ΣΤΕΛΙΟΣ ΜΙΧΑΗΛΟΓΛΟΥ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΤΟΛΗΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΤΣΙΜΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΟΥΝΤΑΣ

Μαθηματικά

Γ΄ Λυκείου

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΤΕΥΧΟΣ

www.Askisopolis.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΤ

Περιεχόμενα Λύσεων

23.Κανόνας De L' Hospital	3	-	26
24.Θεώρημα Rolle	27	-	92
25.Θεώρημα Μέσης Τιμής	93	-	142
26.Συνέπειες Θ.Μ.Τ. – Σταθερή συνάρτηση	143	-	198
27.Μονοτονία συνάρτησης	199	-	295
28.Ακρότατα συνάρτησης	296	-	372
29.Προβλήματα ακροτάτων	373	-	418
Διαγωνίσματα έως τα ακρότατα	419	-	433
30.Κυρτότητα- Σημεία καμπής	434	-	487
31.Ασύμπτωτες	488	-	537
32.Μελέτη – γραφική παράσταση συνάρτησης	538	-	571
33.Συνδυαστικές επαναληπτικές ασκήσεις			
Επίπεδο Β θέματος	572	-	601
Επίπεδο Γ θέματος	602	-	658
Επίπεδο Δ θέματος	659	-	742
34.Επαναληπτικά διαγωνίσματα	743	-	760
35.Αρχική συνάρτηση	761	-	780
36.Ορισμένο ολοκλήρωμα	781	-	833
37.Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος	834	-	854
38.Ανισοτικές σχέσεις ολοκληρωμάτων	855	-	897
39.Το ορισμένο ολοκλήρωμα και τα θεωρήματα του διαφορικού λογισμού	898	-	910
40.Εμβαδόν επίπεδου χωρίου	911	-	979
41.Διαγωνίσματα στα ολοκληρώματα	980	-	987
42.Συνδυαστικά θέματα σε όλη την ύλη			
Επίπεδο δυσκολίας Β Θέματος	988	-	1035
Επίπεδο δυσκολίας Γ Θέματος	1036	-	1087
Επίπεδο δυσκολίας Δ Θέματος	1088	-	1149
43.Επαναληπτικά διαγωνίσματα	1150	-	1200

23. Κανόνας De L' Hospital

Απροσδιοριστία $0/0$ ή $\pm\infty/\pm\infty$

13.α) Ψευδής

β) i) Έστω $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ τότε ,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{1}=0$ άρα $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$.

ii) Έστω $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $x\neq0$ τότε

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(xe^{-\frac{1}{x}}\right)=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)\overset{-\frac{1}{x}=u}{=}\lim\limits_{u\to-\infty}\left(e^u\right)=0$ και

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-x^2e^{-\frac{1}{x}}\right)=0$.

Άρα ισχύει $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ όμως δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του DLH γιατί το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι της μορφής $\left(\dfrac{0}{+\infty}\right)$.

γ) Έστω $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x$ και $g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ τότε είναι

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{\not2}}{\not x}=1\neq\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x}{1}=2$.

14.α) Η διαδικασία είναι λάθος γιατί για να εφαρμόσουμε τους κανόνες του de L'Hospital πρέπει να έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ ή $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, ενώ εδώ έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\dfrac{0}{\infty}\right)$ άρα δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας.

β) Παρόλο που η διαδικασία δεν είναι σωστή, το αποτέλεσμα είναι σωστό, αφού $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right)=0\cdot0=0$.

15.α) Είναι λάθος ο ισχυρισμός.
Για να εφαρμόσουμε τους κανόνες του de L'Hospital πρέπει να έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$ ή $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ και επιπλέον οι συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες κοντά στο x_0. Εδώ έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$, όμως δεν ξέρουμε αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες κοντά στο x_0 (ξέρουμε ότι είναι παραγωγίσιμες μόνο στο x_0) άρα δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας.

β) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=1.$

Παρόλο που η διαδικασία δεν είναι σωστή , το αποτέλεσμα είναι σωστό.

16.α) Είναι λάθος ο ισχυρισμός.
Για να εφαρμόσουμε τους κανόνες του de L'Hospital πρέπει να έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$ ή $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ και επιπλέον οι συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες κοντά στο x_0. Εδώ έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$, όμως δεν ξέρουμε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)}{1}$ επειδή δεν γνωρίζουμε ότι η f' είναι συνεχής. Άρα δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας.

β) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)-f(x-h)+f(x)}{h}\right)=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right)=f'(x)+f'(x)=2f'(x).$

Παρόλο που η διαδικασία δεν είναι σωστή , το αποτέλεσμα είναι σωστό.

17.Το πρόβλημα της απόδειξης είναι η εφαρμογή του κανόνα De L' Hospital. Δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$. Η πρόταση θα ίσχυε, αν γνωρίζαμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός

18.α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^8-2x+1}{x^4-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8x^7-2}{4x^3}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1-\sigma\upsilon\nu x}{6e^x-6x-4x^2-x^3-6}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\eta\mu x}{6e^x-6-8x-3x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\sigma\upsilon\nu x}{6e^x-8-6x}=-\dfrac{3}{2}$.

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-x^3}{x^2+x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-3x^2}{2x+1}=1.$

στ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\eta\mu x-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sigma\upsilon\nu x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{-\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{-\sigma\upsilon\nu x}=-2$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-x^2-1}{\eta\mu^2 x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{x^2}-2x}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{2}x\left(e^{x^2}-1\right)}{\cancel{2}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\frac{\eta\mu x}{x}\sigma\upsilon\nu x}=0$

η) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{\eta\mu 2x-2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2e^{2x}-2e^{-2x}}{2\sigma\upsilon\nu 2x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{4}e^{2x}+\cancel{4}e^{-2x}}{-\cancel{4}\eta\mu 2x}=$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(-e^{2x}-e^{-2x}\right)\dfrac{1}{\eta\mu 2x}\right]=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-e^{2x}-e^{-2x}\right)=-2$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\eta\mu 2x}=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu 2x=0$ και $\eta\mu 2x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

θ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1+\eta\mu x}=0$

19. **α)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-e^x}{x^2+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+e^x}-\dfrac{e^x}{x^2+e^x}\right)=-1$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\dfrac{1}{2x+e^x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x+e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2+e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}=1.$

β) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(\eta\mu x)}{\ln x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{\eta\mu x}{x}}=1.$

$(\lim\limits_{x\to0^+}\ln(\eta\mu x)\underset{\substack{x\to0^+,\\u\to0^+}}{\overset{u=\eta\mu x}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty).$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2\ln x}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}}{1}=0.$

δ) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(\varepsilon\varphi x)}{\ln(\eta\mu x)}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{\varepsilon\varphi x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\frac{1}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}}{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=1.$

$(\lim\limits_{x\to0^+}\ln(\varepsilon\varphi x)\underset{\substack{x\to0^+,\\u\to0^+}}{\overset{k=\varepsilon\varphi x}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty,\ \lim\limits_{x\to0^+}\ln(\eta\mu x)\underset{\substack{x\to0^+,\\u\to0^+}}{\overset{u=\eta\mu x}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty).$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\ln x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=+\infty.$

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{e^x}{e^x+1}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}=1.$

$(\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x+1)\underset{\substack{x\to+\infty,\\u\to+\infty}}{\overset{u=e^x+1}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty).$

20.α) Επειδή $\lim\limits_{x\to1}(\ln x-x+1)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$.

Για $x=1$ είναι $0\le f(1)\le0\Leftrightarrow f(1)=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$ άρα η f είναι συνεχής στο 1.

β) Για $x>1$ είναι: $0\le f(x)\le\ln x-x+1\Leftrightarrow0\le\dfrac{f(x)}{x-1}\le\dfrac{\ln x-x+1}{x-1}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x-x+1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{1}=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}=0\,(1)$. Για $0<x<1$ είναι $0\le f(x)\le \ln x-x+1\Leftrightarrow$ $0\ge\dfrac{f(x)}{x-1}\ge\dfrac{\ln x-x+1}{x-1}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln x-x+1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{1}=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=0\,(2)$.

Από τις σχέσεις (1),(2) έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με παράγωγο $f'(1)=0$.

21.Είναι :**α)** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^x-3}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^x\ln 3}{1}=3\ln 3=f(1)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x=1$.

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{3^x-3}{x-1}-3\ln 3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^x-3-3\ln 3\cdot x+3\ln 3}{(x-1)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^x\ln 3-3\ln 3}{2(x-1)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^x\ln^2 3}{2}=\dfrac{3\ln^2 3}{2}$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με παράγωγο $f'(1)=\dfrac{3\ln^2 3}{2}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη για $x\ne 1$ με $f'(x)=\dfrac{3^x\ln 3\cdot(x-1)-3^x+3}{(x-1)^2}$ άρα είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3^x\ln 3\cdot(x-1)-3^x+3}{(x-1)^2}, & x\ne 1\\ \dfrac{3\ln^2 3}{2}, & x=1\end{cases}$.

22. Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(x) = \dfrac{\varepsilon\varphi x - x}{x - \eta\mu x}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi x - x}{x - \eta\mu x} \overset{\text{DLH}}{=}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{(1 - \sigma\upsilon\nu x)}(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x \cancel{(1 - \sigma\upsilon\nu x)}} = 2$ και επειδή η f είναι συνεχής, ισχύει: $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.

23. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ είναι :

- συνεχής στο 0, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-} (\alpha e^x + x - 1) = \lim\limits_{x\to 0^+} (4\eta\mu x + \beta x - 2) = \alpha - 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 = -2 \Leftrightarrow \alpha = -1$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$ (1).

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-e^x + x + 1}{x} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-e^x + 1}{1} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4\eta\mu x + \beta x - 2 + 2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(4\dfrac{\eta\mu x}{x} + \beta\right) = 4 + \beta$ οπότε από τη σχέση (1) έχουμε $4 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -4$

24. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xf'(x)}{f(x)} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x) + xf''(x)}{f'(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{xf''(x)}{f'(x)}\right) = 1 + 3 = 4$,

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xf''(x)}{f'(x)} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f''(x) + xf^{(3)}(x)}{f''(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{xf^{(3)}(x)}{f''(x)}\right) = 3$.

Αυξημένης δυσκολίας

25.α) Θα αποδείξουμε ότι το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{\frac{0}{0}\ \text{αφού f συνεχής}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} =$

$= \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{1} = \lim\limits_{x\to x_0^+} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{\left(f(x)-f(x_0)\right)'}{(x-x_0)'}=$

$=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f'(x)}{1}=\lim\limits_{x\to x_0^-}h(x)=\ell\in\mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με παράγωγο $f'(x_0)=\ell$.

β) Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell\in\mathbb{R}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left(f(x)-f(x_0)\right)'}{(x-x_0)'}=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=\ell\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=\ell\Leftrightarrow\ell_1=\ell$ και

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=\ell\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}h(x)=\ell\Leftrightarrow\ell_2=\ell$. Επομένως $\ell_1=\ell_2$ άτοπο.

26.α) Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για x = 0 είναι $f(0)=-f(0)\Leftrightarrow 2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{f'(x)}{x^2}\right)=0$ γιατί για κάθε $x\neq0$ είναι

$|f'(x)|\le1-\text{συν}x^2\Leftrightarrow-1+\text{συν}x^2\le f'(x)\le1-\text{συν}x^2\overset{x^2>0}{\Leftrightarrow}$

$\dfrac{-1+\text{συν}x^2}{x^2}\le\dfrac{f'(x)}{x^2}\le\dfrac{1-\text{συν}x^2}{x^2}$. Όμως

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\text{συν}x^2}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x^2\cdot\cancel{2x}}{\cancel{2x}}=0,\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1+\text{συν}x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\left(1-\text{συν}x^2\right)}{x^2}=0$,

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x^2}=0$.

27. Έστω $f(x)=\dfrac{e^x+\alpha x\eta\mu2x-\beta\text{συν}2x-x}{x^2}$, $x\neq0$. Τότε

$f(x)\cdot x^2=e^x+\alpha x\eta\mu2x-\beta\text{συν}2x-x$ οπότε

$\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)\cdot x^2\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(e^x+\alpha x\eta\mu2x-\beta\text{συν}2x-x\right)\Leftrightarrow0=1-\beta\Leftrightarrow\beta=1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \alpha x\eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu 2x - x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \alpha\eta\mu 2x + 2\alpha x\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x - 1}{2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + 2\alpha\sigma\upsilon\nu 2x + 2\alpha\sigma\upsilon\nu 2x - 4\alpha x\eta\mu 2x + 4\sigma\upsilon\nu 2x}{2} = \dfrac{4\alpha+5}{2}$. Όμως

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow \dfrac{4\alpha+5}{2} = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow \alpha = 1$.

28. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x} - \eta\mu x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha e^{\alpha x} - \beta e^{\beta x} - \sigma\upsilon\nu x}{2x}$.

Έστω $f(x) = \dfrac{\alpha e^{\alpha x} - \beta e^{\beta x} - \sigma\upsilon\nu x}{2x}$, $x \neq 0$, τότε $2xf(x) = \alpha e^{\alpha x} - \beta e^{\beta x} - \sigma\upsilon\nu x$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(2xf(x)\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha e^{\alpha x} - \beta e^{\beta x} - \sigma\upsilon\nu x\right) \Leftrightarrow 0 = \alpha - \beta - 1 \Leftrightarrow \beta = \alpha - 1$ (1).

Τότε

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha e^{\alpha x} - (\alpha-1)e^{(\alpha-1)x} - \sigma\upsilon\nu x}{2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha^2 e^{\alpha x} - (\alpha-1)^2 e^{(\alpha-1)x} + \eta\mu x}{2} =$

$\dfrac{\alpha^2 - (\alpha-1)^2}{2} = \dfrac{2\alpha-1}{2}$. Όμως $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2\alpha-1}{2} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Από τη σχέση (1) έχουμε $\beta = 2 - 1 = 1$.

29. Στη σχέση $f^3(x) + 2f(x) = \eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x - 2$ (1), για $x = 0$ προκύπτει:

$f^3(0) + 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)\left[f^2(0) + 2\right] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$. Η f είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής στο 0

επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. Άρα, το ζητούμενο όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^4}$ είναι της

μορφής $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ οπότε είναι ίσο με $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{4x^3}$ (2). Από την (1),

παραγωγίζοντας κατά μέλη, έχουμε:

$3f^2(x)f'(x) + 2f'(x) = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x \Leftrightarrow$

$f'(x)\left[3f^2(x) + 2\right] = 2\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x - 1) \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{2\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x - 1)}{3f^2(x) + 2}$ (3).

Οπότε, η (2) με βάση την (3), γίνεται:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x-1)}{3f^2(x)+2}}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu x\cdot(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x^3}\cdot\frac{2}{4\left(3f^2(x)+2\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x^2}\cdot\frac{2}{4\left(3f^2(x)+2\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)(\sigma\upsilon\nu x+1)}{x^2(\sigma\upsilon\nu x+1)}\cdot\frac{2}{4\left(3f^2(x)+2\right)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x-1}{x^2(\sigma\upsilon\nu x+1)}\cdot\frac{2}{4\left(3f^2(x)+2\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\left(-\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x+1}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{4}^{2}\left(3f^2(x)+2\right)}\right]=-\frac{1}{8}.$$

30. Για κάθε $x\neq 0$ είναι $f'(x)=\dfrac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$. Στο $x_0=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=\frac{1}{2}g''(0)=8.$$

31. Θέτουμε $-h=u$ οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x)-f'(x-h)}{h}=\lim_{u\to 0}\frac{f'(x)-f'(x+u)}{-u}=\lim_{u\to 0}\frac{f'(x+u)-f'(x)}{u}=f''(x)$$

32. Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x-2h)+f(x+2h)-2f(x)}{4h^2}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-2f'(x-2h)+2f'(x+2h)}{8h}=\lim_{h\to 0}\frac{-f'(x-2h)+f'(x+2h)}{4h}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2f(x-2h)+2f''(x+2h)}{4}=\frac{2f''(x)+2f''(x)}{4}=f''(x).$$

33. Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x-2h)-2f(x)+f(x+2h)}{h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2f'(x-2h)+2f'(x+2h)}{2h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(x-2h)+f'(x+2h)-f'(x)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\left[-\dfrac{f'(x-2h)-f'(x)}{h}+\dfrac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}\right]=-\left(-2f''(x)\right)+2f''(x)=4f''(x)$

γιατί $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+kh)-f'(x)}{h}\overset{kh=u}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f'(x+u)-f'(x)}{\frac{u}{k}}=kf''(x)$ για κάθε $x\neq 0$.

34. Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}-\dfrac{1}{(x-x_0)}\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)-f(x)+f(x_0)}{(x-x_0)(f(x)-f(x_0))}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1-f'(x)}{f(x)-f(x_0)+(x-x_0)f'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x_0)-f'(x)}{f(x)-f(x_0)+(x-x_0)f'(x)}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{-\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f'(x)}=\dfrac{-f''(x_0)}{f'(x_0)+f'(x_0)}=\dfrac{4}{1+1}=2$

35. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{xf'(x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+f'(x)}{f'(x)+xf''(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(2+\frac{f'(x)}{x}\right)}{x\left(\frac{f'(x)}{x}+f''(x)\right)}=$

$\dfrac{2+f''(0)}{f''(0)+f''(0)}=\dfrac{4}{4}=1$ αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=f''(0)=2$.

36.α) Είναι $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln f(x)-e^x+e}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln f(x)}{x-1}-\dfrac{e^x-e}{x-1}\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x}{1}=e$. Έστω η συνάρτηση $h(x)=\ln f(x),\ x\in\mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)=\dfrac{f'(1)}{f(1)}=f'(1)$, επομένως

$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=f'(1)-e$.Επειδή η g είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, είναι συνεχής και στο $x=1$, άρα $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=g(1)\Leftrightarrow f'(1)-e=1-e\Leftrightarrow f'(1)=1$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{\ln f(x)-e^x+e}{x-1}-(1-e)}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln f(x)-e^x+e-(1-e)(x-1)}{(x-1)^2}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{f'(x)}{f(x)}-e^x-1+e}{2(x-1)}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\dfrac{f'(x)}{f(x)}-1}{2(x-1)}-\dfrac{e^x-e}{2(x-1)}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2f(x)}\dfrac{f'(x)-f(x)}{x-1}-\dfrac{e^x-e}{2(x-1)}\right]=$

$\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2f(x)}\left(\dfrac{f'(x)-1}{x-1}-\dfrac{f(x)-1}{x-1}\right)-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^x-e}{x-1}\right]=\dfrac{1}{2f(1)}\left(f''(1)-f'(1)\right)-\dfrac{1}{2}e=-\dfrac{e}{2}$

37.α) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^xf(x)}{e^x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^xf(x)+e^xf'(x)}{e^x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}\left[f(x)+f'(x)\right]}{\cancel{e^x}}=2$.

β) Έστω $f(x)+f'(x)=g(x)\Leftrightarrow f'(x)=g(x)-f(x)$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-f(x)\right]=2-2=0$

38.α) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)}{x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+xf'(x)}{1}=6$

β) Έστω $f(x)+xf'(x)=g(x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}f'(x)=\dfrac{g(x)-f(x)}{x}$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(g(x)-f(x)\right)\frac{1}{x}\right] = 0\cdot 0 = 0$.

39. Έστω ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$, τότε

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^x}{e^x} \overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)e^x + f(x)e^x}{-e^{-x}} =$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+f'(x)\right) = \beta+\alpha \Leftrightarrow \beta = \beta+\alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$ άτοπο.

40. Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$

- οπότε είναι συνεχής στο 0 άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$,
- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο οπότε

($f(x)>0$ για κάθε $x>0$) ή ($f(x)<0$ για κάθε $x>0$).

α) Έστω ότι $C_2 \equiv C_{f'}$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$.

Αν $f(0)=0$ τότε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$, δηλαδή

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(f'(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\right) = +\infty$ ή $-\infty$ άτοπο.

Αν $f(0)\neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(f'(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\right) = = (-\infty)\frac{1}{f(0)} = +\infty$ ή $-\infty$

άτοπο. Άρα η C_1 παριστάνει την f'.

β) Από τη γραφική παράσταση της f' έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$.

Αν $f(0)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{f(x)} \overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f''(x)}{f'(x)} = \ell_1$

Αν $\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x) = 0$ τότε $L = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f''(x)}{f'(x)} \overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f^{(3)}(x)}{f''(x)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\left(f^{(3)}(x)\cdot\frac{1}{f''(x)}\right) = +\infty$ ή $-\infty$ γιατί $f'(x)<0$ για κάθε $x>0$ και

$\lim\limits_{x\to 0} f^{(3)}(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}^*$ οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν $\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x)\neq 0$ τότε $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f''(x)\cdot\dfrac{1}{f'(x)}\right)=+\infty$ ή $-\infty$ γιατί $f'(x)<0$ για κάθε $x>0$ οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα $f(0)\neq 0$. Τότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(f'(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}\right)=0\cdot\dfrac{1}{f(0)}=0$.

γ) Από τη γραφική παράσταση της f' έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f''(x)=-\infty$.

Έστω $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(f'(x)f''(x)\right)$. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f^{(3)}(x)=0$ με $f^{(3)}(x)>0$ για κάθε $x>0$.Είναι $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(f'(x)f''(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{\dfrac{1}{f'(x)}}\overset{\text{DLH}}{=}\left(\dfrac{-\infty}{-\infty}\right)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{(3)}(x)}{-\dfrac{f''(x)}{(f'(x))^2}}=$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{(3)}(x)(f'(x))^2}{f''(x)}=-\lim\limits_{x\to 0}\left(f^{(3)}(x)(f'(x))^2\cdot\dfrac{1}{f''(x)}\right)=0$, αφού

$\lim\limits_{x\to 0}\left[f^{(3)}(x)(f'(x))^2\right]=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f''(x)}=0$.

Όμως $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(f'(x)f''(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\dfrac{1}{f''(x)}}\overset{\text{DLH}}{=}\left(\dfrac{0}{0}\right)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{-\dfrac{f^{(3)}(x)}{(f''(x))^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(f''(x))^3}{f^{(3)}(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-(f''(x))^3\cdot\dfrac{1}{f^{(3)}(x)}\right)=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$

Άρα το όριο που παριστάνει η παράσταση A είναι ίσο με δύο διαφορετικές τιμές άτοπο.

41. Έχουμε :

- Αν οι C_f, $C_{f'}$ είχαν αντίστοιχα γραφικές παραστάσεις τις C_2 ,C_3 , τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$.
- Αν οι C_f, $C_{f'}$ είχαν αντίστοιχα γραφικές παραστάσεις τις C_3, C_2 τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x<0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f(x)=xg(x)$ οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[xg(x)\right]$.

• Αν $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\ell\in\mathbb{R}^*$ τότε:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[xg(x)\right]\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\begin{cases}+\infty\ ,\ \text{αν}\ \ell<0\ \text{απορρίπτεται}\\ -\infty\ ,\ \text{αν}\ \ell>0\end{cases}.$$

Άρα για $\ell>0$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ επομένως $C_f\equiv C_3$ και $C_{f'}\equiv C_2$.

Τότε $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)$ άτοπο αφού $L\neq0$.

• Αν $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ τότε:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[xg(x)\right]\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\begin{cases}+\infty\ ,\ \text{αν}\ L=-\infty\ \text{απορρίπτεται}\\ -\infty\ ,\ L=+\infty\end{cases}.$$

Άρα για $L=+\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ επομένως $C_f\equiv C_3$ και $C_{f'}\equiv C_2$.

Τότε $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)$ άτοπο αφού $L\neq0$.

Απροσδιοριστία $0\cdot(\pm\infty)$, $\infty-\infty$, 0^0, 0^∞, 1^∞

42.α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)\overset{\infty\cdot0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$

β) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2\ln x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$

γ) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2e^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{1}{x^2}=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{1}=+\infty$

δ) $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\sigma\varphi x\cdot\left(e^x-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\left(e^x-1\right)}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\eta\mu x\left(e^x-1\right)+e^x\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1$

ε) $\lim\limits_{x\to1^+}\left[\ln x\ln\left(\ln x\right)\right]\overset{\ln x=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}u\ln u\overset{0\cdot\infty}{=}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\ln u}{\frac{1}{u}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=\lim\limits_{u\to0^+}(-u)=0$.

στ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x\right)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{-e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-x}}=0$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln x\cdot\ln(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{\dfrac{1}{\ln x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{-\dfrac{1}{\ln^2 x}\cdot\dfrac{1}{x}}=$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{x+1}\dfrac{\ln^2 x}{\dfrac{1}{x}}\right)=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln^2 x}{\dfrac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{2\ln x}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-2\ln x}{\dfrac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\dfrac{2}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x)=0$

η) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\cdot(\eta\mu x-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln x\cdot\dfrac{\eta\mu x-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln x\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}-1\right)\right)=0$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}-1\right)=1-1=0$

43.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{1}{x}-1\right)\right]=(+\infty)\cdot(+\infty-0-1)=+\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)\right]=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1}=0$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\eta\mu x}{x\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}+\sigma\upsilon\nu x}=0$.

δ) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\dfrac{x-1}{x}}{x\ln x+x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{x\ln x+x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\ln x+1+1}=\dfrac{1}{2}$.

ε) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x-x^2}{x\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x-2x}{1-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-2}{\eta\mu x+\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(\sigma\upsilon\nu x-2\right)\dfrac{1}{2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}\right]=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sigma\upsilon\nu x-2\right)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}=+\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x\right)=0$ και $2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x+1\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x+1\right)-\ln e^x\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x+1}{e^x}\underset{u\to 1}{\overset{u=\frac{e^x+1}{e^x}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty,\ u\to 1}\ln u=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}=1$.

44.α) Για κάθε $x>1$ είναι $\left(x-1\right)^{x-1}=e^{\ln(x-1)^{x-1}}=e^{(x-1)\ln(x-1)}$. Είναι

$\lim\limits_{x\to 1}\left(x-1\right)\ln\left(x-1\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(x-1\right)}{\frac{1}{x-1}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{\cancel{x-1}}}{-\frac{1}{\left(x-1\right)^{\cancel{2}}}}=\lim\limits_{x\to 1}\left(-x+1\right)=0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 1}\left(x-1\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}e^{(x-1)\ln(x-1)}\underset{\theta\to 0}{\overset{\theta=(x-1)\ln(x-1)}{=}}\lim\limits_{\theta\to 0}e^{\theta}=1$.

β) Για κάθε $x>0$ είναι $x^{\frac{1}{x}}=e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\frac{\ln x}{x}}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$,

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}\underset{k\to 0}{\overset{k=\frac{\ln x}{x}}{=}}e^0=1$.

γ) Για κάθε $x>0$ είναι $\left(\ln x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\left[(\ln x)^{\frac{1}{x}}\right]}=e^{\frac{1}{x}\ln(\ln x)}=e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}}$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\ln x\right)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1}=0$, άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}}\underset{\substack{x\to+\infty,\\ m\to0}}{\overset{m=\frac{\ln(\ln x)}{x}}{=}}\lim\limits_{m\to0}e^{m}=e^{0}=1$.

δ) Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\left(\eta\mu x\right)^{x}=e^{\ln(\eta\mu x)^{x}}=e^{x\ln(\eta\mu x)}$. Είναι

$$\lim_{x\to0^{+}}x\ln\left(\eta\mu x\right)=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\ln\left(\eta\mu x\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to0^{+}}\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}{-\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to0^{+}}\left(\frac{x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)=0\text{, άρα}$$

$$\lim_{x\to0^{+}}\left(\eta\mu x\right)^{x}=\lim_{x\to0^{+}}e^{x\ln(\eta\mu x)}\overset{x\ln(\eta\mu x)=u}{\underset{u\to0}{=}}\lim_{u\to0}e^{u}=1$$

ε) Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\left(x+1\right)^{\frac{1}{\eta\mu x}}=e^{\ln(x+1)^{\frac{1}{\eta\mu x}}}=e^{\frac{\ln(x+1)}{\eta\mu x}}$. Είναι

$$\lim_{x\to0^{+}}\frac{\ln\left(x+1\right)}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to0^{+}}\frac{\frac{1}{x+1}}{\sigma\upsilon\nu x}=1\text{, άρα}$$

$$\lim_{x\to0^{+}}\left(x+1\right)^{\frac{1}{\eta\mu x}}=\lim_{x\to0^{+}}e^{\frac{\ln(x+1)}{\eta\mu x}}\underset{\substack{x\to0^{+},\\ u\to1}}{\overset{u=\frac{\ln(x+1)}{\eta\mu x}}{=}}\lim_{x\to1}e^{u}=e\text{.}$$

στ) Για κάθε $x>0$ είναι $e^{x}>x$, οπότε $\left(e^{x}-x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\left(e^{x}-x\right)^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{\ln\left(e^{x}-x\right)}{x}}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^{x}}{x}-1\right)\right]=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{1}=+\infty$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{x}-x\right)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}}=1$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}-x\right)^{\frac{1}{x}}=e$.

ζ) Για κάθε $x\in\left(0,1\right)$ είναι $\left(\varepsilon\varphi x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\ln(\varepsilon\varphi x)^{\frac{1}{\ln x}}}=e^{\frac{\ln(\varepsilon\varphi x)}{\ln x}}$.Όμως

$$\lim_{x\to0^{+}}\frac{\ln\left(\varepsilon\varphi x\right)}{\ln x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to0^{+}}\frac{\frac{1}{\varepsilon\varphi x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{x}{\varepsilon\varphi x\sigma\upsilon\nu^{2}x}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\sigma\upsilon\nu^{\not 2}x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}\sigma\upsilon\nu x}=1\text{ , άρα}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\varepsilon\varphi x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln(\varepsilon\varphi x)}{\ln x}}\underset{\substack{x\to 0^+,\\ u\to 1}}{\overset{u=\frac{\ln(\varepsilon\varphi x)}{\ln x}}{=}}\lim_{u\to 1}e^u=e\,.$$

η) Για κάθε $x>0$ είναι $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to 1}}{\overset{u=1+\frac{1}{x}}{=}}\lim_{u\to 1}\ln u=0\text{ άρα }\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\overset{\infty\cdot 0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{\not x^2}\right)}{-\frac{1}{\not x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1\text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\underset{\substack{x\to+\infty,\\ k\to 1}}{\overset{k=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{=}}\lim_{k\to 1}e^k=e\,.$$

Αυξημένης δυσκολίας

45. Θέτουμε $\frac{1}{x}=u\Leftrightarrow x=\frac{1}{u}$. Όταν $x\to 0^-$ τότε $u\to-\infty$ άρα

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{x}\right)=\lim_{u\to-\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{\frac{1}{u}-1}\right)-u\right)=\lim_{u\to-\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{\frac{1-u}{u}}\right)-u\right)=$$

$$\lim_{u\to-\infty}\left(\ln\left(1+\frac{u}{1-u}\right)-u\right)=\lim_{u\to-\infty}\left(\ln\left(\frac{1-\not u+\not u}{1-u}\right)-u\right)=\lim_{u\to-\infty}\left(-\ln(1-u)-u\right)=$$

$$\lim_{u\to-\infty}\left(-u\left(\frac{\ln(1-u)}{u}+1\right)\right)=+\infty\text{ γιατί }\lim_{u\to-\infty}\frac{\ln(1-u)}{u}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{u\to-\infty}\frac{-\frac{1}{1-u}}{1}=0$$

46.α) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(e^x-1\right)\ln x\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{e^x-1}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-e^x}{\left(e^x-1\right)^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(e^x-1\right)^2}{-xe^x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\left(e^x-1\right)\cdot \cancel{e^x}}{-\cancel{e^x}-x\cancel{e^x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\left(e^x-1\right)}{-1-x}=0$.

β) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\ln x\cdot\ln\left(\ln x\right)\right]\overset{\substack{u=\ln x\\ x\to 1^+,\,u\to 0^+}}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\left(u\ln u\right)=\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\ln u}{\dfrac{1}{u}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{\cancel{u}}}{-\dfrac{1}{u^{\cancel{2}}}}=\lim\limits_{u\to 0^+}\left(-u\right)=0$

47.α) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sigma\varphi x-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\dfrac{\eta\mu x}{\dfrac{1}{x^2}}}-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x^2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}-1\right)\right]=$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}-1\right)\right]=+\infty\left(\dfrac{0}{1}-1\right)=-\infty$

β) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\varepsilon\varphi x-\dfrac{1}{\pi-2x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left[\dfrac{1}{\pi-2x}\left(\dfrac{\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{\dfrac{1}{\pi-2x}}-1\right)\right]=$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left[\dfrac{1}{\pi-2x}\left(\dfrac{\pi-2x}{\sigma\upsilon\nu x}\eta\mu x-1\right)\right]=+\infty\left(2\cdot 1-1\right)=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\pi-2x}{\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{-2}{-\eta\mu x}=2$.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

24755.α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι συνεχής στο $x_0=0$, άρα

$\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=f\left(0\right)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=\alpha\Leftrightarrow 1-1=\alpha\Leftrightarrow\alpha=0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{\eta\mu x}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x-\eta\mu x}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x^2}\overset{\text{DLH}}{=}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=0$.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0,f(0))$ έχει εξίσωση

$y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=0$, δηλαδή είναι ο άξονας x΄x.

28314.α) Αν $\lambda\neq -1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{\lambda x+1}}=e^{\frac{1}{\lambda+1}}\neq 0=f(1)$ άτοπο αφού η f είναι συνεχής στο x = 1.

Για $\lambda=-1$ είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{-x+1}}\overset{\substack{\frac{1}{-x+1}=u\\ x\to 1^+\Rightarrow\\ u\to-\infty}}{=}\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0=f(0)$

β) Για $x>1$ η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=e^{\frac{1}{1-x}}\cdot\dfrac{1}{(1-x)^2}$. Στο x = 1 είναι

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{\frac{1}{-x+1}}}{x-1}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}}{1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^2}=\overset{\substack{\frac{1}{-x+1}=u\\ x\to 1^+\Rightarrow\\ u\to-\infty}}{=}$

$\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{e^u}{u^2}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{e^u}{2u}=\lim\limits_{u\to-\infty}\left(e^u\dfrac{1}{2u}\right)=0$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x = 1 με $f'(1)=0$.

γ) Για κάθε $1<x_1<x_2$ είναι $-x_1>-x_2\Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}\Leftrightarrow e^{-x_1}+1>e^{-x_2}+1\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{e^{-x_1}+1}<\dfrac{1}{e^{-x_2}+1}\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow(1,+\infty)$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{-x+1}}\overset{\substack{\frac{1}{-x+1}=u\\ x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to 0}}{=}\lim\limits_{u\to 0}e^u=1$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα έχει σύνολο τιμών το

$f([1,+\infty))=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[0,1)$.

34439.α) i. $D_h=D_{f\cdot g}=\{x\in D_g/g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}/e^{-x}\neq 1\}=$

$\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0\}=\mathbb{R}^*$

ii. Για κάθε $x \neq 0$ είναι $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{e^x} - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{1-e^x}{e^x}} = \dfrac{e^x}{1-e^x}$

β) Για κάθε $x_1, x_2 \neq 0$ με $h(x_1) = h(x_2)$ είναι $\dfrac{e^{x_1}}{1-e^{x_1}} = \dfrac{e^{x_2}}{1-e^{x_2}} \Leftrightarrow$

$e^{x_1} - e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_2} - e^{x_1}e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα η h είναι 1-1.

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{1-e^x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ οπότε $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

Είναι $xf(x) \geq \eta\mu x$ (1).

- Για $x > 0$ από τη σχέση (1) έχουμε $f(x) \geq \dfrac{\eta\mu x}{x}$ οπότε

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \geq \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow f(0) \geq 1$ (2).

Για x< 0 από τη σχέση (1) $f(x) \leq \dfrac{\eta\mu x}{x}$ οπότε

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \leq \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow f(0) \leq 1$ (3). Από (2),(3) είναι $f(0) = 1$

- Για $x > 0$ από τη σχέση (1) έχουμε είναι

$f(x) \geq \dfrac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow f(x) - 1 \geq \dfrac{\eta\mu x}{x} - 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 \geq \dfrac{\eta\mu x - x}{x} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-1}{x^2} \geq \dfrac{\eta\mu x - x}{x^3}$

οπότε $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-1}{x^2} \geq \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\eta\mu x - x}{x^3} \Leftrightarrow \dfrac{f''(0)}{2} \geq -\dfrac{1}{6} \Leftrightarrow f''(0) \geq -\dfrac{1}{3}$ (4) γιατί

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-1}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f'(x)}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f''(x)}{2} = \dfrac{f''(0)}{2}$ και

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\eta\mu x - x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.L.H}}{=}} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.L.H}}{=}} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\eta\mu x}{6x} = -\dfrac{1}{6}$.

Για $x < 0$ από τη σχέση (1) έχουμε θα είναι

$f(x) \leq \dfrac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow f(x) - 1 \leq \dfrac{\eta\mu x}{x} - 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 \leq \dfrac{\eta\mu x - x}{x} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-1}{x^2} \leq \dfrac{\eta\mu x - x}{x^3}$

οπότε $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)-1}{x^2} \leq \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\eta\mu x - x}{x^3} \Leftrightarrow \dfrac{f''(0)}{2} \leq -\dfrac{1}{6} \Leftrightarrow f''(0) \leq -\dfrac{1}{3}$ (5) γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f'(x)}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{f''(0)}{2}$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x-x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\eta\mu x}{6x}=-\dfrac{1}{6}$. Από (4),(5) είναι

$f''(0)=-\dfrac{1}{3}$. **Σωστή απάντηση Α.**

2. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x+\kappa-\ln x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{(x-1)^2}(x+\kappa-\ln x)\right]$$

με $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1}(x+\kappa-\ln x)=1+\kappa$.

- Αν $1+\kappa>0\Leftrightarrow\kappa>-1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$ (άτοπο) ,
- Αν $1+\kappa<0\Leftrightarrow\kappa<-1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\infty$ (άτοπο).

Άρα $\kappa=-1$.

$$\text{Τότε }\lambda=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{2(x-1)}\,x}\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$$

Σωστή απάντηση Γ.

3. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ οπότε $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$.

