14ο Λύκειο Περιστερίου

Διαγώνισμα προσομοίωσης στα Μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου
2017-18

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,\ x_0)\cup(x_0,\ \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

μονάδες 7

Α2. Να *γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας:*

Για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι :

α) η εξίσωση $(\beta-\alpha)f'(x)=f(\beta)-f(\alpha)$ έχει λύση στο (α,β) .

β) η εξίσωση $(\beta-\alpha)f'(x)=f(\beta)-f(\alpha)$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β) .

γ) υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x .

δ) $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ αρκεί να ισχύει $f(a)=f(\beta)$.

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Τα κρίσιμα σημεία μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f είναι πάντοτε θέσεις τοπικών ακροτάτων»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. **μονάδες 1**

β) Με την βοήθεια συνάρτησης που να ικανοποιεί την υπόθεση του ισχυρισμού, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α) . **μονάδες 3**

μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η παράγωγος της δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο η παράγωγος της f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της $-|f|$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $(\alpha,\beta]$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα $(A,f(\beta)]$ όπου $A=\lim_{x\to\alpha^+}f(x)$.

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\ \beta]$ και υπάρχει $x_0\in[\alpha,\ \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)<0$, τότε το εμβαδόν του χωρίου **Ω** που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

ε) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2x}$.

μονάδες 5x2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2\ln(x-2)-1, g(x)=\sqrt{1-x}$.

Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και ο τύπος της συνάρτησης $f\circ g$

μονάδες 5

Β2. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f,g αντιστρέφονται (1 μονάδα) και στη συνέχεια να βρείτε τα πεδία ορισμού των αντίστροφων τους συναρτήσεων (3 μονάδες) και τους τύπους τους (4 μονάδες).

μονάδες 8

Αν $f^{-1}(x)=e^{\frac{x+1}{2}}+2, x\in\mathbb{R}$ και $g^{-1}(x)=1-x^2, x\geq 0$:

Β3. Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-f^{-1}(x)\right)$ και **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(g^{-1}(x)\cdot \eta\mu\dfrac{1}{g^{-1}(x)}\right)$

μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το $\int_0^1\left(f^{-1}(2x-1)-2\right)\cdot\left(1-g^{-1}(x)\right)dx$

μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,για την οποία ισχύει :

- $f^2(x)=|x|$.
- $f(1)=f(-1)=1$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{|x|}, x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία , τα ακρότατα και την κυρτότητα .

μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε η γραφική παράστασης της f τέμνει την ευθεία $y=2018$ σε δύο ακριβώς σημεία.

μονάδες 5

Γ4.α) Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την C_f ,την εφαπτομένη της f στο $x_0=1$,τον άξονα y΄y και την $x=1$.

μονάδες 5

β) Αν το εμβαδόν E_1 του χωρίου που περικλείεται από την C_f ,την εφαπτομένη της f στο $x_0=1$,τον άξονα y΄y και την $x=4a^2, 0<a<\dfrac{1}{2}$ είναι ίσο με $2\alpha^3$, να βρείτε το α και το εμβαδόν E_1.

μονάδες 5

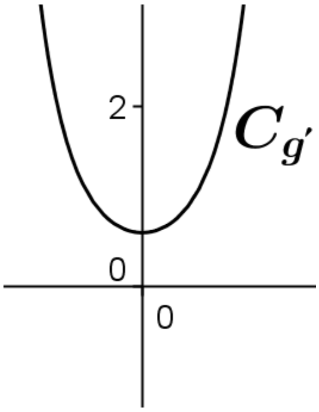
14ο Λύκειο Περιστερίου

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

- $f'(x)-f(x)=e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=2$

Επίσης δίνεται συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση της παραγώγου της φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=e^{2x}+e^{x}$.

μονάδες 6

Δ2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 \left(f(x)-e^{2x}\right)\cdot 2^x\,dx$

μονάδες 6

Δ3. α) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0,f(0))$

β) Να δείξετε ότι $f(x)\geq 3x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x^2)dx>3$

μονάδες 1+3+3

Δ4. Αν G αρχική της g με $G(1)=\dfrac{e^2+e}{2}\cdot G(0)$, να δείξετε ότι :

α) $g(\alpha)<\int_\alpha^{\alpha+1} g(x)dx<g(\alpha+1)$,για κάθε πραγματικό αριθμό α.

β) υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)g(x_0)-f'(x_0)G(x_0)=0$.

μονάδες 3+3

Καλή Επιτυχία!

14ο Λύκειο Περιστερίου

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

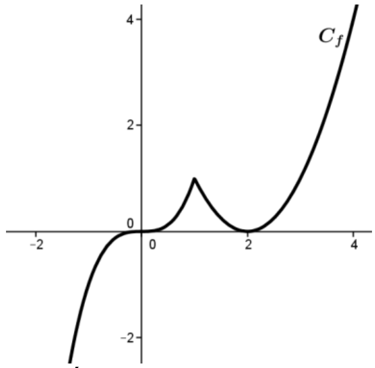
Α2. α) Ισχύει το Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow (\beta - \alpha) f'(\xi) = f(\beta) - f(\alpha)$$

Α3. α) Λ

β) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \ x < 1 \\ (x-2)^2 & , \ x \geq 1 \end{cases}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{1\}$ με παράγωγο

$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \ x < 1 \\ 2(x-2) & , \ x > 1 \end{cases}$. Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι οι 0 και 2.



Επειδή η f' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2.
Όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, ενώ το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου.

Α4. ΣΣΛΛΣ

ΘΕΜΑ Β

$A_f = (2, +\infty), A_g = (-\infty, 1]$

Β1. Για το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ έχουμε : $\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \sqrt{1-x} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 1 - x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3$.

Άρα $A_{f \circ g} = (-\infty, -3)$ και $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2\ln\left(\sqrt{1-x} - 2\right) - 1$.

Β2. $f'(x) = \dfrac{2}{x-2} > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και 1-1 ,οπότε αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της f είναι :

$A_{f^{-1}} = f(A) \underset{\text{συνεχής}}{\overset{f \nearrow}{=}} \left(\lim\limits_{x \to 2^+} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$.

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow 2\ln(x-2) - 1 = y \Leftrightarrow 2\ln(x-2) = y + 1 \Leftrightarrow \ln(x-2) = \dfrac{y+1}{2} \Leftrightarrow$

$\ln(x-2) = \dfrac{y+1}{2} \Leftrightarrow x - 2 = e^{\frac{y+1}{2}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{y+1}{2}} + 2 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^{\frac{y+1}{2}} + 2$.

Άρα η αντίστροφη της f έχει τύπο $f^{-1}(x) = e^{\frac{x+1}{2}} + 2$.

$g'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} < 0$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα και 1-1 ,οπότε αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της g είναι :

$A_{g^{-1}} = g(A) \underset{\text{συνεχής}}{\overset{g \searrow}{=}} \left[g(1), \lim\limits_{x \to -\infty} g(x)\right) = [0, +\infty)$.

Θέτουμε $g(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = y \Leftrightarrow 1 - x = y^2 \Leftrightarrow x = 1 - y^2 \Leftrightarrow g^{-1}(y) = 1 - y^2$.

Άρα η αντίστροφη της g έχει τύπο $g^{-1}(x) = 1 - x^2$.

Β3. α) $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-f^{-1}(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\ln(x-2)-1-e^{\frac{x+1}{2}}+2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\ln(x-2)-e^{\frac{x+1}{2}}+3\right)=-\infty+3=-\infty$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2\ln(x-2)-e^{\frac{x+1}{2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{x+1}{2}}\left(\frac{2\ln(x-2)}{e^{\frac{x+1}{2}}}-1\right)=+\infty(0-1)=-\infty\ .$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x-2)}{e^{\frac{x+1}{2}}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x-2}}{\frac{e^{\frac{x+1}{2}}}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{(x-2)e^{\frac{x+1}{2}}}=0\right).$$

β) $\lim_{x\to1}\left(g^{-1}(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{g^{-1}(x)}\right)=\lim_{x\to1}\left((1-x^2)\cdot\eta\mu\frac{1}{1-x^2}\right)$.

$$\left|(1-x^2)\eta\mu\frac{1}{1-x^2}\right|\le|1-x^2|\Leftrightarrow-|1-x^2|\le(1-x^2)\eta\mu\frac{1}{1-x^2}\le|1-x^2|\ .$$

