alpha=2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.

ii) Για $\alpha\ne 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho\in[-2,2]$ τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$.

18111.Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, & \text{όταν } x\geq 0\\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{όταν } x<0\end{cases}$ και $h(x)=x^3-x,\ x\in\mathbb{R}$.



α) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.
ii. Να συμπληρώσετε το παρακάτω σχήμα ώστε να παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h.
iii. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω σχήμα, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.
β) Αν $x\geq 0$ να αποδείξετε ότι: η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y=x$ αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

18713.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-\alpha x^2+2x+\beta$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν $P(1)=2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ ισούται με 15,
α) Να δείξετε ότι $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$.
β) i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x)=x^2+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^3 x+\sigma\upsilon\nu x=1-\frac{1}{2}\eta\mu^2 x,\ x\in(0,2\pi)$.

20647. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-\beta x+3,\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.
Αν επιπλέον $P(1)=0$, τότε:
β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-3$ και $\beta=\frac{21}{2}$.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\leq 0$.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sigma\upsilon\nu x)=0$.

20731. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+6x^2-7$.
α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο x-1 είναι παράγοντας του πολυωνύμου
β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$ σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.
γ) i. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.
ii. Αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$ να λύσετε την εξίσωση $(2\eta\mu x-1)^4+6(2\eta\mu x-1)^2-7=0$, για $x\in\mathbb{R}$.

20752.Δύο συμμαθητές ο Αλέξανδρος και ο Φίλιππος που κάθονται στο ίδιο θρανίο σχεδιάζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε μιλιμιτρέ χαρτί και στη συνέχεια προσπαθώντας να υπολογίσουν τις συντεταγμένες ενός δοσμένου σημείου Μ αυτού του κύκλου διαφωνούν στην απάντησή τους. Ο Αλέξανδρος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του σημείου Μ είναι $M(0,8\,,0,6)$ ενώ ο Φίλιππος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του είναι $M(1\,,1)$.
α) Ποιος από τους δύο έχει σίγουρα άδικο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

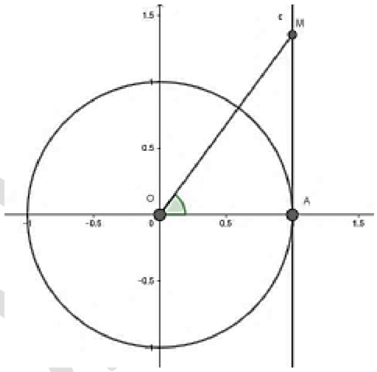
β) Αν υποθέσουμε ότι το σημείο του οποίου υπολογίστηκαν σωστά οι συντεταγμένες του είναι το $M(0,8\,,\,0,6)$

i. να αιτιολογήσετε ότι $\eta\mu\omega = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0,8$.

ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράσταση $A = \eta\mu(\pi-\omega) - 2\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-\omega) + \varepsilon\varphi(-\omega) + \sigma\varphi(\pi+\omega)$.

γ) Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu\omega\cdot x^3 - 10\eta\mu\omega\cdot x^2 + 5x - 3$, $x\in R$ όπου ω η γωνία που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

20759. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ που βλέπετε στο παρακάτω σχήμα είναι $(OAM) = \frac{4}{6}$ τετραγωνικές μονάδες. Η ευθεία ε είναι εφαπτόμενη στον κύκλο στο σημείο Α.



α) Να αποδείξετε ότι για τη γωνία $\omega = A\hat{O}M$ ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \frac{4}{3}$, $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\varphi\omega$ της γωνίας $\omega = A\hat{O}M$ αν ισχύει $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu^2 x - 5\eta\mu\omega\cdot\eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu\omega$ και του άξονα x΄x, όπου $\omega = A\hat{O}M$ η γωνία του προηγούμενου ερωτήματος και $x\in\mathbb{R}$.

20943. Δίνεται γωνία x με $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και οι παραστάσεις:

$$A = \eta\mu^2(\pi - x) + \eta\mu^2(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu^2(-x), \qquad B = \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu^2 x + 1$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση Β.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις Α και Β να είναι ίσες.

21240. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

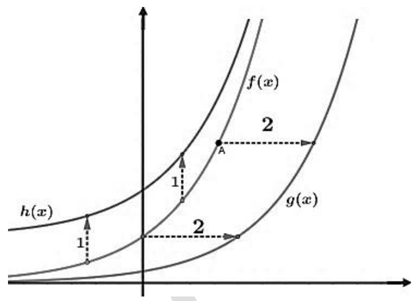
γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3 + 4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{x^2+1}\right) - 2 > 0$.

Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση

Εκθετική συνάρτηση (19 ασκήσεις)

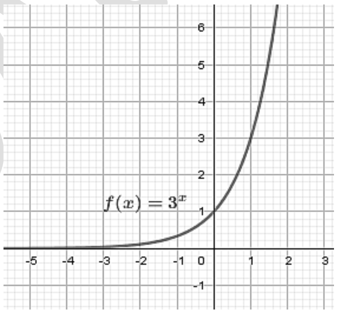
Θέμα 2ο

15393. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων g(x) και h(x), $x \in \mathbb{R}$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f(x).