Για $x>0$ έχουμε $f(x)>\dfrac{e^x-1}{x}$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\geq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{1}=1$

δηλαδή $f(0)\geq 1$. Αν $x<0$ έχουμε $f(x)<\dfrac{e^x-1}{x}$ άρα

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\leq\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x}{1}=1$ δηλαδή $f(0)\leq 1$. Από (1),(2) θα είναι

$f(0)=1$. Επίσης, $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-1}{x}$.Για $x>0$ είναι

$f(x) > \dfrac{e^x-1}{x} \Leftrightarrow f(x)-1 > \dfrac{e^x-1}{x}-1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x)-1}{x} > \dfrac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} = \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \geq \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2} \overset{(3)}{=} \dfrac{1}{2}$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$. Οπότε $f'(0) \geq \dfrac{1}{2}$

Σωστή απάντηση Δ.

4. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ οπότε $f'(0) = 0$. Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)}{2x^2-1+f(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)+f'(x)}{4x+f'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(f''(x)+\frac{f'(x)}{x}\right)}{\cancel{x}\left(4+\frac{f'(x)}{x}\right)} = \frac{4+4}{4+4} = 1$$

γιατί $f''(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x} = 4$. **Σωστή απάντηση Α.**

5. Στη σχέση (1) $f^5(x)+f^3(x)+f(x) = x-\eta\mu x$ για $x=0$ έχουμε

$f^5(0)+f^3(0)+f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)\left(\underbrace{f^4(0)+f^2(0)+1}_{>0}\right) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο 0επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. Παραγωγίζοντας στη σχέση (1) έχουμε

$5f^4(x)f'(x)+3f^2(x)f'(x)+f'(x) = 1-\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$$f'(x)\left(\underbrace{5f^4(x)+3f^2(x)+1}_{>0}\right) = 1-\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{5f^4(x)+3f^2(x)+1} \quad (2)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{3x^2} \overset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{5f^4(x)+3f^2(x)+1}}{3x^2} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}\dfrac{1}{5f^4(x)+3f^2(x)+1}\right] = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{0+0+1} = \dfrac{1}{6}$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{6x}=\dfrac{1}{6}$. **Σωστή απάντηση Β.**

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος

1. Σ	**2.** Λ	**3.** Λ	**4.** Λ	**5.** Λ	**6.** Σ	**7.** Σ	**8.** Λ	**9.** Λ	**10.** Λ
11. Σ	**12.** Λ	**13.** Σ							

24 Θεώρημα Rolle

24.α) Hf είναι συνεχής στο $[0,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}$. Επειδή $f(0)=f(3)=0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(0,3): f'(\xi)=0\Leftrightarrow 3-2\xi=0\Leftrightarrow \xi=\frac{3}{2}$ δεκτό.

β) Hf είναι συνεχής στο $[2,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,4)$ με παράγωγο $f'(x)=2x-6$. Επειδή $f(2)=f(4)=0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(2,4): f'(\xi)=0\Leftrightarrow 2\xi-6=0\Leftrightarrow \xi=3$.

γ) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0)$ και $(0,1]$ σαν πολυωνυμική. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2-4\right)=-4=f(0)$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x^3-4\right)=-4$, οπότε η f είναι συνεχής στο 0, άρα είναι συνεχής στο $[-1,1]$. Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2-4+4}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x^3-4+4}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x^2\right)=0$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0]$ και στο $(0,1)$ με παράγωγο $f'(x)=\begin{cases}2x, & x\le 0\\ -3x^2, & x>0\end{cases}$. Επειδή $f(-1)=-3$ και $f(1)=-5$, δεν εφαρμόζεται για την f το Θ.Rolle στο $[-1,1]$.

Αν $\xi\in(-1,0]$, τότε $f'(\xi)=0\Leftrightarrow -2\xi=0\Leftrightarrow \xi=0$.

Αν $\xi\in(0,1)$, τότε $f'(\xi)=0\Leftrightarrow -3\xi^2=0\Leftrightarrow \xi=0$ που απορρίπτεται στη περίπτωση αυτή.

δ) Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-8x\right)=-12$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2+x-10\right)=-4$, η f δεν είναι συνεχής στο $[1,3]$, οπότε δεν εφαρμόζεται το θ.Rolle στο διάστημα αυτό.

25. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα :

- η f είναι συνεχής στο 0 οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow f(0)=\beta=1$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 οπότε :

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\alpha x^2+4x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+\gamma x+1-1}{x}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\alpha x^2+4x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+\gamma x}{x}\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}(\alpha x+4)}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{x}(x+\gamma)}{\cancel{x}}\Leftrightarrow \gamma=4$.

- $f(-1)=f(1)\Leftrightarrow \alpha-3=6\Leftrightarrow \alpha=9$

26.Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα :

- η f είναι συνεχής στο 1 οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1^-}(9-\kappa x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x^2-\lambda x+\mu)=f(1)\Leftrightarrow 9-\kappa=2-\lambda+\mu=f(1)\Leftrightarrow$

$\lambda-\kappa-\mu=-7\ (1)$,

- η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 οπότε : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{9}-\kappa x-\cancel{9}+\kappa}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2-\lambda x+\cancel{\mu}-2+\lambda-\cancel{\mu}}{x-1}\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-\kappa\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2(x^2-1)-\lambda(x-1)}{x-1}\Leftrightarrow$

$-\kappa=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2\cancel{(x-1)}(x+1)-\lambda\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}\Leftrightarrow -\kappa=4-\lambda\Leftrightarrow\kappa=\lambda-4\ (2)$.

- $f(-3)=f(5)\Leftrightarrow 9+3\kappa=50-5\lambda+\mu\Leftrightarrow 3\kappa+5\lambda-\mu=41\ (3)$.

Από τις σχέσεις (1),(3) μέσω της (2) έχουμε:

$\begin{cases}\lambda-(\lambda-4)-\mu=-7\\ 3(\lambda-4)+5\lambda-\mu=41\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda-\lambda+4-\mu=-7\\ 3\lambda-12+5\lambda-\mu=41\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}4-\mu=-7\\ 8\lambda-\mu=53\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=11\\ 8\lambda-11=53\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=11\\ 8\lambda=64\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=11\\ \lambda=8\end{cases}$.

Τέλος από τη σχέση (2) προκύπτει: $\kappa=8-4\Leftrightarrow\kappa=4$.

Γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος Rolle

27.Είναι $f(-1)=f(1)=0$, η f συνεχής στο [-1,1] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων , παραγωγίσιμη στο (-1,1) με παράγωγο $f'(x)=e^x(x^2-1)\eta\mu x+2xe^x\eta\mu x+e^x(x^2-1)\sigma\upsilon\nu x$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(1,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον x¨x.

28. Είναι $f(0)=f(1)=0$,f συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων , παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο $f'(x)=3(\alpha-\beta)x^2+2(2\alpha+\beta)x-3\alpha$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στον x΄x.

Εφαρμογή του θεωρήματος Rolle σε γνωστή συνάρτηση

29.α) Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α,β) με παράγωγο

$g'(x)=\dfrac{e^x f'(x)-e^x f(x)}{e^{2x}}=\dfrac{e^x\left(f'(x)-f(x)\right)}{e^{2x}}\Leftrightarrow g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$.. Όμως

$g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{e^\alpha}=\dfrac{e^\alpha}{e^\alpha}=1, g(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{e^\beta}=\dfrac{e^\beta}{e^\beta}=1$ οπότε $g(\alpha)=g(\beta)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle .

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(\xi)-f(\xi)}{e^\xi}=0\Leftrightarrow f'(\xi)-f(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=f(\xi)$.

30.α) Είναι $3f(2)=2f(3)\Leftrightarrow f(2)=\dfrac{2f(3)}{3}$.

Η g είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ με παράγωγο $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Όμως

$g(2)=\dfrac{f(2)}{2}=\dfrac{\not{2}\frac{f(3)}{3}}{\not{2}}=\dfrac{f(3)}{3}=g(3)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(\xi)\xi-f(\xi)}{\xi^2}=0\Leftrightarrow f'(\xi)\xi-f(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)\xi=f(\xi)$.

31.α) Η g είναι συνεχής , στο $[0,\alpha]$ σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,\alpha)$ με παράγωγο $g'(x)=f(x)+(x-\alpha)f'(x)$.

Επειδή $g(0)=g(\alpha)=0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle .

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)$

τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)+(\xi-\alpha)f'(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=(\alpha-\xi)f'(\xi)$

Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $\Pi\left(\xi,f(\xi),f'(\xi)\right)=0$

32.α) Έστω $g(x)=f(x)-x^5+x^4-x,\ x\in[1,2]$. Η g είναι συνεχής στο [1,2] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (1,2) με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-5x^4+4x^3-1$. Είναι $g(1)=f(1)-1=0$, $g(2)=f(2)-32+16-2=18-18=0=g(1)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$, τέτοιο, ώστε:

$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)-5\xi^4+4\xi^3-1=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=5\xi^4-4\xi^3+1$.

β) Έστω $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}-x+x^3,\ x\in[1,2]$. Η g είναι συνεχής στο [1,2] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (1,2) με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-x-1+3x^2$. Είναι $g(1)=f(1)-\frac{1}{2}=0$, $g(2)=f(2)-2-2+8=0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=\xi+1-3\xi^2$.

γ) Είναι $\xi f'(\xi)=4\xi^4-2\xi^2+\xi \Leftrightarrow f'(\xi)=4\xi^3-2\xi+1$.

Έστω $g(x)=f(x)-x^4+x^2-x,\ x\in[1,2]$. Η g είναι συνεχής στο [1,2] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (1,2) με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-4x^3+2x-1$. Είναι $g(1)=f(1)-1=2$, $g(2)=f(2)-16+4-2=16-14=2=g(1)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$, τέτοιο, ώστε:

$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=4\xi^3-2\xi+1$.

δ) Έστω $g(x)=f(x)-x^3+2x^2-2x,\ x\in[1,2]$. Η g είναι συνεχής στο [1,2] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (1,2) με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-3x^2+4x-2$. Είναι $g(1)=f(1)-1$, $g(2)=f(2)-8+8-4=f(1)+3-4=f(1)-1=g(1)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$, τέτοιο, ώστε:

$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=3\xi^2-4\xi+2$.

33. Έστω $g(x)=f(x)-x^2-\ln x,\ x\in[1,e]$. Η g είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1,e)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-2x-\frac{1}{x}$. Είναι $g(1)=f(1)-1=0$, $g(e)=f(e)-e^2-1=0$, οπότε

$g(1)=g(e)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως υπάρχει $\xi\in(1,e)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=2\xi+\frac{1}{\xi}$.

34. Έστω $g(x)=f(x)+3\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-3\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu x$. Είναι $g(0)=f(0)+3=0$, $g(\pi)=f(\pi)-3=0$, οπότε $g(0)=g(\pi)$, $g(1)=g(e)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$, τέτοιο, ώστε:
$g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=3\eta\mu\xi+2\sigma\upsilon\nu\xi$.

35.α) Έστω $g(x)=f(x)-\sigma\upsilon\nu x-4x^2,\ x\in[-2,2]$. Η g είναι συνεχής στο $[-2,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)+\eta\mu x-8x$. Είναι $g(-2)=f(-2)-\sigma\upsilon\nu(-2)-16\overset{\text{f άρτια}}{=}f(2)-\sigma\upsilon\nu 2-16=g(2)$, οπότε $g(-2)=g(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως υπάρχει $\xi\in(-2,2)$, τέτοιο, ώστε:
$g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)+\eta\mu\xi=8\xi$.

β) Έστω $g(x)=f(x)-e^{x^2}$, $x\in[-2,2]$. Η g είναι συνεχής στο $[-2,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-2xe^{x^2}$. Είναι $g(-2)=f(-2)-e^4=f(2)-e^4=g(2)$, οπότε $g(-2)=g(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(-2,2)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=2\xi e^{\xi^2}$.

γ) Έστω $g(x)=f(x)-x\eta\mu x$, $x\in[-2,2]$. Η g είναι συνεχής στο $[-2,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$. Είναι
$g(-2)=f(-2)+2\eta\mu(-2)=f(2)-2\eta\mu 2=g(2)$, οπότε $g(-2)=g(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως υπάρχει $\xi\in(-2,2)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)-\eta\mu\xi-\xi\sigma\upsilon\nu\xi=0$.

δ) Είναι $\sqrt{\xi^2+1}\cdot f'(\xi)=\xi\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}}\Leftrightarrow f'(\xi)-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}}=0$.

Έστω $g(x)=f(x)-\sqrt{x^2+1}$, $x\in[-2,2]$. Η g είναι συνεχής στο $[-2,2]$ ως

πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Είναι $g(-2)=f(-2)-\sqrt{5}=f(2)-\sqrt{5}=g(2)$, οπότε $g(-2)=g(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως υπάρχει $\xi\in(-2,2)$, τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}}=0\Leftrightarrow\sqrt{\xi^2+1}\cdot f'(\xi)=\xi.$$

ε) Είναι $f'(x)=\frac{2x}{x^2-3}\Leftrightarrow f'(x)-\left(\ln\left(x^2-3\right)\right)'=0$.

Έστω $g(x)=f(x)-\ln\left(x^2-3\right), x\in[-2,2]$. Η g είναι συνεχής στο $[-2,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-\frac{2x}{x^2-3}$. Είναι $g(-2)=f(-2)=f(2)=g(2)$, οπότε $g(-2)=g(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως υπάρχει $\xi\in(-2,2)$, τέτοιο ώστε: $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{2\xi}{\xi^2-3}$.

στ) Έστω $g(x)=\eta\mu f(x)-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[-2,2]$. Η g είναι συνεχής στο $[-2,2]$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)\sigma\upsilon\nu f(x)+\eta\mu x$. Είναι $g(-2)=\eta\mu f(-2)-\sigma\upsilon\nu(-2)=\eta\mu f(2)-\sigma\upsilon\nu 2=g(2)$, οπότε $g(-2)=g(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως υπάρχει $\xi\in(-2,2)$, τέτοιο, ώστε:
$g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)\sigma\upsilon\nu f(\xi)+\eta\mu\xi=0$.

36. Έστω $f(x)=e^x\sigma\upsilon\nu x-2$, $x\in[x_1,x_2]$, όπου x_1,x_2 ρίζες της f.
Η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με παράγωγο $f'(x)=e^x\sigma\upsilon\nu x-e^x\eta\mu x$.
Είναι $f(x_1)=f(x_2)=0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow \cancel{e^x}\sigma\upsilon\nu x-\cancel{e^x}\eta\mu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

37.α) Έστω $g(x)=xf(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η g είναι συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο $g'(x)=f(x)+xf'(x)$. Επειδή $g(\alpha)=g(\beta)=0$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο, ώστε:

$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

β) Έστω $g(x)=x^{\nu}f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η g είναι συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο $g'(x)=x^{\nu}f'(x)+\nu x^{\nu-1}f(x)$. Επειδή $g(\alpha)=g(\beta)=0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow \xi^{\nu}f'(\xi)+\nu\xi^{\nu-1}f(\xi)=0$.

γ) Έστω $g(x)=f(x)\eta\mu x$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η g είναι συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο $g'(x)=f'(x)\eta\mu x+f(x)\sigma\upsilon\nu x$. Επειδή $g(\alpha)=g(\beta)=0$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)\eta\mu\xi+f(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi=0$.

δ) Έστω $g(x)=f(x)\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η g είναι συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο $g'(x)=f'(x)\sigma\upsilon\nu x-f(x)\eta\mu x$. Επειδή $g(\alpha)=g(\beta)=0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi-f(\xi)\eta\mu\xi=0$.

Αυξημένης δυσκολίας

38.α) Έστω $h(x)=g(x)-\frac{x^2}{2}$, $x\in[0,1]$. Η h είναι συνεχής στο [0, 1] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (0, 1) με παράγωγο $h'(x)=g'(x)-x$. Είναι $h(0)=g(0)$,

$h(1)=g(1)-\frac{1}{2}=g(0)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=g(0)=h(0)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$:

$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow g'(\xi)-\xi=0 \Leftrightarrow g'(\xi)=\xi$

β) Έστω $\varphi(x)=g'(x)-2x$, $x\in[0,\xi]$. Είναι $\varphi(0)=g'(0)>0$,

$\varphi(\xi)=g'(\xi)-2\xi=\xi-2\xi=-\xi<0$, οπότε $\varphi(0)\varphi(\xi)<0$.

Η φ είναι συνεχής στο [0,ξ] άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\rho\in(0,\xi)\subseteq(0,1)$, τέτοιο ώστε $\varphi'(\rho)=0 \Leftrightarrow g'(\rho)=2\rho$.

39. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)\varepsilon\varphi x+f(x)=0$ έχει λύση στο (α,β).

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$f'(x)\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)\eta\mu x+f(x)\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \left(f(x)\eta\mu x\right)'=0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)\eta\mu x$.

- Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, ως γινόμενο συνεχών.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), με παράγωγο

$g'(x) = f'(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x$.

- Είναι $g(\alpha) = f(\alpha)\eta\mu\alpha = \beta\eta\mu\alpha$ και $g(\beta) = f(\beta)\eta\mu\beta = \alpha\eta\mu\beta$.

Όμως, από τη σχέση που μας δίνεται έχουμε $\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\eta\mu\beta = \beta\eta\mu\alpha$, οπότε $g(\alpha) = g(\beta)$. Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\eta\mu\xi + f(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi = 0$ (1).Επειδή $\xi \in (\alpha,\beta) \subseteq \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\sigma\upsilon\nu\xi \neq 0$ οπότε από την (1) έχουμε:

$f'(\xi)\frac{\eta\mu\xi}{\sigma\upsilon\nu\xi} + f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\varepsilon\varphi\xi + f(\xi) = 0$.

40. Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$, $x \in \left[0,\frac{\pi}{3}\right]$. Η g είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ με παράγωγο

$g'(x) = \frac{f'(x)\sigma\upsilon\nu x + f(x)\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$. Επειδή $g(0) = f(0) = 2f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και

$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}} = 2f\left(\frac{\pi}{3}\right) = g(0)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle

οπότε υπάρχει $\xi \in \left(0,\frac{\pi}{3}\right) : g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$f'(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi + f(\xi)\eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + f(\xi)\frac{\eta\mu\xi}{\sigma\upsilon\nu\xi} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + f(\xi)\varepsilon\varphi\xi = 0$.

41. Είναι $f'(x) = 2 - \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) - 2x = 0 \Rightarrow \left(xf(x) - x^2\right)' = 0$

Έστω $g(x) = xf(x) - x^2$, $x \in [0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο

$g'(x) = f(x) + xf'(x) - 2x$. Επειδή $g(0) = 0,\ g(1) = f(1) - 1 = 0 = g(0)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$f(x)+xf'(x)-2x=0 \Leftrightarrow f'(x)=2-\dfrac{f(x)}{x}$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

42. Είναι $f'(x)=\dfrac{2xf(x)}{1-x^2} \Leftrightarrow (1-x^2)f'(x)-2xf(x)=0$.

Έστω $g(x)=(1-x^2)f(x)$, $x\in[-1,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με παράγωγο $g'(x)=(1-x^2)f'(x)-2xf(x)$. Επειδή $g(-1)=0=g(1)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση $g'(x)=0 \Leftrightarrow (1-x^2)f'(x)-2xf(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2xf(x)}{1-x^2}$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,1)$.

43. Η εφαπτομένη στο Μ έχει εξίσωση $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων όταν

$-f(\xi)=f'(\xi)(-\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0$.

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\in[1,2]$. Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με παράγωγο

$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Επειδή $g(1)=\dfrac{f(1)}{1}=f(1)$,

$g(2)=\dfrac{f(2)}{2}=\dfrac{2f(1)}{2}=f(1)=g(1)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0$.

44. Η εφαπτομένη στο Μ είναι: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Για να διέρχεται από το $A(0,x_0^2)$, πρέπει: $x_0^2-f(x_0)=-x_0f'(x_0) \Leftrightarrow$

$x_0f'(x_0)-f(x_0)+x_0^2=0 \Leftrightarrow \dfrac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^2}+1=0$

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}+x$, $x\in[1,3]$. Είναι $g(1)=f(1)+1$,

$g(3)=\dfrac{f(3)}{3}+3=\dfrac{3f(1)-6}{3}+3=f(1)+1=g(1)$ αφού

$3f(1)=f(3)+6\Leftrightarrow f(3)=3f(1)-6.$. Η g είναι συνεχής στο [1,3] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (1,3) με παράγωγο

$g'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}+1$. Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $x_0\in(1,3)$, τέτοιο,

ώστε, $g'(x_0)=0\Leftrightarrow \dfrac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^2}+1=0$.

45.Είναι $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}\Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0\Leftrightarrow$

$\dfrac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}=0$.Έστω $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η h είναι συνεχής στο [α, β] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο $h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Είναι $h(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}=h(\beta)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε : $h'(\xi)=0\Leftrightarrow \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

46.Είναι $f'(\xi)\ln\xi^{\xi}+f(\xi)=0\Leftrightarrow \xi f'(\xi)\ln\xi+f(\xi)=0\Leftrightarrow$

$f'(\xi)\ln\xi+\dfrac{1}{\xi}f(\xi)=0$. Έστω $g(x)=f(x)\ln x$, $x\in[2,4]$. Η g είναι συνεχής στο [2, 4] σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (2, 4) με παράγωγο $g'(x)=f'(x)\ln x+\dfrac{1}{x}f(x)$. Είναι $g(2)=f(2)\ln 2=2f(4)\ln 2$, $g(4)=f(4)\ln 4=f(4)\ln 2^2=2f(4)\ln 2=g(2)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $g'(\xi)=0\Leftrightarrow$ $f'(\xi)\ln\xi^{\xi}+f(\xi)=0$.

47.α) Αν στη σχέση $f'(\xi_1)=2\xi_1$, αντικαταστήσουμε όπου ξ_1 το x έχουμε:

$f'(x)=2x\Leftrightarrow f'(x)-2x=0$ ή $\left(f(x)-x^2\right)'=0$.Έστω $g(x)=f(x)-x^2$, $x\in[0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με

παράγωγο $g'(x)=f'(x)-2x$. Είναι $g(0)=f(0)$ και $g(1)=f(1)-1=f(0)$, δηλαδή $g(0)=g(1)$. Άρα $g(1)=g(e)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $\xi_1\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$g'(\xi_1)=0\Leftrightarrow f'(\xi_1)=2\xi_1$.

β) Αν στη σχέση $f'(\xi_2)=-\dfrac{f(1)-1-f(\xi_2)}{\xi_2-1}$ αντικαταστήσουμε όπου ξ_2 το x έχουμε: $f'(x)=-\dfrac{f(1)-1-f(x)}{x-1}\Leftrightarrow f'(x)(x-1)+f(x)+1-f(1)=0\Leftrightarrow$

$\big(f(x)(x-1)+(1-f(1))x\big)'=0$.

Έστω $h(x)=f(x)(x-1)+(1-f(1))x$, $x\in[0,1]$. Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο $h'(x)=f'(x)(x-1)+f(x)+1-f(1)$. Είναι $h(0)=-f(0)$ και

$h(1)=f(1)(1-1)+(1-f(1))=1-f(1)=-f(0)=h(0)$ αφού

$f(1)-f(0)=1\Leftrightarrow f(1)-1=-f(0)$. Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi_2\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε: $h'(\xi_2)=0\Leftrightarrow$

$f'(\xi_2)(\xi_2-1)+f(\xi_2)+1-f(1)=0\Leftrightarrow f'(\xi_2)=-\dfrac{f(1)-1-f(\xi_2)}{\xi_2-1}$.

48.α) Έστω $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+x^2$, $x\in[-1,1]$. Η g είναι συνεχής στο [-1, 1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (-1, 1) με παράγωγο $g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}+2x$. Είναι $g(-1)=\dfrac{1}{f(-1)}+1=\dfrac{1}{f(1)}+1=g(1)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $g'(\xi)=0\Leftrightarrow-\dfrac{f'(\xi)}{f^2(\xi)}+2\xi=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(\xi)}{f^2(\xi)}=2\xi$.

β) Είναι $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=8x^3\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=4x^3\Leftrightarrow\Big(\sqrt{f(x)}-x^4\Big)'=0$. Έστω $g(x)=\sqrt{f(x)}-x^4$, $x\in[-1,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με παράγωγο $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}-4x^3$ Είναι $g(-1)=\sqrt{f(-1)}-1=\sqrt{f(1)}-1=g(1)$ οπότε

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (-1,1)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(\xi)}{2\sqrt{f(\xi)}} = 4\xi^3 \Leftrightarrow f'(\xi) = 8\xi^3\sqrt{f(\xi)}$

γ) Είναι $f'(x) = 6x^5 e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} - 6x^5 = 0 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)} - x^6\right)' = 0$

Έστω $g(x) = e^{f(x)} - x^6$, $x \in [-1,1]$.Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων .

Επίσης παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x)e^{f(x)} - 6x^5$,

$g(-1) = e^{f(-1)} - 1 = e^{f(1)} - 1 = g(1)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (-1,1)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 6\xi^5 e^{-f(\xi)}$.

δ) Είναι $f'(x) = \dfrac{2x}{3f^2(x)} \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x) - 2x = 0$. Έστω

$g(x) = f^3(x) - x^2$, $x \in [-1,1]$.Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως σύνθεση και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με παράγωγο

$g'(x) = 3f^2(x)f'(x) - 2x$, $g(-1) = f^3(-1) - 1 = f^3(1) - 1 = g(1)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (-1,1)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3f^2(\xi)f'(\xi) - 2\xi = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \dfrac{2\xi}{3f^2(\xi)}$

ε) Είναι $f'(x)\sigma\upsilon\nu f(x) = 2x^3 \Leftrightarrow \left(\eta\mu f(x) - \dfrac{1}{2}x^4\right)' = 0$.

Έστω $g(x) = \eta\mu f(x) - \dfrac{x^4}{2}$, $x \in [-1,1]$.Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων .

Είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με παράγωγο

$g'(x) = f'(x)\sigma\upsilon\nu f(x) - 2x^4$, $g(-1) = \eta\mu f(-1) - \dfrac{1}{2} = \eta\mu f(1) - \dfrac{1}{2} = g(1)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (-1,1)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\sigma\upsilon\nu f(\xi) = 2\xi^3$

στ) Είναι $f'(x)e^{f^2(x)} = \dfrac{x}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f'(x)e^{f^2(x)} - x = 0 \Leftrightarrow$

$2f(x)f'(x)e^{f^2(x)} - 2x = 0 \Rightarrow \left(e^{f^2(x)} - x^2\right)' = 0$.

Έστω $g(x)=e^{f^2(x)}-x^2$, $x\in[-1,1]$.Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
Είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με παράγωγο
$g'(x)=2f(x)f'(x)e^{f^2(x)}-2x$. Είναι $g(-1)=e^{f^2(-1)}-1=e^{f^2(1)}-1=g(1)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(-1,1)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)e^{f^2(\xi)}=\dfrac{\xi}{f(\xi)}$.

49.α) $f'(x)+f(x)=0\Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf(x)=0\Leftrightarrow\left(e^xf(x)\right)'=0$
Έστω $g(x)=e^xf(x)$, $x\in[-\alpha,\alpha]$.Η g είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$ με παράγωγο
$g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)$. Είναι $g(-\alpha)=e^{-\alpha}f(-\alpha)=0$,
$g(\alpha)=e^{\alpha}f(\alpha)=0=g(-\alpha)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$, τέτοιο, ώστε:
$g'(\xi)=0\Leftrightarrow e^{\xi}f(\xi)+f'(\xi)e^{\xi}=0\Leftrightarrow f(\xi)+f'(\xi)=0$.

β) $f'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=0\Leftrightarrow\left(f(x)e^{-x}\right)'=0$
Έστω $g(x)=e^{-x}f(x)$, $x\in[-\alpha,\alpha]$.Η g είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$ με παράγωγο
$g'(x)=e^xf'(x)-e^{-x}f(x)$. Είναι $g(-\alpha)=e^{\alpha}f(-\alpha)=0$,
$g(\alpha)=e^{-\alpha}f(\alpha)=0=g(-\alpha)$ οπότε $g(1)=g(e)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$, τέτοιο ώστε:
$g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)e^{-\xi}-e^{-\xi}f(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)-f(\xi)=0$.

γ) $f'(x)-2f(x)=0\Leftrightarrow e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{-2x}f(x)\right)'=0$. Έστω $g(x)=e^{-2x}f(x)$, $x\in[-\alpha,\alpha]$. Η g είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$ ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων .
Είναι παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$ με $g'(x)=e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)$,
$g(\alpha)=e^{-2\alpha}f(\alpha)=0=g(-\alpha)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$, τέτοιο ώστε: $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)-2f(\xi)=0$

δ) Είναι $f'(x)+2xf(x)=0\Leftrightarrow e^{x^2}f'(x)+2xe^{x^2}f(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{x^2}f(x)\right)'=0$
Έστω $g(x)=e^{x^2}f(x)$, $x\in[-\alpha,\alpha]$.Η g είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$ ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων .

Είναι παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$ με παράγωγο

$g'(x)=e^{x^2}f'(x)+2xe^{x^2}f(x)$. Είναι $g(-\alpha)=e^{\alpha^2}f(-\alpha)=0$,

$g(\alpha)=e^{\alpha^2}f(\alpha)=0=g(-\alpha)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$, τέτοιο ώστε:

$g'(\xi)=0\Leftrightarrow e^{\xi^2}f'(\xi)+2\xi e^{\xi^2}f(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$.

ε) Είναι $f'(x)-(2x-1)f(x)=0\Leftrightarrow e^{x-x^2}f'(x)+(1-2x)e^{x-x^2}f(x)=0\Leftrightarrow$

$\left(e^{x-x^2}f(x)\right)'=0$. Έστω $g(x)=e^{x-x^2}f(x)$, $x\in[-\alpha,\alpha]$. Η g είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$ ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων .

Είναι παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$ με παράγωγο

$g'(x)=e^{x-x^2}f'(x)+(1-2x)e^{x-x^2}f(x)$, $g(\alpha)=e^{\alpha-\alpha^2}f(\alpha)=0=g(-\alpha)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$, τέτοιο ώστε: $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)+(1-2\xi)f(\xi)=0$.

50.α) Είναι $\kappa f'(x)+\lambda f(x)=0\Leftrightarrow f'(x)+\frac{\lambda}{\kappa}f(x)=0\Leftrightarrow$

$e^{\frac{\lambda}{\kappa}x}f'(x)+\frac{\lambda}{\kappa}e^{\frac{\lambda}{\kappa}x}f(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{\frac{\lambda}{\kappa}x}f(x)\right)'=0$. Έστω $g(x)=e^{\frac{\lambda}{\kappa}x}f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και

παραγωγίσιμη στο (α,β) με παράγωγο $g'(x)=e^{\frac{\lambda}{\kappa}x}f'(x)+\frac{\lambda}{\kappa}e^{\frac{\lambda}{\kappa}x}f(x)$. Είναι

$g(\alpha)=e^{\frac{\lambda}{\kappa}\alpha}f(\alpha)=e^{\frac{\lambda}{\kappa}\alpha}e^{\frac{\lambda}{\kappa}(\beta-\alpha)}f(\beta)=e^{\frac{\lambda}{\kappa}\alpha+\frac{\lambda}{\kappa}(\beta-\alpha)}f(\beta)=e^{\frac{\lambda}{\kappa}\beta}f(\beta)=g(\beta)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε: $g'(\xi)=0\Leftrightarrow\ \kappa f'(x)+\lambda f(x)=0\Leftrightarrow e^{\frac{\lambda}{\kappa}\xi}f'(\xi)+\frac{\lambda}{\kappa}e^{\frac{\lambda}{\kappa}\xi}f(\xi)=0\Leftrightarrow$

$\kappa f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$.

β) Είναι $\frac{f'(x)}{f(x)}=2\Leftrightarrow f'(x)=2f(x)\Leftrightarrow f'(x)-2f(x)=0\Leftrightarrow$

$e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{-2x}f(x)\right)'=0$. Έστω $g(x)=e^{-2x}f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$.

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α,β) με παράγωγο $g'(x)=e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)$. Είναι $g(\alpha)=e^{-2\alpha}f(\alpha)=0, g(\beta)=e^{-2\beta}f(\beta)=0=g(\alpha)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις

του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow e^{-2\xi}f'(\xi)-2e^{-2\xi}f(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=2f(\xi) \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=2$.

γ) Είναι $f'(x)+f(x)g'(x)=0 \Leftrightarrow e^{g(x)}f'(x)+g'(x)e^{g(x)}f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\left(e^{g(x)}f(x)\right)'=0$.

Έστω ρ_1,ρ_2 ρίζες της f.Έστω $h(x)=e^{g(x)}f(x)$, $x\in[\rho_1,\rho_2]$.Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως γινόμενο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων .

Είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με $h'(x)=e^{g(x)}f'(x)+g'(x)e^{g(x)}f(x)$. Είναι $h(\rho_1)=e^{g(\rho_1)}f(\rho_1)=0$, $h(\rho_2)=e^{g(\rho_2)}f(\rho_2)=0=h(\rho_1)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε:

$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow e^{g(\xi)}f'(\xi)+g'(\xi)e^{g(\xi)}f(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

51.Είναι $f'(x)\left[g(\beta)-g(\alpha)\right]-g'(x)\left[f(\beta)-f(\alpha)\right]=0 \Leftrightarrow$

$\left(f(x)\left[g(\beta)-g(\alpha)\right]-g(x)\left[f(\beta)-f(\alpha)\right]\right)'=0$

Έστω $h(x)=f(x)\left[g(\beta)-g(\alpha)\right]-g(x)\left[f(\beta)-f(\alpha)\right]$, $x\in[\alpha,\beta]$.

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $h'(x)=f'(x)\left[g(\beta)-g(\alpha)\right]-g'(x)\left[f(\beta)-f(\alpha)\right]$.

Είναι $h(\alpha)=f(\alpha)\left[g(\beta)-g(\alpha)\right]-g(\alpha)\left[f(\beta)-f(\alpha)\right]=$

$f(\alpha)g(\beta)-\cancel{f(\alpha)g(\alpha)}-g(\alpha)f(\beta)+\cancel{g(\alpha)f(\alpha)} \Leftrightarrow$

$h(\alpha)=f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta)$,

$h(\beta)=f(\beta)\left[g(\beta)-g(\alpha)\right]-g(\beta)\left[f(\beta)-f(\alpha)\right]=$

$=\cancel{f(\beta)g(\beta)}-f(\beta)g(\alpha)-\cancel{g(\beta)f(\beta)}+g(\beta)f(\alpha)=f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta)$ Άρα $h(\alpha)=h(\beta)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0$.

β) Προφανώς είναι $g(\alpha)\neq g(\beta)$, διαφορετικά από το θεώρημα Rolle για την g στο $[\alpha,\beta]$ θα υπήρχε $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$, πράγμα άτοπο. Άρα $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}$.

Η εξίσωση f΄΄(x)=0 ή $f^{(3)}(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα

52.Η f είναι συνεχής στο $[2,6]$, παραγωγίσιμη στο $(2,6)$ και $f(2)=f(6)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi_1 \in (2,6)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=0$.

Η f΄ είναι συνεχής στα $[2,\xi_1]$, $[\xi_1,6]$, παραγωγίσιμη στα $(2,\xi_1)$, $(\xi_1,6)$ και $f'(0)=f'(\xi_1), f'(\xi_1)=f'(6)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχουν $\xi_2 \in (2,\xi_1)$ και $\xi_3 \in (\xi_1,6)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_2)=f''(\xi_3)=0$.

Η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_2,\xi_3]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_2,ξ_3) και $f''(\xi_2)=f''(\xi_3)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_2,\xi_3)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi)=0$.

53.α) Η h είναι συνεχής στα $[4,x_0]$, $[x_0,5]$ και παραγωγίσιμη στα $(4,x_0)$, $(x_0,5)$ με παράγωγο $h'(x)=f'(x)-\kappa(x-4)-\kappa(x-5)$.

Είναι $h(4)=f(4)=0, h(5)=f(5)=0$, οπότε $h(4)=h(x_0), h(x_0)=h(5)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_2 \in (2,\xi_1)$ και $\xi_3 \in (\xi_1,6)$ τέτοια, ώστε $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$.

Η h' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) με παράγωγο $h''(x)=f''(x)-2\kappa$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε $h''(\xi)=0$.

β) Είναι $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=\kappa(x_0-4)(x_0-5) \Leftrightarrow \kappa=\dfrac{f(x_0)}{(x_0-4)(x_0-5)}$,

$$h''(\xi)=0 \Leftrightarrow f''(\xi)=2\kappa \Leftrightarrow \frac{1}{2}f''(\xi)=\kappa=\frac{f(x_0)}{(x_0-4)(x_0-5)} \Leftrightarrow$$

$$f(x_0)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x_0-4)(x_0-5).$$

54.Είναι $f''(x)+6x=e^x \Rightarrow \left(f'(x)+3x^2-e^x\right)'=0 \Rightarrow \left(f(x)+x^3-e^x\right)''=0$.

Έστω $g(x)=f(x)+x^3-e^x$.

Η g είναι συνεχής στα $[0,1],[1,2]$, παραγωγίσιμη στα $(0,1),(1,2)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)+3x^2-e^x$.

Επίσης $g(0)=f(0)-1=0, g(1)=f(1)+1-e=0, g(2)=f(2)+8-e^3=0$

οπότε $g(0)=g(1), g(1)=g(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (1,2)$ τέτοια, ώστε $g'(x_1)=g'(x_2)=0$.

Η g' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2)

οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2) \subseteq (0,2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi)=0 \Leftrightarrow f''(\xi)+6\xi = e^{\xi}$.

55. Είναι $f''(x)-\frac{1}{x^2}-2=\left(f'(x)+\frac{1}{x}-2x\right)'=\left(f(x)+\ln x-x^2\right)''$.

Έστω $g(x)=f(x)+\ln x-x^2$. Η g είναι συνεχής στα $[1,2],[2,e]$, παραγωγίσιμη στα $(1,2),(2,e)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)+\frac{1}{x}-2x$.

