1_Διαγώνισμα_2024
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A_1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:

Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

(Μονάδες 7)

A_2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 4)

A_3. Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, τότε $f'(x)>0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ».
α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

(Μονάδες 1+3)

A_4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ 'ένα διάστημα (α,β) και $x_0\in(\alpha,\beta)$. Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε το $A\left(x_0,f(x_0)\right)$ είναι οπωσδήποτε σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.

(Μονάδες 2)

β. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx \ge 0$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 2)

γ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με f' συνεχή στο $[\alpha,\beta]$, τότε ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right)' = \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx$.

(Μονάδες 2)

δ. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

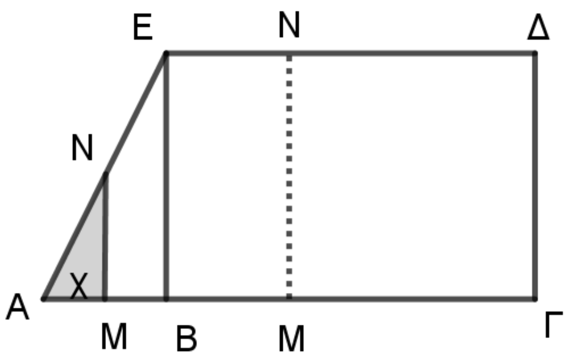
(Μονάδες 2)

ε. Η γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,f(0))$.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Στο διπλανό σχήμα το $AB E$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο και το $BE\Delta\Gamma$ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με $AB=4cm$, $A\Gamma=16cm$ και $\Gamma\Delta=8cm$.
Το σημείο M κινείται στο τμήμα $A\Gamma$ από το A προς το Γ και το τμήμα MN είναι πάντα κάθετο στην $A\Gamma$.



B₁. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση της μετατόπισης $x = AM$ δίνεται από τον τύπο:

$$E(x)=\begin{cases} x^2 & , 0\le x\le 4 \\ 8x-16 & , 4<x\le 16 \end{cases}$$

(Μονάδες 6)

Β₂. Να μελετήσετε την συνάρτηση E ως προς την συνέχεια.

(Μονάδες 5)

Β₃. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) της γραφικής παράστασης της E στο σημείο της $\mathrm{A}\left(4,\mathrm{E}(4)\right)$.

(Μονάδες 6)

Β₄. Να δείξετε ότι η E αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι πολυωνυμικές συναρτήσεις $f(x)$ βαθμού $\nu \geq 2$ και $k(x)$ πρώτου βαθμού.

Γ₁. Να βρείτε το βαθμό $\nu \geq 2$ της πολυωνυμική συνάρτηση f αν ισχύει

$$\frac{1}{36}f'(x)\cdot f''(x)+k(x)=f(x) \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R} .$$

(Μονάδες 5)

Αν η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ είναι τρίτου βαθμού τέτοια ώστε το $f(x)+3$ να διαιρείται με το $(x-1)^2$ και το $f(x)-5$ να διαιρείται με το $(x+1)^2$.

Γ₂. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=2x^3-6x+1$.

(Μονάδες 6)

Γ₃. i. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε τρία ακριβώς σημεία $A(\rho_1,0)$, $B(\rho_2,0)$ και $\Gamma(\rho_3,0)$ με $\rho_1\in(-2,-1)$, $\rho_2\in(0,1)$ και $\rho_3\in(1,2)$.

(Μονάδες 3)

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f\left(f(x)\right)=0$.

(Μονάδες 5)

Γ₄. Αν $h(x)=-\frac{7}{4}x^3+6x-1$ με $x\in(0,+\infty)$, τότε να ορίσετε την συνάρτηση $\varphi(x)=(f+h)(x)$ και να βρείτε την εξίσωση της

εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της φ, στο σημείο της , που ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι τριπλάσιος από τον θετικό ρυθμό μεταβολής της τετμημένης.

(Μονάδες 6 (1+5))

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο και F μια αρχική της στο διάστημα $[0,1]$ και για την f ισχύει:

$$\int_0^1 f(x)dx=0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$,ώστε $f(x_0)=0$.