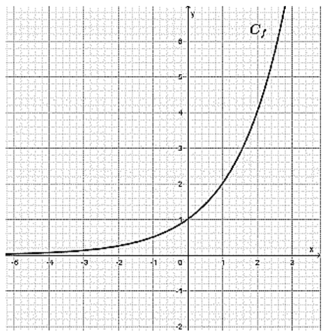
α) Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των g(x) και h(x) από την γραφική παράσταση της f(x) .
β) Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων g(x) και h(x).
γ) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16.

21451. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x, x \in \mathbb{R}$.



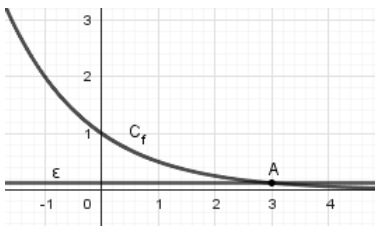
α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 3^x + 1$ και $h(x) = 3^x - 1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
β) Ποια είναι η ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και ποια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h ;

18866. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.



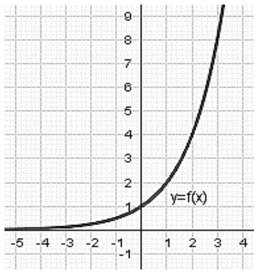
α) Να λύσετε την εξίσωση $2^x - 1 = 0$.
β) i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες συντεταγμένων.

20855. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



α) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$.
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f και της ευθείας $\varepsilon : y = \frac{1}{8}$.
β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία ε.
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την ευθεία ε.

21091.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης f, με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.



α) i. Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f .

x	-1	0	1	2	3
f(x)					

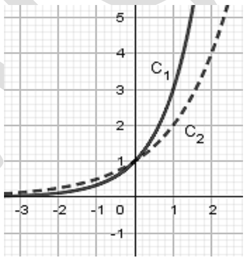
ii. Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 32$.

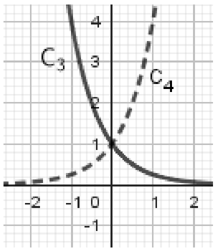
21163.Δίνεται το σημείο $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.

α) Αν η συνάρτηση f είναι εκθετική συνάρτηση $\alpha^x, 0 < \alpha < 1$, να βρείτε το α.

β) Για $\alpha = \frac{1}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha^{\sqrt{2}}, \alpha^{\sqrt{3}}$.

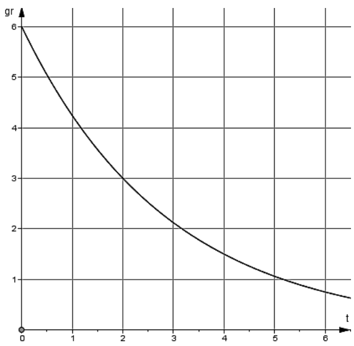


21993.α) Ποια από τις δύο καμπύλες C_1 (συνεχής γραμμή) και C_2 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^x$ και ποια της συνάρτησης $g(x) = 3^x$;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



β) Ποια από τις δύο καμπύλες C_3 (συνεχής γραμμή) και C_4 (διακεκομμένη γραμμή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = 4^x$ και ποια της συνάρτησης $\psi(x) = 4^{-x}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

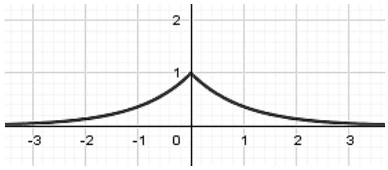
21994.Η καμπύλη που φαίνεται στο παρακάτω σύστημα αξόνων δείχνει την εκθετική απόσβεση ενός ραδιενεργού υλικού σε συνάρτηση με το χρόνο. Ειδικότερα, ο οριζόντιος άξονας δηλώνει τον χρόνο t σε ημέρες (π.χ. η $1^η$ ημέρα αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ μέχρι $t = 1$, η $2^η$ ημέρα στο χρονικό διάστημα από $t = 1$ μέχρι $t = 2$ κ.λπ.) και ο κατακόρυφος άξονας δηλώνει την ποσότητα του υλικού σε γραμμάρια (gr).



α) Πόσα γραμμάρια ήταν η αρχική ($t = 0$) ποσότητα του ραδιενεργού υλικού;
β) Πόση είναι η ημιζωή (ή χρόνος υποδιπλασιασμού) του ραδιενεργού υλικού;
γ) Κατά τη διάρκεια ποιας ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από 1gr;
Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 4ο

15269. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f.

A. $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ e^{-x}, & x\geq 0 \end{cases}$ B. $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<0 \\ e^{x}, & x\geq 0 \end{cases}$

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$ είναι το σημείο (0, 1).

18693. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\left(\dfrac{2-\lambda}{4}\right)^x$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η f είναι εκθετική συνάρτηση.

β) Για ποιες τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα;

γ) Για $\lambda=0$

i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(x+1)=6$.

20642. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη και περιττή συνάρτηση και $g(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο $A(-1,\ 2)$, τότε:

α) Να βρείτε το $f(1)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0,\ 0)$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f και να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το O.

δ) Έστω $f(x)=-2x^3$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε 2 μονάδες αριστερά και μια μονάδα πάνω.

20689. α) Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{x-2}{x+1}>0$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη.

ii. Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;

iii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

20854. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{|x|},\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για x = 0 και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της.

γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f.

δ) Αν $g\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

21444. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους $f\left(x\right)=4^{x}$ και $g\left(x\right)=2^{x}-\frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο Α , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο Α .

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

21448. Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή t = 0, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του f (t) (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση $f\left(t\right)=q_0\cdot\alpha^{t},\ t\geq 0$, όπου οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει 0 < α< 1 .

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{1}{2}$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f , εκφράζοντας τις τιμές f (t) ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0 .

t	0	1	2	3	4	5	6
f(t)	q_0	$q_0/2$					

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha=\frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $\left[0,6\right]$.

21471. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\alpha\cdot 2^{x}+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1,3) και Β(2,13).

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

Αν α = 5 και β = - 7

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα y΄y .

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x\right)>4^{x}-3$.

21677. Είναι γνωστό ότι όταν κάποιος μελετάει για να συμμετάσχει σε κάποιες εξετάσεις, με την πάροδο του χρόνου δεν συγκρατεί στη μνήμη του το σύνολο όσων μελέτησε. Ένα μοντέλο που δείχνει το ποσοστό $P(t)$ της γνώσης που παραμένει στην μνήμη του t εβδομάδες μετά το τέλος της μελέτης, είναι το μοντέλο Ebbinghaus και περιγράφεται από τον τύπο:

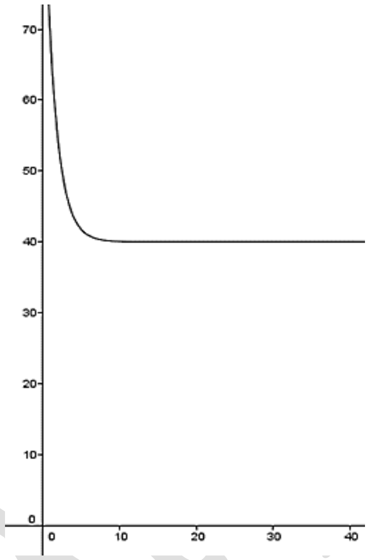
$P(t)=Q+(100-Q)e^{-ct},\ t\in[0,\,40]$.

όπου Q είναι το ποσοστό της γνώσης που θυμάται πάντα και c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το μάθημα. Αν $Q = 40$ και $c = 0,7$ τότε:

α) Τι δείχνει το $P(0)$ στα πλαίσιο του προβλήματος;

β) Μετά από πόσες εβδομάδες θα έχει παραμείνει στην μνήμη του το 50% της γνώσης που απέκτησε.

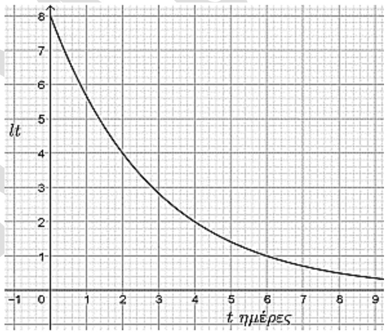
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Με βάση το σχήμα:



γ) Να εκτιμήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση, αν μετά από τρείς εβδομάδες θα θυμάται πάνω ή κάτω από το 50% του υλικού που μελέτησε. Η εκτίμησή σας συμφωνεί με το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος;

δ) Πως αιτιολογείται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης, για μεγάλες τιμές του t, φαίνεται να προσεγγίζει πάρα πολύ την ευθεία $y = 40$. Γιατί δεν μπορεί να «κατέβει» κάτω από την ευθεία αυτή; (Θεωρήστε: $\ln 6 = 1,79$)

21854. Ένα δοχείο περιέχει υγρό το οποίο εξατμίζεται. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η ποσότητα Q, σε λίτρα, του υγρού που έχει απομείνει στο δοχείο μετά από t ημέρες.



Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο μειώνεται εκθετικά και μετά από t ημέρες δίνεται από τη σχέση $Q(t) = Q_0 2^{-\frac{t}{c}}$, $c \in \mathbb{R}$, όπου Q_0 η αρχική ποσότητα του υγρού.

α) Με βάση το διάγραμμα:

i. να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος t σε ημέρες	0	2	4	6
Ποσότητα Q(t) του υγρού σε λίτρα.				

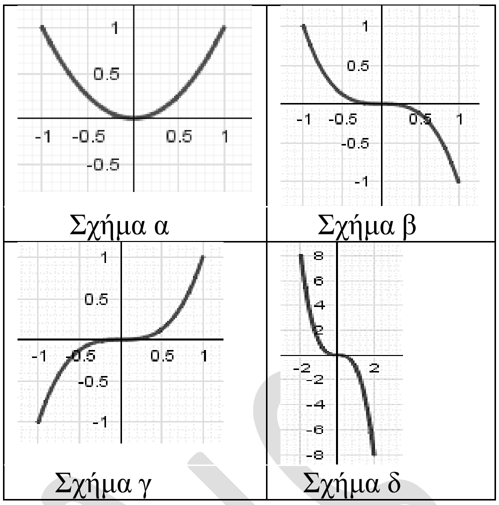
ii. να βρείτε την αρχική ποσότητα Q_0 του υγρού,

iii. να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα του υγρού που υπήρχε τη χρονική στιγμή t = 0 στο δοχείο.