Είναι $g(1)=f(1)-1=0, g(2)=f(2)+\ln 2-4=0, g(e)=f(e)+1-e^2=0$ οπότε $g(1)=g(2), g(2)=g(e)$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $x_1 \in (1,2)$ και $x_2 \in (2,e)$ τέτοια, ώστε $g'(x_1)=g'(x_2)=0$.

Η g' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με παράγωγο $g''(x)=f''(x)-\frac{1}{x^2}-2$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle

άρα υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2) \subseteq (1,e)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi)=0 \Leftrightarrow f''(\xi)-\frac{1}{\xi^2}-2=0$.

56. Αρκεί να υπάρχει $\xi \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=1$.

Έστω $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$, $x \in [-2,2]$. Η g είναι συνεχής στα $[-2,0],[0,2]$, παραγωγίσιμη στα $(-2,0),(0,2)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-x$.

Είναι $g(-2)=f(-2)-2=f(0)+2-2=0=f(0)$,

$g(2)=f(2)-2=f(0)+2-2=f(0)=g(0)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $x_1 \in (-2,0)$ και $x_2 \in (0,2)$ τέτοια, ώστε $g'(x_1)=g'(x_2)=0$.

Η g' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με παράγωγο $g''(x)=f''(x)-1$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2) \subseteq (-2,2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi)=0 \Leftrightarrow f''(\xi)=1$.

57.α) Είναι $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)+f(\alpha)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-f(\alpha)$, οπότε $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)f(\alpha)=-f^2(\alpha)\le 0$

Αν $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)f(\alpha)<0$ τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha}{2},\alpha\right]$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1\in\left(\frac{\alpha}{2},\alpha\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$. Αν $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)f(\alpha)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=0$ ή $f(\alpha)=0$ τότε η f έχει ρίζα το $\frac{\alpha}{2}$ ή το α. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left[\frac{\alpha}{2},\alpha\right]$.

β) Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-x_1)=f(x_1)=0$ με $-\alpha\le -x_1\le -\frac{\alpha}{2}$.
Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-x_1,x_1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-x_1,x_1)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-x_1,x_1)$, οπότε και στο $(-\alpha,\alpha)$.
2ος τρόπος: Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$, παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$ και $f(-\alpha)=f(\alpha)$ αφού είναι άρτια, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-\alpha,\alpha)$.

58. Έστω $0<\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$ οι ρίζες της f. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2],[\rho_2,\rho_3],[\rho_3,\rho_4]$ και παραγωγίσιμη στα $(\rho_1,\rho_2),(\rho_2,\rho_3),(\rho_3,\rho_4)$ με παράγωγο $f'(x)=6f(1)x^2+6f(2)\ln x+f(2)$.
Είναι $g(\rho_1)=g(\rho_2)=0, g(\rho_2)=g(\rho_3)=0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$, $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$, $\xi_3\in(\rho_3,\rho_4)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=0$, $f'(\xi_2)=0$ και $f'(\xi_3)=0$. Η f' είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\xi_1,\xi_2],[\xi_2,\xi_3]$ και παραγωγίσιμη στα $(\xi_1,\xi_2),(\xi_2,\xi_3)$ με παράγωγο $f''(x)=12f(1)x+6f(2)\cdot\frac{1}{x}$. Επειδή $f'(\xi_1)=f'(\xi_2), f'(\xi_2)=f'(\xi_3)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχουν $\xi_4\in(\xi_1,\xi_2)$, $\xi_5\in(\xi_2,\xi_3)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_4)=0$ και $f''(\xi_5)=0$. Είναι $f''(x)=0\Leftrightarrow 12f(1)x+6f(2)\cdot\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow$

$12x^2f(1)x^2+6f(2)=0\Leftrightarrow x^2=-\frac{f(2)}{2f(1)}$ (1)

Η εξίσωση (1) έχει ρίζες τα x_1, x_2 , τα οποία είναι μοναδικά αφού έχει το πολύ δύο ρίζες. Άρα $-\frac{f(2)}{2f(1)} > 0 \Leftrightarrow f(1)f(2) < 0$, η f συνεχής στο $[1,2]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

2ος τρόπος: Είναι $f(x) = 2f(1)x^3 + 6xf(2)\ln x - 5f(2)x + 4,\ x > 0$ (A).

Από τη σχέση (A) έχουμε,

- για $x = 1$: $f(1) = 2f(1) - 5f(2) + 4 \Leftrightarrow f(1) = 5f(2) - 4$ (B)
- για $x = 1$: $f(2) = 16f(1) + 12f(2)\ln 2 - 10f(2) + 4 \overset{(A)}{\Leftrightarrow}$

$f(2) = 16\left(5f(2) - 4\right) + 12f(2)\ln 2 - 10f(2) + 4 \Leftrightarrow$

$f(2) = 80f(2) - 64 + 12f(2)\ln 2 - 10f(2) + 4 \Leftrightarrow 69f(2) + 12f(2)\ln 2 = 60 \Leftrightarrow$

$\left(\underbrace{69 + 12\ln 2}_{>0}\right) f(2) = 60 \Leftrightarrow f(2) = \frac{60}{69 + 12\ln 2}$ (Γ) > 0

Από τη σχέση (B) μέσω της (Γ) έχουμε

$f(1) = 5\frac{60}{69 + 12\ln 2} - 4 = \frac{300 - 276 - 48\ln 2}{69 + 12\ln 2} = \frac{24 - 48\ln 2}{69 + 12\ln 2} \Leftrightarrow$

$f(1) = \frac{24(1 - 2\ln 2)}{69 + 12\ln 2} \Leftrightarrow f(1) = \frac{24}{\underbrace{69 + 12\ln 2}_{>0}} \underbrace{(\ln e - \ln 4)}_{<0} < 0 \cdot$

Άρα $f(1) \cdot f(2) < 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

Στον τρόπο αυτό δεν χρειάζεται η δεύτερη υπόθεση.

Το θεώρημα Rolle στα προβλήματα

59.α) Έστω $S_1(t), S_2(t)$ οι συναρτήσεις θέσης των δύο αθλητών, $S_1'(t) = u_1(t), S_2'(t) = u_2(t)$ οι ταχύτητές τους αντίστοιχα και $u_1'(t) = \alpha_1(t)$, $u_2'(t) = \alpha_2(t)$ οι επιταχύνσεις αντίστοιχα.

i) Έστω η συνάρτηση $f(t) = S_1(t) - S_2(t)$, $t \in [0, t_1]$, όπου t_1 η χρονική στιγμή του τερματισμού. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, t_1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, t_1)$ με παράγωγο $f'(t) = u_1(t) - u_2(t)$. Είναι $f(0) = S_1(0) - S_2(0) = 0$ και $f(t_1) = S_1(t_1) - S_2(t_1) = 0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπήρξε χρονική στιγμή $t_0 \in (0, t_1)$ τέτοια, ώστε

$f'(t_0) = 0 \Leftrightarrow u_1(t_0) - u_2(t_0) = 0 \Leftrightarrow u_1(t_0) = u_2(t_0)$.

ii) Έστω η συνάρτηση $g(t)=u_1(t)-u_2(t)$, $t\in[0,t_0]$, όπου t_0 η χρονική στιγμή του προηγούμενου ερωτήματος με $u_1(t_0)=u_2(t_0)$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,t_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,t_0)$ με παράγωγο $g'(t)=\alpha_1(t)-\alpha_2(t)$. Είναι $g(0)=u_1(0)-u_2(0)=0$ και $g(t_0)=u_1(t_0)-u_2(t_0)=0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπήρξε χρονική στιγμή $t_2\in(0,t_0)$ τέτοια, ώστε $g'(t_2)=0\Leftrightarrow\alpha_1(t_2)-\alpha_2(t_2)=0\Leftrightarrow\alpha_1(t_2)=\alpha_2(t_2)$.

β) Έστω $S_1(t),S_2(t)$ οι συναρτήσεις θέσης των δύο αθλητών , $S_1'(t)=u_1(t)$, $S_2'(t)=u_2(t)$ οι ταχύτητές τους αντίστοιχα.

($S_1(t)$ η συνάρτηση θέσης του αθλητή που τερμάτισε σε λιγότερο χρόνο).

Αν t_0 είναι η χρονική στιγμή που τερμάτισε ο ένας τότε ο άλλος τερμάτισε την χρονική στιγμή $2t_0$. Άρα είναι $S_1(0)=S_2(0)$ και $S_1(t_0)=S_2(2t_0)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι έχει λύση στο $[0,t_0]$ η εξίσωση

$$u_1(t)=2u_2(2t)\Leftrightarrow u_1(t)-2u_2(2t)=0\Leftrightarrow\left(S_1(t)-S_2(2t)\right)'=0$$

Έστω η συνάρτηση $h(t)=S_1(t)-S_2(2t)$, $t\in[0,t_0]$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,t_0]$, παραγωγίσιμη στο $(0,t_0)$ με παράγωγο $h'(t)=u_1(t)-2u_2(2t)$ και $h(0)=h(t_0)$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπήρξε χρονική στιγμή $t_3\in(0,t_0)$ τέτοιο, ώστε $h'(t_3)=0\Leftrightarrow u_1(t_3)-2u_2(2t_3)=0\Leftrightarrow u_1(t_3)=2u_2(2t_3)$.

60. Έστω $\Lambda(t),X(t)$ οι συναρτήσεις θέσης του λαγού και της χελώνας αντίστοιχα. Τότε η μεταξύ τους απόσταση μέχρι να ξεκινήσει ο λαγός είναι $d(t)=|X(t)-\Lambda(t)|=X(t)-\Lambda(t)$, αφού η χελώνα προηγείται.

Αρκεί να δείξουμε ότι έχει λύση στο $(0,t_0)$ η εξίσωση $d'(t)=1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow d'(t)-1=0\Leftrightarrow\left(d(t)-t\right)'=0\Leftrightarrow\left(X(t)-\Lambda(t)-t\right)'=0.$$

Έστω η συνάρτηση $f(t)=X(t)-\Lambda(t)-t$, $t\in[0,t_0]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,t_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,t_0)$ με παράγωγο $f'(t)=d'(t)-1$. Είναι $f(0)=X(0)-\Lambda(0)-0=0$ και $f(t_0)=X(t_0)-\Lambda(t_0)-t_0=0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $t_1\in(0,t_0)$ τέτοιο ώστε $f'(t_1)=0\Leftrightarrow d'(t_1)-1=0\Leftrightarrow d'(t_1)=1$.

61. Έστω $h_A(t)$ και $h_B(t)$ το ύψος των ελατηρίων Α και Β αντίστοιχα κάθε χρονική στιγμή. Η διαφορά του ρυθμού μεταβολής του ύψους του ελατηρίου Β

από τον ρυθμό μεταβολής του ύψους του ελατηρίου Α είναι $h_A'(t)-h_B'(t)$.
Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$h_A'(t)-h_B'(t)=\frac{1}{t_0}\Leftrightarrow h_A'(t)-h_B'(t)-\frac{1}{t_0}=0\Leftrightarrow\left(h_A(t)-h_B(t)-\frac{t}{t_0}\right)'=0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,t_0)$.

Έστω η συνάρτηση $f(t)=h_A(t)-h_B(t)-\frac{t}{t_0}$, $t\in[0,t_0]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,t_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,t_0)$ με παράγωγο

$$f'(t)=h_A'(t)-h_B'(t)-\frac{1}{t_0}.$$

Είναι $f(0)=h_A(0)-h_B(0)=2-3=-1$ και $f(t_0)=h_A(t_0)-h_B(t_0)-\frac{t_0}{t_0}=-1$

αφού $h_A(t_0)=h_B(t_0)$.
Άρα $f(0)=f(t_0)$, επομένως από το θεώρημα Rolle υπάρχει $t_1\in(0,t_0)$ τέτοιο ώστε $f'(t_1)=0\Leftrightarrow h_A'(t)-h_B'(t)-\frac{1}{t_0}=0\Leftrightarrow h_A'(t)-h_B'(t)=\frac{1}{t_0}$

62. Έστω $K(t)$ χιλιάδες ευρώ το κέρδος της εταιρείας συναρτήσει του χρόνου t σε μήνες. Είναι $K(1)=0$ και $K(2)=7$ χιλιάδες ευρώ.
Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t)=K(t)-t^3$, $t\in[1,2]$. Η f είναι συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με $f'(t)=K'(t)-3t^2$.
Είναι $f(1)=0-1=-1$ και $f(2)=7-8=-1=f(1)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle υπάρχει χρονική στιγμή $t_0\in(1,2)$ τέτοια ώστε $f'(t_0)=0\Leftrightarrow K'(t_0)-3t_0^{\,2}=0\Leftrightarrow K'(t_0)=3t_0^{\,2}$ χιλιάδες ευρώ.

Θεώρημα Rolle και γραφική παράσταση

63.α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής στο $[0,1]$. Από το σχήμα βλέπουμε ότι $f(0)<f(3)<f(1)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, άρα υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=f(3)$ (1) . Αν η f ήταν 1-1, τότε από την (1) θα είχαμε ότι $x_0=3$ που είναι άτοπο, άρα η f δεν είναι 1-1.

2ος τρόπος

Από το σχήμα βλέπουμε ότι η οριζόντια ευθεία $y=f(3)$ τέμνει τη c_f σε δύο σημεία άρα η f δεν είναι 1-1.

β) Επειδή $f(x_0)=f(3)$, η f είναι συνεχής στο $[x_0,3]$ και παραγωγίσιμη στο

$(x_0,3)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $\xi\in(0,3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

γ)Αν A(x, f(x)), τότε για να είναι η χορδή ΑΒ παράλληλη στον x΄x και να έχει μήκος 1, το Β θα έχει συντεταγμένες (x+1, f(x+1)). Είναι $0\le x\le 3$ και $0\le x+1\le 3\Leftrightarrow -1\le x\le 2$, άρα $x\in[0,2]$. Επομένως αρκεί να υπάρχει $x\in[0,2]$ τέτοιο, ώστε $f(x+1)=f(x)$. Έστω $g(x)=f(x+1)-f(x),\ x\in[0,2]$. Είναι $g(0)=f(1)-f(0)>0,\ g(2)=f(3)-f(2)<0$ όπως φαίνεται από το σχήμα, δηλαδή $g(0)g(2)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\rho\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho)=0\Leftrightarrow f(\rho+1)=f(\rho)$.

64. Η f είναι συνεχής στα $[\alpha,0]$, $[0,\beta]$ και παραγωγίσιμη στα $(\alpha,0),(0,\beta)$. Επειδή $f(\alpha)=f(\beta)=f(0)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,0)$, $\xi_2\in(0,\beta)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και $f'(\xi_2)=0$
Η f ΄είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) και $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

65.Η f είναι συνεχής στο $[1,3]$, παραγωγίσιμη στα $(1,3)$ και $f(1)=f(3)=0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f άρα υπάρχει $\xi_1\in(1,3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=0$.
Η f ΄είναι συνεχής στα $[1,\xi_1],[\xi_1,3]$, παραγωγίσιμη στο $(1,\xi_1),(\xi_1,3)$ και $f'(1)=f'(\xi_1)=0, f'(\xi_1)=f'(3)=0$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχουν $\xi_2\in(1,\xi_1)$ και $\xi_3\in(\xi_1,3)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_2)=f''(\xi_3)=0$. Η f″ είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\xi_2,\xi_3)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi)=0$.

66.Η εφαπτομένη στο Μ είναι: $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$. Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει: $-f(\xi)=-\xi f'(\xi)\Leftrightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)=0$. Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ ορισμένη στο $[1,2]$. Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Είναι

$g(1)=f(1)=2,\ g(2)=\dfrac{f(2)}{2}=2=g(1)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)=0$.

67. Είναι $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$. Η εφαπτομένη στο $M(\xi f(\xi))$ είναι: $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$. Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει: $-f(\xi)=-\xi f'(\xi)\Leftrightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)=0\Leftrightarrow \dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0$. Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}, x\in\mathbb{R}$. Η g είναι συνεχής στα $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στα $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$ με παράγωγο $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Επειδή $g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα η εξίσωση $g'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, οπότε η εξίσωση $xf'(x)-f(x)=0$ έχει τουλάχιστον 3 ρίζες.

Επομένως υπάρχουν τουλάχιστον 3 εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

68. Είναι $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)}=0\Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

Έστω $h(x)=f(x)g(x), x\in[\alpha,\beta]$. Η h είναι συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. Είναι $h(\alpha)=f(\alpha)g(\alpha)=0$, $h(\beta)=f(\beta)g(\beta)=0=h(\alpha)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $h'(\xi)=0\Leftrightarrow \dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)}=0$.

69.α) Έστω ότι $f(0)=f(3)$.

Η f είναι συνεχής στο [0,3] και παραγωγίσιμη στο (0,3) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(0,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, πράγμα που δεν ισχύει σύμφωνα με την γραφική παράσταση.

β) Έστω ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_1\in\mathbb{R}$ με $x_1<3$ τότε

$f(x_1)=0=f(3)$.

Η f είναι συνεχής στο $[x_1,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_1,3)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[x_1,3]$ οπότε θα υπάρχει $\xi\in(x_1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, πράγμα που δεν ισχύει σύμφωνα με την γραφική παράσταση.

Ομοίως αν $x_1>3$.Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο μόνο για $x=3$.

γ) Είναι $g(3)=\dfrac{f(3)}{3}=0$. Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις πρέπει

$g(\alpha)=0\Leftrightarrow\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=0\Leftrightarrow f(\alpha)=0$ πράγμα άτοπο από β) ερώτημα. Άρα δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

δ) Είναι $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$, $x\neq 0$ άρα

$g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=0$. Από το σχήμα για κάθε $x\in(0,3]$ είναι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow xf'(x)\geq 0\Leftrightarrow -xf'(x)\leq 0\overset{f(x)\leq 0}{\Leftrightarrow} f(x)-xf'(x)\leq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=3$. Άρα είναι $g'(3)=0$.

70.α) Είναι $f(0)=\dfrac{0}{-\alpha}=0$ και $f(2)=\dfrac{4-4}{4-\alpha}=0$ οπότε $f(0)=f(2)$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού τη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο: $f'(x)=\dfrac{(2x-2)(x^2-\alpha)-2x(x^2-2x)}{(x^2-\alpha)^2}=$

$$=\frac{\cancel{2x^3}-2\alpha x-2x^2+2\alpha-\cancel{2x^3}+4x^2}{(x^2-\alpha)^2}=\frac{2(x^2-\alpha x+\alpha)}{(x^2-\alpha)^2}$$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2(x^2-\alpha x+\alpha)}{(x^2-\alpha)^2}=0\Leftrightarrow x^2-\alpha x+\alpha=0$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=\alpha^2-4\alpha=\alpha(\alpha-4)$.

Αν $\alpha\in(0,4)\Leftrightarrow\Delta<0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν $\alpha<0\Leftrightarrow-\alpha>0\Leftrightarrow\Delta>0$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\alpha}}{2}$

και $D_f=\mathbb{R}$ αφού $x^2-\alpha>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) i) Αν η f' παριστάνεται από την C_1 τότε $D_f = \mathbb{R} - \{-1,1\}$. Η f ορίζεται όταν $x^2 - \alpha \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq \alpha$. Αν το $\alpha < 0$ η f θα είχε πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ άτοπο, άρα $\alpha \in (0,4)$ οπότε η εξίσωση $x^2 = \alpha$ έχει ρίζες το 1 και το -1 επομένως $\alpha = 1$. Η f δεν ορίζεται σε όλα τα σημεία του διαστήματος $[0,2]$, άρα δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα αυτό.
ii) Αν η f' παριστάνεται από την C_2 τότε από β) ερώτημα η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ρίζες οπότε $\alpha < 0$. Τότε $D_f = \mathbb{R}$.
Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$, παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, $f(0) = f(2)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει (μοναδικό από το σχήμα) $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Άρα $\xi < 2$.

71. Η f είναι συνεχής και στα διαστήματα $[0,2],[2,4]$.
Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στα διαστήματα $(0,2),(2,4)$.
Επίσης $f(0) = f(2) = f(4)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,2)$ και $\xi_2 \in (2,4)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.
Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_3) = 0$. Η f'' είναι γνησίως μονότονη οπότε το ξ_3 είναι μοναδικό.
Επίσης τα ξ_1, ξ_2 είναι μοναδικά , διαφορετικά θα υπήρχε και δεύτερη ρίζα της $f''(x) = 0$ από το θεώρημα Rolle άτοπο

- Σύμφωνα με τα παραπάνω η f' έχει δύο ακριβώς κοινά σημεία με τον άξονα x΄x με τετμημένες θετικές .

Οι (Δ), (Ε) και (ΣΤ) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τον άξονα x΄x οπότε δεν μπορούν να είναι γραφικές παραστάσεις της $C_{f'}$.
Η (Α) τέμνει τον άξονα x΄x στο Ο(0,0) άρα δεν μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της $C_{f'}$.
Η (Γ) τέμνει τον άξονα x΄x σε ακριβώς δύο σημεία με αρνητικές τετμημένες οπότε δεν μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της $C_{f'}$.
Επομένως η f' παριστάνεται από την (Β), η οποία τέμνει τον άξονα x΄x σε ακριβώς δύο σημεία με θετικές τετμημένες.

- Σύμφωνα με τα παραπάνω η f'' έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον άξονα x΄x ,το οποίο έχει τετμημένη θετική .

Οι (Α), (Β) και (Γ) έχουν δύο κοινά σημεία με τον άξονα x΄x οπότε δεν μπορούν να είναι γραφικές παραστάσεις της $C_{f''}$.
Η (Ε) έχει μοναδικό σημείο τομής με τον άξονα x΄x το Ο(0,0) άρα δεν μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της $C_{f''}$.

Η (ΣΤ) έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον άξονα x΄x, το οποίο έχει αρνητική τετμημένη, άρα δεν μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της $C_{f''}$.

Επομένως η f'' παριστάνεται από την (Δ) η οποία τέμνει τον άξονα x΄x σε μοναδικό σημείο με θετική τετμημένη.

72. Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $x_0 = 1$ είναι

$(\varepsilon) : y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = f'(1)x + f(1) - f'(1)$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι η (ε) τέμνει την γραφική παράσταση της f και σε δεύτερο σημείο $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ με $x_1 < 0$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - f'(1)x - f(1) + f'(1)$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $g'(x) = f'(x) - f'(1)$.

Αν η f παριστάνεται από την C_1 τότε $g(1) = 0$ και $g(x_1) = 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, 1)$ τέτοιο ώστε

$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow f'(\xi) - f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = f'(1) \overset{f':1-1}{\Leftrightarrow} \xi = 1$ άτοπο.

Άρα η f παριστάνεται από την C_2. Η εφαπτομένη είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$ με $\beta = f(1) - f'(1)$. Η (ε) τέμνει τον άξονα y΄y σε σημείο με αρνητική τεταγμένη άρα $\beta < 0 \Leftrightarrow f(1) - f'(1) < 0 \Leftrightarrow f(1) < f'(1)$.

Χρήση εις άτοπο απαγωγής

73. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 4\left(\lambda^2+1\right)x^3 + 6(\lambda+\mu)x^2 + 6\left(\mu^2+1\right)x + 4$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 6\left[2\left(\lambda^2+1\right)x^2 + 2(\lambda+\mu)x + \left(\mu^2+1\right)\right]$. Έστω ότι η f έχει τρείς εφαπτομένες παράλληλες μεταξύ τους στα σημεία $A\left(\rho_1, f(\rho_1)\right), B\left(\rho_2, f(\rho_2)\right), \Gamma\left(\rho_3, f(\rho_3)\right)$ με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Τότε $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = f'(\rho_3)$.

Η f' συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$, παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0$.

Όμως το τριώνυμο $2\left(\lambda^2+1\right)x^2 + 2(\lambda+\mu)x + \left(\mu^2+1\right)$ η f'' έχει διακρίνουσα

$\Delta = 4(\lambda+\mu)^2 - 8\left(\lambda^2+1\right)\left(\mu^2+1\right) = 4\left(\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2\right)8\left(\lambda^2+1\right)\left(\mu^2+1\right) \Leftrightarrow$

$\Delta = 4\left(\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2-2\lambda^2\mu^2-2\lambda^2-2\mu^2-2\right) = 4\left(-\lambda^2+2\lambda\mu-\mu^2-2\lambda^2\mu^2-2\right) \Leftrightarrow$

$\Delta = 4\left(-\left(\lambda^2-2\lambda\mu+\mu^2\right)-2\lambda^2\mu^2-2\right) \Leftrightarrow \Delta = 4\left(-(\lambda-\mu)-2\lambda^2\mu^2-2\right) < 0$ οπότε η

εξίσωση $2(\lambda^2+1)x^2+2(\lambda+\mu)x+(\mu^2+1)=0 \Leftrightarrow f''(x)=0$ είναι αδύνατη .
Άρα η C_f δεν μπορεί να έχει 3 εφαπτομένες παράλληλες μεταξύ τους.

74.Αν η f δεν ήταν 1-1, θα υπήρχαν $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)$. Η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$ που είναι άτοπο.

75.Είναι $6xf(x) \neq (3x^2-12)f'(x)$ (1).

α) Από τη σχέση (1) για $x=2$, $x=-2$ προκύπτει αντίστοιχα $f(-2)\neq 0$ και $f(2)\neq 0$.

β) Έστω $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-2,2)$. Τότε από α) ερώτημα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[-2,2]$.Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{3x^2-12}{f(x)}$, $x\in[-2,2]$.

Η g είναι συνεχής στο $[-2,2]$ σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{6xf(x)-(3x^2-12)f'(x)}{f^2(x)}$.

Είναι $g(-2)=g(2)=0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{6\xi f(\xi)-(3\xi^2-12)f'(\xi)}{f^2(\xi)}=0 \Leftrightarrow 6\xi f(\xi)=(3\xi^2-12)f'(\xi)$ που είναι άτοπο.

Άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της f στο $(-2,2)$.

76.Είναι $(2x-1)f(x)\neq(x^2-x)f'(x)$ (1).

α) Από τη σχέση (1) για $x=0$, $x=1$ προκύπτει αντίστοιχα $f(0)\neq 0$ και $f(1)\neq 0$.

β) Έστω $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Τότε από α) ερώτημα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$.Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x^2-x}{f(x)}$, $x\in[0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{(2x-1)f(x)-(x^2-x)f'(x)}{f^2(x)}=0.$

Είναι $g(0)=g(1)=0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow$ $\dfrac{(2\xi-1)f(\xi)-(\xi^2-\xi)f'(\xi)}{f^2(\xi)}=0\Leftrightarrow (2\xi-1)f(\xi)=(\xi^2-\xi)f'(\xi)$ που είναι άτοπο. Άρα η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

77. Έστω $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\rho_1,\rho_2)$. Από τη σχέση (1) για $x=\rho_1, x=\rho_2$ προκύπτει αντίστοιχα $g(\rho_1)\neq 0$ και $g(\rho_2)\neq 0$ οπότε $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\rho_1,\rho_2]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x\in[\rho_1,\rho_2]$. Η h είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με $h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$. Επειδή $h(\rho_1)=\dfrac{f(\rho_1)}{g(\rho_1)}=0$ και $h(\rho_2)=\dfrac{f(\rho_2)}{g(\rho_2)}=0=h(\rho_1)$, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow$ $\dfrac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}=0\Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)=0$ που είναι άτοπο. Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1,ρ_2).

Έστω $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $g(x)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\rho_1,\rho_2)$. Από τη σχέση (1) για $x=\rho_1, x=\rho_2$ προκύπτει αντίστοιχα $f(\rho_1)\neq 0$ και $f(\rho_2)\neq 0$ οπότε $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\rho_1,\rho_2]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$, $x\in[x_1,x_2]$.

Η φ είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με $\varphi'(x)=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)}$. Επειδή $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε $\xi_1\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi_1)=0\Leftrightarrow g'(\xi_1)f(\xi_1)-g(\xi_1)f'(\xi_1)=0\Leftrightarrow$

$f'(\xi_1)g(\xi_1)-f(\xi_1)g'(\xi_1)=0$ που είναι άτοπο. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1,ρ_2).

Τουλάχιστον μία ρίζα

78. Έστω $f(x)=\frac{\alpha}{4}x^4+\frac{\beta}{3}x^3+\frac{\gamma}{2}x^2+\delta x$, $x\in[0,1]$. Η f είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (0,1) με παράγωγο $f'(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$.

Είναι $f(0)=0$, $f(1)=\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{2}+\delta=0=f(0)$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)..

79. Έστω $f(x)=\alpha x^5+\beta x^4-2\alpha x^3-\beta x^2+\alpha x$, $x\in[0,1]$. Η f είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (0,1) με παράγωγο $f'(x)=5\alpha x^4+4\beta x^3-6\alpha x^2-2\beta x+\alpha$. Είναι $f(0)=0$, $f(1)=\alpha+\beta-2\alpha-\beta+\alpha=0=f(0)$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, η εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow$ $5\alpha x^4+4\beta x^3-6\alpha x^2-2\beta x+\alpha=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1).

80. Έστω $f(x)=e^x-\frac{\alpha x^2}{2}+\beta x$, $x\in[0,1]$. Η f είναι συνεχής στο [0,1] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (0,1) με παράγωγο $f'(x)=e^x-\alpha x+\beta$. Είναι $f(0)=1$, $f(1)=e-\frac{\alpha}{2}+\beta=\frac{2e-\alpha+2\beta}{2}$.

Όμως $\alpha-2\beta=2e-2\Leftrightarrow\alpha=2\beta+2e-2$, άρα

$f(1)=\frac{2e-2\beta-2e+2+2\beta}{2}=1=f(0)$. Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-\alpha x+\beta=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1).

81.α) Έστω $f(x)=(x-1)\eta\mu x$, $x\in[0,1]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο $f'(x)=\eta\mu x+(x-1)\sigma\upsilon\nu x$. Επειδή $f(0)=f(1)=0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x+(x-1)\sigma\upsilon\nu x=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

β) Είναι $(2x-1)\eta\mu x=(x-x^2)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow (x^2-x)'\eta\mu x+(x^2-x)(\eta\mu x)'=0$.

Έστω $f(x)=(x^2-x)\eta\mu x,\ x\in[0,1]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο

$f'(x)=(2x-1)\eta\mu x+(x^2-x)\sigma\upsilon\nu x$. Επειδή $f(0)=f(1)=0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (2x-1)\eta\mu x=(x-x^2)\sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Αυξημένης δυσκολίας

82.α) Είναι $f(-1)=1+10-15+1+2=-1<0$, $f(0)=2>0$ και $f(1)=-23<0$, οπότε $f(-1)f(0)<0$ και $f(0)f(1)<0$.

Η f είναι συνεχής , στα διαστήματα $[-1,0],[0,1]$ σαν πολυωνυμική άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, υπάρχουν $x_1\in(-1,0), x_2\in(0,1)$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=0$ και $f(x_2)=0$.

β) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ σαν πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1,x_2) με παράγωγο

$f'(x)=4x^3-30x^2-30x-1$. Επειδή $f(x_1)=f(x_2)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-30x^2-30x-1=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(x_1,x_2)\subseteq(-1,1)$.

83.Η f είναι συνεχής , στα διαστήματα $[3,4],[4,5]$ σαν πολυωνυμική .

Είναι $f(3)f(4)<0$ και $f(5)f(4)<0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, υπάρχουν $x_1\in(3,4)$ και $x_2\in(4,5)$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)=0$.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ σαν πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1,x_2) άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$. Άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

84.Είναι $f(1)+f(2)=f(3)+f(4)$ (1).

- Έστω $f(1)\neq f(2), f(3)\neq f(4)$. Τότε $\frac{f(1)+f(2)}{2}$

Επίσης $\frac{f(3)+f(4)}{2}$ βρίσκεται μεταξύ των $f(3), f(4)$.

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[1,2],[3,4]$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε υπάρχουν $x_1 \in (1,2)$, $x_2 \in (3,4)$ τέτοια, ώστε $f(x_2)=\frac{f(3)+f(4)}{2}$ και $f(x_1)=\frac{f(1)+f(2)}{2}\overset{(2)}{=}f(x_2)$.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ σαν πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1,x_2) άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε , υπάρχει $x_0 \in (x_1,x_2): f'(x_0)=0$.

- Έστω $f(1)=f(2)$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$,παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$

- Έστω $f(3)=f(4)$. Η f είναι συνεχής στο $[3,4]$,παραγωγίσιμη στο $(3,4)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $x_2 \in (3,4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)=0$.

Άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,4)$.

85. Είναι $f(0)f(1)=f(2)f(3)$.

- Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος μέγιστης-ελάχιστης τιμής, οπότε υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $m\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in[0,1]$. Επιπλέον είναι $f(x)>0$ οπότε $m>0$ άρα $0<m\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in[0,3]$.

Επομένως $m\leq f(0)\leq M$, $m\leq f(1)\leq M$.

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των 2 σχέσεων προκύπτει ότι:

$m^2\leq f(0)f(1)\leq M^2 \Leftrightarrow m\leq\sqrt{f(0)f(1)}\leq M$. Επειδή ο αριθμός $\sqrt{f(0)f(1)}$ ανήκει στο $[m,M]$, υπάρχει $x_1\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=\sqrt{f(0)f(1)}$.

- Επειδή η f είναι συνεχής στο $[2,3]$, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος μέγιστης-ελάχιστης τιμής, οπότε υπάρχουν $m_1,M_1\in\mathbb{R}$ τέτοια,

ώστε: $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [2,3]$. Επιπλέον είναι $f(x) > 0$ οπότε $m_1 > 0$ άρα $0 < m_1 \le f(x) \le M_1$ για κάθε $x \in [2,3]$.

Επομένως $m_1 \le f(2) \le M_1$, $m_1 \le f(4) \le M_1$.

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των 2 σχέσεων προκύπτει ότι:

$m_1^2 \le f(0)f(1) \le M_1^2 \Leftrightarrow m_1 \le \sqrt{f(2)f(3)} \le M_1$. Επειδή ο αριθμός $\sqrt{f(2)f(3)}$ ανήκει στο $[m_1, M_1]$, υπάρχει $x_2 \in [2,3]$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = \sqrt{f(2)f(3)}$.

Από τη σχέση (1) είναι $\sqrt{f(0)f(1)} = \sqrt{f(2)f(3)} \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0,3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Το πολύ κ ρίζες

86. Έστω $g(x) = \ln x - 2 + x$, x>0, και ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $0 < x_1 < x_2$. Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο $g'(x) = \frac{1}{x} + 1$, $g(x_1) = g(x_2) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} + 1 = 0 \Leftrightarrow \xi = -1$ άτοπο.

Επομένως η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 2 + x = 0$ δεν έχει δύο ρίζες οπότε έχει το πολύ μία ρίζα.

87. Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2 < \rho$.

Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), $f(x_1) = f(x_2) = 0$ οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$ άτοπο αφού το ρ είναι η μικρότερη ρίζα της f΄. Επομένως η f δεν έχει 2 ρίζες άρα έχει το πολύ μία ρίζα.

88. Έστω ότι έχει η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$.

Η f΄ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) αφού είναι δύο φορές παραγωγίσιμη άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$. Η σχέση $f(x)f''(x) > 0$ για x=ξ γίνεται $f(\xi)f''(\xi) > 0 \Leftrightarrow 0 > 0$ άτοπο. Επομένως η f΄ δεν έχει 2 ρίζες

άρα έχει το πολύ μία ρίζα .

89.α) Έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), $f(x_1) = f(x_2) = 0$ οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.
Επομένως η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_1, x_2).
β) Έστω ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ που ανήκουν στο (ρ_1, ρ_2), όπου ρ_1, ρ_2 διαδοχικές ρίζες της $f'(x) = 0$.
Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$, που είναι άτοπο, αφού τα ρ_1, ρ_2 είναι διαδοχικές ρίζες της $f'(x) = 0$.

90.Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \lambda x e^x - e$.
Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 3 πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.Τότε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$.
Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$, παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3)$ με παράγωγο $f'(x) = \lambda e^x + \lambda x e^x = \lambda e^x (1 + x)$, οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ με $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. Όμως, η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda e^x (1 + x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ έχει μοναδική λύση την $x = -1$, οπότε δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες ξ_1, ξ_2. Άρα, η εξίσωση $\lambda x e^x = e$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

91.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3\alpha x + 2\beta$, $x \in \mathbb{R}$.
Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ρίζες x_1, x_2, x_3 με $x_1 < x_2 < x_3$.
Η f είναι συνεχής στα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στα $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$ με παράγωγο $f'(x) = 6x^5 - 3\alpha$. Επειδή $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια, ώστε

$f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$. Είναι $f'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow 6\xi_1^5 = 3\alpha \Leftrightarrow \xi_1^5 = \dfrac{\alpha}{2}$ και

$f'(\xi_2)=0 \Leftrightarrow \xi_2^5=\frac{\alpha}{2}$. Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\xi_1=\sqrt[5]{\frac{\alpha}{2}}$, $\xi_2=\sqrt[5]{\frac{\alpha}{2}}$, άρα $\xi_1=\xi_2$ άτοπο.

Αν α<0 τότε $\xi_1=-\sqrt[5]{-\frac{\alpha}{2}}$, $\xi_2=-\sqrt[5]{-\frac{\alpha}{2}}$ άρα $\xi_1=\xi_2$ άτοπο. Επομένως η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow x^6-3\alpha x+2\beta=0$ δεν έχει περισσότερες από δύο ρίζες.

92. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4+\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ x\in\mathbb{R}$. Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ρίζες $x_1<x_2<x_3$.

Η f είναι συνεχής στα $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στα $(x_1,x_2),(x_2,x_3)$ με παράγωγο $f'(x)=4x^3+2\alpha x+\beta$. Επειδή $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και $f'(\xi_2)=0$. Η f΄ είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) με παράγωγο $f''(x)=12x^2+2\alpha$.

Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2), $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0 \Leftrightarrow$

$12\xi^2+2\alpha=0 \Leftrightarrow \xi^2=-\frac{\alpha}{6}<0$ αδύνατο. Επομένως η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow x^4+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ δεν έχει 3 ρίζες άρα έχει το πολύ δύο ρίζες.

93. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-xe^x, x\in\mathbb{R}$.

