2_Διαγώνισμα_2021

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α$_1$. Να αποδείξετε ότι: Για μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν
- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

(Μονάδες 7)

Α$_2$. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f;

(Μονάδες 4)

Α$_3$. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, τότε $f'(x)>0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας ,στο τετράδιό σας το γράμμα **Α** ,αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (Μονάδες 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

(Μονάδες 3)

Α$_4$. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f , για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g .

(Μονάδες 2)

β. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει ένα κοινό σημείο Α με την ευθεία $y=x$, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}. (Μονάδες 2)

γ. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και σημείο $x_0 \in [\alpha,\beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.

(Μονάδες 2)

δ. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

(Μονάδες 2)

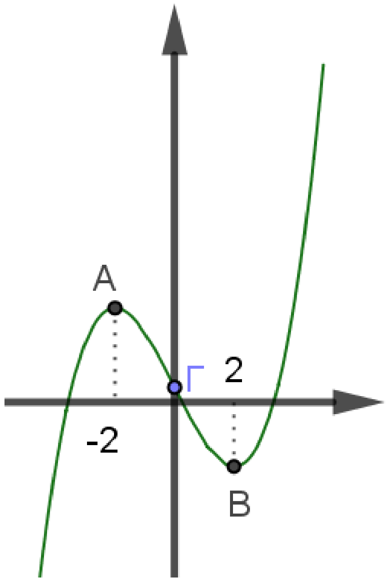
ε. Μία συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν ένα κινητό ,που κινείται πάνω στην C_f, για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ πρέπει να στραφεί κατά την θετική φορά.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^3+\beta x+3, x\in\mathbb{R}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Επίσης ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-(\beta x+8\alpha+3)}{x-2}=12$



Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 3)

Β2. Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-12$ και να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

(Μονάδες 5)

Β3. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Γ (σημείο τομής με τον άξονα $y'y$) διαπερνά την καμπύλη.
Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο καμπής της.

(Μονάδες 5)

Β4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3=12x+16$.

(Μονάδες 5)

Β5. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **έχει ακριβώς την ίδια συμπεριφορά** ως προς την κυρτότητα με την συνάρτηση f και έχει εφαπτομένη στο $(0,g(0))$ την ευθεία $y=3x-5$.

Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2021}{g(x)-3x+5}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases} e^x & , \ x\geq\lambda \\ 1-x \ , & x<\lambda \end{cases}$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$

και $g(x)=2021\cdot\ln x$.

Γ₁. Να δείξετε ότι $\lambda=0$.

(Μονάδες 6)

Γ₂. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 6)

Γ₃. Αν $0<\alpha<\beta$ να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{\beta}<\dfrac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\dfrac{1}{\alpha}$

(Μονάδες 6)

Γ₄. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ για το οποίο τα σημεία $A\left(x_0,f(x_0)\right)$ και $B\left(x_0,g(x_0)\right)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[2,2021]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(2)=2$, $f(6)=10$ και $f'(2)<0$.

Δ₁. Να αποδείξετε ότι εξίσωση $f(x)=2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2,6)$.

(Μονάδες 6)

Δ₂. Να αποδείξετε ότι η $f''(x)$ έχει μια τουλάχιστον θετική τιμή στο διάστημα $(2,6)$.

(Μονάδες 6)

Δ₃. Να δείξετε ότι εξίσωση $f(x)+2=f(x+1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[2,5]$.

(Μονάδες 7)

Δ₄. Αν επιπλέον γνωρίζεται ότι η f είναι κυρτή στο $[2,2021]$ τότε:
Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει τρία ακρότατα.

(Μονάδες 6)

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α₁. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

• Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

• Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι. $f(x_1) = f(x_2)$.

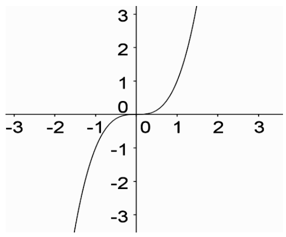
Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α₂. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Α₃.