β) Αν $Q_0 = 8$ και $Q(2) = 4$, να δείξετε ότι $c = 2$.

γ) Αν $Q(t) = 8 \cdot 2^{-\frac{t}{2}}$, να δείξετε ότι χρειάζεται να περάσουν δύο ημέρες για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα Q(t) του υγρού που υπάρχει στο δοχείο οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

Θέμα 3ο


Σχήμα α Σχήμα β Σχήμα γ Σχήμα δ

15023.Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-1,1\right]$, η οποία είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα.

α) Από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις μόνο μία μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της f. Να βρείτε ποια είναι αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g\left(x\right)=f\left(x\right)+2$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h\left(x\right)=f\left(x-1\right)$

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $s\left(x\right)=e^{x}-1$ και να αποδείξετε (αλγεβρικά ή γραφικά) ότι η εξίσωση $s\left(x\right)=f\left(x\right)$ έχει μοναδική λύση τη $x=0$.

Λογάριθμοι (24 ασκήσεις)

Θέμα 2ο

15687.Δίνεται η παράσταση $A=\log_4 3+\log_4 \alpha-\log_4 \beta$ όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $A=\log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$.

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha=16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης A.

15816.Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\ln 2,\ \beta=\ln 4,\ \gamma=\ln 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\beta=\alpha+\gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι $\beta+\gamma=5\alpha$.

15817.Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\ln 2$ και $\beta=\ln 3$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0<\alpha<\beta$.

β) Να αποδείξετε ότι $\beta-\alpha<1$.

Δίνεται $e\simeq 2,71$.

19903.Αν $\alpha=\log 100+\log 5+\log 2-\log 1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha=3$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $9\cdot 2^x=4\cdot \alpha^x$.

20663. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\log_2 8)\cdot x^3+\left(4\log_2 \sqrt{2}\right)\cdot x^2-(4\log_2 1)\cdot x+1990$.

α) Να αποδείξετε ότι $\log_2 8+2\log_2 \sqrt{2}-\log_2 1=4$.

β) Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

20710.Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\log 20$ και $\beta=\log 50$. Να αποδείξετε ότι

α) $\beta+\alpha=3$ **β)** $\ln(\beta+\alpha)>1$ **γ)** $10^\beta-10^\alpha=10\cdot(\beta+\alpha)$.

Δίνεται ότι $e\simeq 2,71$.

20711.Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\log 3$ και $\beta=\log 4$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0<\alpha<\beta$.

β) Να αποδείξετε ότι : **i.** $\beta+\alpha>1$. **ii.** $\ln\frac{\alpha}{\beta}<0$.

21676. Αν είναι γνωστό ότι $\ln 4=1,386$ και $\ln 5=1,609$ τότε:

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\ln\frac{e}{5}-\ln\frac{4}{e}$.

β) Με τη βοήθεια της ισότητας $80=5\cdot 4^2$ να αποδείξετε ότι $\ln 80=4,381$.

21858. Δίνεται η παράσταση $A=2\log 5+2\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A=2$.

β) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $e^\lambda=A$.

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι $\ln\lambda<0$.

Θέμα 4ο

15251. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-9x^2+(\alpha-2)x-6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.
α) Να βρείτε τον αριθμό α .
β) Για α =15
i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-3x+2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
ii. αν $P(x)=(x^2-3x+2)(2x-3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.
iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2)<0$.

15474. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=e^{\ln e}x^3+4x^2\ln\sqrt{e}+2$.
α) Να δείξετε ότι $P(x)=ex^3+2x^2+2$.
β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία ε: $y=ex+4$.
γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία ε: $y=ex+4$.
δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $P(e)-e^2-4$.

15591. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+5}\right)^x$.
α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.
β) Να βρείτε τις τιμές του , $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $\alpha\in\mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση: $f(x)+f(x+1)=14$.

15822. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+x$, $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha\neq 0$ το οποίο το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.
α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.
β) Να αποδείξετε ότι α = -1 και β = 0.
γ) Με α = - 1 και β = 0,
i. να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.
ii. να αποδείξετε ότι $P(\log\sqrt{10})>0$.

15823. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2-1$ δίνει πηλίκο $3x-2$ και υπόλοιπο 1.
α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=1$.
β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5)\neq 1$.
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

18110. α) i. Να λύσετε την εξίσωση $x(e^x-1)=0$.
ii. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x(e^x-1)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x(e^x-1)}$.

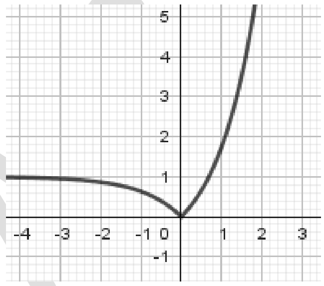
i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$.

iii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: « η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x(e^x-1)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της». Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

18235.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης

$f(x)=|e^x-1|,\ x\in\mathbb{R}$.



α) Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.

δ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y=\alpha$.