Έστω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει 3 ρίζες $x_1<x_2<x_3$. Η g είναι συνεχής στα $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στα $(x_1,x_2),(x_2,x_3)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-e^x\cdot(x+1)$. Επειδή $g(x_1)=g(x_2)=g(x_3)=0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$ τέτοια, ώστε $g'(\xi_1)=0$ και $g'(\xi_2)=0$. Η g΄ είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) με $g''(x)=f'(x)-e^x(x+2)$. Επειδή $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi)=0 \Leftrightarrow f''(\xi)=e^{\xi}(\xi+2)$ άτοπο. Επομένως η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=xe^x$ δεν έχει 3 ρίζες και έχει το πολύ δύο.

94. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^x-x^2+x-2$.Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τέσσερις ρίζες $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$ με $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$.
Η f είναι συνεχής στα $[\rho_1,\rho_2],[\rho_2,\rho_3],[\rho_3,\rho_4]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στα $(\rho_1,\rho_2),(\rho_2,\rho_3),(\rho_3,\rho_4)$ με παράγωγο $f'(x)=e^x-2x+1$.
Επειδή $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=f(\rho_4)=0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2),\xi_2\in(\rho_2,\rho_3),\xi_3\in(\rho_3,\rho_4)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=0,f'(\xi_2)=0,f'(\xi_3)=0$.
Η f΄είναι συνεχής στα $[\xi_1,\xi_2],[\xi_2,\xi_3]$ και παραγωγίσιμη στα $(\xi_1,\xi_2),(\xi_2,\xi_3)$ με παράγωγο $f''(x)=e^x-2$. Επειδή $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_4\in(\xi_1,\xi_2),\xi_5\in(\xi_2,\xi_3)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_4)=0$ και $f''(\xi_5)=0$. Είναι $f''(\xi_4)=0\Leftrightarrow e^{\xi_4}=2\Leftrightarrow\xi_4=\ln 2$ και $f''(\xi_5)=0\Leftrightarrow e^{\xi_5}=2\Leftrightarrow\xi_5=\ln 2$, άρα $\xi_4=\xi_5$ άτοπο. Επομένως η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow e^x-x^2+x-2=0$ δεν έχει 4 ρίζες άρα έχει το πολύ τρείς ρίζες.

Αυξημένης δυσκολίας

95.α) Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 3 ρίζες x_1,x_2,x_3 με $x_1<x_2<x_3$.
Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ και παραγωγίσιμη στα $(x_1,x_2),(x_2,x_3)$. Επειδή $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και $f'(\xi_2)=0$. Η f΄ είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2). Επειδή $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$ άτοπο. Επομένως η f δεν έχει 3 ρίζες άρα έχει το πολύ δύο ρίζες.
β) Έστω $f(x)=e^x-(e-1)x-1$. Είναι $f(1)=f(0)=0$.
Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=e^x-e+1$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=e^x$.
Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f''(x)\neq 0$, από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow e^x=(e-1)x+1$ έχει το πολύ 2 ρίζες, άρα οι λύσεις x = 0, x=1 είναι οι μοναδικές λύσεις της εξίσωσης.

96. Επειδή η C_f έχει με την C_φ τέσσερα κοινά σημεία, η εξίσωση $f(x)=\varphi(x)$ έχει 4 ρίζες $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$ με $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$. Έστω $g(x)=f(x)-\varphi(x)$.
Η g είναι συνεχής στα $[\rho_1,\rho_2],[\rho_2,\rho_3],[\rho_3,\rho_4]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στα $(\rho_1,\rho_2),(\rho_2,\rho_3),(\rho_3,\rho_4)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-6x-5$. Επειδή $g(\rho_1)=g(\rho_2)=g(\rho_3)=g(\rho_4)=0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2),\xi_2\in(\rho_2,\rho_3),\xi_3\in(\rho_3,\rho_4)$ τέτοια, ώστε $g'(\xi_1)=0,g'(\xi_2)=0,g'(\xi_3)=0$. Η g΄είναι συνεχής στα $[\xi_1,\xi_2],[\xi_2,\xi_3]$ και παραγωγίσιμη στα $(\xi_1,\xi_2),(\xi_2,\xi_3)$ με παράγωγο $g''(x)=f''(x)-6$. Επειδή $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=g'(\xi_3)=0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχουν $\xi_4\in(\xi_1,\xi_2),\xi_5\in(\xi_2,\xi_3)$ τέτοια, ώστε $g''(\xi_4)=0$ και $g''(\xi_5)=0$. Η g΄΄είναι συνεχής στο $[\xi_4,\xi_5]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_4,ξ_5) με $g^{(3)}(x)=f^{(3)}(x)$. Επειδή $g''(\xi_4)=g''(\xi_5)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση $g^{(3)}(x)=0\Leftrightarrow f^{(3)}(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα .

97. Έστω $f(x)=x^4+2x^3+\alpha x^2-12\alpha x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Έστω ότι η f έχει 4 ρίζες, τις $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4\in\mathbb{R}$ με $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$. Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2],[\rho_2,\rho_3],[\rho_3,\rho_4]$ και παραγωγίσιμη στα $(\rho_1,\rho_2),(\rho_2,\rho_3),(\rho_3,\rho_4)$ με παράγωγο $f'(x)=4x^3+6x^2+2\alpha x-12\alpha$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=f(\rho_4)=0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2),\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ και $\xi_3\in(\rho_3,\rho_4)$ τέτοια, ώστε:, $f'(\xi_2)=0$ και $f'(\xi_3)=0$. Η συνάρτηση f' είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\xi_1,\xi_2],[\xi_2,\xi_3]$ και παραγωγίσιμη στα (ξ_1,ξ_2) (ξ_2,ξ_3) με παράγωγο $f''(x)=12x^2+12x+2\alpha$, $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_4\in(\xi_1,\xi_2)$ και $\xi_5\in(\xi_2,\xi_3)$ τέτοια, ώστε: $f''(\xi_4)=0$ και $f''(\xi_5)=0$.
Δηλαδή η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες. Όμως η f'' είναι $2^{ου}$ βαθμού οπότε έχει το πολύ 2 ρίζες. Άρα η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες οπότε $\Delta>0\Leftrightarrow 12^2-4\cdot12\cdot2\alpha>0\Leftrightarrow 144-96\alpha>0\Leftrightarrow$.
$\alpha<\frac{144}{96}=\frac{3}{2}$. Επειδή $\alpha\in\mathbb{N}^*$ και $\alpha<\frac{3}{2}$ είναι $\alpha=1$.

Ακριβώς μία ρίζα

98.Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=xe^x+1-e^x, x\in\mathbb{R}$. Προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι η $x=0$.Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει και άλλη ρίζα $\rho\neq 0$ Η f είναι συνεχής στο $[0,\rho]$ ή $[\rho,0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο $(0,\rho)$ ή $(\rho,0)$ με παράγωγο $f'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x$, $f(0)=f(\rho)=0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(0,\rho)$ ή $(\rho,0)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0\Leftrightarrow \xi e^{\xi}=0\Leftrightarrow \xi=0$ άτοπο. Επομένως η x = 0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

99.α) Έστω $f(x)=x^3-2-3\ln x,\ x\in[1,2]$. Είναι $f(1)=-1<0$, $f(2)=3(2-\ln 2)>0$, άρα $f(1)f(2)<0$.
Η f είναι συνεχής στο [1,2], οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0\Leftrightarrow x_0^3=2+3\ln x_0$
Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες $\rho_1,\rho_2\in(1,2)$ με $\rho_1<\rho_2$. Τότε, επειδή η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με παράγωγο $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x}=\frac{3x^3-3}{x}$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)\subseteq(1,2)$ τέτοιο, ώστε,
$f'(\xi)=0\Leftrightarrow \frac{3\xi^3-3}{\xi}=0\Leftrightarrow 3\xi^3-3=0\Leftrightarrow 3\xi^3=3\Leftrightarrow \xi^3=1\Leftrightarrow \xi=1$ άτοπο. Άρα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(1,2)$.
β) $x^4-x^3=30-20x^2\Leftrightarrow x^4-x^3+20x^2-30=0$. Έστω $f(x)=x^4-x^3+20x^2-30,\ x\in[1,2]$. Είναι $f(1)=-10<0,\ f(2)=58>0$, οπότε $f(1)f(2)<0$.
Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$. Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες $\rho_1,\rho_2\in(1,2)$ με $\rho_1<\rho_2$. Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με παράγωγο $f'(x)=4x^3-3x^2+40x$ και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)\subseteq(1,2)$ τέτοιο, ώστε, $f'(\xi)=0\Leftrightarrow 4\xi^3-3\xi^2+40\xi=0\Leftrightarrow \xi(4\xi^2-3\xi+40)=0\Leftrightarrow$

($\xi = 0$ απορρίπτεται) ή $4\xi^2 - 3\xi + 40 = 0$ η οποία δεν έχει πραγματικές λύσεις, αφού $\Delta < 0$.Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει δύο ρίζες στο $(1,2)$ οπότε έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα αυτό.

Αυξημένης δυσκολίας

100.α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x - \eta\mu x + x^3$.Προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ η $x = 0$.Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει και άλλη ρίζα $\rho \neq 0$. Η f είναι συνεχής στο $[0,\rho]$ ή $[\rho,0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο $(0,\rho)$ ή $(\rho,0)$ με παράγωγο $f'(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x + 3x^2$, $f(0) = f(\rho) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (0,\rho)$ ή $(\rho,0)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu\xi + 3\xi^2 = 0$ (1).

Όμως $1 - \sigma\upsilon\nu\xi \geq 0$ και $3\xi^2 \geq 0$, οπότε η (1) αληθεύει μόνο αν $1 - \sigma\upsilon\nu\xi = 0$ και $3\xi^2 = 0$, άρα ξ=0 που είναι άτοπο. Επομένως η x = 0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x - e^{-x}$.Προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ η $x = 0$.Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει και άλλη ρίζα $\rho \neq 0$. Η f είναι συνεχής στο $[0,\rho]$ ή $[\rho,0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο $(0,\rho)$ ή $(\rho,0)$ με παράγωγο $f'(x) = e^x - 1 + e^{-x}$, $f(0) = f(\rho) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (0,\rho)$ ή $(\rho,0)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi - 1 + e^{-\xi} = 0 \Leftrightarrow$ $e^\xi - 1 + \dfrac{1}{e^\xi} = 0 \Leftrightarrow \left(e^\xi\right)^2 - e^\xi + 1 = 0$. Θέτουμε $e^\xi = \omega > 0$ οπότε έχουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση $\omega^2 - \omega + 1 = 0$, η οποία άρα δεν έχει πραγματικές λύσεις αφού Δ<0.Επομένως η x = 0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

101. Έστω $f(x) = x^5 - x^3 + 15x - 1821,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.. Έστω ότι η $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πολυωνυμική, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με

παράγωγο $f'(x)=5x^4-3x^2+15$, $f(x_1)=f(x_2)=0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0\Leftrightarrow 5\xi^4-3\xi^2+15=0$.

Έστω $\xi^2=\omega$ τότε προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση $5\omega^2-3\omega+15=0$, η οποία δεν έχει πραγματικές λύσεις αφού έχει $\Delta<0$. Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει 2 ρίζες οπότε έχει ακριβώς μία ρίζα.

102. Έστω $f(x)=e^{3x}-3e^{2x}+15e^x-2,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}(0-0+0-2)=-2$, άρα υπάρχει $\alpha<0$ τέτοιος ώστε $f(\alpha)<0$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\overset{\substack{e^x=u\\ x\to+\infty,\ u\to+\infty}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}(u^3-3u^2+15u-2)=\lim\limits_{u\to+\infty}u^3=+\infty$, άρα υπάρχει $\beta>0$ τέτοιο, ώστε $f(\beta)>0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)f(\beta)<0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με παράγωγο $f'(x)=3e^{3x}-6e^{2x}+15e^x$, $f(x_1)=f(x_2)=0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0\Leftrightarrow 3e^{3\xi}-6e^{2\xi}+15e^{\xi}=0\Leftrightarrow 3e^{\xi}\left(e^{2\xi}-2e^{\xi}+5\right)=0\Leftrightarrow$ $e^{\xi}=0$ αδύνατο ή $e^{2\xi}-2e^{\xi}+5=0$. Θέτουμε $e^{\xi}=\omega>0$ οπότε προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση $\omega^2-2\omega+5=0$ με $\Delta=-16<0$ άρα δεν έχει πραγματικές λύσεις. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει δύο ρίζες, οπότε η ρίζα που προέκυψε από το θεώρημα Bolzano είναι μοναδική.

103. Έχουμε $\frac{1}{3}<f(x)<1$ (1) .Έστω $g(x)=f(x)-\frac{x}{3},\ x\in[1,3]$.

Είναι $g(1)=f(1)-1<0$, $g(3)=f(3)-\frac{1}{3}>0$.

(Από τη σχέση (1) για $x=1,3$ αντίστοιχα έχουμε $\frac{1}{3}<f(1)<1\Rightarrow f(1)-1<0$ και $\frac{1}{3}<f(3)<1\Rightarrow f(3)-\frac{1}{3}>0$)

Επομένως $g(1)g(3)<0$, η g είναι συνεχής στο [1,3] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε

η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β). Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες $x_1, x_2 \in (1,3)$ με $x_1 < x_2$. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{3}$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{1}{3}$ άτοπο.

Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ δεν έχει δύο ρίζες οπότε η ρίζα από το θεώρημα Bolzano είναι η μοναδική της ρίζα.

104. α) $xf'(x) = f(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$ $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$. Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$. Η g είναι συνεχής στο [α, β] ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$. Είναι $g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 0$, $g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta} = 0 = g(\alpha)$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

β) Έστω ότι η εξίσωση $h(x) = xf'(x) - f(x) = 0$ έχει και δεύτερη ρίζα $x_1 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_0$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_0) με παράγωγο $h'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x)$. Επειδή $h(x_1) = h(x_0) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_0)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f''(\xi) = 0 \overset{\xi>0}{\Leftrightarrow} f''(\xi) = 0$ άτοπο. Επομένως το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) = f(x)$.

105. Έστω $g(x) = f(x) - x^4$, $x \in [-1,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 4x^3$. Επειδή $g(-1) = f(-1) - 1 = f(1) - 1 = g(1)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 4x^3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1,1)$.

Έστω ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει δύο ρίζες $x_1,x_2\in(-1,1)$ με $x_1<x_2$. Η g' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1x_2) με παράγωγο $g''(x)=f''(x)-12x^2$. Επειδή $g'(x_1)=g'(x_2)=0$, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $\xi\in(x_1x_2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi)=0\Leftrightarrow f''(\xi)=12\xi^2$ άτοπο. Άρα η εξίσωση $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=4x^3$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-1,1)$.

106. Έστω $g(x)=f(x)-\eta\mu x$, $x\in[0,\pi]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-\sigma\upsilon\nu x$. Επειδή $g(0)=f(0)=f(\pi)=g(\pi)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, η εξίσωση $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1,1)$. Έστω ότι η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει δύο ρίζες $x_1,x_2\in(-1,1)$ με $x_1<x_2$. Η g' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1x_2) με παράγωγο $g''(x)=f''(x)+\eta\mu x$. Επειδή $g'(x_1)=g'(x_2)=0$, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $\xi\in(x_1x_2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi)=0\Leftrightarrow f''(\xi)+\eta\mu\xi=0$ άτοπο. Άρα η εξίσωση $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,\pi)$.

107. Έστω $M(\xi,f(\xi))$. Η εφαπτομένη στο Μ έχει εξίσωση : $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$. Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει: $-f(\xi)=-\xi f'(\xi)\Leftrightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)=0$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με παράγωγο $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Είναι $g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{\kappa\cancel{\alpha}}{\cancel{\alpha}}=\kappa, g(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{\beta}=\dfrac{\kappa\cancel{\beta}}{\cancel{\beta}}=\kappa$ οπότε $g(\alpha)=g(\beta)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως η εξίσωση $g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β). Έστω ότι η εξίσωση $xf'(x)-f(x)=0$ έχει δύο ρίζες $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=xf'(x)-f(x)$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1x_2) με παράγωγο $h'(x) = xf''(x)$. Επειδή $h(x_1) = h(x_2) = 0$, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $\xi \in (x_1x_2)$ τέτοιο, ώστε

$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f''(\xi) = 0 \overset{\xi \neq 0}{\Leftrightarrow} f''(\xi) = 0$ άτοπο. Άρα η εξίσωση $xf'(x) - f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο (α, β).

108. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 - (\alpha + \beta + \gamma)x,\ x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f(0) = f(1) = 0$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο

$f'(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x - (\alpha + \beta + \gamma)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $x_0 \in (0,1) \subseteq [-1821, 1821]$ τέτοιο, ώστε

$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 4\alpha x_0^3 + 3\beta x_0^2 + 2\gamma x_0 - (\alpha + \beta + \gamma) = 0 \Leftrightarrow$

$4\alpha x_0^3 + 3\beta x_0^2 + 2\gamma x_0 = \alpha + \beta + \gamma$.

Θα αποδείξουμε ότι η ρίζα είναι μοναδική. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f'(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x - (\alpha + \beta + \gamma)$ έχει και δεύτερη ρίζα x_1 με $x_1 < x_0$.

Η f ΄είναι συνεχής στο $[x_1, x_0]$ ως πολυωνυμική, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_0) με παράγωγο $f''(x) = 12\alpha x^2 + 6\beta x + 2\gamma$ και $f'(x_1) = f'(x_0) = 0$ άρα. ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12\alpha x^2 + 6\beta x + 2\gamma = 0 \Leftrightarrow 6\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma = 0$ (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_1, x_2).

Όμως η (1) είναι 2ου βαθμού με $\Delta = 9\beta^2 - 24\alpha\gamma = 3(3\beta^2 - 8\alpha\gamma) < 0$ οπότε δεν έχει πραγματικές λύσεις , το οποίο είναι άτοπο.

Επομένως, η εξίσωση $4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x = \alpha + \beta + \gamma$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $[-1821, 1821]$.

Περισσότερες από μία ρίζες - Πλήθος ριζών εξίσωσης

109. α) Είναι $f(-\pi) = 2\pi^2 + 1 > 0,\ f(0) = -1 < 0,\ f(\pi) = 2\pi^2 - 1 > 0$

Είναι $f(-\pi)f(0) < 0,\ f(0)f(\pi) < 0$ και η f είναι συνεχής στα $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$, οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα υπάρχουν $x_1 \in (-\pi, 0),\ x_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = 0,\ f(x_2) = 0$.

β) Έστω ότι η f έχει και τρίτη ρίζα x_3 με $-\pi < x_1 < x_2 < x_3 < \pi$. Η f είναι συνεχής στα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και

παραγωγίσιμη στα $(x_1,x_2),(x_2,x_3)$ με παράγωγο
$f'(x)=4x-\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=x(4-\sigma\upsilon\nu x)$. Επειδή
$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$ τέτοια, ώστε
$g'(\xi_1)=0,g'(\xi_2)=0$.
Είναι $g'(\xi_1)=0\Leftrightarrow\xi_1(4-\sigma\upsilon\nu\xi_1)=0\Leftrightarrow(\xi_1=0)$ ή $(\sigma\upsilon\nu\xi_1=4$ αδύνατο$)$.
Επίσης $g'(\xi_2)=0\Leftrightarrow\xi_2(4-\sigma\upsilon\nu\xi_2)=0\Leftrightarrow(\xi_2=0)$ ή $(\sigma\upsilon\nu\xi_2=4$ αδύνατο$)$.
Άρα $\xi_1=\xi_2$ που είναι αδύνατο. Επομένως η f δεν έχει 3 ρίζες άρα έχει ακριβώς 2 ρίζες στο διάστημα [-π, π].

110. Είναι $f(-4)=f\left(\frac{1}{3}\right)=f(2)=f(6)=0$.

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[-4,\frac{1}{3}\right],\left[\frac{1}{3},2\right],[2,6]$ σαν πολυωνυμική,

παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left(-4,\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},2\right),(2,6)$ με παράγωγο

$f'(x)=(x-2)^2(x-6)(12x^3-25x^2-68x+148)$ άρα ικανοποιούνται οι

υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1\in\left(-4,\frac{1}{3}\right)$, $\xi_2\in\left(\frac{1}{3},2\right)$,

και $\xi_3\in(2,6)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$.
Επίσης $f'(2)=f'(6)=0$.
Όμως η f' έχει τύπο πολυώνυμο 6ου βαθμού άρα έχει το πολύ 6 ρίζες.
Επομένως έχει ακριβώς 6 ρίζες : διπλή ρίζα το 2, 6, ξ_1,ξ_2,ξ_3.

Σύνθετες ασκήσεις

111. α) Η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ σαν πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$. Είναι $f(x_1)=f(x_2)=0$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\rho_1\in(x_1,x_2)$, τέτοιο, ώστε:
$f'(\rho_1)=0$.
β) Είναι $f(x)=\alpha(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ οπότε.
Από α) ερώτημα $f'(\rho_1)=0\Leftrightarrow$

$\alpha(\rho_1-x_2)(\rho_1-x_3)+\alpha(\rho_1-x_1)(\rho_1-x_3)+\alpha(\rho_1-x_1)(\rho_1-x_2)=0\overset{:\alpha}{\Leftrightarrow}$

$(\rho_1-x_2)(\rho_1-x_3)+(\rho_1-x_1)(\rho_1-x_3)+(\rho_1-x_1)(\rho_1-x_2)=0\Leftrightarrow$

$(\rho_1-x_1)(\rho_1-x_2)=-(\rho_1-x_2)(\rho_1-x_3)-(\rho_1-x_1)(\rho_1-x_3)\Leftrightarrow$

$(\rho_1-x_1)(\rho_1-x_2)=(\rho_1-x_3)\left[-(\rho_1-x_2)-(\rho_1-x_1)\right]\Leftrightarrow$

$(\rho_1-x_1)(\rho_1-x_2)=(\rho_1-x_3)(x_1+x_2-2\rho_1)$. Είναι $\rho_1-x_1>0$, $\rho_1-x_2<0$,

$\rho_1-x_3<0$, οπότε $x_1+x_2-2\rho_1>0\Leftrightarrow\rho_1<\dfrac{x_1+x_2}{2}$,

άρα το ρ_1 βρίσκεται πιο κοντά στο x_1.

γ) Η f είναι συνεχής στο $[x_2,x_3]$ σαν πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$. Είναι $f(x_2)=f(x_3)=0$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\rho_2\in(x_2,x_3)$, τέτοιο, ώστε: $f'(\rho_2)=0$.

Η f' έχει τύπο τριώνυμο άρα έχει το πολύ δύο ρίζες.

Επομένως η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες τις ρ_1,ρ_2.

δ) Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει 2 ρίζες, άρα

$\Delta>0\Leftrightarrow 4\beta^2-12\alpha\gamma>0\Leftrightarrow 4\beta^2>12\alpha\gamma\Leftrightarrow\beta^2>3\alpha\gamma$.

ε) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο $f''(x)=6\alpha x+2\beta$.

Άρα $f''(\rho_1)+f''(\rho_2)=6\alpha\rho_1+6\alpha\rho_2=6\alpha(\rho_1+\rho_2)+4\beta$. Όμως, από τους τύπους του Vieta είναι: $\rho_1+\rho_2=-\dfrac{2\beta}{3\alpha}$, οπότε:

$f''(\rho_1)+f''(\rho_2)=-6\alpha\dfrac{2\beta}{3\alpha}+4\beta=-4\beta+4\beta=0$.

112. α) Έστω $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,\alpha\in\mathbb{R}^*,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(0)=\delta=0$. Η f είναι τρείς φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

παράγωγο $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$, δεύτερη παράγωγο $f''(x)=6\alpha x+2\beta$ και τρίτη παράγωγο $f^{(3)}(x)=6\alpha$.

Είναι $f'(1)=3\Leftrightarrow 3\alpha+2\beta+\gamma=3$ (1), $f''(1)=6\Leftrightarrow 6\alpha+2\beta=6\overset{:2}{\Leftrightarrow}3\alpha+\beta=3$ (2), $f^{(3)}(1)=6\Leftrightarrow 6\alpha=6\Leftrightarrow\alpha=1$. Επομένως από τη σχέση (2) $3+\beta=3\Leftrightarrow\beta=0$ και από τη σχέση (1) $3+\gamma=3\Leftrightarrow\gamma=0$. Άρα ο τύπος της f είναι $f(x)=x^3$.

β) i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=3x^2$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α είναι :

$(\varepsilon): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y-\alpha^3=3\alpha^2(x-\alpha) \Leftrightarrow y=3\alpha^2x-2\alpha^3$.

Για να βρούμε τα σημεία τομής (ε) και C_f λύνουμε την εξίσωση

$f(x)=3\alpha^2x-2\alpha^3 \Leftrightarrow x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3=0 \Leftrightarrow x^3-\alpha^2x-2\alpha^2x+2\alpha^3=0 \Leftrightarrow$

$x(x^2-\alpha^2)-2\alpha^2(x-\alpha)=0 \Leftrightarrow x(x-\alpha)(x+\alpha)-2\alpha^2(x-\alpha)=0 \Leftrightarrow$

$(x-\alpha)(x^2+\alpha x-2\alpha^2)=0 \Leftrightarrow (x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=\alpha)$ ή

$(x^2+\alpha x-2\alpha^2=0 \Leftrightarrow x^2-\alpha^2+\alpha x-\alpha^2=0 \Leftrightarrow$

$(x-\alpha)(x+\alpha)+\alpha(x-\alpha)=0 \Leftrightarrow (x-\alpha)(x+2\alpha)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$ ή $x=-2\alpha)$.

Είναι $f(-2\alpha)=(-2\alpha)^3=-8\alpha^3$.

Άρα έχουν και άλλο κοινό σημείο εκτός από το Μ το $N(-2\alpha,-8\alpha^3)$.

ii. Είναι $f'(-2\alpha)=3(-2\alpha)^2=3\cdot4\alpha^2=4\cdot3\alpha^2=4f'(\alpha)$.

Άρα η κλίση της C_f στο Ν είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο Μ

γ) Είναι $f(x)=1-x \Leftrightarrow x^3+x-1=0$. Έστω $\varphi(x)=x^3+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $\varphi(0)=-1,\ \varphi(1)=1$, δηλαδή $\varphi(0)\varphi(1)<0$.

Η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν πολυωνυμική, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=1-x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Επομένως α = 0.

δ) i. Είναι $h(x)=(f(x)-1)\eta\mu x=(x^3-1)\eta\mu x,\ x\in[0,1]$.

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο $h'(x)=3x^2\eta\mu x+(x^3-1)\sigma\upsilon\nu x$. Είναι $h(0)=(0^3-1)\eta\mu0=0,\ h(1)=(1^3-1)\eta\mu1=0$ άρα $h(0)=h(1)$, οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως η εξίσωση $h'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

ii. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι: $\varepsilon\varphi x=\dfrac{1-x^3}{3x^2} \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1-x^3}{3x^2} \Leftrightarrow$

$3x^2\eta\mu x=(1-x^3)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow 3x^2\eta\mu x-(1-x^3)\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow$

$3x^2\eta\mu x+(x^3-1)\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow h'(x)=0$ η οποία από το προηγούμενο ερώτημα έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

113. α) Είναι $x^2(f^2(x)-1)-1=0 \Leftrightarrow x^2(f^2(x)-1)=1 \Leftrightarrow f^2(x)-1=\dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow$

$f^2(x)=1+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ (1)

Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=0 \Leftrightarrow x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$ αδύνατο,

άρα για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\neq 0$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $f(1)=\sqrt{2}>0$, είναι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, οπότε η (1) γίνεται:

$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

β) Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1^2}>\frac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow$

$1+\frac{1}{x_1^2}>1+\frac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{1}{x_1^2}}>\sqrt{1+\frac{1}{x_2^2}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x_1^2+1}{x_1^2}}>\sqrt{\frac{x_2^2+1}{x_2^2}} \Leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{x_1^2+1}}{x_1}>\frac{\sqrt{x_2^2+1}}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f\searrow(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{x}\right)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$.Επειδή η f είναι

συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχει σύνολο τιμών το

$f((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)=(1,+\infty)$

γ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Είναι

$A_{f^{-1}}=f((0,+\infty))=(1,+\infty)$.Για κάθε $x>0$ και $y>1$ είναι

$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=y \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=y \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=y \Leftrightarrow 1+\frac{1}{x^2}=y^2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{x^2}=y^2-1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{y^2-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$, άρα $f^{-1}(y)=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$, $y>1$, οπότε

$f^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x>1$.

δ) Αρκεί η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$ να έχει ακριβώς μια ρίζα.

Για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow$

$(x^2+1)(x^2-1) = x^2 \Leftrightarrow x^4-1 = x^2 \Leftrightarrow x^4-x^2-1 = 0$.

Έστω $\varphi(x) = x^4 - x^2 - 1,\ x > 1$. Είναι $\lim\limits_{x \to 1^+} \varphi(x) = -1$, οπότε υπάρχει $\alpha > 1$ πολύ κοντά στο 1 τέτοιο, ώστε $\varphi(\alpha) < 0$.

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - x^2 - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$, οπότε υπάρχει πολύ μεγάλος θετικός αριθμός β τέτοιος, ώστε $\varphi(\beta) > 0$. Επειδή $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) < 0$ και η φ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α, β).

Έστω ότι η φ έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (1, +\infty)$ με $\rho_1 < \rho_2$. Επειδή η φ είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με παράγωγο $\varphi'(x) = 4x^3 - 2x$ και $\varphi(\rho_1) = \varphi(\rho_2) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε

$\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 4\xi^3 - 2\xi = 0 \Leftrightarrow 2\xi(2\xi^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (\xi = 0$ απορρίπτεται) ή

$\left(2\xi^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \xi^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \xi = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right.$ απορρίπτονται).

Άρα η φ δεν έχει δύο ρίζες οπότε η ρίζα που προέκυψε από το θεώρημα Bolzano είναι μοναδική.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

ε) $\lim\limits_{x \to \infty}[x(f(x) - \lambda)] = \lim\limits_{x \to \infty}\left(x\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \lambda x\right) = \lim\limits_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^2+1} - \lambda x\right) =$

$\lim\limits_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - \lambda x\right) = \lim\limits_{x \to \infty}\left(x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \lambda x\right) = \lim\limits_{x \to \infty}\left(x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \lambda\right)\right)$

Είναι $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \lambda\right) = 1 - \lambda$, οπότε

- Αν $1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to \infty}[x(f(x) - \lambda)] = +\infty$ απορρίπτεται.
- Αν $1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$ τότε $\lim\limits_{x \to \infty}[x(f(x) - \lambda)] = -\infty$ απορρίπτεται.

Οπότε για να είναι $\lim\limits_{x \to \infty}[x(f(x) - \lambda)] = 0$ πρέπει $1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$. Τότε

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\left(f(x)-\lambda\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\right)=0.$$

114.α) Έστω ότι η f' δεν αντιστρέφεται επομένως δεν είναι 1-1.
Τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με τέτοια ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)$.
Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα η f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_21]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$ άτοπο αφού $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Όμοια αν $x_1>x_2$. Άρα η f' αντιστρέφεται.
β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$. Επίσης $f(0)=f(1)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi_1\in(0,1):f'(\xi_1)=0$.
γ) Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ είχε τρείς ρίζες ρ_1,ρ_2,ρ_3 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ τότε $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$.Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2],[\rho_2,\rho_3]$, παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(\rho_1,\rho_2),(\rho_2,\rho_3)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $x_3\in(\rho_1,\rho_2),x_4\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοια ώστε $f'(x_3)=f'(x_4)=0$.
Η f' είναι συνεχής στο $[x_3,x_4]$, παραγωγίσιμη στο (x_3,x_4) άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\eta\in(x_3,x_4)$ τέτοιο ώστε $f''(\eta)=0$ άτοπο αφού $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο το πολύ ρίζες.
δ) Είναι $f'(x)+(2x-1)f(x)=0\Leftrightarrow e^{x^2-x}f'(x)+e^{x^2-x}(2x-1)f(x)=0$
$\left(e^{x^2-x}\cdot f(x)\right)'=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{x^2-x}f(x)$.
Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων ,

παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x)=e^{x^2-x}f'(x)+e^{x^2-x}(2x-1)f(x)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow e^{\xi^2-\xi}f'(\xi)+e^{\xi^2-\xi}(2\xi-1)f(\xi)=0\Leftrightarrow$ $f'(\xi)+(2\xi-1)f(\xi)=0$.

115. α) Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, είναι $2^{x_1}<2^{x_2}$ (1) και $x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow x_1^3-1<x_2^3-1$ (2)
Με πρόσθεση των σχέσεων (1),(2) έχουμε
$2^{x_1}+x_1^3-1<2^{x_2}+x_2^3-1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.
Για κάθε $x<0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(0)=0$ και για κάθε $x>0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)=0$.
Επίσης $g(x)=0\Leftrightarrow x^3-x^2+2x=0\Leftrightarrow x(x^2-x+2)=0\Leftrightarrow(x=0)$ ή ($x^2-x+2=0$ η οποία έχει $\Delta<0$ άρα δεν έχει πραγματικές λύσεις).
Επειδή $x^2-x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $g(x)=x(x^2-x+2)>0\Leftrightarrow x>0$ και $g(x)<0\Leftrightarrow x<0$.
β) Είναι $g(0)=0<g(1)=2$ οπότε η g δεν είναι γνησίως φθίνουσα.
γ) Είναι: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3-x^2+2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x(x^2-x+2)}=$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{x^2-x+2}=\dfrac{f'(0)}{2}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=2^x\ln2+3x^2$, οπότε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(0)}{2}=\dfrac{\ln2}{2}$.
δ) Παρατηρούμε ότι $f(0)=g(0)=0$ και $f(1)=g(1)=2$, οπότε οι C_f,C_g έχουν κοινά σημεία τα Ο, Α. Έστω ότι οι C_f,C_g έχουν τρία κοινά σημεία με τετμημένες ρ_1,ρ_2,ρ_3 (δύο από τα οποία είναι τα 0 και 1) με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)=2^x+x^2-2x-1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=2^x\ln2+2x-2$.
Η h είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2],[\rho_2,\rho_3]$ και παραγωγίσιμη στα $(\rho_1,\rho_2),(\rho_2,\rho_3)$. Επειδή $h(\rho_1)=h(\rho_2)=h(\rho_3)=0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοια, ώστε $h'(\xi_1)=0$ και $h'(\xi_2)=0$. Η h' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και

παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) με παράγωγο $h''(x)=2^x\ln^2 2+2$. Επειδή $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε $h''(\xi)=0\Leftrightarrow \underbrace{2^{\xi}\ln^2 2}_{>0}=-2$ που είναι άτοπο,

άρα η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τους αριθμούς 0 και 1 και οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.

ε) Επειδή η h έχει μοναδικές ρίζες τα $x=0$ και $x=1$, είναι $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και επειδή η h είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Είναι $h(2)=2^2+2^2-2\cdot 2-1=3>0$, άρα $h(x)>0\Leftrightarrow f(x)-g(x)>0\Leftrightarrow f(x)>g(x)$ για κάθε $x>1$.

116.α) i. Είναι $\dfrac{e^{f(f(x))}}{e^{f(x)}}=e^{g(f(x))}\Leftrightarrow \ln\dfrac{e^{f(f(x))}}{e^{f(x)}}=\ln e^{g(f(x))}\Leftrightarrow$

$\ln e^{f(f(x))}-\ln e^{f(x)}=g(f(x))\Leftrightarrow f(f(x))-f(x)=g(f(x))$ (1).

Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ στην (1) οπότε :

$f(f(f^{-1}(x)))-f(f^{-1}(x))=g(f(f^{-1}(x)))\Leftrightarrow f(x)-g(x)=x$

ii. Είναι $f(x)-g(x)=x\Leftrightarrow f(x)=g(x)+x$. Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$, $f(\rho_1)\cdot f(\rho_2)=(g(\rho_1)+\rho_1)(g(\rho_2)+\rho_2)=\rho_1\cdot\rho_2<0$ αφού ρ_1,ρ_2 ρίζες της εξίσωσης $g(x)=0$ και ετερόσημες..

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1,ρ_2).

β) Είναι $f(x)-g(x)=x\Leftrightarrow g(x)=f(x)-x$.

Πρέπει $f'(\xi)=1\Leftrightarrow f'(\xi)-1=0\Leftrightarrow g'(\xi)=0$.

Η g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2), $g(\rho_1)=g(\rho_2)=0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)-1=0\Leftrightarrow f'(\xi)=1$.

Άρα υπάρχει σημείο $A(\xi,f(\xi))$ με $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη στο Α να είναι παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων .

117.α) Είναι $x\left[f'(x)-2x\right]=f(x)-x^2 \Leftrightarrow xf'(x)-2x^2=f(x)-x^2 \Leftrightarrow$

$$xf'(x)-f(x)-x^2=0 \overset{:x^2}{\Leftrightarrow} \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}-x\right)'=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}-x$.

Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με παράγωγο .Επίσης $g(1)=f(1)-1$,

$g(2)=\frac{f(2)}{2}-2=\frac{f(2)-2-2}{2}=\frac{\cancel{2}f(1)-\cancel{2}}{\cancel{2}}=f(1)-1=g(1)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}-1=0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)-\xi^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\xi f'(\xi)-f(\xi)-2\xi^2+\xi^2=0 \Leftrightarrow \xi\left(f'(\xi)-2\xi\right)=f(\xi)-\xi^2.$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=xf'(x)-f(x)-x^2$.

Έστω ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει και δεύτερη ρίζα $\xi_1\in(1,2)$ με $\xi_1<\xi$.

Η h είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ) με παράγωγο $h'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)-2x=xf''(x)-2x=x\left(f''(x)-2\right)$.

Επειδή $h(\xi_1)=h(\xi)=0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $x_0\in(\xi_1,\xi)$ τέτοιο, ώστε

$h'(\xi)=0 \Leftrightarrow \xi\left(f''(\xi)-2\right)=0 \overset{\xi\neq 0}{\Leftrightarrow} f''(\xi)=0$ άτοπο αφού $f''(x)\neq 2$ για κάθε $x\in(1,2)$. Επομένως το ξ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$.

γ). Η εφαπτομένη στο $M(\xi,g(\xi))$ έχει εξίσωση : $y-k(\xi)=k'(\xi)(x-\xi)$.

Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει:

$-k(\xi)=-\xi k'(\xi) \Leftrightarrow -f(\xi)+\xi^2=-\xi\left(f'(\xi)-2\xi\right) \Leftrightarrow \xi\left(f'(\xi)-2\xi\right)=f(\xi)-\xi^2$, ισχύει από α) ερώτημα.

118. α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2\eta\mu^3 x+\alpha x+1\right)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\alpha=f(0)$.

Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Για να είναι η f συνεχής στο πεδίο ορισμού της πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=0$ και αυτό συμβαίνει όταν

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \alpha = 1$

β) Είναι $f(x) = \begin{cases} 2\eta\mu^3 x + x + 1, & x < 0 \\ 2\eta\mu^2 x - x^2 + x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$,

$f(-\pi) = 2\eta\mu^3(-\pi) - \pi + 1 = 1 - \pi < 0$, $f(0) = 1$ οπότε $f(-\pi) f(0) < 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

γ) Είναι $f(\pi) = 2\eta\mu^2\pi - \pi^2 + \pi + 1 = -\pi^2 + \pi + 1$. Επειδή $f(-\pi) \neq f(\pi)$ δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[-\pi, \pi]$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2\eta\mu^3 x + x + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(2\eta\mu^2 x \dfrac{\eta\mu x}{x} + 1 \right) = 1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\eta\mu^2 x - x^2 + x + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(2\eta\mu x \dfrac{\eta\mu x}{x} - x + 1 \right) = 1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi, 0)$ με παράγωγο $f'(x) = 6\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x + 1$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με παράγωγο $f'(x) = 4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - 2x + 1$ οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi, \pi)$.

.

Είναι $f(\pi) = 2\eta\mu^2\pi - \pi^2 + \pi + 1 = -\pi^2 + \pi + 1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$ δηλαδή $f(\pi) f(0) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_2 \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (-\pi, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Τράπεζα θεμάτων Ι.Ε.Π.

31643.α) Η f είναι συνεχής στο [1, 2] ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (1, 2) με παράγωγο $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 2x + 9$. Είναι $f(1) = 1 - 3 - 1 + 9 = 6$, $f(2) = 16 - 24 - 4 + 18 = 6$, οπότε $f(1) = f(2)$, άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle

β) Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-9x^2-2x+9=0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

36842.α) Οι προβολές των σημείων της C_f στον άξονα x΄x δημιουργούν το διάστημα [3, 7], οπότε $D_f=[3,7]$. Όμοια $D_g=[5,7]=D_h$.

β) i. Στις f, h είναι $f(3)\neq f(7)$ και $h(5)\neq h(7)$, οπότε δεν ισχύουν για αυτές τις συναρτήσεις οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού τους .Η g είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, είναι παραγωγίσιμη στο (5, 7) και $g(5)=g(7)$, οπότε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού της.

ii. Επειδή και οι τρείς συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες και οι γραφικές τους παραστάσεις εφάπτονται στον άξονα x΄x στο σημείο A(6,0), είναι $f'(6)=g'(6)=h'(6)=0$,οπότε η παράγωγό τους έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

36851.α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-5x^2-3x+1\right)=1=f(0)$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-3x+1\right)=1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ η f είναι συνεχής στο 0.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-5x^2-3x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}(-5x-3)}{\cancel{x}}=-3$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-3x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}(x-3)}{\cancel{x}}=-3$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-3$ η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=-3$.

γ) Η f είναι συνεχής στο [-1, 1] γιατί είναι συνεχής στα διαστήματα [-1,0], (0,1] ως πολυωνυμική και όπως είδαμε είναι συνεχής και στο 0.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (-1, 1) γιατί είναι παραγωγίσιμη στο (-1, 0) με $f'(x)=-10x-3$, παραγωγίσιμη στο (0,1) με $f'(x)=2x-3$ και όπως είδαμε είναι παραγωγίσιμη και στο 0. Είναι $f(-1)=-5(-1)^2-3\cdot(-1)+1=-1$,

$f(1)=1^2-3\cdot 1+1=-1$, δηλαδή $f(-1)=f(1)$.

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο [-1, 1], οπότε υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Αν $x_0 \in (-1,0)$ τότε $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow -10x_0-3=0 \Leftrightarrow x_0=-\frac{3}{10}$ δεκτή.

Αν $x_0 \in (0,1)$ τότε $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 2x_0-3=0 \Leftrightarrow x_0=\frac{3}{2}$ απορρίπτεται.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-4,0]$ ως σύνθεση συνεχών,

είναι παραγωγίσιμη στο $(-4,0)$ με $f'(x)=\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}}$ και

$f(-4)=f(0)=\sqrt{5}$, οπότε σύμφωνα με το θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (-4,0)$ τέτοιο,

ώστε: $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{2\xi+4}{2\sqrt{\xi^2+4\xi+5}}=0 \Leftrightarrow 2\xi+4=0 \Leftrightarrow \xi=-2$.

Σωστή απάντηση Γ.

2. Πρέπει $f(-1)=f(1) \Leftrightarrow 1+\beta=1+\alpha+\gamma+3 \Leftrightarrow \beta=\gamma+\alpha+3$ (1). Η f θα είναι συνεχής στο $[-1,1]$, οπότε θα είναι συνεχής και στο $x_0=0$, δηλαδή

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+\alpha\eta\mu(\pi x)+\beta)=\beta=f(0)$

και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3+\gamma x+\alpha+3)=\alpha+3$ οπότε $\beta=\alpha+3$ (2). Από (1),(2) θα είναι $\gamma=0$. Επίσης η f θα είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, οπότε θα είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2+\alpha\eta\mu(\pi x)+\beta-\beta}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+\alpha\pi\frac{\eta\mu(\pi x)}{\pi x}\right)=\alpha\pi$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^3+\gamma x+\alpha+3-\beta}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+\gamma)=\gamma$ οπότε

$\alpha\pi=\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και από την (1) θα είναι $\beta=3$ **Σωστή απάντηση Γ.**

3. Είναι $f(x_1)=f(x_2)=0$, η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[x_1,x_2]$

με $f'(x)=2\alpha x+\beta$. Συνεπώς, από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$:

$f'(\xi)=0 \Leftrightarrow 2\alpha\xi+\beta=0 \Leftrightarrow \xi=-\frac{\beta}{2\alpha}$. **Σωστή απάντηση Γ.**

4. Η **Α.** $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ απορρίπτεται γιατί δεν ξέρουμε το πρόσημο των α, β ,

οπότε δεν ορίζεται αν $x \in [\alpha,\beta]$ για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Η **Β.** $g(x)=\dfrac{x}{f(x)}$ απορρίπτεται γιατί δεν ξέρουμε αν $f(x)\neq 0$ στο $[\alpha,\beta]$.

Η **Γ.** $g(x)=xf(x)$ απορρίπτεται γιατί δεν ισχύει
$g(\alpha)=g(\beta)\Leftrightarrow \alpha f(\alpha)=\beta f(\beta)$.

Η **Δ.** $g(x)=\dfrac{x}{f(x)-x}$ είναι σωστή γιατί ορίζεται στο $[\alpha,\beta]$ και $g(\alpha)=g(\beta)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{f(\alpha)-\alpha}=\frac{\beta}{f(\beta)-\beta}\Leftrightarrow \alpha f(\beta)-\alpha\beta=\beta f(\alpha)-\alpha\beta\Leftrightarrow \alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)$$ και

$$g'(x)=\frac{f(x)-x-x\left(f'(x)-1\right)}{\left(x-f(x)\right)^2}=\frac{f(x)-xf'(x)}{\left(x-f(x)\right)^2}$$ **.Σωστή απάντηση Δ.**

5. Στη σχέση $f'(\xi)=\dfrac{f(\alpha)-f(\xi)}{\xi-\beta}$ αν θέσουμε όπου ξ το x τότε η σχέση γίνεται

$$f'(x)=\frac{f(\alpha)-f(x)}{x-\beta}\Leftrightarrow f'(x)(x-\beta)=f(\alpha)-f(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)(x-\beta)+f(x)-f(\alpha)=0\Leftrightarrow\left[f(x)(x-\beta)-f(\alpha)x\right]'=0$$

Άρα εφαρμόζουμε το Θ.Rolle για την συνάρτηση $g(x)=(x-\beta)f(x)-f(\alpha)x$
αφού $g(\alpha)=f(\alpha)(\alpha-\beta)-\alpha f(\alpha)=-\beta f(\alpha)$ και $g(\beta)=-\beta f(\alpha)$ οπότε
$g(\alpha)=g(\beta)$. **Σωστή απάντηση Α.**

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»									
1. Σ	**2.** Σ	**3.** Σ	**4.** Λ	**5.** Σ	**6.** Λ	**7.** Σ	**8.** Λ	**9.** Σ	**10.** Λ
11. Σ	**12.** Λ	**13.** Λ							

1ο Κριτήριο αξιολόγησης έως και το Θεώρημα Rolle

Θέμα Α

Α1.α) Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Σ

Α2. α) $f'(-1)=g'(-1)=\varepsilon\varphi 60^\circ=\sqrt{3}$

β) Επειδή διέρχεται από το (1,0) η (ε) έχει εξίσωση:
$y=\sqrt{3}(x-1)\Leftrightarrow y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$.

γ) Το σημείο $A\left(-1,f(-1)\right)\equiv A\left(-1,g(-1)\right)$ ανήκει στην (ε) οπότε
$f(-1)=\sqrt{3}\cdot(-1)-\sqrt{3}=-\sqrt{3}-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}=g(-1)$.

δ) Είναι $(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ άρα

$(f\cdot g)'(1)=f'(-1)g(-1)+f(-1)g'(-1)=-12$.

Θέμα Β

Β1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ τότε είναι :

• συνεχής σ' αυτό, οπότε:

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+\alpha x+\beta)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+2)=2\Leftrightarrow \beta=2$.

•Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, ισχύει ότι:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+\alpha x+\cancel{\beta}-\cancel{2}}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+\cancel{2}-\cancel{2}}{x}\Leftrightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(x+\alpha)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}\Leftrightarrow f'(0)=\alpha=2.$$

Β2. Είναι $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2, & x<0\\ 2x+2, & x\geq 0\end{cases}$. Για κάθε $x<0$ είναι

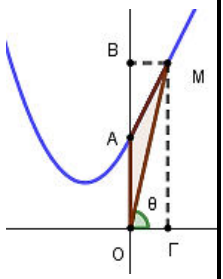
$f(x)=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$.

Είναι $(x+1)^2\geq 0\Leftrightarrow (x+1)^2+1\geq 1\Leftrightarrow f(x)\geq f(-1)$.

Για $x\geq 0$ είναι $2x\geq 0\Leftrightarrow 2x+2\geq 2\Leftrightarrow f(x)\geq 2$. Άρα $f(x)\geq f(-1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f έχει ελάχιστο το 1 στο $x=-1$.

Β3. ε: $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-2=2x\Leftrightarrow y=2x+2$. Για $x<0$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=2x+2$.Η ε δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στην ε, αν και μόνο αν υπάρχει $x_1<0$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=\lambda_\varepsilon\Leftrightarrow 2x_1+2=2\Leftrightarrow x_1=0$ αδύνατο. Άρα η C_f δεν δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στην ε στο $(-\infty,0)$.

Β4. Έστω $M(x(t),y(t))$ όπου το χρόνος σε secμε $t\geq 0$.Επειδή το Μ κινείται επί της C_f και βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο, είναι $y(t)=2x(t)+2$, με $x'(t)=0,5$ μ.μ./sec .



α) Το τρίγωνο ΟΑΜ έχει εμβαδόν:

$E(t)=\frac{1}{2}(OA)(BM)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x(t)=x(t)$,

Είναι $E'(t)=x'(t)=0,5$ μ.μ.^{2} / sec , οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ αυξάνεται με σταθερό ρυθμό.

β) Έστω $MOx = \theta$, τότε $\varepsilon\varphi\theta(t) = \frac{M\Gamma}{O\Gamma} = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2x(t)+2}{x(t)} = 2 + \frac{2}{x(t)}$. Είναι

$$\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)' = \left(2 + \frac{2}{x(t)}\right)' \Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t) = -\frac{2x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$\theta'(t) = -\frac{2x'(t)}{x^2(t)}\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)$. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το Κ, τότε: $x(t_0) = 2,\ y(t_0) = 6$ και

$OM = d(t_0) = \sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

Είναι $\theta'(t_0) = -\frac{2x'(t_0)}{x^2(t_0)}\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0) = -\frac{2\cdot 0,5}{4}\left(\frac{2}{2\sqrt{10}}\right)^2 = -\frac{1}{40}$ rad / sec .

Β5. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και στο $[0, +\infty)$ ως πολυωνυμική. Επειδή είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με παράγωγο $f'(x) = 2x + 2$. Επίσης είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = 2$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

1ο διάστημα

Για $x = -2$ είναι $f(-2) = 2$ και $f(0) = 2$. Στο διάστημα $[-2, 0]$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f.

2ο διάστημα

Είναι $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\cdot\frac{3}{2} + 2 = 5$. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε $x_1 < 0$ με $f(x_1) = 5$.

Είναι: $x_1^2 + 2x_1 + 2 = 5 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 - 3 = 0$. Είναι $\Delta = 4 + 8 = 16$ και

$x_1 = \frac{-2+4}{2} = 2$, $x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$. Όμως $x_1 < 0$, άρα $x_1 = -3$.

Στο διάστημα $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f.

3ο διάστημα

Είναι $f(1) = 2\cdot 1 + 2 = 4$. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε $x_1 < 0$ με $f(x_1) = 4$.

Είναι: $x_1^2 + 2x_1 + 2 = 4 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 - 2 = 0$. Είναι $\Delta = 4 + 8 = 12$ και

$x_1 = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$.Όμως $x_1 < 0$, άρα $x_1 = -1 - \sqrt{3}$.Στο διάστημα $\left[-1-\sqrt{3}, 1\right]$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f.

Θέμα Γ

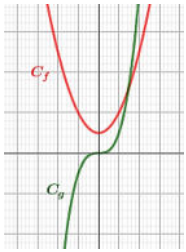
Γ1. Αρκεί η εξίσωση $f(x)=g(x)$ να έχει τουλάχιστον μια λύση. Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=x^2+1-x^3$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1-x^3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$, οπότε υπάρχει $\gamma<0$ τέτοιο, ώστε $h(\gamma)>0$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1-x^3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$, οπότε υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $h(\delta)<0$.Άρα $h(\gamma)h(\delta)<0$, η h είναι συνεχής στο $[\gamma,\delta]$ ως πολυωνυμική οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, επομένως υπάρχει $x_0\in(\gamma,\delta)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

Γ2. Είναι $h(0)=1,\ h(1)=1+1-1=1,\ h(2)=4+1-8=-3$. Επειδή $h(1)h(2)<0$ και η h είναι συνεχής, στο $[1,2]$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle Bolzano οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. Άρα $\alpha=1$.

Γ3. Για κάθε $x\le 0$ είναι $x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2+1\ge 1\Leftrightarrow f(x)\ge 1$, ενώ $x^3\le 0\Leftrightarrow g(x)\le 0$, οπότε $f(x)>g(x)$.Όταν $0<x\le 1$ είναι $0<x^2\le 1\Leftrightarrow 1<x^2+1\le 2\Leftrightarrow 1<f(x)\le 2$ και $0<x^3\le 1\Leftrightarrow 0<g(x)\le 1$, οπότε και πάλι $f(x)>g(x)$. Έστω ότι η h έχει δύο ρίζες $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Τότε η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με παράγωγο $h'(x)=2x-3x^2$ και $h(x_1)=h(x_2)=0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(1,2)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow 2\xi-3\xi^2=0\Leftrightarrow\xi(2-3\xi)=0\Leftrightarrow$ ($\xi=0$ απορρίπτεται) ή ($2-3\xi=0\Leftrightarrow\xi=\dfrac{2}{3}$ που απορρίπτεται).Άρα η h δεν έχει 2 ρίζες στο $(1,+\infty)$ οπότε έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα αυτό.

Γ4.



Γ5. Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με παραγώγους αντίστοιχα $f'(x)=2x$ και $g'(x)=3x^2$.

Η εφαπτομένη της C_g στο Β είναι η ευθεία

$\varepsilon_1:\ y-g(\rho)=g'(\rho)(x-\rho)\Leftrightarrow y-\rho^3=3\rho^2(x-\rho)\Leftrightarrow$

$y = 3\rho^2 x - 2\rho^3$ (1). Έστω σημείο $\Gamma\left(\rho_1, f\left(\rho_1\right)\right)$. Η εφαπτομένη της C_f στο Γ είναι η ευθεία

$\varepsilon_2 : y - f\left(\rho_1\right) = f'\left(\rho_1\right)\left(x - \rho_1\right) \Leftrightarrow y - \rho_1^2 - 1 = 2\rho_1\left(x - \rho_1\right) \Leftrightarrow y = 2\rho_1 x - \rho_1^2 + 1$

Για να δέχονται οι C_f , C_g κοινή εφαπτομένη πρέπει να υπάρχουν τιμές των ρ, ρ_1 για τις οποίες οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να ταυτίζονται. Αυτό συμβαίνει όταν

$$\begin{cases} 3\rho^2 = 2\rho_1 \\ -2\rho^3 = -\rho_1^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3\rho^2}{2} = \rho_1 \\ -2\rho^3 = -\left(\dfrac{3\rho^2}{2}\right)^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3\rho^2}{2} = \rho_1 \\ -2\rho^3 = -\dfrac{9\rho^4}{4} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{3\rho^2}{2} = \rho_1 \\ -8\rho^3 = -9\rho^4 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3\rho^2}{2} = \rho_1 \\ 9\rho^4 - 8\rho^3 - 4 = 0 \ (3) \end{cases}$$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$\varphi\left(x\right) = 9x^4 - 8x^3 - 4$, $x \le 0$.Έστω $x_1 < x_2 \le 0$, τότε $x_1^4 > x_2^4 \Leftrightarrow 9x_1^4 > 9x_2^4$ (4) και $x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -8x_1^3 > -8x_2^3 \Leftrightarrow -8x_1^3 - 4 > -8x_2^3 - 4$ (5)

Με πρόσθεση των σχέσεων (4),(5) έχουμε

$9x_1^4 - 8x_1^3 - 4 > 9x_2^4 - 8x_2^3 - 4 \Leftrightarrow \varphi\left(x_1\right) > \varphi\left(x_2\right)$ άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, 0\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi\left(x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} 9x^4 = +\infty$ και $\varphi\left(0\right) = -4$. Επειδή η φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = \left(-\infty, 0\right]$ έχει σύνολο τιμών το

$\varphi\left(\Delta\right) = \left[\varphi\left(0\right), \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi\left(x\right)\right) = \left[-4, +\infty\right)$. Επειδή $0 \in \varphi\left(\Delta\right)$, υπάρχει μοναδικό $\rho \in \Delta$ τέτοιο, ώστε $\varphi\left(\rho\right) = 0$.Είναι $\varphi\left(-1\right) = 13 > 0, \varphi\left(0\right) = -4 < 0$ οπότε $\varphi\left(-1\right)\varphi\left(0\right) < 0$.Η φ είναι συνεχής στο $\left[-1, 0\right]$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi \in \left(-1, 0\right)$ τέτοιο ώστε $\varphi\left(\xi\right) = 0$. Επειδή το ξ είναι μοναδικό ,το ξ ταυτίζεται με το ρ άρα το ζητούμενο διάστημα είναι το $\left(-1, 0\right)$.

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f\left(x+1\right) - g\left(x\right) = \left(g \circ g\right)\left(x\right) \Leftrightarrow f\left(x+1\right) = g\left(x\right) + \left(g \circ g\right)\left(x\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g\left(x_1\right) = g\left(x_2\right)$ (1), τότε $g\left(g\left(x_1\right)\right) = g\left(g\left(x_2\right)\right)$ (2) .

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε

$g\left(g\left(x_1\right)\right) + g\left(x_1\right) = g\left(g\left(x_2\right)\right) + g\left(x_2\right) \Leftrightarrow f\left(x_1 + 1\right) = f\left(x_2 + 1\right) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}$

$x_1 + 1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η g είναι 1-1.

Δ2. $g\left(g\left(x^2\right)\right)+g\left(x^2\right)=g(1)+g\left(g(1)\right)\Leftrightarrow f\left(x^2+1\right)=f(1+1)\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} x^2+1=2\Leftrightarrow$

$x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$

Δ3. Είναι $g^{-1}(x)=f^{-1}\left(g(x)+x\right)-1\Leftrightarrow g^{-1}(x)+1=f^{-1}\left(g(x)+x\right)\Leftrightarrow$

$f\left(g^{-1}(x)+1\right)=g(x)+x$ (1). Θέτουμε $g^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=g(u)$, στην (1)

οπότε έχουμε $f(u+1)=g\left(g(u)\right)+g(u)$, $u\in\mathbb{R}$ ισχύει

Δ4.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g\left(g(x)\right)+g(x)\right]\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{g(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(g(u)+u\right)=+\infty$.

Θέτουμε $x+1=t$ οπότε έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+1)=\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$. Όμοια και

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

β) Έστω ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1-1<x_2-1$ είναι $g(x_1-1)<g(x_2-1)$ (3) και

$g\left(g(x_1-1)\right)<g\left(g(x_2-1)\right)$ (4). Με πρόσθεση των σχέσεων (3) και (4) έχουμε ,

$g\left(g(x_1-1)\right)+g(x_1-1)<g\left(g(x_2-1)\right)+g(x_2-1)\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Όμοια αν η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ5. Είναι $g(x)=x-2$ και $g\left(g(x)\right)=g(x)-2=x-4$, οπότε:

$f(x+1)=g\left(g(x)\right)+g(x)=x-4+x-2=2x-6$.

Θέτουμε $x+1=u\Leftrightarrow x=u-1$,οπότε τότε $f(u)=2(u-1)-6=2u-8$, $u\in\mathbb{R}$,

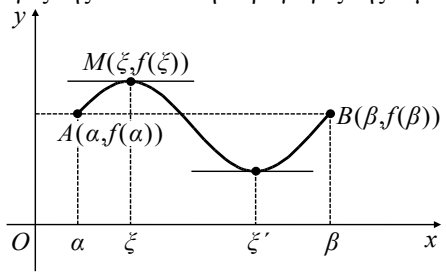
άρα $f(x)=2x-8$, $x\in\mathbb{R}$.

2ο Κριτήριο αξιολόγησης έως και το Θεώρημα Rolle

Θέμα Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και A_1 το σύνολο των σημείων του Α στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x\in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f':A_1\to\mathbb{R}$, $x\to f'(x)$, η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f. Η νιοστή παράγωγος της f με $\nu\geq3$ συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$ και είναι: $f^{(\nu)}=\left[f^{(\nu-1)}\right]'$.

Α2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)$



τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$.

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Α3. α) Ψευδής

β) Έστω ότι $f(0)=f(3)$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$,παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος άρα υπάρχει $\xi \in (0,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, πράγμα που δεν ισχύει όπως βλέπουμε από τη γραφική παράσταση της f'.

Α4. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

Θέμα Β

Β1. Είναι $A_{f\circ g}=\{x\in A_g / g(x)\in A_f\}=\{x>0 / x\ln x\in\mathbb{R}\}=(0,+\infty)=A_h$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=e^{x\ln x}=e^{\ln x^x}=x^x=h(x)$

Β2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x)=(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=h(x)\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=h(x)(\ln x+1)$$

Η h ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$h''(x)=(h(x)(\ln x+1))'=h'(x)(\ln x+1)+h(x)\cdot\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$h''(x)=h(x)(\ln x+1)(\ln x+1)+h(x)\cdot\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$h''(x)=h(x)\left[(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right]=h(x)\left(\ln^2 x+2\ln x+1+\frac{1}{x}\right)$$

Β3. Είναι $f'(x)=e^x$ και $f'(0)=1=f(0)$.

Η (ε) έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=x+1$

Για y = 0 είναι $x=-1$ και για x = 0 είναι y = 1, δηλαδή η (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία Β(-1,0) και Γ(0,1). Επειδή (ΟΒ) = (ΟΓ) το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές.

2ος τρόπος

Το τρίγωνο ΟΒΓ που σχηματίζει η (ε) με τους άξονες είναι ορθογώνιο. Επειδή $\lambda_\varepsilon=1$ είναι $\varepsilon\varphi\omega=1\Leftrightarrow\omega=45^\circ$, δηλαδή το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΓ έχει μια γωνία 45°, οπότε και η άλλη οξεία γωνία του είναι 45° άρα είναι ισοσκελές.

Β4. Αρχικά πρέπει να υπάρχει $x_1>0$ τέτοιο, ώστε $g'(x_1)=\lambda_\varepsilon=1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=\ln x+1$, οπότε

$g'(x_1)=1 \Leftrightarrow \ln x_1+1=1 \Leftrightarrow \ln x_1=0 \Leftrightarrow x_1=1$. Η εφαπτομένη της C_g στο $x_1=1$ έχει εξίσωση $y-g(x_1)=g'(x_1)(x-1) \Leftrightarrow y=x-1$, η οποία δεν είναι η εξίσωση της (ε) Άρα η (ε) δεν εφάπτεται της C_g.

Β5. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty(+\infty)=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x} \underset{\substack{x\to+\infty \Rightarrow \\ u\to+\infty}}{\overset{x\ln x=u}{=}} \lim_{u\to+\infty} e^u=+\infty$$

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $f(-1)=\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{3}+\beta-\gamma+1=\frac{5}{4}+\beta-\frac{\alpha}{3}-\gamma$, $f(0)=1$ και

$f(1)=\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{3}+\beta+\gamma+1=\frac{5}{4}+\beta+\frac{\alpha}{3}+\gamma$.

Είναι $\beta+\frac{5}{4}<\frac{\alpha}{3}+\gamma \Leftrightarrow \beta+\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{3}-\gamma<0 \Leftrightarrow f(-1)<0$ και

$\frac{\alpha}{3}+\gamma<-\beta-\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{3}+\gamma+\beta+\frac{5}{4}<0 \Leftrightarrow f(1)<0$.

Επειδή $f(-1)f(0)<0$, $f(1)f(0)<0$ και η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως πολυωνυμική, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε υπάρχει $\xi_1\in(-1,0)$ και $\xi_2\in(0,1)$ τέτοια, ώστε $f(\xi_1)=0$ και $f(\xi_2)=0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=x^3+\alpha x^2+2\beta x+\gamma$, οπότε αρκεί η εξίσωση $f'(x)=0$ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,1)$.

Η f είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) με παράγωγο $f'(x)=x^3+\alpha x^2+2\beta x+\gamma$. Επειδή $f(\xi_1)=f(\xi_2)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(\xi_1,\xi_2)\subseteq(-1,1)$.

Γ3. α) Επειδή η εξίσωση $x^3+\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ έχει τρείς ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$, είναι $f'(\rho_1)=f'(\rho_2)=f'(\rho_3)=0$. Η f ΄είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$, $[\rho_2,\rho_3]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στα (ρ_1,ρ_2), (ρ_2,ρ_3) με παράγωγο $f''(x)=3x^2+2\alpha x+2\beta$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, η εξίσωση $f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+2\alpha x+2\beta=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1,ρ_2) και τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_2,ρ_3). Όμως η $f''(x)=0$ είναι εξίσωση 2ου βαθμού και έχει το πολύ δύο ρίζες, άρα έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2.

β) Επειδή η εξίσωση $3x^2+2\alpha x+2\beta=0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2, είναι

$\Delta>0\Leftrightarrow(2\alpha)^2-4\cdot3\cdot2\beta>0\Leftrightarrow4\alpha^2-24\beta>0\Leftrightarrow4\alpha^2>24\beta\Leftrightarrow\alpha^2>6\beta$

γ) Είναι $f^{(3)}(x)=6x+2\alpha$, οπότε

$f^{(3)}(x_1)+f^{(3)}(x_2)=6x_1+2\alpha+6x_2+2\alpha=6(x_1+x_2)+4\alpha$

Επειδή τα x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $3x^2+2\alpha x+2\beta=0$, από τους τύπους Vieta ισχύει ότι:

$S=x_1+x_2=-\dfrac{2\alpha}{3}$, οπότε $f^{(3)}(x_1)+f^{(3)}(x_2)=6\left(-\dfrac{2\alpha}{3}\right)+4\alpha=-4\alpha+4\alpha=0$

Θέμα Δ

Δ1. $f(x)=\alpha^{|x|}+\beta^{|x|}-2,\ x\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}\alpha^{-x}+\beta^{-x}-2\ ,\ x<0\\ \alpha^{x}+\beta^{x}-2\ \ ,\ x\geq0\end{cases}$

Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$. Για κάθε $x_1, x_2<0$ με $x_1<x_2\Leftrightarrow-x_1>-x_2$, είναι

$\alpha^{-x_1}>\alpha^{-x_2}$ (1) και $\beta^{-x_1}>\beta^{-x_2}\Leftrightarrow\beta^{-x_1}-2>\beta^{-x_2}-2$ (2)

Με πρόσθεση των σχέσεων (1),(2) έχουμε $f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f\searrow(-\infty,0)$

.Επειδή f συνεχής και $f\searrow(-\infty,0)$ είναι

$f((-\infty,0))=\left(\lim\limits_{x\to0^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$

Για κάθε $x_1, x_2\geq0$ με $x_1<x_2$, είναι $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}$ (3) και

$\beta^{x_1}<\beta^{x_2}\Rightarrow\beta^{x_1}-2<\beta^{x_2}-2$ (4). Με πρόσθεση των σχέσεων (3),(4) έχουμε

$f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.Άρα για κάθε $x>0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)=0$.

Επομένως $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\neq0$.

Είναι $g(x)=\left(\gamma^{|x|}\right)^2-\gamma^{|x|}=\gamma^{|x|}\left(\gamma^{|x|}-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι

$g(x)=0\Leftrightarrow\gamma^{|x|}\left(\gamma^{|x|}-1\right)=0\Leftrightarrow\left(\gamma^{|x|}=0\ \text{αδύνατη}\right)$ ή

$\left(\gamma^{|x|}-1=0\Leftrightarrow|x|=0\Leftrightarrow x=0\right)$,

$g(x)>0\Leftrightarrow\gamma^{|x|}\left(\gamma^{|x|}-1\right)>0\overset{\gamma^{|x|}>0}{\Leftrightarrow}\gamma^{|x|}-1>0\Leftrightarrow|x|>0\Leftrightarrow x\neq0$

Άρα $g(x)\geq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. α) Αφού τα $\alpha,\beta,\gamma\in(0,+\infty)$ αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με γ να είναι η υποτείνουσα και α, β οι δύο κάθετες πλευρές, τότε σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα είναι $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$.

$f(x)+g(x)=\left(\gamma^{|x|}\right)^2-2\Leftrightarrow\alpha^{|x|}+\beta^{|x|}-\cancel{2}+\cancel{\left(\gamma^{|x|}\right)^2}-\gamma^{|x|}=\cancel{\left(\gamma^{|x|}\right)^2}-\cancel{2}\Leftrightarrow$

$\alpha^{|x|}+\beta^{|x|}=\gamma^{|x|} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{|x|}+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{|x|}-1=0$. Έστω η συνάρτηση

$h(x)=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{|x|}+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{|x|}-1$, $x\in\mathbb{R}$. Για $x\geq 0$ είναι $h(x)=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{x}+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{x}-1$

οπότε $h(2)=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{2}+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{2}-1=1-1=0$. Για $x<0$ είναι

$h(x)=\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{x}+\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{x}-1$ και είναι $h(-2)=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{2}+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{2}-1=1-1=0$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι αυτές οι δύο ρίζες είναι μοναδικές.

1ος τρόπος: Η h είναι παραγωγίσιμη για $x<0$ με παράγωγο

$h'(x)=\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{x}\ln\frac{\gamma}{\alpha}+\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{x}\ln\frac{\gamma}{\beta}>0$ γιατί $\frac{\gamma}{\alpha},\frac{\gamma}{\beta}>1$ άρα $\ln\frac{\gamma}{\alpha},\ln\frac{\gamma}{\beta}>0$. Έστω η

$h(x)=0$ έχει ρίζα $\rho_1<-2$ στο $(-\infty,0)$, τότε είναι $h(\rho_1)=h(-2)=0$.

Η h είναι συνεχής στο $[\rho_1,-2]$,παραγωγίσιμη στο $(\rho_1,-2)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(\rho_1,-2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0$ άτοπο. Όμοια αν $\rho_1>-2$

Η h είναι παραγωγίσιμη για $x>0$ με παράγωγο

$h'(x)=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{x}\ln\frac{\alpha}{\gamma}+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{x}\ln\frac{\beta}{\gamma}<0$ γιατί $\frac{\alpha}{\gamma},\frac{\beta}{\gamma}<1$ άρα $\ln\frac{\gamma}{\alpha},\ln\frac{\gamma}{\beta}<0$. Έστω η

$h(x)=0$ έχει ρίζα $\rho_2<2$ στο $(0,+\infty)$, τότε είναι $h(\rho_2)=h(2)=0$.

Η h είναι συνεχής στο $[\rho_2,2]$,παραγωγίσιμη στο $(\rho_2,2)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\rho_2,2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0$ Άτοπο. Όμοια αν $\rho_1>2$.

2ος τρόπος: Για κάθε $x_1,x_2<0$ με $x_1<x_2$ είναι $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{x_1}<\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{x_2}$ (1),

$\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{x_1}<\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{x_2}\Leftrightarrow\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{x_1}-1<\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{x_2}-1$ (2).

Από (1),(2) προκύπτει ότι $h(x_1)<h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$ επομένως το -2 μοναδική ρίζα.

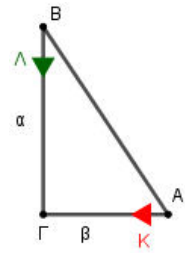
Για κάθε $x_1,x_2\geq 0$ με $x_1<x_2$ είναι $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{x_1}>\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{x_2}$ (3),

$\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{x_1} > \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{x_2} \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{x_1} - 1 > \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{x_2} - 1 \quad (4)$.

Από (3),(4) προκύπτει ότι $h(x_1) > h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ επομένως το 2 μοναδική ρίζα.

β) $\alpha U_K(t) = \beta U_\Lambda(t) \Leftrightarrow \alpha S'_K(t) = \beta S'_\Lambda(t) \Leftrightarrow \alpha S'_K(t) - \beta S'_\Lambda(t) = 0$ με $S_K(t), S_\Lambda(t)$ οι συναρτήσεις θέσης των κινητών Κ,Λ αντίστοιχα.

Έστω η συνάρτηση $\varphi(t) = \alpha S_K(t) - \beta S_\Lambda(t)$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο $\varphi'(t) = \beta S'_K(t) - \alpha S'_\Lambda(t)$.



Την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $S_K(0) = \beta$ και $S_\Lambda(0) = \alpha$ αφού το Κ απέχει β από το Γ και το Λ απέχει α από το Γ.
Επομένως είναι $\varphi(0) = \alpha\beta - \alpha\beta = 0$

Έστω t_1 η χρονική στιγμή που τερματίζουν (ταυτόχρονα).
Την χρονική στιγμή $t = t_1$ είναι $S_K(t_1) = S_\Lambda(t_1) = 0$ αφού το Κ απέχει 0 από το Γ και το Λ απέχει 0 από το Γ. Επομένως είναι $\varphi(t_1) = 0$.

Από θεώρημα Rolle υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, t_1)$ τέτοιο ώστε $\varphi'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha U_K(t_0) = \beta U_\Lambda(t_0)$

γ) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη και στο μηδέν άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$. Είναι

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\alpha^{-x}+\beta^{-x}-2}{x} \overset{\text{DLH}}{=} \frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-\alpha^{-x}\ln\alpha - \beta^{-x}\ln\beta}{1} = -\ln\alpha - \ln\beta$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\alpha^x+\beta^x-2}{x} \overset{\text{DLH}}{=} \frac{0}{0} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\alpha^x\ln\alpha + \beta^x\ln\beta}{1} = \ln\alpha + \ln\beta$

2ος τρόπος

Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $\varphi_1(x) = \alpha^{-x}$, $\varphi_2(x) = \beta^{-x}$, με

$\varphi'_1(x) = -\alpha^{-x}\ln\alpha$, $\varphi'_2(x) = -\beta^{-x}\ln\beta$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\alpha^{-x}+\beta^{-x}-2}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\varphi_1(x)+\varphi_2(x)-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{\varphi_1(x)-\varphi_1(0)}{x} + \frac{\varphi_2(x)-\varphi_2(0)}{x} \right) =$

$\varphi'_1(0) + \varphi'_2(0) = \ln\alpha + \ln\beta$. Όμοια τα υπόλοιπα.

Άρα είναι $-\ln\alpha-\ln\beta=\ln\alpha+\ln\beta\Leftrightarrow 2\ln\alpha=-2\ln\beta\Leftrightarrow\ln\alpha=\ln\frac{1}{\beta}\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{\beta}$

επομένως οι α, β είναι αντίστροφοι.

Είναι $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2\Leftrightarrow\frac{1}{\beta^2}+\beta^2=\gamma^2\Leftrightarrow 1+\beta^4=\beta^2\gamma^2\Leftrightarrow\beta^4-\beta^2\gamma^2+1=0$

Θέτουμε $\beta^2=\omega$ οπότε προκύπτει το τριώνυμο $\omega^2-\omega\gamma^2+1=0$. Επειδή η εξίσωση έχει λύση, είναι $\Delta\geq 0\Leftrightarrow\gamma^4-4\geq 0\Leftrightarrow\gamma^4\geq 4\Leftrightarrow\gamma^2\geq 2\overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow}\gamma\geq\sqrt{2}$.

25 Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.)

Άμεση εφαρμογή του Θ.Μ.Τ.- Γεωμετρική ερμηνεία

23.α) Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με παράγωγο $f'(x)=1-2x$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=f(2)-f(1)\Leftrightarrow 1-2\xi=-2-0\Leftrightarrow \xi=\frac{3}{2}$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$ οπότε η f είναι συνεχής στο 1.

Η f είναι συνεχής στο $[0,1),(1,2]$ σαν πολυωνυμική οπότε είναι συνεχής στο $[0,2]$. Επίσης $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=1$,

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-x^2+3x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=1$ άρα είναι παραγωγίσιμη στο 1, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με παράγωγο

$f'(x)=\begin{cases}2x-1, 0<x\le 1\\ -2x+3, 1<x<2\end{cases}$ επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=f(2)-f(0)=0$.