(Μονάδες 6)

Αν γνωρίζετε ότι η αρχή των αξόνων είναι σημείο της γραφικής παράσταση της F και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $\Lambda(1,F(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+2024^{2024}$ τότε:

Δ2. Να αποδείξετε ότι $F(1)=0$.

(Μονάδες 3)

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=F(x)-F(1-x)+2024$ έχει δύο τουλάχιστον κρίσιμα σημεία.

(Μονάδες 6)

Δ4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$A=\int_0^1 xf'(x)dx \qquad \text{και} \qquad B=\int_0^1 2026x^{2025}dx\ .$$

(Μονάδες 3(2+1))

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=2026x^{2024}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

(Μονάδες 7)

Pavlos Vasileiou

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α₁. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

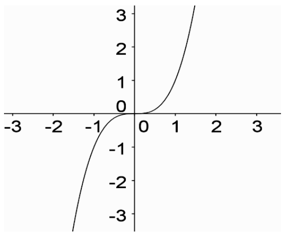
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α₂. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R} .$$

Α₃. α) Ψ



β) Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Α₄. α $\longrightarrow$ Λ β $\longrightarrow$ Λ, γ $\longrightarrow$ Λ, δ $\longrightarrow$ Σ, ε $\longrightarrow$ Λ

ΘΕΜΑ Β

Β$_1$. ● Αν $0<x\le 4$

Τα τρίγωνα AMN και ABE είναι όμοια οπότε:

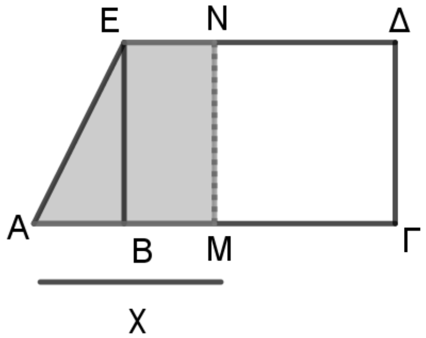
$$\frac{(AM)}{(AB)}=\frac{(MN)}{(BE)}\Leftrightarrow\frac{x}{4}=\frac{(MN)}{8}\Leftrightarrow(MN)=2x \qquad (BE)=(\Gamma\Delta)=8$$

Επομένως το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου δίνεται από τον τύπο

$E=\frac{1}{2}(AM)(MN)$ δηλαδή $E(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2x=x^2$ με $0<x\le 4$.

Αν $x=0$ τότε προφανώς $E=0$, άρα $E(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2x=x^2$ με $0\le x\le 4$.

● Αν $4<x\le 16$



Τότε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι:

$E=(ABE)+(BMNE)$

δηλαδή $E(x)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8+(x-4)\cdot 8=8x-16$

ή $E=(AMNE)=\frac{(AM)+(EN)}{2}\cdot(BE)$

δηλαδή $E(x)=\frac{x+(x-4)}{2}\cdot 8=(2x-4)\cdot 4=8x-16$

Επομένως $E(x)=\begin{cases} x^2 & ,0\le x\le 4\\ 8x-16 & ,4<x\le 16\end{cases}$

B₂. Η Ε είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,4)$ και $(4,16]$ ως πολυωνυμική.

Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} E(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} x^2=16=E(4)\\ \lim\limits_{x\to 4^+} E(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(8x-16)=16\end{array}\right\}\text{Επομένως } \lim\limits_{x\to 4^-} E(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} E(x)=E(4)$$

Άρα η Ε είναι συνεχής στο $x_0=4$ οπότε είναι συνεχής στο $[0,16]$.

B₃. $$\lim_{x\to 4^-}\frac{E(x)-E(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4^-}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4^-}(x+4)=8$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{E(x)-E(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4^+}\frac{8x-16-16}{x-4}=\lim_{x\to 4^+}\frac{8x-32}{x-4}=\lim_{x\to 4^+}\frac{8(x-4)}{x-4}=8$$

Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=4$ με $E'(4)=8$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) της γραφικής παράστασης της Ε στο $A(4,E(4))$ είναι

$$y-E(4)=E'(4)(x-4)\Leftrightarrow y-16=8(x-4)\Leftrightarrow y=8x-16$$

B₄. Αν $0\le x<4$ είναι $E'(x)=2x$ και για $4<x\le 16$ είναι $E'(x)=8$

Και επειδή η Ε είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=4$ με $E'(4)=8$ είναι

$$E'(x)=\begin{cases}2x & ,\ 0\le x\le 4\\ 8 & ,\ 4<x\le 16\end{cases}$$ δηλαδή $E'(x)>0$ στο $(0,16)$ άρα η $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,16]$ και επομένως και $1-1$ άρα αντιστρέφεται.

