3_Διαγώνισμα_2021

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 7)

A_2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να «δώσετε» την γεωμετρική του ερμηνεία.

(Μονάδες 4)

A_3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)=0$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας ,στο τετράδιό σας το γράμμα **Α** ,αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (Μονάδες 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

(Μονάδες 3)

A_4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Κάθε συνάρτηση, που είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

(Μονάδες 2)

β. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

(Μονάδες 2)

γ. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

(Μονάδες 2)

δ. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu\ge 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

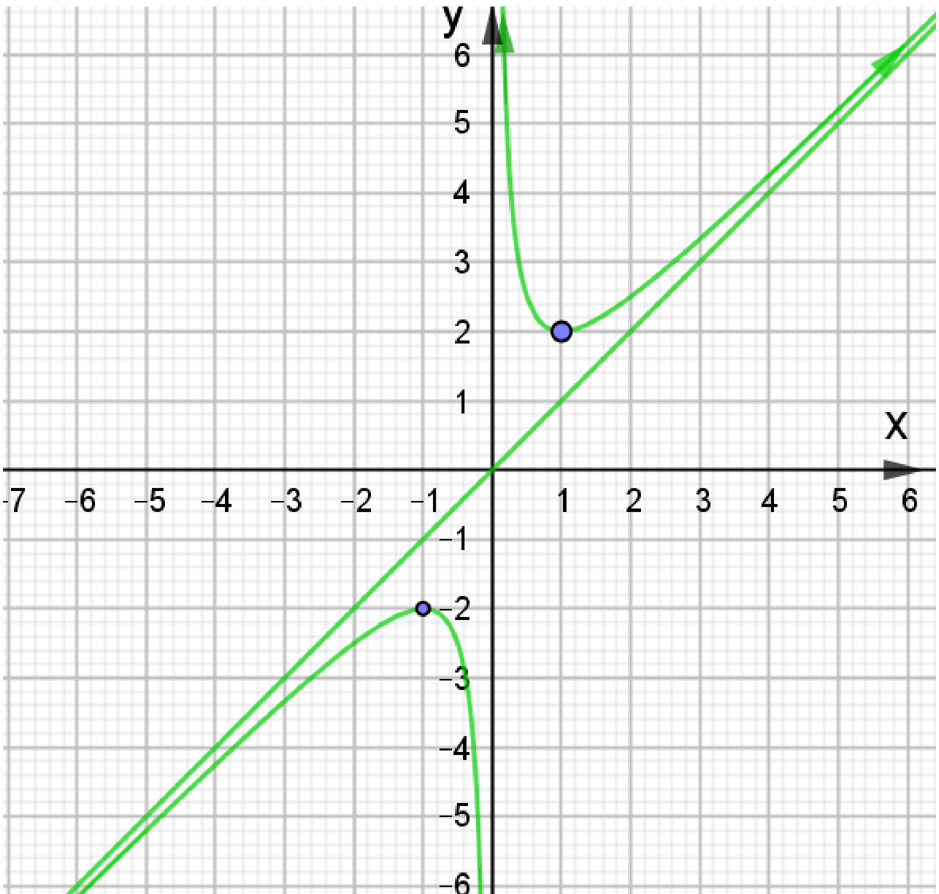
(Μονάδες 2)

ε. Μία συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ, όταν ένα κινητό ,που κινείται πάνω στην C_f, για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά την αρνητική φορά.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και οι ασύμπτωτες ευθείες της.



B₁. Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών.

(Μονάδες 5)

B₂. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, κυρτότητας και τα τοπικά ακρότατα.

(Μονάδες 4)

B₃. Να υπολογίσετε τα όρια .

i. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ **ii.** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ **iii.** $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ **iv.** $\lim_{x\to +\infty} [f(x)-x]$.

(Μονάδες 4)

Β₄. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2[f(x)+4042]-x^3}{2xf(x)+e^{-x}}$.