$\lim_{x\to1}|1-x^2|=0=\lim_{x\to1}\left(-|1-x^2|\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x\to1}\left((1-x^2)\cdot\eta\mu\frac{1}{1-x^2}\right)=0=\lim_{x\to1}\left(g^{-1}(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{g^{-1}(x)}\right).$$

Β4. $\int_0^1\left(f^{-1}(2x-1)-2\right)\cdot\left(1-g^{-1}(x)\right)dx=\int_0^1 e^x\cdot x^2dx=\int_0^1(e^x)'\cdot x^2dx=\left[e^x\cdot x^2\right]_0^1-\int_0^1 e^x\cdot 2xdx=$

$$e-2\int_0^1(e^x)'\cdot xdx=e-2\left[e^x\cdot x\right]_0^1+2\int_0^1 e^xdx=$$

$$e-2e+2\left[e^x\right]_0^1=-e+2e-2=e-2\ .$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f^2(x)=|x|$ (1) .

Από την (1) έχουμε $f^2(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

Για $x\neq0$ έχουμε ότι $f(x)\neq0$ άρα η συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$.

Έχουμε $f(1)=f(-1)=1$ άρα η f είναι θετική σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$.

Για $x<0$ από την (1) έχουμε $f(x)=\sqrt{-x}$ και για

$x>0$ από την (1) έχουμε $f(x)=\sqrt{x}$.

Άρα $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, x>0\\ 0, x=0\\ \sqrt{-x}, x<0\end{cases}$ οπότε $f(x)=\sqrt{|x|}, x\in\mathbb{R}$.

14ο Λύκειο Περιστερίου

Γ2. Η f παραγωγίζεται στα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$,με παράγωγο $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x>0\\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}, x<0\end{cases}$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$.

Η f παραγωγίζεται δύο φορές στα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$,με δεύτερη παράγωγο

$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}, x>0\\ \dfrac{1}{4x\sqrt{-x}}, x<0\end{cases}$. Άρα η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Έστω $A_1=(-\infty,0], A_2=(0,+\infty)$.

Λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε :

$f(A_1)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=[0,+\infty), f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$.

Το 2018 ανήκει στα $f(A_1),f(A_2)$ άρα υπάρχουν $x_1,x_2\in A_1,A_2$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $f(x_1)=2018=f(x_2)$.

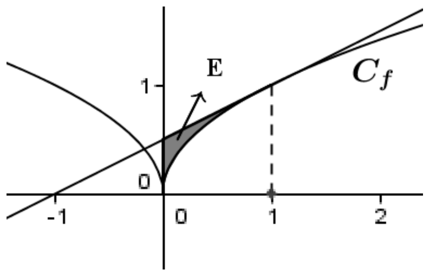
Τα x_1,x_2 μοναδικά λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα.

Άρα η εξίσωση $f(x)=2018$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=2018$ σε δύο ακριβώς σημεία.

Γ4. α) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $x_0=1$ είναι :

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=\frac{1}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

Η συνάρτηση f είναι κοίλη οπότε $f(x)\le\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ και το ζητούμενο εμβαδόν είναι το



$$E=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-f(x)\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}.$$

β) Έχουμε $0<\alpha<\frac{1}{2}\Leftrightarrow0<\alpha^2<\frac{1}{4}\Leftrightarrow0<4\alpha^2<1$,οπότε :

$$E_1=\int_0^{4\alpha^2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-f(x)\right)dx=\int_0^{4\alpha^2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{4\alpha^2}=4\alpha^4+2\alpha^2-\frac{16\alpha^3}{3}.$$

$$E_1=2\alpha^3\Leftrightarrow4\alpha^4+2\alpha^2-\frac{16\alpha^3}{3}=2\alpha^3\Leftrightarrow12\alpha^4+6\alpha^2-16\alpha^3=6\alpha^3\Leftrightarrow$$

$$12\alpha^4+6\alpha^2-22\alpha^3=0\overset{:2\alpha^2}{\Leftrightarrow}6\alpha^2-11\alpha+3=0.$$

Η εξίσωση $6\alpha^2-11\alpha+3=0$ έχει ρίζες $\alpha=\frac{1}{3}$, $\alpha=\frac{3}{2}$ απορρίπτεται.

Άρα $\alpha=\frac{1}{3}$ και $E_1=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{27}$.