18429. Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ήχου είναι το ένα Watt ανά τετραγωνικό μέτρο $(1w/m^2)$. Στο ανθρώπινο αυτί, η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή είναι $10^{-12}\ w/m^2$. Για να μετρήσουμε την στάθμη της έντασης ενός ήχου, χρησιμοποιούμε την κλίμακα Decibel (Db). Το επίπεδο της στάθμης σε Db δίνεται από τη σχέση $D=10\cdot\log\left(\frac{I}{I_o}\right)$ όπου I_o η ελάχιστη αντιληπτή ένταση και Ι η ένταση του ήχου.

α) Να βρείτε το επίπεδο των Db που παράγει ένα μαχητικό αεροσκάφος, αν γνωρίζουμε ότι η ένταση του ήχου του είναι $100\ w/m^2$.

β) Να αποδείξετε ότι μια αύξηση του επιπέδου στάθμης οποιουδήποτε ήχου κατά 20 Db αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 100 φορές μεγαλύτερης.

γ) Το όριο πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω έντασης ήχου είναι 120 Db. Η έκθεση σε ήχους πάνω από 120 Db μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή κώφωση. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση ήχου στο όριο του πόνου για τον άνθρωπο;

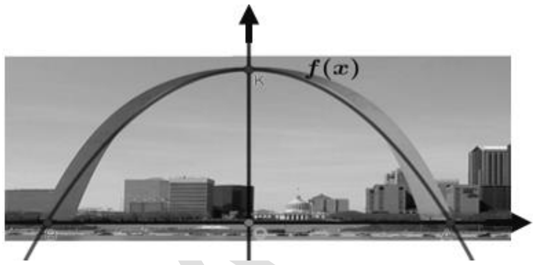
18434.Ο Νόμος των Bouguert-Lambert στη φωτομετρία, λέει ότι η ένταση Ι μιας ακτινοβολίας (ηλιακό φως, ακτίνες Χ, κ.λπ.) που εισχωρεί κατακόρυφα σε ένα διαφανές μέσο (νερό λιμνών, θαλάσσης, γυαλί, κ.λ.π.) μειώνεται εκθετικά, απορροφούμενη από το μέσο, συναρτήσει του βάθους (πάχους) h του μέσου, σύμφωνα με τη συνάρτηση $I=I_0\cdot e^{-\lambda h}$, όπου $\lambda>0$ σταθερά και I_0 η αρχική ένταση.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν.

β) Γνωρίζουμε ότι για καθαρό νερό θαλάσσης είναι $\lambda=1,4\,m^{-1}$ (το m παριστάνει μέτρα) και ότι μια συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής δεν μπορεί να υπάρξει, όταν η ένταση του ηλιακού φωτός γίνει μικρότερη ή ίση από το $\frac{1}{4}$ της αρχικής έντασης. Να βρείτε για ποιες τιμές του βάθους h συμβαίνει αυτό. (Δίνεται ότι $\ln 2 = 0,7$)

γ) Σε κάποιο άλλο διαφανές μέσο, γνωρίζουμε ότι σε βάθος 10m η ένταση μιας ακτινοβολίας μειώνεται
στο μισό της έντασης της αρχικής ακτινοβολίας. Να αποδείξτε ότι στην συγκεκριμένη κατάσταση ισχύει $I = I_o \cdot 2^{-\frac{h}{10}}$.

18437.Ένα από τα επιβλητικότερα μνημεία του κόσμου είναι η αψίδα Gateway Arch στην πόλη Saint-Louis των Η.Π.Α. Θεωρώντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, όπως στο παρακάτω σχήμα, η πρόσοψη της αψίδας προσεγγίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:



$f(x) = -192\left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}}\right) + 576$, με $f(x) \geq 0$, όπου οι αριθμοί $x, f(x)$ μετρούνται σε μέτρα (m).

(Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης λέγεται αλυσοειδής καμπύλη).

α) Να αποδείξετε ότι το μέγιστο ύψος ΟΚ της αψίδας είναι 192 m.

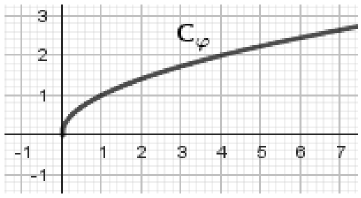
β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α στο οποίο η καμπύλη τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox. Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cong 0,96$.

γ) Αν γνωρίζουμε ότι τα σημεία Α και Β έχουν αντίθετες τετμημένες, να αποδείξετε ότι το πλάτος ΑΒ της αψίδας είναι ίσο με το μέγιστο ύψος της ΟΚ.

18863. Δίνονται οι συναρτήσεις: $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ και $g(x) = \frac{x+1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ.



i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g.

δ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\ln 10 - 1} > \frac{1+\ln 10}{3}$.

20657.Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, η θερμοκρασία θ, σε βαθμούς Κελσίου, ενός αντικειμένου μειώνεται με την πάροδο του χρόνου t, σε λεπτά, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{kt}$, όπου k μια σταθερά με $k < 0$, θ_0 η αρχική θερμοκρασία του αντικειμένου, ενώ T είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο τοποθετείται το αντικείμενο, με $\theta_0 > T$.

Ένα αντικείμενο έχει θερμανθεί στους $100\ ^{o}C$ και στη συνέχεια αφήνεται να κρυώσει σε ένα δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία $30^{o}C$. Γνωρίζουμε ότι 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι $80^{\circ}C$.

α) Να αποδείξετε ότι $k=-0,0672$.