(Μονάδες 6)

Β₅. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g , για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύουν:

- $f'(x)=g(x)$
- $g'(x)=-f(x)$
- $f(0)=0$
- $g(0)=1$.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=[f(x)-\eta\mu x]^2+[g(x)-\sigma\upsilon\nu x]^2$ είναι σταθερή.

(Μονάδες 5)

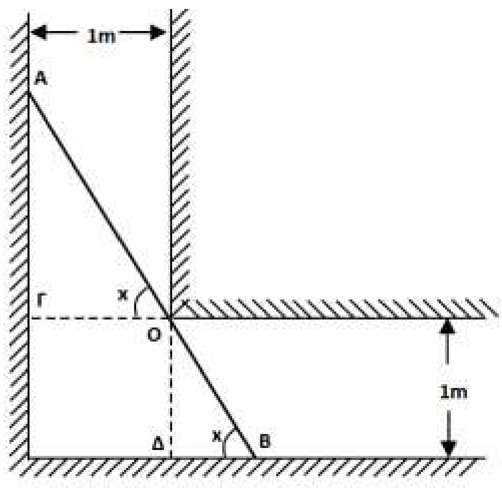
Γ₂. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

(Μονάδες 5)

Γ₃. Αν $k(x)=\dfrac{1}{x}f(x)$, $x\neq 0$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}k\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(Μονάδες 5)

Γ₄. Δύο διάδρομοι πλάτους 1m τέμνονται κάθετα (σχήμα).



i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση ΑΒ συναρτήσει της γωνίας x , δίνεται από τη συνάρτηση:

$$w(x)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}\ ,\ \ 0<x<\frac{\pi}{2}\ .$$

ii. Να βρείτε την τιμή της γωνίας x, για την οποία το ΑΒ γίνεται ελάχιστο.

iii. Να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μιας σκάλας που μπορεί αν μεταφερθεί οριζόντια, να στρίψει στην γωνία.

(Μονάδες 3+4+3)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη ,για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x)-(5+x)f(x)=14(x+1)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $3f(x)\geq 2x+9$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο κοινό της σημείο με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 6)

Δ3. Αν γνωρίζετε ότι η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$ τότε:

i. Να δείξετε ότι $\lambda=0$ και $\beta=-14$ **.**

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

(Μονάδες 5+3)

Δ4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2f(x)+3x-5}{e^{x+1}-1}$.

(Μονάδες 5)

Καλή τύχη στις Πανελλαδικές εξετάσεις!!!!!!

Pavlos Vasileiou

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α₁. Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$$

Οπότε $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim\limits_{x \to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0)\right]$

$$= \lim_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x \to x_0}(x-x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α₂. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

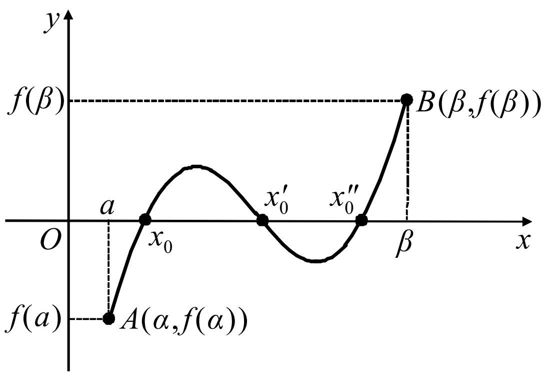
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Γεωμετρική ερμηνεία

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



A$_3$.

α) Ψ

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=-\frac{1}{x^2}+1$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$ τότε έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

Δηλαδή ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}1=1\neq 0$

A$_4$. α ⟶ Λ, β ⟶ Σ, γ ⟶ Λ, δ ⟶ Λ, ε ⟶ Σ

ΘΕΜΑ Β

B$_1$. Από την γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι ο άξονας $y'y$ που έχει εξίσωση $x=0$ είναι η κατακόρυφη ασύμπτωτη. Η πλάγια ασύμπτωτη είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα είναι της μορφής $y=\alpha x$ και επειδή το σημείο $(1,1)$ ανήκει στην ευθεία προκύπτει ότι η πλάγια ασύμπτωτη είναι η ευθεία με εξίσωση $y=x$.