Στο $A_1=[0,4]$ η $E(x)$ είναι γν. αύξουσα άρα $E(A_1)=[E(0),E(4)]=[0,16]$

Στο $A_1=[0,4]$ ισχύει $y=E(x)\Leftrightarrow y=x^2\Leftrightarrow x=\sqrt{y}$

Στο $A_2=(4,16]$ η $E(x)$ είναι γν. αύξουσα άρα

$$E(A_2)=\left(\lim_{x\to 4^+}E(x),E(16)\right]=(16,112]$$

Στο $A_2=(4,16]$ισχύει $y=E(x)\Leftrightarrow y=8x-16\Leftrightarrow x=\dfrac{y+16}{8}$

Επομένως $E^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ,\ x\in[0,16]\\ \dfrac{x+16}{8} & ,\ x\in(16,112]\end{cases}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Αν $f(x)$ πολυώνυμο ν βαθμού τότε $f'(x)$ θα είναι πολυώνυμο $\nu-1$ βαθμού και $f''(x)$ θα είναι πολυώνυμο $\nu-2$ βαθμού.

Από τη σχέση $\dfrac{1}{36}f'(x)\cdot f''(x)+k(x)=f(x)\Leftrightarrow\dfrac{1}{36}f'(x)\cdot f''(x)=f(x)-k(x)$

Έχουμε ότι το $\dfrac{1}{36}f'(x)\cdot f''(x)$ είναι πολυώνυμο $(\nu-1)+(\nu-2)=2\nu-3$ βαθμού , ενώ το $f(x)-k(x)$ είναι πολυώνυμο ν βαθμού $(\nu\geq 2)$.

Επομένως πρέπει $2\nu-3=\nu\Leftrightarrow\nu=3$

Γ₂. Από την υπόθεση έχουμε:

$f(x)+3\ =(x-1)^2\cdot\varphi(x)$

$f(x)-5=(x+1)^2\cdot\sigma(x)$

όπου $\varphi(x)$ και $\sigma(x)$ πολυώνυμα πρώτου βαθμού.

Με παραγωγίση παίρνουμε:

$f'(x)=2(x-1)\varphi(x)+(x-1)^2\varphi'(x)=(x-1)[2\varphi(x)+(x-1)\varphi'(x)]$

$f'(x)=2(x+1)\sigma(x)+(x+1)^2\sigma'(x)=(x+1)[2\sigma(x)+(x-1)\sigma'(x)]$

Δηλαδή το πολυώνυμο $f'(x)$διαιρείται με το $x+1$ και με το $x-1$ και επειδή είναι δευτέρου βαθμού(αφού η $f(x)$ είναι τρίτου βαθμού) θα έχει τη μορφή: $f'(x)=\alpha(x+1)(x-1)=\alpha(x+1)(x-1)=\alpha(x^2-1)=\alpha x^2-\alpha$.

Συνεπώς έχουμε:

$$f'(x) = \left(\alpha\frac{x^3}{3} - \alpha x\right)' \text{ αρά } f(x) = \alpha\frac{x^3}{3} - \alpha x + c$$

Από υπόθεση όμως έχουμε: $f(1) = -3$ και $f(-1) = 5$

$$f(1) = -3 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{3} - \alpha + c = -3 \Leftrightarrow -2\alpha + 3c = -9 \quad (1)$$

$$f(-1) = 5 \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{3} + \alpha + c = 5 \Leftrightarrow 2\alpha + 3c = 15 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε $\alpha = 6$ και $c = 1$ επομένως:

$$f(x) = \alpha\frac{x^3}{3} - \alpha x + c = 6\frac{x^3}{3} - 6x + 1 = 2x^3 - 6x + 1$$

Γ₃. i. Η f είναι συνεχής στο $[-2,-1]$ ως πολυωνυμική

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = -3 < 0 \\ f(-1) = 5 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2)f(-1) < 0$$ άρα σύμφωνα με το Θ.Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_1 \in (-2,-1)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1) = 0$. Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(\rho_1, 0)$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -3 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)f(1) < 0$$ άρα σύμφωνα με το Θ.Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_2) = 0$. Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(\rho_2, 0)$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -3 < 0 \\ f(2) = 5 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)f(2) < 0$$ άρα σύμφωνα με το Θ.Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_3 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_3) = 0$. Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Gamma(\rho_3, 0)$.