Για $\xi\in(0,1]$ είναι $f'(\xi)=0\Leftrightarrow 2\xi-1=0\Leftrightarrow 2\xi=1\Leftrightarrow \xi=\frac{1}{2}$ δεκτό.

Για $\xi\in(1,2)$ είναι $f'(\xi)=0\Leftrightarrow -2\xi+3=0\Leftrightarrow 2\xi=3\Leftrightarrow \xi=\frac{3}{2}$ δεκτό.

24. Η ευθεία ε είναι η y=x με συντελεστή διεύθυνσης λ =1. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f οπότε υπάρχει $\xi\in(1,5): f'(\xi)=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{9-5}{4}=1=\lambda_\varepsilon$, οπότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην ε.

25. Η ε διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και από το σημείο (1,5), οπότε έχει εξίσωση $\varepsilon: y=5x$

Η f δέχεται εφαπτομένη ε_1 κάθετη στην ε, αν και μόνο αν υπάρχει σημείο της C_f με τετμημένη ξ στο (1,6) τέτοιο ώστε $f'(\xi)\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow f'(\xi)=-\frac{1}{5}$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$, επομένως ισχύουν οι

υποθέσεις του Θ.Μ.Τ οπότε υπάρχει $\xi \in (1,6)$ τέτοιο, ώστε:

$f'(\xi) = \frac{f(6)-f(1)}{6-1} = \frac{3-4}{5} = -\frac{1}{5}$. Η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι κάθετη στην ε ,οπότε υπάρχει σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι κάθετη στην (ε).

26.Έστω $S(t)$ η συνάρτηση θέσης του αυτοκινήτου και $u(t)$ η συνάρτηση της ταχύτητας, όπου t ο χρόνος σε ώρες.

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την S(t) στο $[0,3]$ οπότε υπάρχει

$t_0 \in (0,3)$ τέτοιο ώστε $S'(t_0) = \frac{S(3)-S(0)}{3-0} \Leftrightarrow u(t_0) = \frac{300}{3} = 100$ km/h

Αυξημένης δυσκολίας

27.Η ευθεία ε_1 είναι παράλληλη στον x΄χάρα έχει εξίσωση y=1 με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 0$.Επειδή εφάπτεται της C_f στο Β, είναι $f'(2) = \lambda_1 = 0$. Η ευθεία ε_2 διέρχεται από τα σημεία Ο και (1,1) άρα έχει εξίσωση y = x με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = 1$.Εφάπτεται της C_f στο Ο οπότε είναι $f'(0) = \lambda_2 = 1$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[0,2]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0,2) : f''(\xi) = \frac{f'(2)-f'(0)}{2-0} = -\frac{1}{2} < 0$.

28.Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει

$x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1)-f(0) = f'(\xi)$.

Έστω ότι η f' είναι γνησίως μονότονη .Τότε είναι 1-1 οπότε από τη σχέση $f'(\xi) = f'(x_0)$ έχουμε $\xi = x_0$ άτοπο αφού $\xi \notin (\alpha,\beta)$.

29.α) Έστω u η συνάρτηση της ταχύτητας.

Τότε $u(t_1) = 20\text{km/h}, u(t_2) = 15\text{km/h}$ και $u(t_3) = 20\text{km/h}$.

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την u σε καθένα από τα διαστήματα $[t_1,t_2]$, $[t_2,t_3]$ οπότε υπάρχουν $t_4 \in (t_1,t_2)$ και $t_5 \in (t_2,t_3)$ τέτοια ώστε

$u'(t_4) = \frac{u(t_2)-u(t_1)}{t_2-t_1} \Leftrightarrow \alpha(t_4) = -\frac{5}{t_2-t_1} < 0$ αφού $t_1 < t_2$,

$u'(t_5)=\dfrac{u(t_3)-u(t_2)}{t_3-t_2}\Leftrightarrow \alpha(t_4)=\dfrac{10}{t_3-t_2}>0$ αφού $t_2<t_3$.

Άρα υπάρχουν χρονικές στιγμές t_4,t_5 κατά τις οποίες αντίστοιχα επιβραδύνει , επιταχύνει.

β) Η συνάρτηση της επιτάχυνσης $\alpha(t)=u'(t)$ είναι συνεχής στο $[t_4,t_5]$

$\alpha(t_4)\cdot\alpha(t_5)<0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $t_6\in(t_4,t_5)$ τέτοιο ώστε $\alpha(t_6)=0$.

Σχέσεις για τιμές συνάρτησης

30.Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,2]$ οπότε υπάρχει

$\xi\in(0,2):f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}=\dfrac{f(2)}{2}$. Είναι

$|f'(\xi)|\le 2\Leftrightarrow\left|\dfrac{f(2)}{2}\right|\le 2\Leftrightarrow|f(2)|\le 4$.

31.Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2,5]$οπότε υπάρχει

$\xi\in(0,2):f'(\xi)=\dfrac{f(5)-f(2)}{3}=\dfrac{f(5)-3}{3}$. Είναι

$f'(\xi)\le 4\Leftrightarrow\dfrac{f(5)-3}{3}\le 4\Leftrightarrow f(5)-3\le 12\Leftrightarrow f(5)\le 15$.

Αυξημένης δυσκολίας

32.Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[0,1],[1,2]$ οπότε υπάρχουν $x_1\in(0,1)$, $x_2\in(1,2)$, τέτοια, ώστε

$f'(x_1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)$ και $f'(x_2)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=4-f(1)$. Είναι

$f'(x_1)\ge 2\Leftrightarrow f(1)\ge 2\ (1)$ και $f'(x_2)\ge 2\Leftrightarrow 4-f(1)\ge 2\Leftrightarrow f(1)\le 2\ (2)$. Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $f(1)=2$.

33.Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για τις f,g στο διάστημα $[0,1]$ οπότε υπάρχουν $x_1\in(0,1)$, $x_2\in(0,1)$:

$f'(x_1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1}=f(1)-1$ και $g'(x_2)=\dfrac{g(1)-g(0)}{1}=2-g(0)$.Είναι

$2\le f'(x_1)\le 5\Leftrightarrow 2\le f(1)-1\le 5\Leftrightarrow 3\le f(1)\le 6\ (1)$,

$4 \le g'(x_2) \le 7 \Leftrightarrow 4 \le 2 - g(0) \le 7 \Leftrightarrow 2 \le -g(0) \le 5\ (2)$. Με πρόσθεση των σχέσεων (1),(2) έχουμε $5 \le f(1) - g(0) \le 11$.

Διαμερισμός διαστήματος

34.Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0,3], [3,6], [6,9]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,3),\ \xi_2 \in (3,6),\ \xi_3 \in (6,9)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(3)-f(0)}{3}$ (1), $f'(\xi_2) = \dfrac{f(6)-f(3)}{3}$ (2) και

$f'(\xi_3) = \dfrac{f(9)-f(6)}{3}$ (3).Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2), (3), προκύπτει: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = \dfrac{f(3)-f(0)+f(6)-f(3)+f(9)-f(6)}{3} = 0$.

35.Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,3)$ με $x_1 \ne x_2$, τέτοια, ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = -6$. Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$,οπότε υπάρχουν $x_1 \in (1,2)$ και $x_2 \in (2,3)$,τέτοια ώστε : $f'(x_1) = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = f(2) - 9$ και

$f'(x_2) = \dfrac{f(3)-f(2)}{3-2} = 3 - f(2)$.Είναι :

$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(2) - 9 + 3 - f(2) - = -6$.

36.Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε καθένα από τα διαστήματα $[1,3], [3,6], [6,10]$ οπότε υπάρχουν

$\xi_1 \in (1,3),\ \xi_2 \in (3,6),\ \xi_3 \in (6,10)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(3)-f(1)}{2} \Leftrightarrow$

$2f'(\xi_1) = f(3) - f(1)$ (1), $f'(\xi_2) = \dfrac{f(6)-f(3)}{3} \Leftrightarrow 3f'(\xi_2) = f(6) - f(3)$ (2) και

$f'(\xi_3) = \dfrac{f(10)-f(6)}{4} \Leftrightarrow 4f'(\xi_3) = f(10) - f(6)$ (3).Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2), (3), προκύπτει:

$2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 4f'(\xi_3) = \cancel{f(3)} - f(1) + \cancel{f(6)} - \cancel{f(3)} + f(10) - \cancel{f(6)} \Leftrightarrow$

$2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 4f'(\xi_3) = -4 + 9 = 5$

37.Η f είναι συνεχής στα [1,4], [4, 6] και παραγωγίσιμη στα $(1,4),(4,6)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (1,4)$, $\xi_2 \in (4,6)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(4)-f(1)}{3} \Leftrightarrow 3f'(\xi_1) = f(4)-1$ και

$f'(\xi_2) = \dfrac{f(6)-f(4)}{2} \Leftrightarrow 2f'(\xi_2) = 2-f(4)$. Είναι

$3f'(\xi_1)+2f'(\xi_2) = f(4)-1+2-f(4) = 1$.

Αυξημένης δυσκολίας

38.α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1) < 3 < f(1)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 3$.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,\xi]$ και $[\xi,1]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (-1,\xi)$ και $\xi_2 \in (\xi,1)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1) = \dfrac{f(\xi)-f(-1)}{\xi+1} = \dfrac{3-1}{\xi+1} = \dfrac{2}{\xi+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{f'(\xi_1)} = \dfrac{\xi+1}{2}$ και

$f'(\xi_2) = \dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi} = \dfrac{5-3}{1-\xi} = \dfrac{2}{1-\xi} \Leftrightarrow \dfrac{1}{f'(\xi_2)} = \dfrac{1-\xi}{2}$.

Οπότε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)} + \dfrac{1}{f'(\xi_2)} = \dfrac{\xi+1}{2} + \dfrac{1-\xi}{2} = \dfrac{\xi+1+1-\xi}{2} = 1$.

γ) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in (-1,0)$ και $x_2 \in (0,1)$ τέτοια, ώστε:

$f'(x_1) = \dfrac{f(0)-f(-1)}{0+1} = f(0)-1$ και $f'(x_2) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = 5-f(0)$. Είναι

$-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$ οπότε έχουμε:

$f'(x_1) > f'(x_2) \Leftrightarrow f(0)-1 > 5-f(0) \Leftrightarrow 2f(0) > 6 \Leftrightarrow f(0) > 3$.

39.α) Η f είναι συνεχής στο $[1,9]$ και $f(1) < 6 < f(9)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών άρα υπάρχει $x_1 \in (1,9)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 6$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $[x_1,9]$ και $f(x_1) < 10 < f(9)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών άρα υπάρχει $x_2 \in (x_1,9)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 10$.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[1,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,10]$ άρα υπάρχουν

$\xi_1 \in (1,x_1)$, $\xi_2 \in (x_1,x_2)$, $\xi_3 \in (x_2,10)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(1)}{x_1-1}=\frac{4}{x_1-1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_1)}=\frac{x_1-1}{4} ,$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{4}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{x_2-x_1}{4} \text{ και}$$

$$f'(\xi_3)=\frac{f(9)-f(x_2)}{9-x_2}=\frac{4}{9-x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_3)}=\frac{9-x_2}{4} .$$

Με πρόσθεση των σχέσεων κατά μέλη, έχουμε $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}+\frac{1}{f'(\xi_3)}=2$.

γ) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[1,5]$, $[5,9]$ οπότε υπάρχουν $\xi_4 \in (1,5)$ και $\xi_5 \in (5,9)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_4)=\frac{f(5)-f(1)}{4}=\frac{f(5)-2}{4}$ και $f'(\xi_5)=\frac{f(9)-f(5)}{4}=\frac{14-f(5)}{4}$.Είναι

$$\xi_4<\xi_5 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_4)<f'(\xi_5) \Leftrightarrow \frac{f(5)-2}{4}<\frac{14-f(5)}{4} \Leftrightarrow$$

$$f(5)-2<14-f(5) \Leftrightarrow 2f(5)<16 \Leftrightarrow f(5)<8 .$$

40.α) Η f είναι συνεχής στο $[0,10]$ και $f(0)<4<f(10)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών άρα υπάρχει $x_1 \in (0,10)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=4$.Επίσης η f είναι συνεχής στο $[x_1,10]$ και $f(x_1)<10<f(10)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών άρα υπάρχει $x_2 \in (x_1,10)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=10$.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,10]$ άρα υπάρχουν

$\xi_1 \in (0,x_1)$, $\xi_2 \in (x_1,x_2)$, $\xi_3 \in (x_2,10)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1}=\frac{4}{x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_1)}=\frac{x_1}{4} \Leftrightarrow \frac{2}{f'(\xi_1)}=\frac{x_1}{2} ,$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{6}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{x_2-x_1}{6} \Leftrightarrow \frac{3}{f'(\xi_2)}=\frac{x_2-x_1}{2} \text{ και}$$

$f'(\xi_3)=\dfrac{f(10)-f(x_2)}{10-x_2}=\dfrac{10}{10-x_2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{f'(\xi_3)}=\dfrac{10-x_2}{10}\Leftrightarrow\dfrac{5}{f'(\xi_3)}=\dfrac{10-x_2}{2}$.

Με πρόσθεση των σχέσεων κατά μέλη, έχουμε $\dfrac{2}{f'(\xi_1)}+\dfrac{3}{f'(\xi_2)}+\dfrac{5}{f'(\xi_3)}=5$.

Εύρεση f, f ΄μέσα από σχήμα με χρήση του Θ.Μ.Τ

41.Παρατηρούμε ότι η C_f έχει τρία κοινά σημεία με την $y=x$, το O(0,0) και 2 ακόμη .Έστω $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,f(\beta))$ με $0<\alpha<\beta$ και $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$ τα δύο αυτά σημεία.

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0,\alpha]$ και $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(0,\alpha)$ και $\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=\dfrac{\alpha}{\alpha}=1$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha}=1$. Άρα η f' δύο κοινά σημεία με την $y=1$ οπότε έχει γραφική παράσταση την C_1 .

Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_3)=0$. Άρα η f'' έχει σημείο τομής με θετική τετμημένη με τον άξονα x΄x αφού $\xi_3>\xi_1>0$ οπότε έχει γραφική παράσταση την C_4 .

42.α) Έστω ότι η $C_2\equiv C_f$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.για την g σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,0],[0,\beta]$ με $\alpha<0<\beta$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,0)$ και $\xi_2\in(0,\beta)$ τέτοια ώστε

$g'(\xi_1)=\dfrac{g(0)-g(\alpha)}{0-\alpha}=\dfrac{f^2(0)-f^2(\alpha)}{-\alpha}=\dfrac{f^2(\alpha)}{\alpha}<0$ και

$g'(\xi_2)=\dfrac{g(\beta)-g(0)}{\beta-0}=\dfrac{f^2(\beta)-f^2(0)}{\beta}=\dfrac{f^2(\beta)}{\beta}>0$ άτοπο γιατί οι C_1 , C_3 δεν αλλάζουν πρόσημο άρα δεν μπορούν να είναι η γραφική παράσταση της g'.

Έστω ότι $C_3\equiv C_f$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του για την g στο διάστημα $[0,\beta]$ με $\beta>0$ οπότε υπάρχει $\xi_1\in(0,\beta)$ τέτοιο ώστε

$g'(\xi_1)=\dfrac{g(\beta)-g(0)}{\beta-0}=\dfrac{f^2(\beta)-f^2(0)}{\beta}<0$ γιατί $f(0)<f(\beta)<0$ άρα

$f^2(\beta)<f^2(0)$ άτοπο όπως φαίνεται από τη γραφική παράσταση της..

Άρα η $C_1 \equiv C_f$.

β) 1ος τρόπος: Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = 2f(x)f'(x)$.

Είναι $g'(0) = 2f(0)f'(0) = 0$ οπότε $C_2 \equiv C_{g'}$.

2ος τρόπος:

Αφού $C_1 \equiv C_f$ τότε υπάρχουν $\alpha < 0 < \beta$ τέτοια ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$ οπότε $f^2(\alpha) = f^2(\beta) \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta)$.

Η g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$,παραγωγίσιμη στο (α,β) με παράγωγο $g'(x) = 2f(x)f'(x)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$ άρα $C_2 \equiv C_{g'}$.

3ος τρόπος: $C_1 \equiv C_f$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.για την f στο διάστημα $[0,\beta]$ με $\beta > 0$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (0,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi_1) = \frac{g(\beta) - g(0)}{\beta - 0} = \frac{f^2(\beta) - f^2(0)}{\beta} = \frac{f^2(\beta)}{\beta} > 0 \text{ άρα } C_2 \equiv C_{g'} .$$

43.α) Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του για την ΘΜΤ για την f στο $[1,x]$, $x > 1$ άρα υπάρχει $\xi \in (1,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x)}{x-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) = -\frac{f(x)}{1-x} \Leftrightarrow f'(\xi) = -g(x) .$$

β) Για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) = \frac{f'(x)(1-x) + f(x)}{(1-x)^2}$.

Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $f'(\xi) = -\frac{f(x)}{1-x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = -(1-x)f'(\xi) \text{ άρα } g'(x) = \frac{f'(x)(1-x) - (1-x)f'(\xi)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(1-x)}\left(f'(x) - f'(\xi)\right)}{(1-x)^{\cancel{2}}} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{1-x}$$

Αν $C_1 \equiv C_{f'}$ τότε είναι $1 < \xi < x \overset{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) - f'(\xi) > 0$.

Άρα για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) < 0$ άτοπο όπως φαίνεται από τη γραφική της παράσταση. Άρα $C_2 \equiv C_{f'}$ και $C_1 \equiv C_{g'}$.

44. Είναι $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ σε κάθε περίπτωση.

α) Έστω ότι $C_3 \equiv C_{f'}$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1)$ άτοπο αφού οι C_1, C_2 δεν τέμνουν την C_3.

Έστω ότι $C_3 \equiv C_{f''}$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f' στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = \dfrac{f'(1)-f'(0)}{1-0} = f'(1)$ πράγμα άτοπο όποια από τις C_1, C_2 και να είναι η f'.

Άρα η C_3 παριστάνει την f.

β) για την f στο $[0,x]$, $x \in (0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = x f'(\xi)$.

γ) Έστω ότι $C_2 \equiv C_{f'}$ τότε $f' \nearrow [0,x_0]$ και $f' \searrow [x_0,1]$.

Για κάθε $0 < x_0 < \xi < x < 1 \overset{f' \searrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(0) = 0 \overset{x \in [0,1]}{\Leftrightarrow} x f'(\xi) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$ άτοπο γιατί $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Άρα η C_1 παριστάνει την f' και η C_2 την f''.

45.α) Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0,1],[1,2]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,1)$ και $\xi_2 \in (1,2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = -f(0)$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = f(2)$

Είναι $f(0)+f(2) < 0 \Leftrightarrow f(2) < -f(0) \Leftrightarrow f'(\xi_2) < f'(\xi_1)$.

β) Έστω ότι $C_3 \equiv C_{f''}$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f' στο $[\xi_1,\xi_2]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = \dfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} < 0$ γιατί είναι $f(0)+f(2) < 0$ και $\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow \xi_2 - \xi_1 > 0$ άρα καταλήγουμε σε άτοπο. Έστω ότι $C_3 \equiv C_f$ τότε $f(1) \neq 0$ πράγμα άτοπο.

γ) Έστω ότι $C_2 \equiv C_f$ και $C_1 \equiv C_{f''}$. Για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > f'(x) \underset{f'(1)=0}{\overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow}}$

$\Leftrightarrow f(x)-f(1) > f'(x)-f'(1) \overset{x>1}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} > \dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}$ (1)

Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για τις f και f' στο διάστημα $[1,x]$ με

$x>1$ οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,x)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $f''(x_2)=\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}$. Άρα $(1) \Leftrightarrow f'(x_1)>f''(x_2)$ άτοπο.

Συνδυασμοί θεωρημάτων

46. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0,1]$, $[2,3]$, οπότε υπάρχουν $x_1 \in (0,1)$, $x_2 \in (2,3)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)=f(1)-f(0)$ και $f'(x_2)=f(3)-f(2)$. Είναι $f(1)+f(2)=f(0)+f(3) \Leftrightarrow f(1)-f(0)=f(3)-f(2) \Leftrightarrow f'(x_1)=f'(x_2)$. Η f΄ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

47. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0,2]$, $[2,4]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,2)$, $\xi_2 \in (2,4)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{3-1}{2}=1$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=\dfrac{5-3}{2}=1$. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [0,4], η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2] \subseteq (0,4)$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2), οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $x_0 \in (\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε: $f''(x_0)=0$.

48. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $x_1 \in (0,1): f'(x_1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,x_1],[x_1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,x_1),(x_1,1)$. Επειδή $f'(0)=f'(x_1)=f'(1)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,x_1)$ και $\xi_2 \in (x_1,1): f'(\xi_1)=0,\ f'(\xi_2)=0.$

49. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f στα διαστήματα $[0,x_0]$, $[x_0,2]$ άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (0,x_0)$, $\xi_2 \in (x_0,2)$ τέτοια, ώστε :

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\dfrac{f(x_0)}{x_0}<0$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}=-\dfrac{f(x_0)}{2-x_0}>0$.

Η f' συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]\subseteq(0,2)$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2), άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ οπότε υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε :

$f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}>0$, αφού $f'(\xi_2)>0$ και $f'(\xi_1)<0$.

50. Η f είναι συνεχής στο $[-3,1]$, $1<\ln 3<\ln 4<2$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε υπάρχουν $x_1,x_2\in(-3,1)$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=\ln 3$ και $f(x_2)=\ln 4$.

Έστω $x_1<x_2$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ΘΜΤ για την f στο $[x_1,x_2]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{\ln 4-\ln 3}{x_2-x_1}$. Όμως $\begin{cases}x_2<1\\x_1>-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2<1\\-x_1<3\end{cases}$ οπότε

$x_2-x_1<1+3\Leftrightarrow\dfrac{1}{x_2-x_1}>\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\dfrac{\ln 4-\ln 3}{x_2-x_1}>\dfrac{\ln 4-\ln 3}{4}\Leftrightarrow f'(\xi)>\dfrac{\ln\frac{4}{3}}{4}$

Ομοίως αν $x_1>x_2$

51. Η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)f(\beta)<0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $[\alpha,x_0]$, $[x_0,\beta]$. Η f συνεχής στο $[\alpha,x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (α,x_0), άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(\alpha,x_0)$ τέτοιο, ώστε : $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha}=-\dfrac{f(\alpha)}{x_0-\alpha}$. Ομοίως στο $[x_0,\beta]$ υπάρχει $\xi_2\in(x_0,\beta)$ τέτοιο, ώστε : $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0}=\dfrac{f(\beta)}{\beta-x_0}$. Είναι

$f'(\xi_1)f'(\xi_2)=-\dfrac{f(\alpha)f(\beta)}{(x_0-\alpha)(\beta-x_0)}>0$.

52.α) Από τη γραφική παράσταση της f βλέπουμε ότι $f(3)<f(1)<f(2)<f(0)$

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα

$[0,1],[1,2],[2,3]$,οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,1)$, $\xi_2 \in (1,2)$, $\xi_3 \in (2,3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = f(1) - f(0) < 0$, $f'(\xi_2) = f(2) - f(1) > 0$ και $f'(\xi_3) = f(3) - f(2) < 0$.

β) Η f' συνεχής στα διαστήματα $[\xi_1,\xi_2],[\xi_2,\xi_3]$, $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2) < 0$, $f'(\xi_2)\cdot f'(\xi_3) < 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για την f' οπότε υπάρχει $\xi_4 \in (\xi_1,\xi_2)$ και $\xi_5 \in (\xi_2,\xi_3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_4) = f'(\xi_5) = 0$. Η f' συνεχής στο $[\xi_4,\xi_5]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_4,ξ_5) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f' στο $[\xi_4,\xi_5]$ άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_4,\xi_5)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$..

53.α) Έστω $g(x) = f(x) - 3x + 2,\ x \in [1,2]$.

Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$, $g(1) = f(1) - 3 + 2 = 3$, $g(2) = f(2) - 6 + 2 = -3$, δηλαδή $g(1)g(2) < 0$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 3x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3x_0 - 2$.

β) Σε καθένα από τα διαστήματα $[1,x_0]$, $[x_0,2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (1,x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0,2)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1) = \dfrac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \dfrac{3x_0 - 2 - 4}{x_0 - 1} = \dfrac{3(x_0 - 2)}{x_0 - 1}$ (1) και

$f'(\xi_2) = \dfrac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} = \dfrac{1 - 3x_0 + 2}{2 - x_0} = \dfrac{3(x_0 - 1)}{x_0 - 2}$ (2). Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (1), (2) κατά μέλη, προκύπτει: $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \dfrac{3\cancel{(x_0 - 2)}}{\cancel{x_0 - 1}} \cdot \dfrac{3\cancel{(x_0 - 1)}}{\cancel{(x_0 - 2)}} = 9$

54.α) Είναι $f(\xi) = \beta - 2\xi \Leftrightarrow f(\xi) - \beta + 2\xi = 0$.

Έστω $g(x) = f(x) - \beta + 2x$, $x \in [\alpha,\beta]$.

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $g(\alpha) = f(\alpha) - \beta + 2\alpha = -\beta - \beta + 2\alpha = 2(\alpha - \beta) < 0$,

$g(\beta) = f(\beta) - \beta + 2\beta = \beta - 2\alpha - \beta + 2\beta = 2(\beta - \alpha) > 0$, και $g(\alpha)g(\beta) < 0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο,

ώστε: $g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=\beta-2\xi$.

β) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,\xi]$ και $[\xi,\beta]$ και παραγωγίσιμη στα (α,ξ) και (ξ,β). Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha,\xi)$ και $\xi_2 \in (\xi,\beta)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}=\dfrac{\beta-2\xi+\beta}{\xi-\alpha}=\dfrac{2(\beta-\xi)}{\xi-\alpha}$ και

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\xi)}{\beta-\xi}=\dfrac{\beta-2\alpha-\beta+2\xi}{\beta-\xi}=\dfrac{2(\xi-\alpha)}{\beta-\xi}$. Είναι:

$f'(\xi_1)f'(\xi_2)=\dfrac{2\cancel{(\beta-\xi)}}{\cancel{\xi-\alpha}}\dfrac{2\cancel{(\xi-\alpha)}}{\cancel{\beta-\xi}}=4$.

55.α) Είναι $g(x+1)=f^2(x)(1)$, $g'(1)f'(1)=g'(2)f'(0)$ (2).
Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη έχουμε :

$g'(x+1)=2f(x)f'(x) \overset{f'(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{g'(x+1)}{f'(x)}=2f(x)$ (3).Από τη σχέση (3) για

$x=0, x=1$ έχουμε αντίστοιχα : $\dfrac{g'(1)}{f'(0)}=2f(0)$, $\dfrac{g'(2)}{f'(1)}=2f(1)$.Από τη σχέση

(2) έχουμε $g'(1)f'(1)=g'(2)f'(0) \Leftrightarrow \dfrac{g'(1)}{f'(0)}=\dfrac{g'(2)}{f'(1)} \Leftrightarrow 2f(0)=2f(1) \Leftrightarrow$

$f(0)=f(1)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $[0,1]$.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ΘΜΤ για την f στα $[0,\ 0,5]$ και $[0,5\ ,1]$, υπάρχουν $\rho_1 \in (0,\ 0,5)$ και $\rho_2 \in (0,5,\ 1)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\rho_1)=\dfrac{f(0,5)-f(0)}{0,5}$ και $f'(\rho_2)=\dfrac{f(1)-f(0,5)}{0,5}$.

Είναι $f'(\rho_1)+f'(\rho_2)=\dfrac{f(0,5)-f(0)}{0,5}+\dfrac{f(1)-f(0,5)}{0,5}=0$.

56.α) Είναι $x^2-1 \le f(x) \le x^4-x^2$ (1). Από τη σχέση (1) για $x=1, x=-1$ έχουμε αντίστοιχα :

- $0 \le f(1) \le 0 \Leftrightarrow f(1)=0$ και $0 \le f(-1) \le 0 \Leftrightarrow f(-1)=0$ και

- για $x>-1$: $\dfrac{x^2-1}{x+1}\le f(x)\le \dfrac{x^2\left(x^2-1\right)}{x+1}\Leftrightarrow x-1\le \dfrac{f(x)}{x+1}\le x^2(x-1)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to -1^+}(x-1)=-2=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2(x-1)\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)}{x+1}=-2$. Άρα $f'(-1)=-2$. Όμοια $f'(1)=2$

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f' στο $[-1,1]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=\dfrac{f'(1)-f'(-1)}{2}=2$.

57. Είναι $f(x-1)-f(x+1)=\left(x^2-1\right)e^{x^2}+2$ (1). Από τη σχέση (1) για $x=-1, x=1$ έχουμε αντίστοιχα : $f(-2)-f(0)=2$ και $f(0)-f(2)=2$.

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f οπότε υπάρχουν $x_1\in(-2,0)$ και $x_2\in(0,2)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(0)-f(-2)}{2}=-\dfrac{2}{2}=-1$ και $f'(x_2)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}=-\dfrac{2}{2}=-1$. Επειδή η f' είναι παραγωγισιμη στο $[x_1,x_2]$, είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) .Είναι $f'(x_1)=f'(x_2)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

58. Είναι $g(x)=f(x)-f(4-x)$ (1) . Από τη σχέση (1) για $x=0, x=2, x=4$ έχουμε αντίστοιχα :

$g(0)=f(0)-f(4), g(2)=f(2)-f(2)=0$ και $g(4)=f(4)-f(0)$.

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για τη g σε καθένα από τα διαστήματα $[0,2],[2,4]$ οπότε υπάρχει $x_1\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε :

$g'(x_1)=\dfrac{g(2)-g(0)}{2}=\dfrac{-f(0)+f(4)}{2}$ και $x_2\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε

$g'(x_2)=\dfrac{g(4)-g(2)}{2}=\dfrac{f(4)-f(0)}{2}=g'(x_1)$.

Η g' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle,οπότε υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(0,4)$ τέτοιο, ώστε: $g''(\xi)=0\Leftrightarrow f''(\xi)=f''(4-\xi)$.

59. Αν $\gamma = \delta$ τότε από τη σχέση $f(\gamma)f(\delta) < 0$ έχουμε $f^2(\gamma) < 0$ που είναι αδύνατο. Άρα $\gamma \neq \delta$. Έστω $\gamma < \delta$ χωρίς βλάβη της γενικότητας..

α) Η συνάρτηση f είναι στο $[\gamma, \delta]$ και $f(\gamma)f(\delta) < 0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (\gamma, \delta) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

β) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$, οπότε υπάρχουν $x_1 \in (\alpha, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) = 0 = f'(x_2)$ (1).

Επειδή $f(\gamma)f(\delta) < 0$ οι τιμές $f(\gamma)$, $f(\delta)$ είναι ετερόσημες.

Έστω $f(\gamma) < 0$ και $f(\delta) > 0$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \gamma], [\gamma, x_0], [x_0, \delta], [\delta, \beta]$ οπότε υπάρχουν $x_3 \in (\alpha, \gamma)$, $x_4 \in (\gamma, x_0)$, $x_5 \in (x_0, \delta)$, $x_6 \in (\delta, \beta)$ τέτοια, ώστε :

$$f'(x_3) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = \frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha} < 0 \text{ , } f'(x_4) = \frac{f(x_0) - f(\gamma)}{x_0 - \gamma} = \frac{-f(\gamma)}{x_0 - \gamma} > 0 \text{ και}$$

$$f'(x_6) = \frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} = \frac{-f(\delta)}{\beta - \delta} < 0 .$$

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Μ.Τ για την f' σε καθένα από τα διαστήματα $[x_3, x_4]$ $[x_5, x_6]$, οπότε υπάρχουν $\xi_2 \in (x_3, x_4)$, $\xi_1 \in (x_5, x_6)$ τέτοια, ώστε : $f''(\xi_2) = \dfrac{f'(x_4) - f'(x_3)}{x_4 - x_3} > 0$, $f''(\xi_1) = \dfrac{f'(x_6) - f'(x_5)}{x_6 - x_5} < 0$.

γ) Επειδή $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) < 0$ και η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi) = 0$.

60. Έστω ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ με $x_1 < x_2 < x_3$ είναι συνευθειακά. Τότε

$\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Μ.Τ για την f οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_1)$.

Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle,οπότε υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

61.Έστω ότι τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, $\Gamma(x_3,f(x_3))$ με $x_1<x_2<x_3$ είναι συνευθειακά. Τότε $\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}\Leftrightarrow\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. Επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ και παραγωγίσιμη στα $(x_1,x_2),(x_2,x_3)$,ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, άρα υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,x_2)$ και $\xi_2\in(x_2,x_3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ και $f'(\xi_2)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$, άρα $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2), άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ξ_1,ξ_2) που είναι άτοπο. Άρα τρία οποιαδήποτε σημεία της γραφικής παράστασης της f, δεν μπορούν να είναι συνευθειακά.

62.Έστω ε μία τυχαία εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$. Τότε αυτή έχει εξίσωση: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.
Τα κοινά σημεία της ε με την C_f, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:
$$\begin{cases}y=f(x)\\y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f(x)\\f(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\end{cases}$$
Η εξίσωση $f(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ έχει προφανή ρίζα $x=x_0$. Έστω ότι έχει και άλλη λύση $\rho\neq x_0$, τότε θα ισχύει : $f(\rho)=f'(x_0)(\rho-x_0)+f(x_0)\Leftrightarrow$
$f(\rho)-f(x_0)=f'(x_0)(\rho-x_0)\Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}$ (1)
Έστω $\rho<x_0$.
Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε θα είναι συνεχής στο $[\rho,x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ,x_0), οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα θα

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho, x_0)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0}$ (2).

Από (1), (2), προκύπτει $f'(x_0) = f'(\xi)$. Όμως η f' είναι $1-1$ άρα ισχύει $x_0 = \xi$ που είναι άτοπο, γιατί $\xi \in (\rho, x_0)$. Ομοίως αν $x_0 < \rho$.

Άρα, κάθε εφαπτομένη της C_f έχει μοναδικό κοινό σημείο με αυτήν.

63.α) ε: Η εφαπτομένη στο Α είναι η $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$. Επειδή διέρχεται από το Β είναι : $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\alpha)(\beta - \alpha) \Leftrightarrow \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\alpha)$ (1).

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \beta)$:

$$f'(x_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \overset{(1)}{=} f'(\alpha) .$$

Αν η f ήταν 1-1 τότε θα ήταν $x_1 = \alpha$ που είναι άτοπο, άρα η f' δεν είναι 1-1.

β) Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η f' είναι συνεχής στο $[\alpha, x_1]$ και παραγωγίσιμη στο (α, x_1), άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, x_1) \subseteq (\alpha, \beta)$: $f''(\xi) = 0$.

64. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Έστω ότι η ε τέμνει την C_f στα $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ με $x_0 < x_1 < x_2$. Τότε,

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x_0, x_1]$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (x_0, x_1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$. Επειδή ε//ΑΒ είναι $\lambda_\varepsilon = \lambda_{AB} \Leftrightarrow f'(x_0) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x_1, x_2]$ οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0).$$

Επειδή η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η f'' είναι συνεχής στα διαστήματα $[x_0, \xi_1], [\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(x_0, \xi_1)(\xi_1, \xi_2)$. Επίσης $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(x_0)$ άρα του θεωρήματος Rolle

οπότε υπάρχουν $\xi \in (x_0, \xi_1)$ και $\xi' \in (\xi_1, \xi_2)$, $f''(\xi) = f''(\xi') = 0$ άτοπο. Δηλαδή η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες. Αν η f'' ήταν γνησίως μονότονη, τότε θα είχε το πολύ μία ρίζα άρα καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα, η f'' δεν είναι γνησίως μονότονη.

65. Έστω ότι υπάρχει ευθεία ε, που εφάπτεται της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ με $x_1 < x_2$. Τότε, θα είναι

$\lambda_\varepsilon = f'(x_1) = f'(x_2) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1). Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (2). Από (1), (2) είναι $f'(x_1) = f'(\xi) = f'(x_2)$. Η f' είναι συνεχής στα διαστήματα $[x_1, \xi]$ και $[\xi, x_2]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(x_1, \xi), (\xi, x_2)$ οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle άρα υπάρχουν $\rho_1 \in (x_1, \xi)$, $\rho_2 \in (\xi, x_2)$ τέτοια, ώστε $f''(\rho_1) = f''(\rho_2) = 0$. Η f'' είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) και $f''(\rho_1) = f''(\rho_2)$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(x_0) = 0$, άτοπο, γιατί $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

66. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Μ.Τ. για την f στο $[5, x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (5, x)$, $x > 5$ τέτοιο, ώστε:

$f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(5)}{x - 5} \Leftrightarrow f(x) = xf'(\xi) + f(5) - 5f'(\xi)$. Είναι

$\xi > 5 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) > f'(5) \Leftrightarrow \dfrac{f(x) - f(5)}{x - 5} > f'(5) \Leftrightarrow$

$f(x) - f(5) > f'(5)x - 5f'(5) \Leftrightarrow f(x) > xf'(5) + f(5) - 5f'(5)$. Επειδή

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(xf'(5) + f(5) - 5f'(5)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underset{>0}{x} f'(5) = +\infty$ είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

67. Ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$ άρα $f'(x) > M$ με $M > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, +\infty)$ με α πάρα πολύ μεγάλο θετικό αριθμό. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος

μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[\alpha,x]$, άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,x)\subseteq(\alpha,+\infty)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

Έχουμε $f'(\xi)>M\Leftrightarrow\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}>M\Leftrightarrow f(x)>M(x-\alpha)+f(\alpha)$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(M(x-\alpha)+f(\alpha)\right)=+\infty$ επειδή $M>0$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

68.. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο διάστημα $\left[x,x+\sqrt{x}\right],x>0$ οπότε υπάρχει $\xi\in\left(x,x+\sqrt{x}\right)$:

$f'(\xi)=\dfrac{f\left(x+\sqrt{x}\right)-f(x)}{\sqrt{x}}$. Είναι $|f'(\xi)|\le\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x}\le f'(\xi)\le\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow$

$-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{f\left(x+\sqrt{x}\right)-f(x)}{\sqrt{x}}\le\dfrac{1}{x}$. Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x+\sqrt{x}\right)-f(x)\right]=0$.