β) Να αποδείξετε ότι $\theta(t)=30+70\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{t}{5}}$.

γ) Να βρείτε, με προσέγγιση εκατοστού, τη θερμοκρασία του αντικειμένου μετά από 1 ώρα και 40 λεπτά.

Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{5}{7}\right)=-0,336$ (προσεγγιστικά) και $\left(\frac{5}{7}\right)^{10}\cong 0,034$.

20669.α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2+1}-x>0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x)+g(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

20845.Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=e^{\kappa x}$, $\kappa\geq 0$.

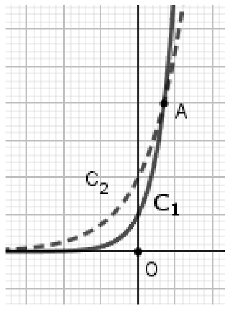
α) Να αποδείξετε ότι: $f(1)-f(0)\geq f(0)-f(-1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

β) Να αποδείξετε ότι αν $\kappa>0$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ) i.Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x}>2e^{x}$.

ii. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1,C_2 με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x)=2e^{x}$ και $k(x)=e^{2x}$.

Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου Α;



20847. Αν I είναι η ένταση του ήχου (σε W/m² - Watt ανά τετραγωνικό μέτρο), τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D (σε ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο: $D=10\cdot\log\left(10^{12}\cdot I\right)$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ηχοστάθμης.

Όριο ακοής	**0 ντεσιμπέλ**
Θρόισμα φύλλων	10 ντεσιμπέλ
Συνήθης ψίθυρος	20 ντεσιμπέλ
Αθόρυβο αυτοκίνητο	50 ντεσιμπέλ
Συνήθης ομιλία	65 ντεσιμπέλ
Κυκλοφοριακή κίνηση	80 ντεσιμπέλ
Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) σε απόσταση 3 μέτρων	90 ντεσιμπέλ
Όριο πόνου	120 ντεσιμπέλ
Αεριωθούμενο	140 ντεσιμπέλ

α) Να βρείτε την ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων.

β) Αν η ένταση του ήχου σε μία ροκ συναυλία είναι 1 W/m² να ελέγξετε αν η ηχοστάθμη στην οποία εκτίθεται το κοινό αγγίζει το όριο του πόνου.

γ) Αν διπλασιάσουμε την ένταση του ενισχυτή ενός στερεοφωνικού συστήματος, τότε να υπολογίσετε πόσα ντεσιμπέλ θα αυξηθεί η στάθμη του εξερχόμενου ήχου. (Δίνεται ότι $\log 2\approx 0,3$).

Λογαριθμική συνάρτηση (49 ασκήσεις)

Θέμα 2ο

15267.Δίνεται η εξίσωση $\log\left(x^2+1\right)=1+\log 3-\log 6$.

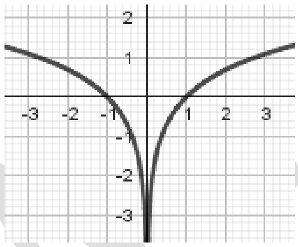
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log\left(x^2+1\right)=\log 5$.

β) Να λύσετε την εξίσωση.

15617.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-\ln|x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) i) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=\ln|x|$.



Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f, g(x)=\ln(x), x>0$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για $x=1$.

15675.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

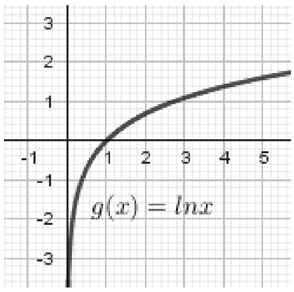
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

15808.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x .

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln x$.



Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g .

17318.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x^2-2x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$.

β) Να δείξετε ότι $\ln 3+3\ln 2-f(3)=\ln 4$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\ln 4$.

19908.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\frac{1-x}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

20635. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

20692. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x$, $x>0$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(100)$, $f\left(\sqrt{10}\right)$.

β) Για $x>1$, να επιλύσετε την εξίσωση $f(x+1)+f(x-1)=\log 10-\log 5$.

20725.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\log x$ και $g(x)=\log(x+2)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $f(x)=2$. **ii.** $g(x)=2f(x)$.

20727.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\log x$ και $g(x)=\ln(x-1)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $\log x=3$. **ii.** $\ln(x-1)=1$.

20729.Δίνετε η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x΄x.

γ) Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

1

20730.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(1-x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(1-x)=\ln\left(x^2+1\right)$.

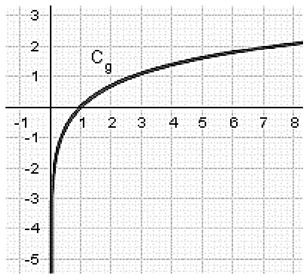
20851.Δίνονται οι παραστάσεις: $A=2\log 6-\log 12$ και $B=\log 5+\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A=\log 3$ και $B=1$.

β) Να αποδείξετε ότι $A<B$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\log x<1$.

20853.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-1)$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln x,\ \ x>0$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε το διάστημα, στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x .

21174. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση:

$\log(x+1)=-\log 2-\log(1-x)$ (1)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+1)=\log\frac{1}{2}-\log(1-x)$.