B$_2$. Από την γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
- Η f έχει στο -1 τοπικό μέγιστο το $f(-1)=-2$.
- Η f έχει στο 1 τοπικό ελάχιστο το $f(1)=2$.
- Η C_f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$.
- Η C_f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

B$_3$. Παρατηρώντας την γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι:

i. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

iii. Επειδή η ευθεία με εξίσωση $y = x \Leftrightarrow y = 1x + 0$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lambda = 1$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - x\right] = \beta = 0$

B₄. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left[f(x)+4042\right]-x^3}{2xf(x)+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(f(x)+4042-x\right)}{x^2\left(2\frac{f(x)}{x}+\frac{e^{-x}}{x^2}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f(x)-x\right)+4042}{2\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x^2e^x}} = \frac{0+4042}{2\cdot1+0} = \frac{4042}{2} = 2021$$

B₅. Παρατηρώντας την γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι:

- Αν $\lambda < -2$ τότε η εξίσωσης $f(x) = \lambda$ έχει δυο ρίζες οι οποίες βρίσκονται στο διάστημα $\left(-\infty, 0\right)$.
- Αν $\lambda = -2$ τότε η εξίσωσης $f(x) = \lambda$ έχει μοναδική ρίζα την $x = -1$.
- Αν $-2 < \lambda < 2$ τότε η εξίσωσης $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda = 2$ τότε η εξίσωσης $f(x) = \lambda$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.
- Αν $\lambda > 2$ τότε η εξίσωσης $f(x) = \lambda$ έχει δυο ρίζες οι οποίες βρίσκονται στο διάστημα $\left(0, +\infty\right)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Η συνάρτηση $h(x) = \left[f(x) - \eta\mu x\right]^2 + \left[g(x) - \sigma\upsilon\nu x\right]^2$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2\left[f(x)-\eta\mu x\right]\left[f'(x)-\sigma\upsilon\nu x\right] + 2\left[g(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]\left[g'(x)+\eta\mu x\right] \\ &= 2\left[f(x)-\eta\mu x\right]\left[g(x)-\sigma\upsilon\nu x\right] + 2\left[g(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]\left[-f(x)+\eta\mu x\right] \\ &= 2\left[f(x)-\eta\mu x\right]\left[g(x)-\sigma\upsilon\nu x\right] - 2\left[g(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]\left[f(x)-\eta\mu x\right] = 0, \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση h είναι σταθερή για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Δηλαδή $h(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ₂. Για $x=0$ έχουμε $h(0)=c$ είναι επίσης

$$h(0)=\left[f(0)-\eta\mu 0\right]^2+\left[g(0)-\sigma\upsilon\nu 0\right]^2 \underset{g(0)=1}{\overset{f(0)=0}{=}} (0-0)^2+(1-1)^2=0.$$

Επομένως ο τύπος της h είναι $h(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $h(x)=0 \Leftrightarrow \left[f(x)-\eta\mu x\right]^2+\left[g(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]^2=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς $f(x)-\eta\mu x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)-\sigma\upsilon\nu x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως $f(x)=\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ₃. Είναι $k(x)=\dfrac{1}{x}f(x)=\dfrac{1}{x}\eta\mu x$, $x\neq 0$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0} k\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\dfrac{1}{x}$

Για $x\neq 0$ έχουμε $\left|x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|=|x|\cdot\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\leq |x|$ άρα $-|x|\leq x\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq |x|$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(|x|\right)=0$ σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι

$\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0} k\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$

Γ₄. **i.** Είναι $0<x<\dfrac{\pi}{2}$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{A O \Gamma}$ είναι $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{\mathrm{O\Gamma}}{\mathrm{OA}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\dfrac{1}{\mathrm{OA}} \Leftrightarrow \mathrm{OA}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{BO\Delta}$ είναι $\eta\mu x=\dfrac{\mathrm{O\Delta}}{\mathrm{OB}} \Leftrightarrow \eta\mu x=\dfrac{1}{\mathrm{OB}} \Leftrightarrow \mathrm{OB}=\dfrac{1}{\eta\mu x}$

