Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2020 - 2021

14ο Διαγώνισμα

25-5-2021

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και υπάρχει ρίζα ρ της εξίσωσης $g''(x)=0$, τότε το σημείο $A(\rho,f(\rho))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε: $\left[f(x_0)\right]'=f'(x_0)$.

β) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$.

γ) Αν $f(x)=e^x$, τότε $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}$.

δ) Αν $f(x)=x^4$, τότε υπάρχουν σημεία της C_f με παράλληλες εφαπτόμενες.

ε) Δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα στο ίδιο διάστημα για μια συνάρτηση f όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano και του θεωρήματος Rolle.

μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+x+\alpha, & x<0 \\ \beta\eta\mu x-1, & x\geq 0\end{cases}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=1$.

μονάδες 6

Β2. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$.

μονάδες 4

Β3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

μονάδες 5

Β4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f(x)}+x\right)$.

μονάδες 5

Β5. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $(-\infty,2\pi]$.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & x\in(0,1)\cup(1,+\infty) \\ 1, & x=1\end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

μονάδες 3

Γ2. α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

μονάδες 5+3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

μονάδες 6

Γ4. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f.

μονάδες 3

Γ5. Αν $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει : $F'(x)=f(x)$ να αποδείξετε ότι :

$F(x+1)-F(x)<f(x)<F(x)-F(x-1)$ για κάθε $x>2$.

μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(x)\ge x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=1.$$

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(0,f(0))$.

μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M_1(\xi_1,f(\xi_1))$ με $\xi_1>0$ της C_f με κλίση τουλάχιστον την κλίση της C_f στο Μ και ένα τουλάχιστον σημείο $M_2(\xi_2,f(\xi_2))$ με $\xi_2<0$ της C_f με κλίση το πολύ την κλίση της C_f στο Μ.

μονάδες 8

Δ3. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$f'(\xi_2)<f'(0)<f'(\xi_1).$$

μονάδες 6

Δ4. Έστω ότι η f' είναι γνησίως μονότονη.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$f(x)\ge f'(\xi_1)(x-\xi_1)+f(\xi_1)$ και $f(x)\ge f'(\xi_2)(x-\xi_2)+f(\xi_2)$

μονάδες 3

β) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $f(x)=x+1$.

μονάδες 3

Ευχόμαστε Επιτυχία!