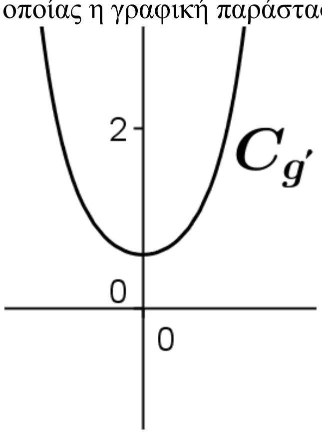
14ο Λύκειο Περιστερίου

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

- $f'(x)-f(x)=e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=1$

Επίσης δίνεται συνάρτηση g της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Δ1. $f'(x)-f(x)=e^{2x}\Leftrightarrow e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)=e^{x}\Leftrightarrow\left(e^{-x}f(x)\right)'=\left(e^{x}\right)'\Leftrightarrow e^{-x}f(x)=e^{x}+c$.

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=1+c\Leftrightarrow 2=1+c\Leftrightarrow c=1$

Άρα $e^{-x}f(x)=e^{x}+1\Leftrightarrow f(x)=e^{2x}+e^{x}$.

Δ2. $I=\int_0^1\left(f(x)-e^{2x}\right)\cdot 2^x dx=\int_0^1 e^x\cdot 2^x dx=\int_0^1\left(e^x\right)'\cdot 2^x dx=\left[e^x\cdot 2^x\right]_0^1-\ln 2\int_0^1 e^x\cdot 2^x dx\Leftrightarrow$

$I=2e-1-\ln 2\cdot I\Leftrightarrow I+\ln 2\cdot I=2e-1\Leftrightarrow(1+\ln 2)I=2e-1\Leftrightarrow I=\dfrac{2e-1}{1+\ln 2}$.

Δ3. α) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α είναι : (ε) : $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=3x+2$

β) $f'(x)=2e^{2x}+e^{x}, f''(x)=4e^{2x}+e^{x}>0$ άρα η f είναι κυρτή ,οπότε η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός από το σημείο επαφής .

Επομένως βρίσκεται πάνω από την (ε) εκτός από το σημείο Α άρα $f(x)\geq 3x+2\,(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Για την ανισότητα (1) το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$.

Από την (1) έχουμε :

$f(x^2)\geq 3x^2+2\Rightarrow\int_0^1 f(x^2)dx>\int_0^1(3x^2+2)dx\Leftrightarrow\int_0^1 f(x^2)dx>\left[x^3+2x\right]_0^1\Leftrightarrow\int_0^1 f(x^2)dx>3.$

Δ4. α) $g(\alpha)<\int_\alpha^{\alpha+1}g(x)dx<g(\alpha+1)\Leftrightarrow g(\alpha)<G(\alpha+1)-G(\alpha)<g(\alpha+1)$.

Για την συνάρτηση G ισχύει το ΘΜΤ στο $[\alpha,\alpha+1]$,οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\alpha+1)$ τέτοιο ώστε

$G'(\xi)=\dfrac{G(\alpha+1)-G(\alpha)}{\alpha+1-\alpha}\Leftrightarrow g(\xi)=G(\alpha+1)-G(\alpha)$.

Από την γραφική παράσταση της παραγώγου της g βλέπουμε ότι $g'(x)>0$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα.

Έχουμε : $\alpha<\xi<\alpha+1\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(\alpha)<g(\xi)<g(\alpha+1)\Leftrightarrow g(\alpha)<G(\alpha+1)-G(\alpha)<G(\alpha+1)$.

β) $f(x_0)g(x_0)-f'(x_0)G(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)G'(x_0)-f'(x_0)G(x_0)=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=\dfrac{G(x)}{f(x)}$.

Η k είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων ,

παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με τύπο $\kappa'(x)=\dfrac{G'(x)f(x)-G(x)f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{g(x)f(x)-G(x)f'(x)}{f^2(x)}$ και

$$k(1)=\frac{G(1)}{f(1)}=\frac{\cancel{(e^2+e)}G(0)}{2\cancel{(e^2+e)}}=\frac{G(0)}{f(0)}=k(0)\ .$$

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle δηλαδή υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\kappa'(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{G'(x_0)f(x_0)-G(x_0)f'(x_0)}{f^2(x_0)}=0\Leftrightarrow g(x_0)f(x_0)-G(x_0)f'(x_0)=0\ .$$