Άρα $(\mathrm{AB})=(\mathrm{OA})+(\mathrm{OB})=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{1}{\eta\mu x}=\dfrac{1}{g(x)}+\dfrac{1}{f(x)}$

Επομένως η απόσταση AB συναρτήσει της γωνίας x , δίνεται από τη συνάρτηση : $w(x)=\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{g(x)}$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

ii. Η συνάρτηση w είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ με

$$w'(x)=\left(\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=-\frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x}-\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{-\sigma\upsilon\nu^3 x + \eta\mu^3 x}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$w'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu^3 x + \eta\mu^3 x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3 x = \sigma\upsilon\nu^3 x \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \overset{\sigma\upsilon\nu x \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1 \overset{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{4}$$

- $$w'(x) > 0 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu^3 x + \eta\mu^3 x > 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3 x > \sigma\upsilon\nu^3 x \Leftrightarrow \eta\mu x > \sigma\upsilon\nu x \overset{\sigma\upsilon\nu x > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} > 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x > 1 \underset{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\overset{\varepsilon\varphi x \ \gamma\nu.\ \alpha\upsilon\xi}{\Leftrightarrow}} \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$

- $$w'(x) < 0 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu^3 x + \eta\mu^3 x < 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3 x < \sigma\upsilon\nu^3 x \Leftrightarrow \eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x \overset{\sigma\upsilon\nu x > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} < 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x < 1 \underset{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\overset{\varepsilon\varphi x \ \gamma\nu.\ \alpha\upsilon\xi}{\Leftrightarrow}} 0 < x < \frac{\pi}{4}$$

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$w'(x)$	$-$	0	$+$
$w(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

O.E

Όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα η w παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{\pi}{4}$.

Άρα για $x = \frac{\pi}{4}$ η απόσταση AB γίνεται ελάχιστη.

iii. Το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μιας σκάλας που μπορεί, αν μεταφερθεί οριζόντια, να στρίψει στη γωνία είναι ίσο με την ελάχιστη τιμή της απόστασης AB που είναι

$$w\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\eta\mu\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. Η (2) για $x=0$ δίνει $3f(0)\geq 9 \Leftrightarrow f(0)\geq 3 \quad (3)$

Η (1) για $x=0$ δίνει

$$f^2(0)-5f(0)=14 \Leftrightarrow f^2(0)-5f(0)-14=0 \Leftrightarrow f(0)=-2 \text{ ή } f(0)=7$$

και λόγω της (3) προκύπτει $f(0)=7$, άρα το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ είναι το $A(0,7)$.

Επειδή οι συναρτήσεις $f^2(x)$,$(5+x)$,$f(x)$ και $14(x+1)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$,μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της (1)

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left(f^2(x)-(5+x)f(x)\right)'=\left(14(x+1)\right)' \Rightarrow 2f(x)f'(x)-f(x)-(5+x)f'(x)=14 \quad (4)$$

Η (4) για $x=0$ δίνει

$$2f(0)f'(0)-f(0)-5f'(0)=14 \overset{f(0)=7}{\Leftrightarrow} 14f'(0)-7-5f'(0)=14 \Leftrightarrow f'(0)=\frac{7}{3}.$$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,7)$ είναι:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-7=\frac{7}{3}x \Leftrightarrow y=\frac{7}{3}x+7 .$$

Δ₂. Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ το τοπικό ακρότατο θα το παρουσιάζει υποχρεωτικά σε εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε θα είναι $f'(x_0)=0$

Από τη σχέση (4) για $x=x_0$ έχουμε

$$2f(x_0)f'(x_0)-f(x_0)-(5+x_0)f'(x_0)=14 \overset{f'(x_0)=0}{\Rightarrow} f(x_0)=-14$$

Από τη σχέση (1) για $x=x_0$ έχουμε

$$f^2(x_0)-(5+x_0)f(x_0)=14(x_0+1) \overset{f(x_0)=-14}{\Rightarrow} (-14)^2-(5+x_0)(-14)=14x_0+14 \Leftrightarrow$$

$196+70+14x_0=14x_0+14 \Leftrightarrow 266=14$ που είναι Άτοπο .