69.α) Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $\eta\mu x<x$. Έστω $f(t)=e^t$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\eta\mu x,x],x\in(0,\pi)$ οπότε υπάρχει

$\xi\in(\eta\mu x,x):\ f'(\xi)=\dfrac{e^{\eta\mu x}-e^x}{\eta\mu x-x}\Leftrightarrow e^{\xi}=\dfrac{e^{\eta\mu x}-e^x}{\eta\mu x-x}$

β) Είναι $\eta\mu x<\xi<x\Leftrightarrow e^{\eta\mu x}<e^{\xi}<e^x\Leftrightarrow e^{\eta\mu x}<\dfrac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}<e^x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}e^x=1=\lim\limits_{x\to0}e^{\eta\mu x}$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}=1$.

Θ.Μ.Τ. μέσα σε Θ.Μ.Τ.

70.Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f'(x)=e^x-2x$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής,οπότε υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$f'(x_1)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{e^{\beta}-\beta^2-e^{\alpha}+\alpha^2}{\beta-\alpha}=\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}-\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow$

$f'(x_1)=\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}-\dfrac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}-\beta-\alpha$ (1). Έστω η συνάρτηση $g(x)=e^{x}$, $x\in[\alpha,\beta]$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την g, στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $x_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$g'(x_2)=\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow e^{x_2}=\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}$ (2). Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει:

$f'(x_1)=e^{x_2}-\beta-\alpha\Leftrightarrow f'(x_1)+\alpha+\beta=e^{x_2}$.

71. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με παράγωγο

$f'(x)=\left(\dfrac{x\eta\mu x+1}{x}\right)'=\left(\eta\mu x+\dfrac{1}{x}\right)'=\sigma\upsilon\nu x-\dfrac{1}{x^2}$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής οπότε υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\dfrac{\beta\eta\mu\beta+1}{\beta}-\dfrac{\alpha\eta\mu\alpha+1}{\alpha}}{\beta-\alpha}=\frac{\dfrac{\alpha\beta\eta\mu\beta+\alpha-\alpha\beta\eta\mu\alpha-\beta}{\alpha\beta}}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow$$

$$f'(x_1)=\frac{\alpha\beta(\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha)-(\beta-\alpha)}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}=\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}-\frac{1}{\alpha\beta}\quad(1)$$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x$, $x\in[\alpha,\beta]$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την g, στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $x_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_2)=\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x_2=\dfrac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}$ (2).

Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει: $f'(x_1)=\sigma\upsilon\nu x_2-\dfrac{1}{\alpha\beta}\Leftrightarrow f'(x_1)+\dfrac{1}{\alpha\beta}=\sigma\upsilon\nu x_2$

72.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο [α ,β] οπότε υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\dfrac{1}{\beta}-\beta-\dfrac{1}{\alpha}+\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}}{\beta-\alpha}-1\quad(1)$$

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την $g(x)=\dfrac{1}{x}$ στο [α, β] οπότε υπάρχει $\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi_2)=\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow -\frac{1}{\xi_2{}^2}=\frac{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}{\beta-\alpha}\ (2)\ .$$

Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει: $f'(\xi_1)=-\frac{1}{\xi_2{}^2}-1$.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο [α ,β] οπότε υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{2^\beta+\beta^2-2^\alpha-\alpha^2}{\beta-\alpha}=$$

$$=\frac{2^\beta-2^\alpha}{\beta-\alpha}+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\frac{2^\beta-2^\alpha}{\beta-\alpha}+\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{2^\beta-2^\alpha}{\beta-\alpha}+\alpha+\beta\ (1)$$

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την $g(x)=2^x$ στο [α, β] οπότε υπάρχει $\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi_2)=\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow 2^{\xi_2}\cdot\ln 2=\frac{2^\beta-2^\alpha}{\beta-\alpha}\ (2).$$

Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει: $f'(\xi_1)=2^{\xi_2}\cdot\ln 2+\alpha+\beta$.

γ) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο [α ,β] οπότε υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\ln\beta-\eta\mu\beta-\ln\alpha+\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}-\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}\ (1)$$

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για τις $g(x)=\eta\mu x$ και $h(x)=\ln x$ στο [α,β] οπότε υπάρχουν $\xi_2,\xi_3\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε

$$g'(\xi_2)=\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi_2=\frac{\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha}{\beta-\alpha}\ (2)\ \text{και}$$

$$h'(\xi_3)=\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow \frac{1}{\xi_3}=\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}\ (3)\ .\ \text{Από τις σχέσεις (1),(2)}$$

προκύπτει: $f'(\xi_1)=\frac{1}{\xi_3}-\sigma\upsilon\nu\xi_2$.

Ανισοτικές σχέσεις

73.Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x)=\varepsilon\varphi x$ στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):f'(\xi)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi}=\frac{\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha}{\beta-\alpha}$. Είναι

$\alpha<\xi<\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha>\sigma\upsilon\nu\xi>\sigma\upsilon\nu\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha>\sigma\upsilon\nu^2\xi>\sigma\upsilon\nu^2\beta \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\xi}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}<\frac{\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} \Leftrightarrow$

$\frac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}<\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}$.

74.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x)=\sqrt{x}$ στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta): f'(\xi)=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta-\alpha}$. Είναι

$\alpha<\xi<\beta \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}<\sqrt{\xi}<\sqrt{\beta} \Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha}<2\sqrt{\xi}<2\sqrt{\beta} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}>\frac{1}{2\sqrt{\xi}}>\frac{1}{2\sqrt{\beta}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\beta}}<\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta-\alpha}<\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\beta}}<\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}<\frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$.

β) για την $f(x)=x^\nu$ στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$:

$f'(\xi)=\nu\xi^{\nu-1}=\frac{\beta^\nu-\alpha^\nu}{\beta-\alpha}$.Είναι $\alpha<\xi<\beta \Leftrightarrow \nu\alpha^{\nu-1}<\nu\xi^{\nu-1}<\nu\beta^{\nu-1} \Leftrightarrow$

$\nu\alpha^{\nu-1}<\frac{\beta^\nu-\alpha^\nu}{\beta-\alpha}<\nu\beta^{\nu-1} \Leftrightarrow \nu(\beta-\alpha)\alpha^{\nu-1}<\beta^\nu-\alpha^\nu<\nu(\beta-\alpha)\beta^{\nu-1}$.

γ) Έστω $f(x)=x\ln x,\ x\in[\alpha,\beta]$. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f'(x)=\ln x+1$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow$

$\ln\xi+1=\frac{\beta\ln\beta-\alpha\ln\alpha}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow \ln\xi+\ln e=\frac{\beta\ln\beta-\alpha\ln\alpha}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow \ln(e\xi)=\frac{\beta\ln\beta-\alpha\ln\alpha}{\beta-\alpha}$.

Είναι $\alpha<\xi<\beta \Leftrightarrow e\alpha<e\xi<e\beta \Leftrightarrow \ln(e\alpha)<\ln(e\xi)<\ln(e\beta) \Leftrightarrow$

$\ln(e\alpha)<\frac{\beta\ln\beta-\alpha\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\ln(e\beta) \Leftrightarrow$

$(\beta-\alpha)\ln(e\alpha)<\beta\ln\beta-\alpha\ln\alpha<(\beta-\alpha)\ln(e\beta)$

75.Έστω $\alpha<\beta$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta): f'(\xi)=-\eta\mu\xi=\frac{\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\beta-\alpha}$ Είναι

$|f'(\xi)| = |-\eta\mu\xi| \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\beta-\alpha}\right| \le 1 \Leftrightarrow |\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha| \le |\beta-\alpha|$. Όμοια αν $\alpha > \beta$. Τέλος αν $\alpha = \beta$ ισχύει η ισότητα.

76. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = x\varepsilon\varphi x$ στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta) : f'(\xi) = \frac{\beta\varepsilon\varphi\beta - \alpha\varepsilon\varphi\alpha}{\beta-\alpha}$. Όμως $f'(\xi) = \varepsilon\varphi\xi + \frac{\xi}{\sigma\upsilon\nu^2\xi} > 0$, αφού $\xi \in (\alpha,\beta) \subseteq \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, άρα $\frac{\beta\varepsilon\varphi\beta - \alpha\varepsilon\varphi\alpha}{\beta-\alpha} > 0 \Leftrightarrow \beta\varepsilon\varphi\beta - \alpha\varepsilon\varphi\alpha > 0 \Leftrightarrow$

$\beta\varepsilon\varphi\beta > \alpha\varepsilon\varphi\alpha \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta} < \frac{\beta}{\alpha}$.

Αυξημένης δυσκολίας

77.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right],\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και

$$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right) : f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Είναι $\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} > \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) > f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha) + f(\beta).$$

β) Έστω $f(x) = -e^{-x}$, $x \in [1,e]$. Είναι $f'(x) = e^{-x}$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε σύμφωνα με το α) σκέλος είναι

$$2f\left(\frac{1+e}{2}\right) > f(1) + f(e) \Leftrightarrow -2e^{-\frac{e+1}{2}} > -e^{-e} - e^{-1} \Leftrightarrow e^{-\frac{e+1}{2}} < \frac{e^{-e} + e^{-1}}{2}.$$

78.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x)=\eta\mu x$ στο $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{15}\right]$

οπότε υπάρχει $\xi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{15}\right): f'(\xi)=\sigma\upsilon\nu\xi=\frac{\eta\mu\frac{7\pi}{15}-\eta\mu\frac{\pi}{6}}{\frac{7\pi}{15}-\frac{\pi}{6}}=\frac{\eta\mu\frac{7\pi}{15}-\frac{1}{2}}{\frac{3\pi}{10}}$.

Είναι $\frac{\pi}{6}<\xi<\frac{7\pi}{15}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}>\sigma\upsilon\nu\xi>\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{15}$, άρα

$$\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{\eta\mu\frac{7\pi}{15}-\frac{1}{2}}{\frac{3\pi}{10}}\Leftrightarrow \eta\mu\frac{7\pi}{15}-\frac{1}{2}<\frac{3\sqrt{3}\pi}{20}.$$

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x)=\eta\mu x$ στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{18}\right]$ οπότε

υπάρχει $\xi\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{18}\right): f'(\xi)=\sigma\upsilon\nu\xi=\frac{\eta\mu\frac{5\pi}{18}-\eta\mu\frac{\pi}{4}}{\frac{5\pi}{18}-\frac{\pi}{4}}=\frac{\eta\mu\frac{5\pi}{18}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{36}}$.

Είναι $\frac{\pi}{4}<\xi<\frac{5\pi}{18}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}>\sigma\upsilon\nu\xi>\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18}$, άρα

$$\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\eta\mu\frac{5\pi}{18}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{36}}\Leftrightarrow \eta\mu\frac{5\pi}{18}-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi\sqrt{2}}{72}\Leftrightarrow \eta\mu\frac{5\pi}{18}<\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{72}.$$

79.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x)=\ln x$ στο $[e,\pi]$ οπότε

υπάρχει $\xi\in(e,\pi): f'(\xi)=\frac{1}{\xi}=\frac{\ln\pi-1}{\pi-e}$.

Είναι $e<\xi<\pi\Leftrightarrow\frac{1}{e}>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{\pi}\Leftrightarrow\frac{1}{\pi}<\frac{\ln\pi-1}{\pi-e}<\frac{1}{e}\Leftrightarrow$

$$\frac{\pi-e}{\pi}<\ln\pi-1<\frac{\pi-e}{e}\Leftrightarrow 1-\frac{e}{\pi}+1<\ln\pi<\frac{\pi}{e}-1+1\Leftrightarrow 2-\frac{e}{\pi}<\ln\pi<\frac{\pi}{e}.$$

β) Είναι $e^e\pi^\pi>e^{2\pi}\Leftrightarrow\ln\left(e^e\pi^\pi\right)>2\pi\Leftrightarrow e\ln e+\pi\ln\pi>2\pi\Leftrightarrow$

$e\ln e-\pi\ln e>\pi\ln e-\pi\ln\pi\Leftrightarrow$

$(e-\pi)\ln e>\pi(\ln e-\ln\pi)\Leftrightarrow e-\pi>\pi(\ln e-\ln\pi)$.

Έστω $f(x)=\ln x$, $x>0$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[e,\pi]$

οπότε υπάρχει $\xi \in (e,\pi) : f'(\xi) = \dfrac{f(\pi)-f(e)}{\pi - e} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} = \dfrac{\ln\pi - \ln e}{\pi - e} \Leftrightarrow$

$\ln\pi - \ln e = \dfrac{1}{\xi}(\pi - e)$. Είναι $e < \xi < \pi$, άρα $\dfrac{1}{\xi} > \dfrac{1}{\pi} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi}(\pi - e) > \dfrac{\pi - e}{\pi} \Leftrightarrow$

$\ln\pi - \ln e > \dfrac{\pi - e}{\pi} \Leftrightarrow \pi(\ln e - \ln\pi) < e - \pi$.

80. Είναι $ey < \left(\dfrac{x^x}{y^y}\right)^{\frac{1}{x-y}} < ex \Leftrightarrow \ln(ey) < \ln\left(\dfrac{x^x}{y^y}\right)^{\frac{1}{x-y}} < \ln(ex) \Leftrightarrow$

$\ln e + \ln y < \dfrac{1}{x-y}\ln\left(\dfrac{x^x}{y^y}\right) < \ln e + \ln x \Leftrightarrow$

$1 + \ln y < \dfrac{\ln x^x - \ln y^y}{x-y} < 1 + \ln x \Leftrightarrow 1 + \ln y < \dfrac{x\ln x - y\ln y}{x-y} < 1 + \ln x$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = t\ln t$, $t \in [y,x]$, η οποία είναι συνεχής στο $[y,x]$ και παραγωγίσιμη στο (y,x), με παράγωγο $f'(t) = \ln t + t\dfrac{1}{t} = \ln t + 1$. Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f οπότε υπάρχει

$\xi \in (y,x)$: $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \Leftrightarrow 1 + \ln\xi = \dfrac{x\ln x - y\ln y}{x-y}$ (1).

Είναι $y < \xi < x \Leftrightarrow \ln y < \ln\xi < \ln x \Leftrightarrow 1 + \ln y < 1 + \ln\xi < 1 + \ln x \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$1 + \ln y < \dfrac{x\ln x - y\ln y}{x-y} < 1 + \ln x$.

81. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \ln(\ln x)$ στο $[\alpha, \alpha+1]$

οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha+1) : f'(\xi) = f(\alpha+1) - f(\alpha) \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{\xi\ln\xi} = \ln(\ln(\alpha+1)) - \ln(\ln\alpha)$. Είναι $\alpha < \xi < \alpha + 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha+1} < \dfrac{1}{\xi} < \dfrac{1}{\alpha}$ (1) και

$\ln\alpha < \ln\xi < \ln(\alpha+1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln(\alpha+1)} < \dfrac{1}{\ln\xi} < \dfrac{1}{\ln\alpha}$ (2)

Από $(1)\cdot(2) \Rightarrow$ $\dfrac{1}{(\alpha+1)\ln(\alpha+1)} < \dfrac{1}{\xi\ln\xi} < \dfrac{1}{\alpha\ln\alpha} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{\ln(\alpha+1)^{\alpha+1}} < \ln(\ln(\alpha+1)) - \ln(\ln\alpha) < \dfrac{1}{\ln\alpha^{\alpha}}$.

82.α) Είναι $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$

Έστω $f(t) = \ln t,\ t \in [x, x+1],\ x > 0$. Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ με παράγωγο $f'(t) = \frac{1}{t}$ άρα οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε : $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Είναι $0 < x < \xi < x+1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(t) = \ln t$ στο $[x-1, x+1], x > 1$, οπότε υπάρχει $\xi \in (x-1, x+1) : f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{x+1-x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$.

Είναι $x-1 < \xi < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} < \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow$

$\frac{2}{x+1} < \ln\frac{x+1}{x-1} < \frac{2}{x-1}$.

83. Έστω $x > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(t) = e^t$ με $t \in [0, x]$, η οποία είναι συνεχής $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$, με $h'(t) = e^t$. Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την h στο $[0, x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi) = \frac{h(x) - h(0)}{x} \Leftrightarrow e^{\xi} = \frac{e^x - 1}{x}$ (1).

Είναι $0 < \xi < x \Leftrightarrow e^0 < e^{\xi} < e^x \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x < e^x - 1 < xe^x \Leftrightarrow$

$x+1 < e^x < xe^x + 1$. Όμοια για $x < 0$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x, 0]$ ... $x+1 < e^x < xe^x + 1$. Για $x = 0$ είναι $x+1 = e^x = xe^x = 1$.

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x+1 \le e^x \le xe^x + 1$.

84. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(t) = \ln t$ σε καθένα από τα διαστήματα $[x-1, x], [x, x+1], x > 1$ οπότε υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (x-1, x)$,

$\xi_2 \in (x, x+1)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x)-f(x-1)}{x-x+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi_1} = \ln\dfrac{x}{x-1}$ και

$f'(\xi_2) = \dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi_2} = \ln\dfrac{x+1}{x}$.

Είναι $\xi_1 < x < \xi_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi_2} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\xi_1} \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) < \dfrac{1}{x} < \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

85.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \sqrt[3]{x}$ σε καθένα από τα διαστήματα $[3,4],[6,7]$ οπότε υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (3,4)$, $\xi_2 \in (6,7)$:

$f'(\xi_1) = \dfrac{f(4)-f(3)}{4-3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\xi_1^2}} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}$ και

$f'(\xi_2) = \dfrac{f(7)-f(6)}{7-6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\xi_2^2}} = \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{6}$.

Είναι $\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow \xi_1^2 < \xi_2^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\xi_1^2} < \sqrt[3]{\xi_2^2} \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{\xi_1^2} < 3\sqrt[3]{\xi_2^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\xi_2^2}} < \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\xi_1^2}} \Leftrightarrow$

$\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \sqrt[4]{x}$ σε καθένα από τα διαστήματα $[2,3],[4,5]$ οπότε υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (2,3), \xi_2 \in (4,5)$:

$f'(\xi_1) = \dfrac{f(3)-f(2)}{3-2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4\sqrt[4]{\xi_1^3}} = \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}$ και

$f'(\xi_2) = \dfrac{f(5)-f(4)}{5-4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4\sqrt[4]{\xi_2^3}} = \sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{4}$. Είναι $\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow \xi_1^3 < \xi_2^3 \Leftrightarrow$

$4\sqrt[4]{\xi_1^3} < 4\sqrt[4]{\xi_2^3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4\sqrt[4]{\xi_2^3}} < \dfrac{1}{4\sqrt[4]{\xi_1^3}} \Leftrightarrow \sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{4} < \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow \sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{2} < \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{3}$

86.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[-2,-1],[1,2]$ οπότε υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (-2,-1), \xi_2 \in (1,2)$ τέτοια,

ώστε: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(-1)-f(-2)}{-1+2} = f(-1) - f(-2)$ και

$f'(\xi_2) = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = f(2) - f(1)$. Είναι $\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow$

$f(-1)-f(-2)>f(2)-f(1)\Leftrightarrow f(-1)+f(1)>f(2)+f(-2)\Leftrightarrow B>A$

β) Αρκεί να βρούμε το πρόσημο της διαφοράς

$\Gamma-\Delta=f(2)+f(3)-f(1)-f(4)=f(2)-f(1)-\big(f(4)-f(3)\big)$.

Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2]$, $[3,4]$, οπότε υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1\in(1,2)$, $\xi_2\in(3,4)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1)\quad\text{και}\quad f'(\xi_2)=\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=f(4)-f(3)$$

.Είναι $1<\xi_1<2<3<\xi_2<4$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα οπότε

$f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow f(2)-f(1)>f(4)-f(3)\Leftrightarrow$

$f(2)-f(1)-\big(f(4)-f(3)\big)>0\Leftrightarrow\Gamma-\Delta>0\Leftrightarrow\Gamma>\Delta$.

87.α) Είναι $10^x-9^x=8^x-7^x$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=t^x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(t)=xt^{x-1}$. Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[7,8]$ και $[9,10]$, οπότε υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1\in(7,8)$, $\xi_2\in(9,10)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)=f(8)-f(7)\Leftrightarrow x\xi_1^{x-1}=8^x-7^x$ και $f'(\xi_2)=f(10)-f(9)\Leftrightarrow x\xi_2^{x-1}=10^x-9^x$.

Επομένως η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$x\xi_1^{x-1}=x\xi_2^{x-1}\Leftrightarrow x\left(\xi_1^{x-1}-\xi_2^{x-1}\right)=0\Leftrightarrow(x=0)$ ή

$$\left(\xi_1^{x-1}=\xi_2^{x-1}\Leftrightarrow\frac{\xi_1^{x-1}}{\xi_2^{x-1}}=1\Leftrightarrow\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1}=1\overset{\frac{\xi_1}{\xi_2}\neq1}{\Leftrightarrow}x-1=0\Leftrightarrow x=1\right).$$

Άρα, η εξίσωση έχει ακριβώς δύο λύσεις, $x=0$ ή $x=1$.

β) Είναι $5^x+6^x=7^x+4^x\Leftrightarrow5^x-4^x=7^x-6^x$ (1). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=t^x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(t)=xt^{x-1}$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[4,5]$ και $[6,7]$, άρα υπάρχουν $\xi_1\in(4,5)$, $\xi_2\in(6,7)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1)=f(5)-f(4)\Leftrightarrow x\xi_1^{x-1}=5^x-4^x$ και Επομένως η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση: $x\xi_1^{x-1}=x\xi_2^{x-1}\Leftrightarrow x\left(\xi_1^{x-1}-\xi_2^{x-1}\right)=0\Leftrightarrow(x=0)$ ή

$$\left(\xi_1^{x-1}=\xi_2^{x-1}\Leftrightarrow\frac{\xi_1^{x-1}}{\xi_2^{x-1}}=1\Leftrightarrow\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1}=1\overset{\frac{\xi_1}{\xi_2}\neq 1}{\Leftrightarrow}x-1=0\Leftrightarrow x=1\right).$$

Άρα, η εξίσωση έχει ακριβώς δύο λύσεις, $x=0$ ή $x=1$.

γ) Είναι $x+2^x=3^x\Leftrightarrow 3^x-2^x=x$. (1). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=t^x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(t)=xt^{x-1}$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2,3]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(2,3): f'(\xi)=f(3)-f(2)\Leftrightarrow x\xi^{x-1}=3^x-2^x$. Επομένως η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση: $x=x\xi^{x-1}\Leftrightarrow x-x\xi^{x-1}=0\Leftrightarrow x\left(1-\xi^{x-1}\right)=0\Leftrightarrow$ $(x=0)$ ή $\left(\xi_1^{x-1}=\xi^{x-1}=1\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1\right)$.

88. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με

$f'(x)=2x(\ln x+1)+x^2\frac{1}{x}=x(2\ln x+3)$. Επειδή $1<x<e$ είναι :

$0<\ln x<1\Leftrightarrow 0<2\ln x<2\Leftrightarrow 3<2\ln x+3<5$, άρα $3<x(2\ln x+3)<5e\Leftrightarrow$

$3<f'(x)<5e$ (1) για κάθε $x\in(1,e)$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,x]$, $x\in[1,e)$ και παραγωγίσιμη στο $(1,x)$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^2(\ln x+1)+1-1^2(\ln 1+1)-1}{x-1}\Leftrightarrow$$

$f'(\xi)=\frac{x^2(\ln x+1)-1}{x-1}$. Όμως $3<f'(\xi)<5e$, άρα $3<\frac{x^2(\ln x+1)-1}{x-1}<5e\Leftrightarrow$

$3(x-1)<x^2(\ln x+1)-1<5e(x-1)\Leftrightarrow 3x-3+1<x^2(\ln x+1)<5e(x-1)+1\Leftrightarrow$

$3x-2<x^2(\ln x+1)<5e(x-1)+1$.

89. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f στο $[x,x+1]$, υπάρχει

$\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε : $f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$. Είναι

$x<\xi<x+1\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(\xi)<f'(x+1)\Leftrightarrow f'(x)<f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$

90. Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα

διαστήματα $[x-1,x],[x,x+1]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x-1,x), \xi_2 \in (x,x+1)$ τέτοια, ώστε : $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x)-f(x-1)}{x-x+1} = f(x)-f(x-1)$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f(x+1)-f(x)$.

Είναι $\xi_1 < x < \xi_2$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι

$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(x)-f(x-1) < f(x+1)-f(x) \Leftrightarrow 2f(x) < f(x+1)+f(x-1)$

91. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2,4],[4,6]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (2,4)$ και $\xi_2 \in (4,6)$:

$f'(\xi_1) = \dfrac{f(4)-f(2)}{4-2} = \dfrac{4-f(2)}{2}$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(6)-f(4)}{6-4} = \dfrac{f(6)-4}{2}$.

Είναι $\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{4-f(2)}{2} > \dfrac{f(6)-4}{2} \Leftrightarrow$

$4-f(2) > f(6)-4 \Leftrightarrow f(2)+f(6) < 8$.

92. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0,2],[2,5]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,2)$ και $\xi_2 \in (2,5)$:

$f'(\xi_1) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2} = -\dfrac{f(0)}{2}$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(5)-f(2)}{5-2} = \dfrac{f(5)}{3}$. Είναι

$\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow -\dfrac{f(0)}{2} > \dfrac{f(5)}{3} \Leftrightarrow -3f(0) > 2f(5) \Leftrightarrow$

$3f(0)+2f(5) < 0$.

93. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0,x],[x,1]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,x), \xi_2 \in (x,1)$ τέτοια, ώστε

$f'(\xi_1) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{f(x)}{x}$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} = \dfrac{1-f(x)}{1-x}$. Επειδή

$\xi_1 < \xi_2$ και η $f'\nearrow$, είναι: $f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x} < \dfrac{1-f(x)}{1-x} \overset{x(1-x)>0}{\Leftrightarrow}$

$(1-x)f(x) < x(1-f(x)) \Leftrightarrow$

$f(x)-xf(x) < x-xf(x) \Leftrightarrow f(x) < x$. Αρκεί να δείξουμε ότι $x < \dfrac{1}{2-x} \Leftrightarrow$

$2x-x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2-2x+1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0$ που ισχύει στο $(0,1)$.

94.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f στο $[0,1]$, υπάρχει $\xi \in (0,1)$:

$f'(\xi) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(1)-f(0)$.

Είναι $f'(\xi) \geq \dfrac{f^2(1)+f^2(0)+2f(0)+5}{2} \Leftrightarrow$

$f(1)-f(2) \geq \dfrac{f^2(1)+f^2(0)+2f(0)+5}{2} \Leftrightarrow 2f(1)-2f(0) \geq f^2(1)+f^2(0)+$

$2f(0)+5 \Leftrightarrow f^2(1)-2f(1)+1+f^2(0)+2f(0)+4 \leq 0 \Leftrightarrow$

$(f(1)-1)^2+(f(0)-2)^2 \leq 0$ άρα $f(1)=1$ και $f(0)=-2$.

β) Από το α) ερώτημα η αρχική ανίσωση γίνεται $f'(x) \geq 3$.

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0,x]$, $[x,1]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,x), \xi_2 \in (x,1)$ τέτοια, ώστε

$f'(\xi_1) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{f(x)+2}{x}$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} = \dfrac{1-f(x)}{1-x}$.

Είναι $f'(\xi_1) \geq 3 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)+2}{x} \geq 3 \Leftrightarrow f(x)+2 \geq 3x \Leftrightarrow f(x) \geq 3x-2$ (1)

και $f'(\xi_2) \geq 3 \Leftrightarrow \dfrac{1-f(x)}{1-x} \geq 3 \Leftrightarrow 1-f(x) \geq 3-3x \Leftrightarrow -f(x) \geq -3x+2 \Leftrightarrow$

$f(x) \leq 3x-2$ (2). Από (1),(2) έχουμε $f(x) = 3x-2$, $x \in (0,1)$. Επειδή

$f(1)=1$ και $f(0)=-2$, είναι $f(x) = 3x-2$, $x \in [0,1]$.

Σύνθετες ασκήσεις

95.α) Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in [\alpha,\beta]$ με $\rho_1 < \rho_2$.

Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$,παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) , $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f,άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, που είναι αδύνατο. Άρα η f δεν έχει δύο ρίζες στο $[\alpha,\beta]$ οπότε έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα αυτό.

β) i. Η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ευθεία ε: $y = f'(x_0)(x-x_0)$. Για τα κοινά σημεία των ε, C_f έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f'(x_0)(x-x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(x) = f'(x_0)(x-x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(x)-f'(x_0)(x-x_0) = 0 \ (1 \end{cases}$$

Η (1) έχει προφανή ρίζα το x_0. Έστω τώρα ότι υπάρχει και άλλη ρίζα $\rho < x_0$, τότε $f(\rho) = f(x_0) = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Η g είναι συνεχής στο $[\rho, x_0]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων ,η g παραγωγίσιμη στο (ρ, x_0) με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi_1 \in (\rho, x_0)$ τέτοιο, ώστε: $g'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1) - f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1) = f'(x_0)$. Επειδή η f' είναι 1-1 ισχύει $\xi_1 = x_0$ που είναι άτοπο. Άρα το $A(x_0, 0)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f με την C_f.

ii. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$,οπότε υπάρχουν $x_1 \in (\alpha, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοια, ώστε: $f'(x_1) = -\dfrac{f(\alpha)}{x_0 - \alpha}$ και $f'(x_2) = \dfrac{f(\beta)}{\beta - x_0}$. Επειδή $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, είναι $f(\alpha) \neq 0$ και $f(\beta) \neq 0$. Οπότε

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = -\frac{x_0 - \alpha}{f(\alpha)} + \frac{\beta - x_0}{f(\beta)} = \frac{f(\alpha)\beta - f(\alpha)x_0 - f(\beta)x_0 + \alpha f(\beta)}{f(\alpha)f(\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = -x_0\left(\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{f(\alpha)f(\beta)}\right) = -x_0\left(\frac{1}{f(\alpha)} + \frac{1}{f(\beta)}\right)$$

96.α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\alpha, 0]$ και $f(-\alpha) < f(\alpha) < f(0)$, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_0 \in (-\alpha, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = f(\alpha)$ (1).Αν η f ήταν 1-1 τότε από τη σχέση (1) θα προέκυπτε ότι $x_0 = \alpha$ που είναι άτοπο. Άρα η f δεν είναι 1-1.

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$, παραγωγίσιμη στο $(-\alpha, \alpha)$ και $f(x_0) = f(\alpha)$, από το θεώρημα Rolle προκύπτει ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(x_0, \alpha) \subseteq (-\alpha, \alpha)$.

γ) Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-\alpha, 0]$, $[0, \alpha]$ και παραγωγίσιμη στα $(-\alpha, 0)$ και $(0, \alpha)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (-\alpha, 0)$ και $\xi_2 \in (0, \alpha)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(0) - f(-\alpha)}{\alpha}$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha}$. Όμως $f(-\alpha) < f(\alpha) < f(0)$ και $\alpha > 0$, άρα

$f'(\xi_1)>0$ και $f'(\xi_2)<0$.Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2), οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, άρα υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0$.

97.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[\alpha,\beta]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{2\beta-2\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=2=\lambda_\varepsilon$, άρα υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $2x-y+1=0$.

β) Έστω $M(x_0,f(x_0))$ σημείο της. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι η ευθεία $\varepsilon_1: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Για να διέρχεται η ε_1 από την αρχή των αξόνων, πρέπει: $0-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0)\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0$.

Είναι $xf'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow xf'(x)-x'f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{xf'(x)-x'f(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=0$. Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Είναι

$g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{2\alpha}{\alpha}=2$, $g(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{\beta}=\dfrac{2\beta}{\beta}=2$, δηλαδή $g(\alpha)=g(\beta)$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε η εξίσωση

$g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow$

$xf'(x)-f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β).

γ) Έστω $h(x)=f(x)-\alpha-\beta$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και

$h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha-\beta=2\alpha-\alpha-\beta=\alpha-\beta<0$,

$h(\beta)=f(\beta)-\alpha-\beta=2\beta-\alpha-\beta=\beta-\alpha>0$, δηλαδή $h(\alpha)h(\beta)<0$.

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=\alpha+\beta$.

δ) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$, οπότε υπάρχουν $\rho_1 \in (\alpha, x_0)$ και $\rho_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\rho_1) = \frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha} = \frac{\alpha+\beta-2\alpha}{x_0-\alpha} = \frac{\beta-\alpha}{x_0-\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\rho_1)} = \frac{x_0-\alpha}{\beta-\alpha} \text{ και}$$

$$f'(\rho_2) = \frac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0} = \frac{2\beta-\alpha-\beta}{\beta-x_0} = \frac{\beta-\alpha}{\beta-x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\rho_1)} = \frac{\beta-x_0}{\beta-\alpha} .$$

Άρα $\frac{1}{f'(\rho_1)} + \frac{1}{f'(\rho_2)} = \frac{x_0-\alpha}{\beta-\alpha} + \frac{\beta-x_0}{\beta-\alpha} = \frac{x_0-\alpha+\beta-x_0}{\beta-\alpha} = \frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha} = 1$.

98. α) Έστω ότι η f δεν είναι "1-1". Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ για τα οποία είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Έστω $x_1 < x_2$. Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f είναι παραγωγίσιμη άρα συνεχής στο διάστημα αυτό και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2). Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Άτοπο γιατί $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η συνάρτηση f είναι $1-1$.

β) Η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(-2,1)$, οπότε ισχύει :

$f(1) = 5$ και $f(-2) = 1$.Είναι : $f^{-1}\left(-4 + f\left(x^2-8\right)\right) = -2 \Leftrightarrow$

$-4 + f\left(x^2-8\right) = f(-2) \Leftrightarrow -4 + f\left(x^2-8\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(x^2-8\right) = 5 \Leftrightarrow$

$f\left(x^2-8\right) = f(1) \overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} x^2-8 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow (x=3) \text{ ή } (x=-3)$.

γ) Έστω $M(\xi, f(\xi))$ το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε). Πρέπει να ισχύει $f'(\xi)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{4}{3}$. Η f είναι συνεχής στο $[-2,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2,1)$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, οπότε υπάρχει $\xi \in (-2,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1)-f(-2)}{1+2} = \frac{5-1}{3} = \frac{4}{3}.$$

99.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, x]$ και $[x, \beta]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, x)$ και $\xi_2 \in (x, \beta)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \frac{f(x)}{x-\alpha}$ (1) και

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}=\dfrac{-f(x)}{\beta-x}$ (2).Επειδή $f'(x)\le 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ είναι:

$$\begin{cases} f'(\xi_1)\le 0 \\ f'(\xi_2)\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x-\alpha}\le 0 \\ \dfrac{-f(x)}{\beta-x}\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\le 0 \\ f(x)\ge 0 \end{cases}.$$ Άρα $f(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$

και αφού $f(\alpha)=f(\beta)=0$ είναι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

β) i. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την g στο $[\alpha,\beta]$,

οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Επειδή $g'(x)\le 6$

για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, ισχύει ότι: $g'(\xi)\le 6\Leftrightarrow\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}\le 6\Leftrightarrow$

$g(\beta)-g(\alpha)\le 6(\beta-\alpha)\Leftrightarrow \beta^2+9+\alpha^2-2\alpha+4\le 6\beta-6\alpha\Leftrightarrow$

$\beta^2-6\beta+9+\alpha^2+4\alpha+4\le 0\Leftrightarrow(\beta-3)^2+(\alpha+2)^2\le 0\Leftrightarrow\ \alpha=-2$ και $\beta=3$.

ii. Για $\alpha=-2$ και $\beta=3$ είναι $g(-2)=-12$ και $g(3)=18$. Θεωρούμε την

$f(x)=g(x)-6x$, η οποία είναι συνεχής στο $[-2,3]$, παραγωγίσιμη στο

$(-2,3)$, $f(-2)=g(-2)+12=-12+12=0$ και

$f(3)=g(3)-18=18-18=0$. Επειδή $f'(x)=g'(x)-6\le 0$, λόγω του

προηγούμενου ερωτήματος ισχύει:

$f(x)=0$ για κάθε $x\in[-2,3]$, δηλαδή $g(x)=6x$ για κάθε $x\in[-2,3]$.

100. α) Είναι $f^3(x)+f(x)=x-1\ (1)$.Από τη σχέση (1) για $x=1$ έχουμε

$$f^3(1)+f(1)=0\Leftrightarrow f(1)\left(\underbrace{f^2(1)+1}_{\neq 0}\right)=0\Leftrightarrow f(1)=0.$$

Με παραγώγιση της σχέσης (1) έχουμε : $\left(f^3(x)+f(x)\right)'=(x-1)'\Leftrightarrow$

$3f^2(x)f'(x)+f'(x)=1$ (2).

Από τη σχέση (2) για $x=1$ έχουμε $3f^2(1)f'(1)+f'(1)=1\Leftrightarrow f'(1)=1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο 1 έχει εξίσωση :

$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=x-1$

β) Από τη σχέση (2) έχουμε $f'(x)\left(3f^2(x)+1\right)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+1}$.

Όμως $f^2(x)\geq 0 \Leftrightarrow 3f^2(x)\geq 0 \Leftrightarrow 3f^2(x)+1\geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3f^2(x)+1}\leq 1 \Leftrightarrow f'(x)\leq 1$.

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[1,x]$ οπότε

υπάρχει $\xi\in(1,x): f'(\xi)=\dfrac{f(x)-\cancelto{0}{f(1)}}{x-1}$.

Είναι $f'(\xi)\leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x-1}\leq 1 \Leftrightarrow f(x)\leq x-1$. Για $x=1$ ισχύει η ισότητα.

γ) Από τη σχέση (1) για $x=\alpha$, $x=\beta$ έχουμε αντίστοιχα :

$f^3(\alpha)+f(\alpha)=\alpha-1$ (3), $f^3(\beta)+f(\beta)=\beta-1$ (4).

