# 21η Άσκηση

Όριο στο άπειρο

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$ .

**α)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^2(x)+x^4}{f^4(x)+x^2}$

**β)** Να υπολογίσετε τα όρια:

**i.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

**ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

**iii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$

**iv.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-x^2+ημx}{f^2(x)+x^2+ημx}$

**γ)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+f(2x)-f(3x)\right)$

**δ)** Να βρείτε το $λ\in\mathbb{R}$ για το οποίο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+λx\right)=0$ .

**ε)** Να υπολογίσετε τα όρια:

**i.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^2(x)-ημx}{f^2(x)+ημx}$

**ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xημx}{f^2(x)}$

**iii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^2(x)}{4+ημx+συνx}$

**στ)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xημ\dfrac{1}{f(x)}\right)$

**ζ)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{f(x)}-2e^x\right)$

**η)** Να υπολογίσετε τα όρια:

**i.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{f(x)}-2^{2f(x)+1}}{e^{f(x)}+3^{f(x)}}$

**ii.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^{-f(x)}+5^{-f(x)}}{3^{-f(x)}-4^{-f(x)}}$

Στέλιος Μιχαήλογλου

## Λύση

**α)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^2(x)+x^4}{f^4(x)+x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2+x^4}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^4+x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2+x^2}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+x^2+1}{x^4+2x^2+1+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+x^2+1}{x^4+3x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}}=1$$

**β) i.** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=+\infty$

**ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}=1$

**iii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=0$

**iv.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-x^2+ημx}{f^2(x)+x^2+ημx}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{xf(x)-x^2+ημx}{x^2}}{\dfrac{f^2(x)+x^2+ημx}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\cancel{x}f(x)}{x^{\cancel{2}}}-1+\dfrac{ημx}{x^2}}{\dfrac{f^2(x)}{x^2}+1+\dfrac{ημx}{x^2}}=\dfrac{1-1+0}{1^2+1+0}=0$ γιατί

για $x>0$ είναι: $\left|\dfrac{ημx}{x^2}\right|=\dfrac{|ημx|}{x^2}\le\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{ημx}{x^2}\le\dfrac{1}{x^2}$ , $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=0$ , οπότε από το

κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ημx}{x^2}=0$

**γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+f(2x)-f(3x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{9x^2+1}\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x+\sqrt{4x^2+1}-2x-\sqrt{9x^2+1}+3x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x}-\frac{\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+1}+3x}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}+\frac{\cancel{4x^2}+1-\cancel{4x^2}}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+2\right)}-\frac{\cancel{9x^2}+1-\cancel{9x^2}}{x\left(\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+3\right)}\right)=0+0-0=0$$

**δ)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+λx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+λx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+λx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+λx\right)=$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(λ-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right]$$

Είναι $\lim_{x\to-\infty}\left(\lambda-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=\lambda-1$ , οπότε:

- αν $\lambda-1>0\Leftrightarrow\lambda>1$ είναι $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\lambda x\right)=-\infty$ και

- αν $\lambda-1<0\Leftrightarrow\lambda<1$ είναι $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\lambda x\right)=+\infty$

Επομένως για να είναι $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\lambda x\right)=0$ πρέπει $\lambda=1$ . Τότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\lambda x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)}=0$$

**ε) i.** $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^2(x)-\eta\mu x}{f^2(x)+\eta\mu x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-\eta\mu x}{x^2+1+\eta\mu x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+1-\eta\mu x}{x^2}}{\frac{x^2+1+\eta\mu x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}-\frac{\eta\mu x}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{\eta\mu x}{x^2}}=\frac{1+0-0}{1+0+0}=1$$

**ii.** $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\eta\mu x}{f^2(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\eta\mu x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\cancel{x}\eta\mu x}{x^{\cancel{2}}}}{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\eta\mu x}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1+0}=0$$ γιατί για $x>0$ είναι:

$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{x}\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{x}$ , $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ , οπότε από το

κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$

**iii.** $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^2(x)}{4+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{4+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{4+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x^2}+\frac{\eta\mu x}{x^2}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}=+\infty$$

γιατί $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$ και όμοια $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$. Ακόμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:
$-1\le\eta\mu x\le1$, $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le1$, είναι $-2\le\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\le2\Leftrightarrow2\le4+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\le6$, δηλαδή $4+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x>0$

**στ)** $$\lim_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

Θέτουμε $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=u>0\Rightarrow\frac{1}{x^2+1}=u^2\Leftrightarrow x^2+1=\frac{1}{u^2}\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{u^2}-1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}$

Όταν $x\to+\infty$ είναι $\lim_{x\to+\infty}u=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=0$ , οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{u\to0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}\cdot\eta\mu u\right)=\lim_{u\to0^+}\left(\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}\cdot\eta\mu u\right)=$$

$$\lim_{u\to0^+}\left(\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}\cdot\eta\mu u\right)=\lim_{u\to0^+}\left(\sqrt{1-u^2}\,\frac{\eta\mu u}{u}\right)=1\cdot1=1$$

**ζ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{f(x)}-2e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{x}\left(\dfrac{e^{f(x)}}{e^{x}}-2\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{x}\left(e^{f(x)-x}-2\right)\right]=+\infty\left(e^{0}-2\right)=-\infty$

**η) i.** Θέτουμε $f(x)=u$ , οπότε όταν $x\to+\infty$ τότε και $u\to+\infty$ . Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{f(x)}-2^{2f(x)+1}}{e^{f(x)}+3^{f(x)}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^{u}-2^{2u+1}}{e^{u}+3^{u}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^{u}-2\left(2^{2}\right)^{u}}{e^{u}+3^{u}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^{u}-2\cdot4^{u}}{e^{u}+3^{u}}=$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{4^{u}\left(\dfrac{e^{u}}{4^{u}}-2\right)}{3^{u}\left(\dfrac{e^{u}}{3^{u}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{u}\frac{\left(\dfrac{e}{4}\right)^{u}-2}{\left(\dfrac{e}{3}\right)^{u}+1}\right]=+\infty\frac{0-2}{0+1}=-\infty$$

**ii.** Θέτουμε $-f(x)=u$ , οπότε όταν $x\to-\infty$ τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{x^{2}+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^{2}}}\right)=-\infty$ . Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{-f(x)}+5^{-f(x)}}{3^{-f(x)}-4^{-f(x)}}=\lim_{u\to-\infty}\frac{2^{u}+5^{u}}{3^{u}-4^{u}}=\lim_{u\to-\infty}\frac{2^{u}\left(1+\left(\dfrac{5}{2}\right)^{u}\right)}{3^{u}\left(1-\left(\dfrac{4}{3}\right)^{u}\right)}=\lim_{u\to-\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{u}\frac{1+\left(\dfrac{5}{2}\right)^{u}}{1-\left(\dfrac{4}{3}\right)^{u}}\right]=(+\infty)\cdot\frac{1+0}{1-0}=+\infty$$