Άρα η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Έχουμε λοιπόν $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f'(0)=\frac{7}{3}>0$ θα είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ₃. **i.** Από υπόθεση έχουμε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\beta\in\mathbb{R}$.

Για $x\neq 0$ από την (1) έχουμε

$\frac{f^2(x)}{x^2}-\frac{(5+x)}{x}\frac{f(x)}{x}=\frac{14(x+1)}{x^2}$ (5) είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^2(x)}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2=\lambda^2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5+x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{14(x+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{14x+14}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{14x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{14}{x}=0$ οπότε από την (5) έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^2(x)}{x^2}-\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(5+x)}{x}\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{14(x+1)}{x^2}\Rightarrow\lambda^2-\lambda=0\Leftrightarrow$$

$\lambda(\lambda-1)=0\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\lambda=1$ (6) .

Για $x<0$ από την (2) έχουμε $3f(x)\geq 2x+9\overset{x<0}{\Leftrightarrow}\frac{f(x)}{x}\leq\frac{2}{3}+\frac{3}{x}$ (7)

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{x}\right)=\frac{2}{3}$

οπότε από την (7) έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\leq\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{x}\right)\Rightarrow\lambda\leq\frac{2}{3}$ (8)

άρα από τις σχέσεις (6) και (8) προκύπτει $\lambda=0$.

Επομένως είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\beta$ και $\lambda=0$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\beta$ (9)

Για $x\in\left(-\infty,-2021\right)$ (δηλαδή για x κοντά στο $-\infty$) από την (1) έχουμε

$$f^2(x)-(5+x)f(x)=14(x+1)\Leftrightarrow(5+x)f(x)=f^2(x)-14(x+1)\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\frac{f^2(x)}{x+5}-\frac{14(x+1)}{x+5}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{x+5}f^2(x)-\frac{14(x+1)}{x+5}\quad(10)$$

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+5}f^2(x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+5}\lim_{x\to-\infty}\left(f^2(x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+5}\left(\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)^2\overset{(9)}{=}0.\beta^2=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{14(x+1)}{x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{14x+14}{x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{14x}{x}=14$$

Οπότε από την (10) έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+5}f^2(x)-\lim_{x\to-\infty}\frac{14(x+1)}{x+5}\Rightarrow\beta=0-14\Leftrightarrow\beta=-14.$$

ii. Για το σύνολο τιμών της f γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\overset{(9)}{=}\beta=-14$

και από την (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $3f(x)\geq 2x+9\Leftrightarrow f(x)\geq\frac{2}{3}x+3$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}x+3\right)=+\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=(-14,+\infty)$

Δ₄. Η (1) για $x=-1$ δίνει

$f^2(-1)-4f(-1)=0\Leftrightarrow f(-1)\big(f(-1)-4\big)=0\Leftrightarrow f(-1)=0$ ή $f(-1)=4$

από την (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $3f(x)\geq 2x+9$ για $x=-1$ προκύπτει

$3f(-1)\geq -2+9\Leftrightarrow f(-1)\geq\frac{7}{3}$ επομένως $f(-1)=4$.

Η (4) για $x=-1$ δίνει

$$2f(-1)f'(-1)-f(-1)-4f'(-1)=14\overset{f(-1)=4}{\Rightarrow}8f'(-1)-4-4f'(-1)=14\Leftrightarrow f'(-1)=\frac{9}{2}.$$

f και f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-1}\frac{2f(x)+3x-5}{e^{x+1}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to-1}\frac{\left(2f(x)+3x-5\right)'}{\left(e^{x+1}-1\right)'}=\lim_{x\to-1}\frac{2f'(x)+3}{e^{x+1}}=$$

$$\frac{2f'(-1)+3}{1}=2\frac{9}{2}+3=12.$$