Επειδή η f είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού οι ρ_1, ρ_2 και ρ_3 είναι οι μόνες ρίζες της.

ii. Το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f\big(f(x)\big)=0$ είναι το συνολικό πλήθος λύσεων των εξισώσεων $f(x)=\rho_1$, $f(x)=\rho_2$ και $f(x)=\rho_3$.

Είναι $f'(x)=6x^2-6$
Στο διπλανό πίνακα βλέπουμε την μονοτονία της f.
Με χρήση της συνέχειας και της μονοτονίας της f κατά διαστήματα , βρίσκουμε τα σύνολα τιμών σε κάθε διάστημα.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		Τ.Μ 5		Τ.Ε -3	

Στο $A_1=(-\infty,-1]$ η $f\nearrow$ άρα $f(A_1)=\Big(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(-1)\Big]=\big(-\infty,5\big]$

Στο $A_2=\big[-1,1\big]$ η $f\searrow$ άρα $f(A_2)=\big[f(1),f(-1)\big]=\big[-3,5\big]$

Στο $A_3=\big[1,+\infty\big)$ η $f\nearrow$ άρα $f(A_3)=\Big[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\Big)=\big[-3,+\infty\big)$

Το $\rho_1\in(-2,-1)\subseteq A_1$ και $\rho_1\in f(A_1)$, $\rho_1\in f(A_2)$, $\rho_1\in f(A_3)$ και λαμβάνοντας υπόψη και την μονοτονία της f συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\rho_1$ έχει ακριβώς τρείς ρίζες.

Το $\rho_2\in(0,1)\subseteq A_2$ και $\rho_2\in f(A_1)$, $\rho_2\in f(A_2)$, $\rho_2\in f(A_3)$ και λαμβάνοντας υπόψη και την μονοτονία της f συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\rho_2$ έχει ακριβώς τρείς ρίζες.

Το $\rho_3\in(1,2)\subseteq A_3$ και $\rho_3\in f(A_1)$, $\rho_3\in f(A_2)$, $\rho_3\in f(A_3)$ και λαμβάνοντας υπόψη και την μονοτονία της f συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\rho_3$ έχει ακριβώς τρείς ρίζες.
Άρα η εξίσωση $f\big(f(x)\big)=0$ έχει 9 διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Γ₄. Έχουμε $f(x)=2x^3-6x+1,\ x\in\mathbb{R}$ και $h(x)=-\dfrac{7}{4}x^3+6x-1$ με $x\in(0,+\infty)$. Η $\varphi(x)=(f+h)(x)$ έχει πεδίο ορισμού $D_\varphi=D_f\cap D_h=(0,+\infty)$ και τύπο $\varphi(x)=f(x)+h(x)=2x^3-6x+1-\dfrac{7}{4}x^3+6x-1=\dfrac{1}{4}x^3$.

Δηλαδή $\varphi(x)=\frac{1}{4}x^3$, $x\in(0,+\infty)$

Έχουμε $y(t)=\frac{1}{4}x^3(t)$ άρα $y'(t)=\frac{3}{4}x^2(t)x'(t)$ την χρονική στιγμή t_0 που είναι $y'(t_0)=3x'(t_0)$ ισχύει

$$y'(t_0)=\frac{3}{4}x^2(t_0)x'(t_0)\Leftrightarrow 3x'(t_0)=\frac{3}{4}x^2(t_0)x'(t_0)\overset{x'(t)>0}{\Leftrightarrow}$$

$1=\frac{1}{4}x^2(t_0)\Leftrightarrow x^2(t_0)=4\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x(t_0)=2$, οπότε $y(t_0)=\frac{1}{4}x^3(t_0)=\frac{1}{4}\cdot 2^3=2$.