21449. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x΄x$ και $y΄y$.
γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y=\ln x$.

21450. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x^2+4)$ και $g(x)=\ln x+\ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

21472.α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1)=\ln(2x)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1)>\ln(2x)$.

21473.α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$$A=\ln x+\ln(x+6).$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x+\ln(x+6)=\ln 7$.

21675. Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1)=1-\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1-\log 2=\log 5$.

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

21952. Δίνεται η παράσταση $A=\ln\sqrt{e}+\log\sqrt[3]{100}$.
Να αποδείξετε ότι

α) $A=\dfrac{7}{6}$. **β)** $0<\ln A<1$. Δίνεται $e\simeq 2.71$.

21953. Δίνεται η παράσταση $A=e^{\ln 2}+10^{2\log\sqrt{5}}$. Να αποδείξετε ότι
α) $A=7$. **β)** $0<\log A<1$.

21954. Δίνεται η παράσταση $A=\ln(\ln e)+\log(\log 10^{10})$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $\log 10^{10}=10$ **ii.** $A=1$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $\log(x^2+1)=A$.

21956. Δίνεται η παράσταση $A=2\log 5+3\log 2-\log 20$.
α) Να αποδείξετε ότι $A=1$.
β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(e^x-1)=A$.

Θέμα 4ο

15015. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x=0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x>0$.

15021. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το O(0,0).

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2)+f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta)+f(\eta\mu(\pi+\theta))=0$, για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$.

15093. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(10^x-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)+x=\log(10^{2x}-10^x)$, $x>0$.

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y=-x$.

15679. Δίνεται η παράσταση $A=\ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$.

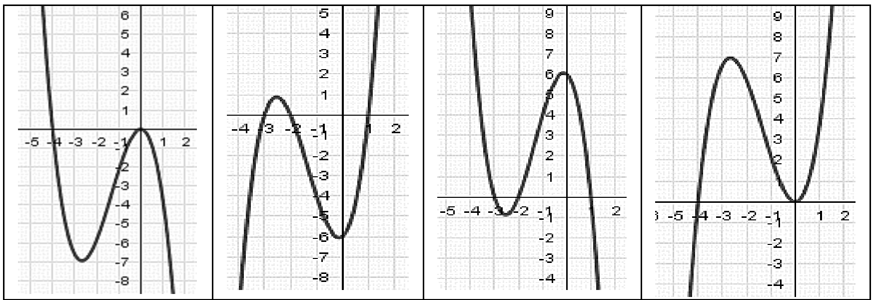
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A=-\ln 3$.

15678. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=-x^3-4x^2-x+6$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.



Σχήμα 1	Σχήμα 2	Σχήμα 3	Σχήμα 4

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωσή $P(x)=\ln x$ έχει μοναδική λύση την x =1.

15688.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x-1$.

γ) Να αποδείξετε ότι αν α>0, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y=x+\alpha$.

15690.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y .

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει $f(x)=\ln x$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$.

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία y = 2.

15694.Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m-M=5\log\left(\frac{d}{10}\right)$, (I) όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με 3,26 έτη φωτός $=30,9\cdot 10^{12}\,km$.

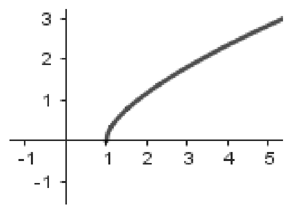
α) Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του;

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος m = 1,157 και βρίσκεται σε απόσταση d = 100 parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα;

γ) Να επιλύσετε την σχέση (I)ως προς d.

δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος 0,46 και απόλυτο μέγεθος − 5,14. Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}}\cong 131$.

16001.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x\ln x}$ και $g(x)=\sqrt{\ln x}$.



α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f.

γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y=1-x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1-x$.

18865. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f.

γ) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x)=\frac{1}{2}(x-1)\ln x$, $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου $A(1,0), B(x,0)$ και $\Gamma(x,\ln x)$.

20857.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)= x^3-\alpha x^2+7x-\beta,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x-3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι $\upsilon=-16$, τότε:

α) Να υπολογισθούν οι τιμές των α, β.

Αν είναι $\alpha=5,\ \ \beta=3$,

β) να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x)<0$.

δ) Αν $P(\ln\kappa)<0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού κ.

21445.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\frac{4^x-1}{2^x+5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\log 3-\log 7$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\log 3-\log 7$.

21446.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+x=3\ln 2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+x\geq 3\ln 2$.

21447.Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο $P(t)=200e^{ct}$,όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος (t = 0). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328. (Δίνεται ότι ln(1,64) ≅ 0,5 και ln10 ≅ 2,3)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

β) Να αποδείξετε ότι $c=\frac{1}{2}$.

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

21470.Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t)=Q_0e^{ct}$.Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το 1/3 της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α) Να δείξετε ότι $Q(t)=Q_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t = 0$).

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

21474.Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1ης και στο τέλος της 2ης εβδομάδας.

β) Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t) = V_0 \cdot \alpha^t$ όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α .

γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t) = 10 \cdot (0,85)^t$, να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής.

(Δίνεται ότι: $\log(0,5) = -0,3$ και $\log(0,85) = -0,07$).

21678.Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτή.

Αν Q_o είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_o e^{ct}$, όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

α) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t' = -\frac{\ln 2}{c}$.

