

Μαθηματικά Α' Λυκείου

Διαγώνισμα ΣΤΑ ΑΠΟΛΥΤΑ

2025-2026

ΘΕΜΑ 1:

A. Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού. (M.5)

B. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

i) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$. (M.5)

ii) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ και να αιτιολογήσετε πότε ισχύει ως ισότητα; (M.5)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. (M.10) (θυμόμαστε ότι $\sqrt{\kappa^2} = |\kappa|$)

i) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β θα ισχύει ότι: $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

ii) Αν α, β αντίθετοι πραγματικοί τότε $|\alpha| = -|\beta|$.

iii) Αν α, β πραγματικοί μη μηδενικοί και ισχύει ότι: $\alpha^2 < \beta^2$ τότε $|\alpha| < |\beta|$.

iv) Αν α, β πραγματικοί αρνητικοί και ισχύει ότι: $\alpha^3 < \beta^3$ τότε $|\alpha| < |\beta|$.

v) Αν $\alpha < \beta < \gamma$ τότε ισχύει ότι: $d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma) = d(\alpha, \gamma)$

ΘΕΜΑ 2:

A. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, να αποδείξετε ότι: i) $|\alpha| \leq 1$

ii) $|\beta| \leq 1$ iii) $|\alpha\beta| \leq \frac{1}{2}$ (M.6)

B. Για τον μη μηδενικό αριθμό a να αποδείξετε ότι: $\left| \alpha + \frac{1}{a} \right| \geq 2$ (M.7)

Γ. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί την συνθήκη $d(x, -1) \leq 2$ α) Να αποδώσετε λεκτικά τη σχέση β) Με τη χρήσης του άξονα των πραγματικών αριθμών να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x . γ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το συμπέρασμα του β ερωτήματος δ) Να αποδείξετε ότι $|x+3| + |x-1| = 4$ (M.12)

ΘΕΜΑ 3:

A. Αν για κάθε πραγματικό αριθμό $x \neq \pm 1$ είναι $f(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}$ να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ \frac{1}{x}, & |x| > 1 \end{cases} \quad (\text{M.12})$$

B. Αν α, β πραγματικοί και το διάστημα $[\beta-\alpha-3, \alpha+\beta-1]$ έχει κέντρο το 3 και ακτίνα 2 να βρεθούν τα α, β και το διάστημα. **(M.8)**

Γ. Να αποδείξετε ότι $|2a+9| \leq 3|a+2| \Rightarrow |a| \geq 3$. **(M.5)**

ΘΕΜΑ 4:

A. Αν $|x| > 1$ και $|y| > 1$ να αποδείξετε ότι: $\left| \frac{x+y}{xy+1} \right| < 1$. **(M.9)**

B. Σε έναν άξονα αντιστοιχούμε τα σημεία A, B, M στους αριθμούς 6, 10, χ αντίστοιχα. α) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των $|x-6|$ και $|x-10|$ Αν ισχύει ότι: $|x-6| + |x-10| = 4$ β) Να αποδείξετε γεωμετρικά ότι το σημείο M είναι μεταξύ των A, B. β) Να αποδείξετε αλγεβρικά ότι το σημείο M είναι μεταξύ των A, B. δ) Να βρείτε το χ ώστε το σημείο M να είναι μέσο του AB. **(M.16)**

ΚΑΘΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.

Καλή τύχη!