43η Άσκηση

Γενική στις παραγώγους

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $(0,\pi)$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)\left(f(x)-2\right)=\dfrac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x}$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ και $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1+\eta\mu x}{\eta\mu x}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

δ) Να σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της f.

ε) Να βρείτε τις τιμές του $x\in(0,\pi)$ για τις οποίες $f(x)<f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

στ) Έστω $g(x)=\dfrac{1}{x\left(f(x)-1\right)}$, $x\in(0,\pi)$.

i. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\pi)$.

ii. Να δείξετε ότι $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) $f(x)\left(f(x)-2\right)=\dfrac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x}\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)=\dfrac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x}\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=\dfrac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x}+1\Leftrightarrow$

$\left(f(x)-1\right)^2=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$. Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}>0\Rightarrow\left(f(x)-1\right)^2>0\Leftrightarrow f(x)-1\neq 0$ και επειδή η συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-1$ είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,\pi)$.

Είναι $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-1=1>0$ άρα $\varphi(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$, οπότε

$f(x)-1=\dfrac{1}{\eta\mu x}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu x}+1=\dfrac{1+\eta\mu x}{\eta\mu x}$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f'(x)=-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$.

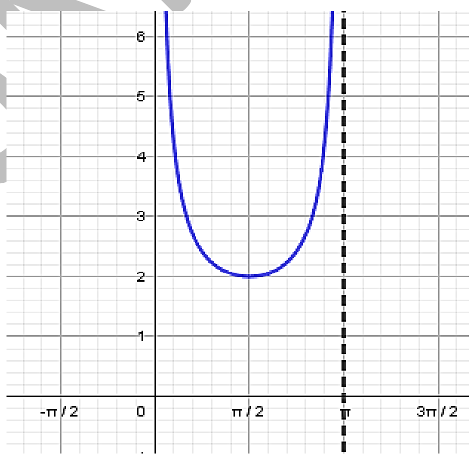
Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $\sigma\upsilon\nu x>0\Leftrightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και για κάθε $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ είναι $\sigma\upsilon\nu x<0\Leftrightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$. Η f έχει ελάχιστο το $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f''(x)=\dfrac{\eta\mu^2 x+2\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^3 x}$. Είναι $f''(x)>0\Rightarrow f\cup(0,\pi)$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}+1\right)\underset{u\to 0^+}{\overset{\eta\mu x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\left(\dfrac{1}{u}+1\right)=+\infty$, άρα η ευθεία $x=0$, δηλαδή ο άξονας y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^-}\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}+1\right)\underset{u\to 0^+}{\overset{\eta\mu x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\left(\dfrac{1}{u}+1\right)=+\infty$, άρα η ευθεία $x=\pi$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

δ)



ε) Αρχικά πρέπει $0<\dfrac{\pi}{2}-x<\pi\Leftrightarrow-\dfrac{\pi}{2}<-x<\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ και $0<x<\pi$, άρα $0<x<\dfrac{\pi}{2}$

$f(x)<f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{\eta\mu x}<1+\dfrac{1}{\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\eta\mu x}<\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow\eta\mu x>\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}>1\Leftrightarrow$

$$\varepsilon\varphi x > \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \overset{\varepsilon\varphi x \nearrow \left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Rightarrow} \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$

στ) $g(x) = \dfrac{1}{x(f(x)-1)} = \dfrac{1}{x\left(\cancel{1} + \dfrac{1}{\eta\mu x} - \cancel{1}\right)} = \dfrac{\eta\mu x}{x}$

i. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $g'(x) = \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$.

Έστω $h(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x,\ x \in [0,\pi]$. Είναι $h'(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = -x\eta\mu x$.

Για κάθε $x \in (0,\pi)$ είναι $h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow [0,\pi]$.

Για κάθε $0 < x < \pi$ είναι $h(\pi) < h(x) < h(0) \Leftrightarrow -\pi < x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x < 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (0,\pi)$.

ii. Επειδή η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 2$ ισχύει ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in (0,\pi)$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (0,\pi)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(A) = \left(\lim\limits_{x\to\pi^-} g(x), \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\right) = (0,1)$, άρα $0 < g(x) < 1$, οπότε για κάθε $x \in (0,\pi)$ είναι $f(x) \geq 2 > 1 > g(x)$.