Επομένως το σημείο της C_φ στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι τριπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης είναι το $A(2,2)$. Είναι $\varphi'(x)=\frac{3}{4}x^2$ και η εξίσωση της εφαπτομένης της C_φ στο $A(2,2)$ είναι

$$y-\varphi(2)=\varphi'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-2=3(x-2)\Leftrightarrow y=3x-4$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. Έστω $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Επειδή η f είναι συνεχής ,θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,1)$. Έστω $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Θα ισχύει $\lim_{x\to 0^+}f(x)\geq 0$ δηλαδή $f(0)\geq 0$ και $\lim_{x\to 1^-}f(x)\geq 0$ δηλαδή $f(1)\geq 0$
Επομένως είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και επειδή η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[0,1]$ θα ισχύει $\int_0^1 f(x)dx>0$ **άτοπο.**
Ομοίως αν $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$.
Συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$,ώστε $f(x_0)=0$.

Δ₂. Αφού το $(0,0)\in C_F$ θα είναι $F(0)=0$

$$\int_0^1 f(x)dx=0\Leftrightarrow [F(x)]_0^1=0\Leftrightarrow F(1)-F(0)=0\Leftrightarrow F(1)=F(0)=0$$

Δ₃. $h(x)=F(x)-F(1-x)+2024$ για το πεδίο ορισμού της h έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} x\in[0,1] \\ 1-x\in[0,1]\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 0\le x\le 1 \\ 0\le 1-x\le 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 0\le x\le 1 \\ -1\le -x\le 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow 0\le x\le 1 \text{ άρα } D_h=[0,1].$$

Οι συναρτήσεις F και $1-x$ είναι παραγωγίσιμες στο $[0,1]$ καθώς και η $F(1-x)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων , άρα και η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ με

$$h'(x)=F'(x)+F'(1-x)=f(x)+f(1-x)$$

$$\left.\begin{array}{l} h(0)=F(0)-F(1)+2024=0-0+2024=2024 \\ h\left(\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)+2024=2024\end{array}\right\}\Rightarrow h(0)=h\left(\frac{1}{2}\right)$$

Άρα σύμφωνα με το Θ.Rolle Θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi_1)=0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ με

$$h'(x)=F'(x)+F'(1-x)=f(x)+f(1-x)$$

$$\left.\begin{array}{l} h\left(\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)+2024=2024 \\ h(1)=F(1)-F(0)+2024=0-0+2024=2024\end{array}\right\}\Rightarrow h\left(\frac{1}{2}\right)=h(1)$$

Άρα σύμφωνα με το Θ.Rolle Θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi_2)=0$.

Συνεπώς η h' έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, δηλαδή έχει δύο τουλάχιστον κρίσιμα σημεία.

Δ₄. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $\Lambda(1,F(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) $y=x+2024^{2024}$, άρα $F'(1)=1$ δηλαδή $f(1)=1$ γιατί $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$.

$$A=\int_0^1 xf'(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx=1f(1)-0f(0)-0=1$$

$$B=\int_0^1 2026x^{2025}dx=\left[x^{2026}\right]_0^1=1-0=1$$

Δ₅. $A=B\Leftrightarrow\int_0^1 xf'(x)dx=\int_0^1 2026x^{2025}dx\Leftrightarrow$

$$\int_0^1 xf'(x)dx-\int_0^1 2026x^{2025}dx=0\Leftrightarrow$$

$\int_0^1 (xf'(x)-2026x^{2025})dx=0$ Θέτω $k(x)=xf'(x)-2026x^{2025}$ που είναι συνεχής στο $[0,1]$ως πράξεις συνέχων συναρτήσεων και $\int_0^1 k(x)dx=0$, άρα σύμφωνα με το $Δ_1$ ερώτημα υπάρχει $x_0\in(0,1)$,ώστε

$$k(x_0)=0\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-2026x_0^{2025}=0\overset{x_0\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x_0)-2026x_0^{2024}=0\Leftrightarrow$$
$$f'(x_0)=2026x_0^{2024}.$$