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

β) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_o e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$

γ) Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακας -14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού.

21680. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x,\ x > 0$ και η ευθεία $\varepsilon : y = 2x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = \frac{1}{3} f(8)$.

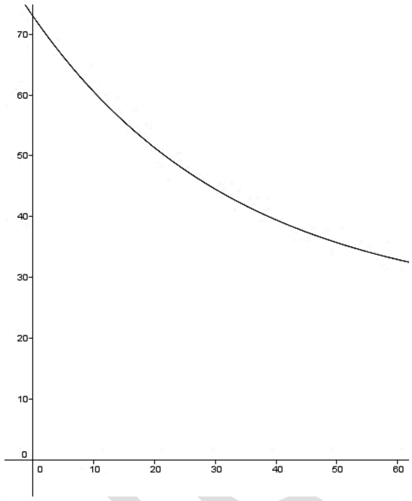
β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

γ) Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

21679.Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρετε, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_\alpha = 25^o C$, έχει θερμοκρασία $T_o = 73^o C$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση $T(t) = T_\alpha + ce^{-\kappa t}$ όπου c , κ κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι $61^o C$, τότε:



α) Να αποδείξετε ότι $c = 48$

β) Να βρείτε την σταθερά κ.
(Θεωρήστε $\ln 0,75 = -0,3$).

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

γ) Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1,2} = 0,3$).

δ) Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από $40^o C$, να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση και το αποτέλεσμα του ερωτήματος γ), γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

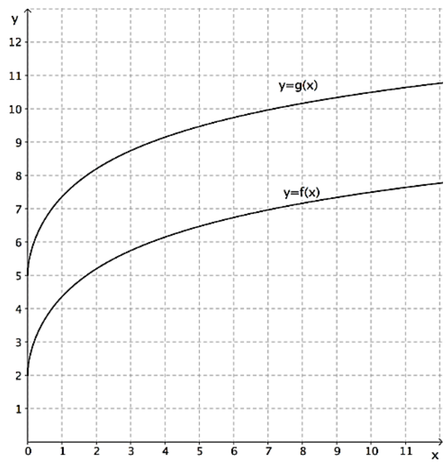
21950.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \dfrac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\dfrac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx'.

25463.Ένας ερευνητής πραγματοποίησε μια στατιστική μελέτη για την μεταβολή του βάρους των Ελληνοπαίδων. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπου παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g. Στον οριζόντιο άξονα $x'x$ καταγράφεται η ηλικία σε μήνες και στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ το βάρος σε κιλά. Η γραφική παράσταση της g παρουσιάζει τις ελάχιστες φυσιολογικές τιμές και η γραφική παράσταση της g τις μέγιστες φυσιολογικές τιμές που μπορεί να έχει ένα παιδί κατά την διάρκεια του πρώτου έτους της ηλικίας του. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = \alpha\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + \beta,\ \ x \ge 0,\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B\left(e^2 - 1,\ 2\sqrt{2} + 4\right)$ενώ για την γραφική παράσταση της g, γνωρίζουμε ότι προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.



α) Να αποδείξετε ότι α = 2 και $\beta = 2$. Στην συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g.

β) Να προσδιορίσετε γραφικά (κατά προσέγγιση) την ηλικία κατά την οποία η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους ενός παιδιού είναι τα 5 κιλά. Στη συνέχεια , με αλγεβρικό τρόπο, να βρείτε με ακρίβεια την ηλικία.

γ) Το βάρος ενός παιδιού στο τέλος του 12^{o} μήνα βρέθηκε 13 κιλά. Πως θα το χαρακτηρίζατε: υπέρβαρο, φυσιολογικό ή λιποβαρές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με αλγεβρικό τρόπο.

21674.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\log\sqrt{10^{x}-2}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=\left(\log 2,+\infty\right)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $g\left(x\right)=\log\sqrt{\dfrac{10^{x}}{3}}, x\in\mathbb{R}$.

i. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\dfrac{10^{x}}{3}}=\sqrt{10^{x}-2}$ με $x\in\left(\log 2,+\infty\right)$.

ii. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g.

37476.Δίνεται το πολυώνυμο $P\left(x\right)=x^{3}-2x^{2}-x+2$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

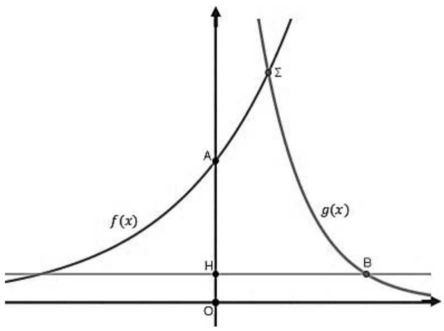
β) $P(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$.

γ) $1<\log 20<2$.

δ) $P(\log 20)<0$.

Θέμα 3ο

15392.Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f\left(x\right)=2^{x}$ και $g\left(x\right)=5^{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $H\left(0,\dfrac{1}{5}\right)$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Σ.

γ) Αν είναι x_{B}, x_{Σ} οι τετμημένες των σημείων Β, Σ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $x_{B}-x_{\Sigma}=\log 20$

15676.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\ln\left(e^{x}-1\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον x΄x.