α) Ψ

β) Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



Α₄. α ⟶ Σ, β ⟶ Σ, γ ⟶ Λ, δ ⟶ Λ, ε ⟶ Σ

ΘΕΜΑ Β

B₁. Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης προκύπτει ότι:
Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-2,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

B₂. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-(\beta x+8\alpha+3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x^3+\beta x+3-\beta x-8\alpha-3}{x-2}=$

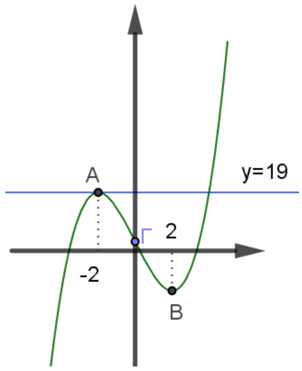
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x^3-8\alpha}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha(x^3-8)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)}{x-2}=12\alpha$

Επομένως πρέπει $12\alpha=12\Leftrightarrow\alpha=1$
Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης προκύπτει ότι για $x=-2$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και για $x=2$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο . Άρα συμφώνα με το Θ Fermat θα ισχύει:
$f'(-2)=0$ και $f'(2)=0$. Είναι $f'(x)=3\alpha x^2+\beta$ επομένως
$f'(-2)=0\Leftrightarrow 12\alpha+\beta=0$, $f'(2)=0\Leftrightarrow 12\alpha+\beta=0$
(προσοχή προκύπτει η ίδια συνθήκη) $12\alpha+\beta=0\overset{\alpha=1}{\Leftrightarrow}\beta=-12$.
Είναι $f(x)=x^3-12x+3$ και $f(-2)=19$, $f(2)=-13$
Άρα οι συντεταγμένες των σημείων είναι $A(-2,19)$ και $B(2,-13)$

B₃. Η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ ,για $x=0$ είναι $f(0)=3$ δηλαδή $\Gamma(0,3)$. Έχουμε
$f(x)=x^3-12x+3$,
$f'(x)=3x^2-12$, $f''(x)=6x$
όπως φαίνεται από τον διπλανό πίνακα η f για $x=0$ παρουσιάζει Σημείο Καμπής το $\Gamma(0,3)$.Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\Gamma(0,3)$ Σημείο καμπής διαπερνά την καμπύλη.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση
$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-3=-12(x-0)\Leftrightarrow y=-12x+3$.



B₄. Η εξίσωση $x^3=12x+16$ γράφεται

$x^3-12x=16 \Leftrightarrow x^3-12x+3=19 \Leftrightarrow f(x)=19$

Επειδή είναι $A(-2,19)$ η εξίσωση έχει δυο λύσεις στο $\mathbb{R}$ όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

(Η μία ρίζα είναι το -2 και η άλλη βρίσκεται στο διάστημα $(2,+\infty)$)

B₅. Αφού η g έχει ακριβώς την ίδια συμπεριφορά ως προς την κυρτότητα με την συνάρτηση f ,η g θα είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,0]$ και κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$ και η C_g έχει εφαπτομένη στο $(0,g(0))$

Άρα η g παρουσιάζει στο $x=0$ καμπή .

Για $x=0$ από την εξίσωση της εφαπτομένης $y=3x-5$

βρίσκουμε $y=-5$ άρα $g(0)=-5$

Η g είναι συνεχής ως παραγωγισιμη άρα έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}[g(x)-3x+5]=g(0)+5=0$

Ξέρουμε ότι η συνάρτηση g είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,0]$ και κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$. Άρα η γραφική παράσταση της g βρίσκεται «κάτω» από την εφαπτομένη στο διάστημα $(-\infty,0)$ και «πάνω» από αυτή στο $(0,+\infty)$.

Δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις:

$g(x)<3x-5$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$

και

$g(x)>3x-5$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Επομένως

$g(x)-3x+5<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$

και

$g(x)-3x+5>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2021}{g(x)-3x+5}=2021\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{g(x)-3x+5}=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2021}{g(x)-3x+5}=2021\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{g(x)-3x+5}=+\infty$.

