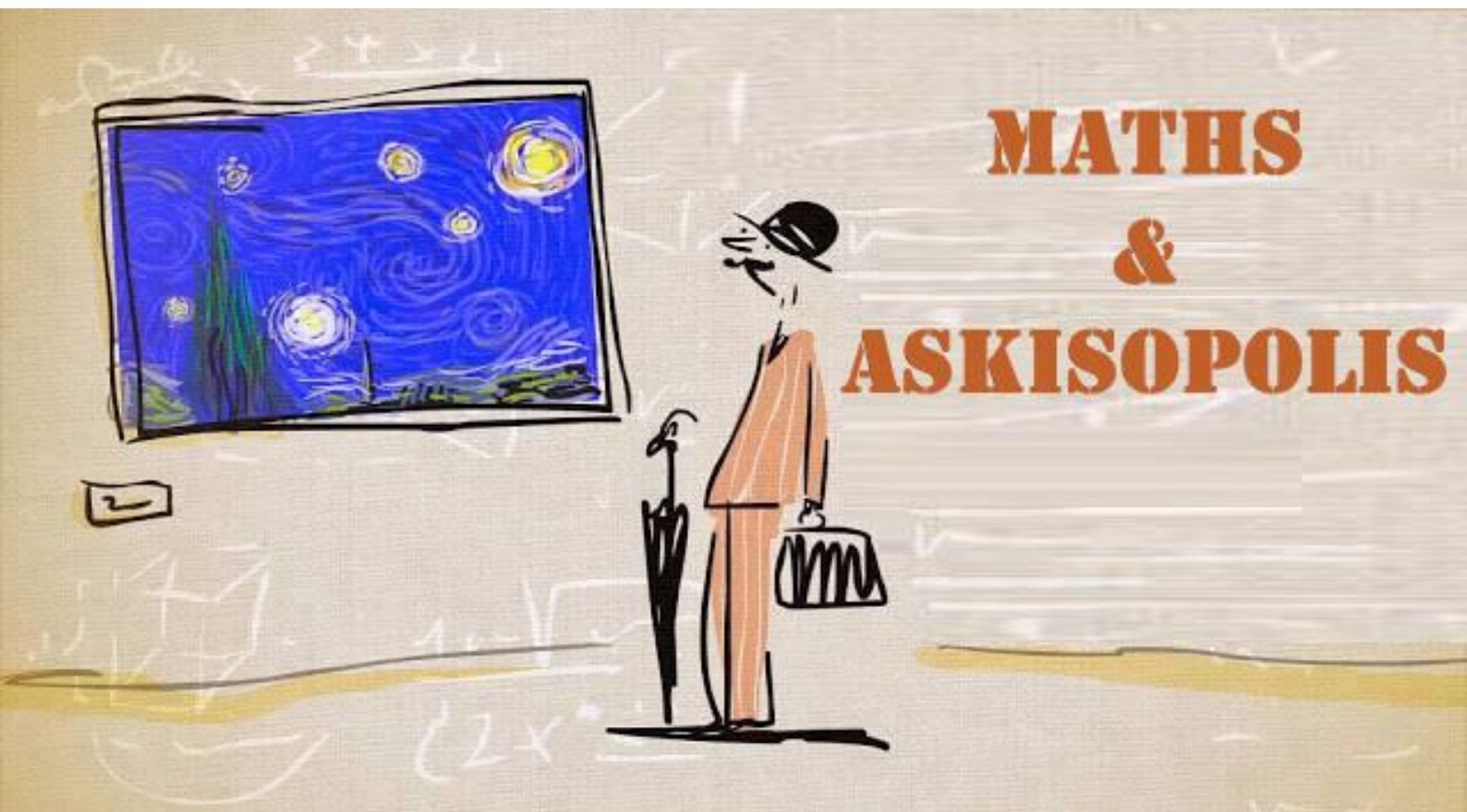


Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis



Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας



2020 - 2021



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

9ο Διαγώνισμα

20-4-2021

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει

$$f'(x) = a^x \ln a, \text{ δηλαδή } (a^x)' = a^x \ln a.$$

μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν η μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό».

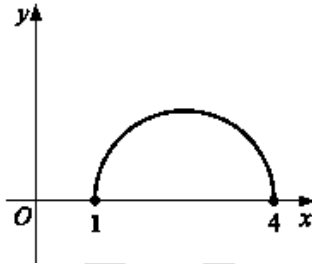
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

μονάδες 1+3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε:



α) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $(1, 4)$.

β) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $[1, 4]$.

γ) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, 4)$.

δ) υπάρχει $x_0 \in (1, 4)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$

μονάδες 8

A5. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στη παρακάτω πρόταση:

Το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$ ισούται με:

A. $\frac{1}{x^2}$

B. $-\frac{2}{x^2}$

Γ. $-\frac{1}{x^2}$

Δ. $-\frac{2}{x}$

E. 0

μονάδες 2

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + ax + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και

$g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f

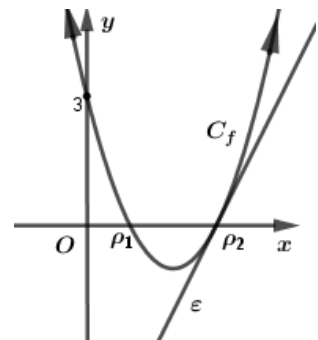
και η ευθεία ε είναι εφαπτομένη της C_f στο $x = \rho_2$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\beta = 3$ και $\alpha < -2\sqrt{3}$.

Έστω ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = 2x - 6$.

B2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

μονάδες 4



μονάδες 4

B3. Κάνοντας κατάλληλο σχήμα να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x(x-4) = g(x) - 3$
μονάδες 3

B4. Έστω η συνάρτηση $h(x) = (g \circ f)(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι $h(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, $x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.

μονάδες 3

β) Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ ισχύουν οι σχέσεις

$$h'(x)h(x) = x - 2 \text{ και } h''(x)h(x) + [h'(x)]^2 = 1$$

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^{2022} + \kappa x + \lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ της οποίας η διαίρεση με το $(x+1)^2$ είναι τέλεια και δίνει πηλίκο ένα πολυώνυμο $P(x)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2022$ και $\lambda = 2021$.

Μονάδες 7

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $P(x)$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι $P(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Για τις παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} συναρτήσεις f_1, f_2 ισχύουν:

• $f_1'(x) = -f_1(x)$

• $f_2'(x) = f_2(x)$

• $f_1(0) = \frac{1}{2}, f_2(0) = -\frac{1}{2}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = (f_1 + f_2)(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την γραφική παράσταση της $g(x) = \ln x$ σε μοναδικό σημείο.

μονάδες 5

Δ3. Αν $\rho > 0$ η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = g(x)$, να αποδείξετε ότι το $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = g\left(-\frac{1}{x}\right)$.

μονάδες 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = ax + \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$ δεν μπορεί να είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ ή το $+\infty$.

μονάδες 6

Δ5. Να αποδείξετε ότι η C_f είναι πάνω από τη διχοτόμο του $2^{\text{ου}}$ και $4^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου στο $(-\infty, 0)$ και κάτω από αυτήν στο $(0, +\infty)$.

μονάδες 6