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2021}{g(x)-3x+5}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ$_1$. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $\lambda \in \mathbb{R}$ δηλαδή θα ισχύει $\lim\limits_{x\to\lambda^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\lambda^+} f(x) = f(\lambda)$ (1)

$\lim\limits_{x\to\lambda^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\lambda^-} (1-x) = 1-\lambda$ και

$\lim\limits_{x\to\lambda^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\lambda^+} e^x = e^\lambda = f(\lambda)$ οπότε από την (1) έχουμε

$1-\lambda = e^\lambda \Leftrightarrow e^\lambda + \lambda - 1 = 0$ (2)

Έστω $k(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η k είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $k'(x) = e^x + 1 > 0$ άρα η k είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και $1-1$, οπότε η (2) γράφεται $k(\lambda) = k(0) \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Γ$_2$. Για $\lambda = 0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \ge 0 \\ 1-x, & x < 0 \end{cases}$

Για $x < 0$ είναι $f'(x) = -1 < 0$

Για $x > 0$ είναι $f'(x) = e^x > 0$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Η f για $x = 0$ παρουσιάζει (Ολικό) ελάχιστο το $f(0) = 1$.

Η $g(x) = 2021 \cdot \ln x$ έχει πεδίο το $(0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \dfrac{2021}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

Γ$_3$. Η $g(x) = 2021 \cdot \ln x$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ $(0 < \alpha < \beta)$ είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = \dfrac{2021}{x}$ άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \frac{2021}{\xi} = \frac{2021\ln\beta - 2021\ln\alpha}{\beta - \alpha}$$

είναι $g''(x) = -\dfrac{2021}{x^2} < 0$ για κάθε $x > 0$

άρα η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

$$\alpha<\xi<\beta \underset{\gamma\nu.\ \varphi\theta\iota\nu}{\overset{g'}{\Leftrightarrow}} g'(\alpha)>g'(\xi)>g'(\beta)\Leftrightarrow g'(\beta)<g'(\xi)<g'(\alpha)\Leftrightarrow$$

$$\frac{2021}{\beta}<\frac{2021}{\xi}<\frac{2021}{\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{\beta}<\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{\beta}<\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\alpha}$$

Γ₄. Είναι γνωστό ότι σημεία που είναι συμμετρικά ως τον άξονα $x'x$ έχουν ίσες τετμημένες και αντίθετες τεταγμένες ,επομένως για να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ για το οποίο ,τα σημεία $A(x_0,f(x_0))$ και $B(x_0,g(x_0))$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=-g(x)\Leftrightarrow f(x)+g(x)=0$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Θεωρώ συνάρτηση $h(x)=f(x)+g(x)=e^x+2021\ln x$

Είναι $h'(x)=e^x+\dfrac{2021}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ έχουμε $A=(0,1]$ και $h\nearrow$ άρα $h(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}h(x),h(1)\right]$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x+2021\ln x\right)=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}e^x=1$

και $h(1)=e+2021\ln1=e$ άρα $h(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}h(x),h(1)\right]=(-\infty,e]$

το μηδέν περιέχεται στο σύνολο τιμών της h άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$ και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ το x_0 θα είναι μοναδικό.

<u>2ος τρόπος</u>

Θεωρώ συνάρτηση $h(x)=f(x)+g(x)=e^x+2021\ln x$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x+2021\ln x\right)=1+2021(-\infty)=-\infty$ Επομένως υπάρχει κοντά στο 0 θετικός αριθμός θ τέτοιος ώστε $h(\theta)<0$.

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[\theta,1]\subseteq(0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$h(\theta)<0$ και $h(1)=e+2021\ln1=e>0$

Άρα $h(\theta)h(1)<0$ επομένως σύμφωνα με το Θ. Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)+g(x_0)=0$.

Είναι $h'(x)=e^x+\dfrac{2021}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ που σημαίνει ότι έχει στο $(0,1)$ μοναδική ρίζα το x_0 .

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. $f'(2)<0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}<0$, θα είναι $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}<0$ και επειδή βρισκόμαστε σε διάστημα της μορφής $(2,2+\delta)$ με $\delta>0$ (περιοχή του 2 από δεξιά) έχουμε $f(x)-f(2)<0$, αφού $x-2>0$ για κάθε $x\in(2,2+\delta)$ συνεπώς υπάρχει $\theta\in(2,2+\delta)$ τέτοιο ώστε $f(\theta)-f(2)<0 \Leftrightarrow f(\theta)-2<0$

Θεωρώ συνάρτηση $g(x)=f(x)-2$

Η g είναι συνεχής στο $[\theta,6]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$g(\theta)=f(\theta)-2<0$

$g(6)=f(6)-2=10-2=8>0$ άρα $g(\theta)g(6)<0$ άρα συμφώνα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(\theta,6)\subseteq(2,6)$ τέτοιο ώστε $g(x_1)=0 \Leftrightarrow f(x_1)-2=0 \Leftrightarrow f(x_1)=2$.

Δ₂. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2,6]$ άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2\in(2,6)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_2)=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{10-2}{4}=2>0$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[2,x_2]$ άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_3\in(2,x_2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_3)=\dfrac{f'(x_2)-f'(2)}{x_2-2}>0$ γιατί

$f'(2)<0 \Leftrightarrow -f'(2)>0 \overset{f'(x_2)>0}{\Leftrightarrow} f'(x_2)-f'(2)>0$ και $x_2>2 \Leftrightarrow x_2-2>0$

Δ₃. Έχουμε $f(x)+2=f(x+1) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)-2=0$

Θεωρώ συνάρτηση $k(x)=f(x+1)-f(x)-2$.

Έστω η εξίσωση $k(x)=0$ είναι **αδύνατη** στο διάστημα $[2,5]$, δηλαδή θα είναι k συνεχής στο $[2,5]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και $k(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[2,5]$.

Άρα η k διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[2,5]$, δηλαδή θα είναι για κάθε $x\in[2,5]$ $k(x)>0$ ή $k(x)<0$.

Έστω $k(x)<0$ για κάθε $x\in[2,5]$ τότε

Για $x=2$ είναι $k(2)<0 \Leftrightarrow f(3)-f(2)-2<0 \Leftrightarrow f(3)-f(2)<2$

Για $x=3$ είναι $k(3)<0 \Leftrightarrow f(4)-f(3)-2<0 \Leftrightarrow f(4)-f(3)<2$

Για $x=4$ είναι $k(4)<0 \Leftrightarrow f(5)-f(4)-2<0 \Leftrightarrow f(5)-f(4)<2$

Για $x=5$ είναι $k(5)<0 \Leftrightarrow f(6)-f(5)-2<0 \Leftrightarrow f(6)-f(5)<2$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$f(6)-f(2)<8 \Leftrightarrow 10-2<8 \Leftrightarrow 8<8$ Άτοπο.

Όμοια αν υποθέσουμε ότι $k(x)>0$ για κάθε $x\in[2,5]$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα η εξίσωση $k(x)=0 \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)+2=f(x+1)$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[2,5]$.

Δ₄. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2,x_1]$ και $f(2)=f(x_1)=2$,

άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2,x_1)$

τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$

Η f είναι κυρτή στο $[2,2021]$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,2021)$

Για $2<x<\xi \overset{f'\ \text{γν. Αυξ}}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x)<0$

Για $x>\xi \overset{f'\ \text{γν. Αυξ}}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x)>0$

x	2		ξ		2021
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘		↗	
	T.M		T.E		T.M

- Η f είναι συνεχής στο $[2,\xi]$ και $f'(x)<0$ στο $(0,\xi)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,\xi]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[\xi,2021]$ και $f'(x)>0$ στο $(\xi,2021)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi,2021]$.
- Η f για $x=2$ (Άκρο κλειστού διαστήματος) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(2)=2$
- Η f για $x=\xi$ παρουσιάζει (Ολικό)ελάχιστο το $f(\xi)$
- Η f για $x=2021$ (Άκρο κλειστού διαστήματος) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(2021)$.