Με αφαίρεση κατά μέλη της σχέσης (3) από τη σχέση (4) έχουμε:

$f^3(\beta)-f^3(\alpha)+f(\beta)-f(\alpha)=\beta-\alpha \Leftrightarrow$

$\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)\left(f^2(\beta)+f(\beta)f(\alpha)+f^2(\alpha)+1\right)=\beta-\alpha \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{1}{f^2(\beta)+f(\beta)f(\alpha)+f^2(\alpha)+1}$. Ισχύουν οι υποθέσεις του

θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$

τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{1}{f^2(\beta)+f(\beta)f(\alpha)+f^2(\alpha)+1}$.

δ) Έστω ότι υπάρχουν με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\geq f(x_2)$ (5), τότε

$f^3(x_1)\geq f^3(x_2)$ (6). Με πρόσθεση των σχέσεων (5) και (6) έχουμε

$f^3(x_1)+f(x_1)\geq f^3(x_2)+f(x_2) \Leftrightarrow x_1-1\geq x_2-1 \Leftrightarrow x_1\geq x_2$ που είναι άτοπο.

Άρα για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ε) Για κάθε $x>1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(1)=0$ και για κάθε $x<1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1)=0$

101. α) Για κάθε $x_1,x_2\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$ με $x_1<x_2\,(1)$ είναι

$\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu x_1<-\sigma\upsilon\nu x_2$ (2).

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε

$x_1-\sigma\upsilon\nu x_1<x_2-\sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα

στο $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$. Είναι $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}<0$,

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi-2\sqrt{2}}{4}>0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος

Bolzano και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$:

$f(x_0)=0\Leftrightarrow \text{συν}x_0=x_0$

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $\left[x_0,\frac{\pi}{4}\right]$

οπότε υπάρχει $\xi\in\left(x_0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cancel{f(x_0)}^{0}}{\frac{\pi}{4}-x_0}\Leftrightarrow$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4}-x_0\right)f'(\xi)$

γ) i. Είναι $f'(\xi)>\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}-x_0}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}-x_0}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow$

$\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{3\pi}{8}-\frac{3x_0}{2}\Leftrightarrow 2\pi-4\sqrt{2}>3\pi-12x_0\Leftrightarrow$

$12x_0>\pi+4\sqrt{2}\Leftrightarrow x_0>\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{2}}{3}$. Επειδή $x_0\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$, αρκεί

$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{2}}{3}>\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\pi+4\sqrt{2}>2\pi\Leftrightarrow\pi<4\sqrt{2}$ που ισχύει.

ii. $f'(\xi)>\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}-x_0}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)>\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}-x_0\right)\Leftrightarrow\frac{2}{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\pi}{4}-x_0\Leftrightarrow$

$\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right)<x_0$ και επειδή $x_0\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ είναι $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right)<x_0<\frac{\pi}{4}$

102. α) Έστω $M(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αρκεί να υπάρχει x_0 για το οποίο να ισχύει ότι:

$0-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0)\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0\Leftrightarrow \dfrac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^2}=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $a(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\in[1,2]$. Η a είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $a'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$. Είναι

$a(1)=\dfrac{f(1)}{1}=1$, $a(2)=\dfrac{f(2)}{2}=1$, δηλαδή $a(1)=a(2)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$a'(x_0)=0\Leftrightarrow \dfrac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^2}=0\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $b(x)=xf'(x)-f(x)$. Έστω ότι η εξίσωση $b(x)=0$ έχει δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<x_2$. Η b είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με παράγωγο

$b'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)$.

Επειδή $b(x_1)=b(x_2)=0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε υπάρχει $x_3\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $b'(x_3)=0\Leftrightarrow x_3f''(x_3)=0\overset{x_3>0}{\Leftrightarrow} f''(x_3)=0$ άτοπο. Άρα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $b(x)=0\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=0$ οπότε η C_f δέχεται μοναδική εφαπτομένη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Έστω ότι η f' δεν είναι 1-1, τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)$. Έστω $x_1<x_2$.

Η f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στα (x_1,x_2) , άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$ που είναι άτοπο. Ομοίως αν $x_1>x_2$.

Άρα για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1\neq x_2$ είναι $f'(x_1)\neq f'(x_2)$ οπότε η f' είναι 1-1.

γ) Έστω ε μία τυχαία εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$. Τότε αυτή έχει εξίσωση: $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$. Τα κοινά

σημεία της ε με την C_f , προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(x) = f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha) \end{cases}$$

Η εξίσωση $f(x) = f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ έχει προφανή ρίζα $x = \alpha$. Έστω ότι έχει και άλλη λύση $\rho \neq \alpha$, τότε θα ισχύει : $f(\rho) = f'(\alpha)(\rho-\alpha)+f(\alpha) \Leftrightarrow$

$$f(\rho)-f(\alpha) = f'(\alpha)(\rho-\alpha) \Leftrightarrow f'(\alpha) = \frac{f(\rho)-f(\alpha)}{\rho-\alpha} \quad (1)$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε θα είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και στο διάστημα $[\rho,\alpha]$ ή $[\alpha,\rho]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ., άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho,\alpha)$ ή $\xi \in (\alpha,\rho)$ τέτοιο, ώστε:

$f'(\xi) = \frac{f(\rho)-f(\alpha)}{\rho-\alpha}$ (2). Από (1), (2), προκύπτει $f'(\alpha) = f'(\xi)$ και επειδή η f' είναι $1-1$, ισχύει $\alpha = \xi$ που είναι άτοπο, γιατί $\xi \in (\rho,\alpha)$ ή $\xi \in (\alpha,\rho)$. Άρα, κάθε εφαπτομένη της C_f έχει μοναδικό κοινό σημείο με αυτήν.

δ) Έστω $\alpha,\beta,\gamma \in (0,+\infty)$ με $\alpha < \beta < \gamma$.Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(\alpha) < f'(\beta) < f'(\gamma)$ ή $f'(\alpha) > f'(\beta) > f'(\gamma)$. Έστω ότι δεν ισχύει ο προηγούμενος ισχυρισμός και ότι $f'(\alpha) < f'(\gamma) < f'(\beta)$, τότε επειδή $f'(\alpha) \neq f'(\beta)$ και η f' είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = f'(\gamma)$. Επειδή όμως η f' είναι 1-1 ισχύει ότι $\xi = \gamma$ που είναι άτοπο αφού $\gamma \notin (\alpha,\beta)$. Άρα η f' είναι γνησίως μονότονη.

Ομοίως αν $f'(\gamma) < f'(\alpha) < f'(\beta)$ ή $f'(\alpha) > f'(\gamma) > f'(\beta)$ ή $f'(\beta) > f'(\alpha) > f'(\gamma)$.

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to e}\frac{f(\ln x)-1}{x-e} = \lim\limits_{x\to e}\left(\frac{f(\ln x)-1}{\ln x-1}\cdot\frac{\ln x-1}{x-e}\right)$ Θέτουμε $\ln x = u$. Όταν $x \to e$ τότε $u \to 1$ οπότε έχουμε: $\lim\limits_{x\to e}\frac{f(\ln x)-1}{\ln x-1} = \lim\limits_{u\to 1}\frac{f(u)-f(1)}{u-1} = f'(1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x,\ x > 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$. Είναι

$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{g(x)-g(e)}{x-e}=g'(e)=\dfrac{1}{e}$

Οπότε: $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(\ln x)-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\left(\dfrac{f(\ln x)-1}{\ln x-1}\cdot\dfrac{\ln x-1}{x-e}\right)=f'(1)\dfrac{1}{e}=\dfrac{f'(1)}{e}$

στ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[1,2]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=2-1=1=\lambda_\delta$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο $x=\xi$ είναι παράλληλη στη δ.

ζ) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$ και $\left[\dfrac{3}{2},2\right]$, οπότε υπάρχουν $x_1,\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$, $x_2\in\left(\dfrac{3}{2},2\right)$

τέτοια, ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f\left(\frac{3}{2}\right)-f(1)}{\frac{3}{2}-1}=\dfrac{f\left(\frac{3}{2}\right)-1}{\frac{1}{2}}=2\left(f\left(\dfrac{3}{2}\right)-1\right)$ και

$f'(x_2)=\dfrac{f(2)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{2-\frac{3}{2}}=\dfrac{2-f\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=2\left(2-f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$. Είναι

$f'(x_1)+f'(x_2)=2\left(f\left(\dfrac{3}{2}\right)-1\right)+2\left(2-f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)=2\left(\cancel{f\left(\dfrac{3}{2}\right)}-1+2-\cancel{f\left(\dfrac{3}{2}\right)}\right)=2$.

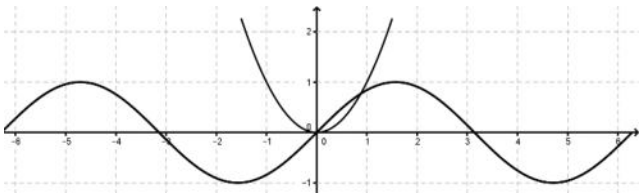
α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-2x$ και $f''(x)=-\eta\mu x-2$. Επομένως η f είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$.

Όμως $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi^2}{36}=\dfrac{18-\pi^2}{36}>0$ και $f(1)=\eta\mu 1-1<0$ αφού $\eta\mu x\le 1$ για κάθε $x\in[0,\pi]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=\pi$ στο διάστημα αυτό.

Άρα $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)f(1)<0$ επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1\in\left(\dfrac{\pi}{6},1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζες το 0 και το x_1 . Επίσης είναι $f(0)=0$.

Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει κι άλλη ρίζα $\rho\in\mathbb{R}-\{0,x_1\}$ με $0<x_1<\rho$.

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,x_1],[x_1,\rho]$, παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0,x_1),(x_1,\rho)$, $f(0)=f(x_1)=f(\rho)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος άρα υπάρχουν $x_2,x_3\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x_2)=f'(x_3)$.
Η f' είναι συνεχής στο $[x_2,x_3]$, παραγωγίσιμη στο (x_2,x_3), οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $x_4\in(x_2,x_3)\subseteq\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f''(x_4)=0$ πράγμα άτοπο γιατί $f''(x)=-\eta\mu x-2<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $-1\le-\eta\mu x\le1\Leftrightarrow-3\le-\eta\mu x-2\le-1$.
Γεωμετρικά θα χαράξουμε τις $y=\eta\mu x$ και $y=x^2$ και παρατηρούμε ότι έχουν μία ρίζα το μηδέν και άλλη μία ρίζα στο (0,1).



β) Έστω ότι η f' δεν είναι 1-1 τότε θα υπάρχουν $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ με $\kappa<\lambda$ και $f'(\kappa)=f'(\lambda)$ άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_4\in(\kappa,\lambda)$ τέτοιο ώστε $f''(x_4)=0$ πράγμα άτοπο όπως δείξαμε παραπάνω.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\nu f(\alpha)x^5+(\nu-1)f(\beta)x^2}{\nu x^4+x}=L$. Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδικές ρίζες τις 0 και $x_1<1$.
Άρα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),(0,x_1)$ και $(x_1,+\infty)$ θα διατηρεί πρόσημο.Είναι $f(-\pi)=-\pi^2<0$ άρα στο $(-\infty,0)$ είναι $f(x)<0$ οπότε $f(\alpha)<0$. Είναι $f(\pi)=-\pi^2<0$ άρα στο $(x_1,+\infty)$ είναι $f(x)<0$ άρα $f(\beta)<0$. Αν $\nu=0$ τότε $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-f(\beta)x^{\not2}}{\not x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-f(\beta)x)=-\infty$
Αν $\nu\ne0$ τότε

$$L=\lim_{x\to-\infty}\frac{\nu f(\alpha)x^5+(\nu-1)f(\beta)x^2}{\nu x^4+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\not\nu f(\alpha)x^{\not5}}{\not\nu\not x^{\not4}}=\lim_{x\to-\infty}(f(\alpha)x)=+\infty$$

δ) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,x^2]$ με $x>1$ οπότε υπάρχει $\xi_1\in(x,x^2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}=\frac{\eta\mu x^2-x^4-\eta\mu x+x}{x^2-x}=\frac{\eta\mu x^2-\eta\mu x}{x^2-x}-\frac{x^4-x}{x^2-x}=$$

$$=\frac{\eta\mu x^2-\eta\mu x}{x^2-x}-\frac{\cancel{x}(x^3-1)}{\cancel{x}(x-1)}=\frac{\eta\mu x^2-\eta\mu x}{x^2-x}-\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}}=$$

$\frac{\eta\mu x^2-\eta\mu x}{x^2-x}-x^2-x-1$ (1). Έστω η συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την g στο $[x,x^2]$ με $x>1$ οπότε υπάρχει $\xi_2\in(x,x^2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_2)=\frac{g(x^2)-g(x)}{x^2-x}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi_2=\frac{\eta\mu x^2-\eta\mu x}{x^2-x}$ (2)

Από (1),(2) προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(x,x^2)$ με $x>1$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\sigma\upsilon\nu\xi_2-x^2-x-1$.

Από (1),(2) προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(x,x^2)$ με $x>1$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\sigma\upsilon\nu\xi_2-x^2-x-1$.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

24283.α) Σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,2)$, $(2,5]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Στο $x_0=2$ είναι $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(x^2-3)=1=f(2)$, $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(x-1)=1$. Επειδή $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=f(2)$, η f είναι συνεχής στο $x_0=2$, οπότε η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2-3-1}{x-2}=$

$\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$ και

$\lim\limits_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x-1-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x-2}{x-2}=1$. Επειδή

$\lim\limits_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=2$.

γ) Επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=2$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,5)$. Η f είναι συνεχής στο $[-1,5]$.

29150.α) i. Η ταχύτητα του κινητού είναι

$\upsilon(t)=x'(t)=(t-1)^2+2(t-2)(t-1)=(t-1)(t-1+2t-4)\Leftrightarrow$

$\upsilon(t)=(t-1)(3t-5)$. Είναι $\upsilon(t)=0\Leftrightarrow(t-1)(3t-5)=0\Leftrightarrow(t=1)$ ή

$\left(3t-5=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{3}\right)$.

t	0	1	5/3	3
$x'(t)$	+	0	-	0 +

ii. Το κινητό κινήθηκε δεξιά τα χρονικά διαστήματα $[0,1)$, $\left(\frac{5}{3},3\right]$ και αριστερά στο χρονικό διάστημα $\left(1,\frac{5}{3}\right)$.

β) Στο χρονικό διάστημα από t=0 έως t=1sec το κινητό διανύει διάστημα

$S_1=|x(1)-x(0)|=\left|0-(0-2)(0-1)^2\right|=2\,\text{m}.$

Στο χρονικό διάστημα από t=1 έως t=5/3 sec το κινητό διανύει διάστημα

$S_2=\left|x\left(\frac{5}{3}\right)-x(1)\right|=\left|\left(\frac{5}{3}-2\right)\left(\frac{5}{3}-1\right)^2-0\right|=\left|\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{9}\right|=\frac{4}{27}\,\text{m}.$

Στο χρονικό διάστημα από t=5/3 έως t=3 sec το κινητό διανύει διάστημα

$S_3=\left|x(3)-x\left(\frac{5}{3}\right)\right|=\left|(3-2)(3-1)^2-\left(\frac{5}{3}-2\right)\left(\frac{5}{3}-1\right)^2\right|=\left|4+\frac{4}{27}\right|=\frac{112}{27}\,\text{m}$.

Το συνολικό διάστημα που διανύει το κινητό είναι

$S=S_1+S_2+S_3=2+\frac{4}{27}+\frac{112}{27}=\frac{170}{27}\,\text{m}$.

γ) Η μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα $\left[1,\frac{5}{3}\right]$ είναι

$\overline{\upsilon}=\frac{x\left(\frac{5}{3}\right)-x(1)}{\frac{5}{3}-1}=\frac{-\frac{4}{27}}{\frac{2}{3}}=-\frac{2}{9}$. Για τη συνάρτηση x ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $\left[1,\frac{5}{3}\right]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία χρονική στιγμή $t_1\in\left(1,\frac{5}{3}\right)$ τέτοια, ώστε $x'(t_1)=\frac{x\left(\frac{5}{3}\right)-x(1)}{\frac{5}{3}-1}=-\frac{2}{9}\Leftrightarrow x'(t_1)=\overline{\upsilon}$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Για την συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[0,x], x>0$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x): f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$, είναι $f'(\xi)\geq 1$ δηλαδή $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\geq 1\Leftrightarrow f(x)\geq x+f(0)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+f(0))=+\infty$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. **Σωστή απάντηση Γ.**

2. Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[1,2]$, άρα θα υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1)$ (1). Στη σχέση $2f'(x)\geq f^2(1)+f^2(2)+2$ για $x=\xi$ έχουμε

$$2f'(\xi)\geq f^2(1)+f^2(2)+2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}2(f(2)-f(1))\geq f^2(1)+f^2(2)+2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2f(2)-2f(1)\geq f^2(1)+f^2(2)+2\Leftrightarrow f^2(1)+2f(1)+1+f^2(2)-2f(2)+1\leq 0$$
$$\Leftrightarrow (f(1)+1)^2+(f(2)-1)^2\leq 0 \text{ όμως } (f(1)+1)^2+(f(2)-1)^2\geq 0 \text{ άρα}$$
$$(f(1)+1)^2+(f(2)-1)^2=0\Rightarrow\begin{cases}f(1)+1=0\Leftrightarrow f(1)=-1\\ f(2)-1=0\Leftrightarrow f(2)=1\end{cases}$$

Σωστή απάντηση Δ.

3. Για $x>2$ η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $\left[x,x+2\sqrt{x}\right]$, άρα θα υπάρχει $\xi\in\left(x,x+2\sqrt{x}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f\left(x+2\sqrt{x}\right)-f(x)}{2\sqrt{x}}$ (1). Όμως

$$|f'(\xi)|\leq\frac{1}{x}\overset{(1)}{\Rightarrow}\left|\frac{f\left(x+2\sqrt{x}\right)-f(x)}{2\sqrt{x}}\right|\leq\frac{1}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x}\leq\frac{f\left(x+2\sqrt{x}\right)-f(x)}{2\sqrt{x}}\leq\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\leq f\left(x+2\sqrt{x}\right)-f(x)\leq\dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x+2\sqrt{x}\right)-f(x)\right]=0$. **Σωστή απάντηση Α.**

4. Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha,\beta]$, άρα

υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \dfrac{2\alpha-2\beta}{\beta-\alpha} = \dfrac{2(\alpha-\beta)}{\beta-\alpha} = -2$.

Οποτε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ θα έχει συντελεστή -2 και θα είναι παράλληλη με μια ευθεία που έχει συντελεστή -2 ή κάθετη με μια ευθεία που θα έχει συντελεστή $\dfrac{1}{2}$. Η ευθεία $x-2y+5=0$ έχει συντελεστή $\dfrac{1}{2}$

Σωστή απάντηση Γ.

5. Για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[x-1,x]$ και $[x,x+1]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. με $x \geq 1$, άρα θα υπάρχουν $\xi_1 \in (x-1,x)$ και $\xi_2 \in (x,x+1)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = f(x)-f(x-1)$ και $f'(\xi_2) = f(x+1)-f(x)$

Είναι $x-1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x+1$ και αφού η f' γνησίως φθίνουσα τότε

$f'(\xi_1) > f'(x) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x) < f'(x) < f(x)-f(x-1)$ (1)

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1924$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x-1) \overset{x-1=\omega}{=} \lim\limits_{\omega\to+\infty} f(\omega) = 1924$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) \overset{x+1=y}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} f(y) = 1924$. Οποτε από το κριτήριο παρεμβολής στη σχέση (1)προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. **Σωστή απάντηση Γ.**

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Σ	**2.** Σ	**3.** Σ	**4.** Σ	**5.** Λ	**6.** Λ	**7.** Σ	**8.** Λ	**9.** Σ	**10.** Σ
11. Σ									

Κριτήριο αξιολόγησης στις παραγώγους. Ύλη: Μέχρι Θ.Μ.Τ.

Θέμα Α

Α1. Θεωρία

Α2. α) Λ

β) Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $g(x)=x$ και $f(x)=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x}, x\geq 0$,

τότε έχουμε: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με τύπο $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ όμως

δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty .$$

Α3.Λ Λ Σ Σ Σ

Θέμα Β

Β1. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(0,1)$ έχει εξίσωση :

$y-f(0)=f'(0)\cdot x \Leftrightarrow y-1=x \Leftrightarrow y=x+1$. Βρίσκουμε τα σημεία για τα οποία

$g'(x)=1 \Leftrightarrow -2x-1=1 \Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1$.Το σημείο

$(-1,g(-1))\equiv(-1,0)\in$ (ε) αφού οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν

($0=-1+1$).Η εφαπτομένη της g στο -1 και η (ε) είναι παράλληλες με κοινό σημείο άρα ταυτίζονται.

Β2. Για την f ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha,\beta]$ άρα υπάρχει

$\xi\in(\alpha,\beta)$,τέτοιος ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow e^{\xi}=\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}$. Έχουμε

$$\alpha<\xi<\beta \overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow} e^{\alpha}<e^{\xi}<e^{\beta}\Leftrightarrow e^{\alpha}<\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}<e^{\beta}.$$

Β3.α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa(x)=f(x)-g(x)-1$. Η κ είναι συνεχής στο $[-2,-1]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$k(-2)=f(-2)-g(-2)-1=\frac{1}{e^2}+2-1=\frac{1}{e^2}+1>0$$

$k(-1)=f(-1)-g(-1)-1=\dfrac{1}{e}-0-1=\dfrac{1}{e}-1<0$. Άρα $\kappa(-2)\cdot\kappa(-1)<0$,οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα x_1 της εξίσωσης $\kappa(x)=0$ στο $(-2,-1)$.

β) Είναι $k(x_1)=0$, $k(0)=f(0)-g(0)-1=1-0-1=0$. Η συνάρτηση κ είναι συνεχής στο $[x_1,0]$, παραγωγίσιμη στο $(x_1,0)$ με τύπο $k'(x)=f'(x)-g'(x)$. Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle δηλαδή υπάρχει

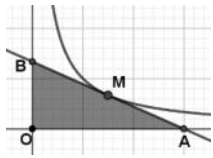
$\rho \in (x_1, 0) \subseteq (-2, 0)$ τέτοιο ώστε $k'(\rho) = 0 \Leftrightarrow f'(\rho) - g'(\rho) = 0 \Leftrightarrow f'(\rho) = g'(\rho)$.Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των παραγώγων των συναρτήσεων f και g τέμνονται σ' ένα τουλάχιστον σημείο.

Θέμα Γ

Γ1. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M\left(\xi, \frac{1}{\xi}\right)$ έχει εξίσωση :

$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow$

$y - \frac{1}{\xi} = -\frac{1}{\xi^2}(x - \xi) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\xi^2}x + \frac{2}{\xi}$.Για $y = 0$ έχουμε:



$0 = -\frac{1}{\xi^2} \cdot x + \frac{2}{\xi} \Leftrightarrow 0 = -x + 2\xi \Leftrightarrow x = 2\xi$ άρα το σημείο Α έχει συντεταγμένες $(2\xi, 0)$. Για $x = 0$ έχουμε: $y = \frac{2}{\xi}$ άρα το σημείο Β έχει συντεταγμένες $\left(0, \frac{2}{\xi}\right)$. Το μέσο του ΑΒ έχει συντεταγμένες

$$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\xi + 0}{2} \\ y = \frac{0 + \frac{2}{\xi}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\xi}{2} \\ y = \frac{\frac{2}{\xi}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \xi \\ y = \frac{1}{\xi} \end{cases}$$ οπότε ταυτίζεται με το Μ.

Γ2. Το τρίγωνο ΟΑΒ έχει εμβαδόν $(OAB) = \frac{1}{2}|2\xi|\left|\frac{2}{\xi}\right| = \frac{4}{2}\left|\xi\frac{1}{\xi}\right| = 2 \cdot 1 = 2$.

Γ3. $(AB) = \sqrt{17} \Leftrightarrow \sqrt{4\xi^2 + \frac{4}{\xi^2}} = \sqrt{17} \Leftrightarrow \sqrt{4\xi^2 + \frac{4}{\xi^2}}^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 \Leftrightarrow$

$4\xi^2 + \frac{4}{\xi^2} = 17 \Leftrightarrow 4\xi^4 + 4 = 17\xi^2 \Leftrightarrow 4\xi^4 - 17\xi^2 + 4 = 0$. Θέτουμε $\xi^2 = \omega < 1$ οπότε έχουμε την εξίσωση $4\omega^2 - 17\omega + 4 = 0$ με ρίζες $\omega = 4$,η οποία απορρίπτεται και $\omega = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \xi^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{2}$. Αν $d(\xi)$ η απόσταση του Μ από την αρχή των αξόνων, τότε :

$$d(\xi) = \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\xi^2}} \Rightarrow d'(\xi) = \frac{2\xi - \frac{2}{\xi^3}}{2\sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\xi^2}}} \Leftrightarrow d'(\xi) = \frac{\xi - \frac{1}{\xi^3}}{\sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\xi^2}}} .$$

Επομένως $d'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}-8}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+4}}=\frac{-\frac{15}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+4}}=-\frac{\frac{15}{2}}{\sqrt{\frac{17}{4}}}=-\frac{\frac{15}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{17}}{\cancel{2}}}=-\frac{15\sqrt{17}}{17}$.

Γ4. Έστω ζ η κοινή εφαπτομένη των συναρτήσεων f και g και $\Gamma\left(x_1,f\left(x_1\right)\right),\Delta\left(x_2,g\left(x_2\right)\right)$ τα αντίστοιχα σημεία επαφής . Η εξίσωση εφαπτομένης της ζ για τα σημεία Γ και Δ είναι αντίστοιχα:

$y-f\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right)\left(x-x_1\right)\Leftrightarrow y=f'\left(x_1\right)\cdot x+f\left(x_1\right)-x_1f'\left(x_1\right)\Leftrightarrow$

$y=-\frac{1}{x_1^2}\cdot x+\frac{1}{x_1}-\cancel{x_1}\cdot\left(-\frac{1}{x_1^{\cancel{2}}}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{x_1^2}\cdot x+\frac{2}{x_1}$.

$y-g\left(x_2\right)=g'\left(x_2\right)\left(x-x_2\right)\Leftrightarrow y=g'\left(x_2\right)\cdot x+g\left(x_2\right)-x_2g'\left(x_2\right)\Leftrightarrow$

$y=\left(2x_2-3\right)\cdot x+x_2^2-3x_2+3-x_2\left(2x_2-3\right)\Leftrightarrow y=\left(2x_2-3\right)\cdot x-x_2^2+3.$

Επειδή οι εξισώσεις αφορούν την ίδια ευθεία έχουμε: $\frac{2}{x_1}=-x_2^2+3\Leftrightarrow$

$\frac{-x_2^2+3}{2}=\frac{1}{x_1}$ (1) και $-\frac{1}{x_1^2}=2x_2-3\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x_1}\right)^2=-2x_2+3\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\left(\frac{-x_2^2+3}{2}\right)^2=-2x_2+3\Leftrightarrow\frac{x_2^4-6x_2^2+9}{4}=-2x_2+3\Leftrightarrow$

$x_2^4-6x_2^2+9=-8x_2+12\Leftrightarrow x_2^4-6x_2^2+8x_2-3=0.$

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ,βρίσκουμε ότι η εξίσωση έχει ρίζες το1 (τριπλή) και το -3 , η οποία απορρίπτεται αφού $x_2>0$. Άρα η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση $y=-x+2$.

Θέμα Δ

Δ1. α) Έστω ότι η δεν αντιστρέφεται .Τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}\ \ (x_1<x_2)$ με $f'\left(x_1\right)=f'\left(x_2\right)$. Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\left[x_1,x_2\right]$ αφού είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, επίσης είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x_1,x_2\right)$ για τον ίδιο λόγο. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle δηλαδή υπάρχει $x_0\in\left(x_1,x_2\right)$,τέτοιο ώστε $f''\left(x_0\right)=0$ άτοπο .Επομένως η f' δεν είναι 1-1.

Δ2. Από τη σχέση (1) έχουμε για $x=0$ ότι: $g^3\left(0\right)+g\left(0\right)=2\Leftrightarrow$

$g^3\left(0\right)+g\left(0\right)-2=0\Leftrightarrow g^3\left(0\right)-1+g\left(0\right)-1=0\Leftrightarrow$

$\left[g\left(0\right)-1\right]\cdot\left[g^2\left(0\right)+g\left(0\right)+1\right]+g\left(0\right)-1=0\Leftrightarrow$

$\left(g(0)-1\right)\left[\underbrace{g^2(0)+g(0)+2}_{\neq 0}\right]=0 \Leftrightarrow g(0)-1=0 \Leftrightarrow g(0)=1$. Γνωρίζουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη ,οπότε από τη σχέση (1) έχουμε με παραγώγιση

$3g^2(x)g'(x)+g'(x)=3 \Leftrightarrow g'(x)\left[\underbrace{3g^2(x)+1}_{\neq 0}\right]=3 \Leftrightarrow g'(x)=\frac{3}{3g^2(x)+1}$. Για $x=0$ έχουμε $g'(0)=\frac{3}{3g^2(0)+1}=\frac{3}{4}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης που ζητάμε είναι : $y-g(0)=g'(0)x \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+1$.

Δ3.α) Τα σημεία Α και Β ανήκουν στη (δ) οπότε $f(x_1)=\frac{3}{4}x_1+1$ και $f(x_2)=\frac{3}{4}x_2+1$. Για την f ισχύει το ΘΜΤ στο $[x_1,x_2]$ άρα υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{3}{4}x_2+1-\frac{3}{4}x_1-1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{3}{4}(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{3}{4}$.

Έστω ότι η εξίσωση $f'(x)=\frac{3}{4}$ έχει και δεύτερη λύση $\xi_1<\xi$,τότε $f'(\xi)=f'(\xi_1)$. Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[\xi,\xi_1]$ αφού είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, επίσης είναι παραγωγίσιμη στο (ξ,ξ_1) για τον ίδιο λόγο. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle δηλαδή υπάρχει $\xi_0 \in (\xi,\xi_1)$,τέτοιο ώστε $f''(\xi_0)=0$ άτοπο .Όμοια αν $\xi_1>\xi$.

β) Έστω ότι η ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε τρία σημεία $A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(x_2)),\Gamma(x_3,f(x_3))$ με $x_1<x_2<x_3$,τότε $f(x_3)=\frac{3}{4}x_3+1$. Για την f ισχύει το ΘΜΤ στο $[x_2,x_3]$ άρα υπάρχει $\xi_2 \in (x_2,x_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\frac{\frac{3}{4}x_3+1-\frac{3}{4}x_2-1}{x_3-x_2}=\frac{\frac{3}{4}(x_3-x_2)}{x_3-x_2}=\frac{3}{4}$.

Αποδείξαμε ότι η εξίσωση $f'(x)=\frac{3}{4}$ έχει δύο λύσεις άτοπο από το α).

Δ4.α)Έστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$ $(1) \Leftrightarrow g^3(x_1)=g^3(x_2)(2)$. Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε :

$g^3(x_1)+g(x_1)=g^3(x_2)+g(x_2) \Leftrightarrow 3x_1+\not{2}=3x_2+\not{2} \Leftrightarrow 3x_1=3x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$.

Άρα η g είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

β) Θέτουμε $g(x)=y$ στην (1) και έχουμε $y^3+y=3x+2 \Leftrightarrow 3x=y^3+y-2 \Leftrightarrow$

$x=\dfrac{y^3+y-2}{3} \Leftrightarrow g^{-1}(y)=\dfrac{y^3+y-2}{3}$. Άρα $g^{-1}(x)=\dfrac{x^3+x-2}{3}, x\in\mathbb{R}$.

$f'\left(g\left(e^{g(x)-1}+(g(x)-1)^{2019}+g^{-1}(x)\right)\right)=f'\left(g\left(g(0)+\dfrac{x^3+x-2}{3}\right)\right) \overset{f'1-1}{\Leftrightarrow}$

$e^{g(x)-1}+(g(x)-1)^{2019}+\cancel{g^{-1}(x)}=1+\cancel{g^{-1}(x)} \Leftrightarrow e^{g(x)-1}+(g(x)-1)^{2019}-1=0$ (*).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x+x-1$,η οποία αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1. Με τη βοήθεια της συνάρτησης h η σχέση (*) γίνεται : $h(g(x)-1)=0 \Leftrightarrow h(g(x)-1)=h(0) \overset{h\ 1-1}{\Leftrightarrow} g(x)-1=0 \Leftrightarrow g(x)=1 \Leftrightarrow$

$g(x)=g(0) \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=0$.

26 Συνέπειες Θ.Μ.Τ. – Σταθερή συνάρτηση

20. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο
$f'(x)=6\eta\mu^5x\sigma\upsilon\nu x-6\sigma\upsilon\nu^5x\eta\mu x+6\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^3x-6\eta\mu^3x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$
$f'(x)=6\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\left[\left(\eta\mu^4x-\sigma\upsilon\nu^4x\right)+\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x\right]$
$f'(x)=6\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\left[\left(\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x\right)\cancel{\left(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x\right)}^{1}+\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x\right]\Leftrightarrow$
$f'(x)=6\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x\right)=0\Leftrightarrow f(x)=c, c\in\mathbb{R}$. Είναι
$f(0)=1$, άρα c =1, οπότε $f(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$.
Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο
$g'(x)=8\eta\mu^3x\sigma\upsilon\nu x-4\sigma\upsilon\nu^3x\eta\mu x+6\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^3x-6\eta\mu^3x\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$
$g'(x)=2\eta\mu^3x\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^3x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$
$g'(x)=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x-1\right)=0\Leftrightarrow g(x)=c, c\in\mathbb{R}$.
Είναι $g(0)=1$, άρα c =1, οπότε $g(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$.

21.α) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο
$h'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)=2f'(x)\cancel{\left(f(x)+f''(x)\right)}^{0}=0\Leftrightarrow$
$h(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$.
β) Είναι $h(1)=0$, άρα $h(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

22. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο
$h'(x)=3f^2(x)f'(x)+3g^2(x)g'(x)=-3f^2(x)g^2(x)+3g^2(x)f^2(x)=0$
$\Leftrightarrow h(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$.

23. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=3f(x)$ οπότε
$f'(-x)=3f(-x)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο
$g'(x)=f'(x)f(-x)-f(x)f'(-x)=3f(x)f(-x)-3f(x)f(-x)=0$
$\Leftrightarrow g(x)=c, c\in\mathbb{R}$. Είναι $g(0)=1$, άρα $g(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

24. Είναι $f(x)=xf'(x)+2$ (1). Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη έχουμε :
$f'(x)=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow xf''(x)=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow} f''(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=c, c\in\mathbb{R}$.

25.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$g'(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}-2x=\frac{2x\cancel{f^2(x)}}{\cancel{f^2(x)}}-2x\Leftrightarrow g'(x)=2x-2x=0\Leftrightarrow g(x)=c,c\in\mathbb{R}$$

β) Είναι $g(0)=\frac{1}{f(0)}=1=c$, άρα

$$g(x)=1\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}-x^2=1\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}=x^2+1\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\eta\mu 2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\eta\mu 2x\right)=0$. Για κάθε $x>0$ είναι:

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\eta\mu 2x\right|=\frac{x}{x^2+1}|\eta\mu 2x|\le\frac{x}{x^2+1}\Leftrightarrow-\frac{x}{x^2+1}\le\frac{x}{x^2+1}\eta\mu 2x\le\frac{x}{x^2+1},$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x^2}}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{x^2+1}\right)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\eta\mu 2x\right)=0$.

26.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-e^x=\frac{\cancel{x^2}e^x}{\cancel{x^2}}-e^x\Leftrightarrow$$

$$g'(x)=e^x-e^x=0\Leftrightarrow g(x)=c,c\in\mathbb{R}$$

β) Θέτουμε $\frac{f(x)-e-1}{x^2-1}=h(x),x\ne\pm1\Leftrightarrow f(x)=(x^2-1)h(x)+e+1$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα και στο 1 οπότε

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left((x^2-1)h(x)+e+1\right)=e+1\ .$$

Επομένως $g(1)=f(1)-e=\cancel{e}+1-\cancel{e}\Leftrightarrow g(1)=1=c$ οπότε

$$g(x)=1\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}-e^x=1\Leftrightarrow f(x)-xe^x=x\Leftrightarrow f(x)=xe^x+x.$$

γ) Έστω $t(x)=xe^x+x-2$, $x\in[0,1]$. Είναι $t(0)=-2<0$, $t(1)=e-1>0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $t(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

Έστω ότι η $t(x)=0$ έχει 2 ρίζες $\rho_1,\rho_2\in(0,1)$ με $\rho_1<\rho_2$.

Η t είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$,παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με παράγωγο

$t'(x)=e^x+xe^x+1$, $t(\rho_1)=t(\rho_2)=0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)\subseteq(0,1)$ τέτοιο, ώστε $t'(\xi)=0\Leftrightarrow \xi+\xi e^{\xi}+1=0$ που είναι άτοπο, αφού $t'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

27.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$g'(x)=\left(f''(x)-f'(x)\right)e^{-x}-e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)\Leftrightarrow$

$g'(x)=e^{-x}\left(f''(x)-2f'(x)+f(x)\right)\Leftrightarrow g'(x)=e^{-x}\left(2f'(x)-2f'(x)\right)=0\Leftrightarrow$

$g(x)=c, c\in\mathbb{R}$

β) Η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων είναι παράλληλη στην (ε) οπότε $f(0)=0$ και $f'(0)=2$.

Είναι $g(x)=c\Leftrightarrow f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}-2=c\Leftrightarrow f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=c+2$.

Για $x=0$ είναι $c=0$, άρα

$f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=2\Leftrightarrow\left(f(x)e^{-x}\right)'=(2x)'\Leftrightarrow f(x)e^{-x}=2x+c_1\Leftrightarrow$

$f(x)=2xe^x+c_1e^x, c_1\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $c_1=0$, άρα $f(x)=2xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Αυξημένης δυσκολίας

28. Έστω $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$. Έστω $t(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x), x\in\mathbb{R}$.

Η t είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$t'(x)=f''(x)g(x)+\cancel{f'(x)g'(x)}-\cancel{f'(x)g'(x)}-f(x)g''(x)=0\Leftrightarrow$

$t(x)=c, c\in\mathbb{R}$. Επειδή $t(0)=0$ είναι $t(x)=0\Leftrightarrow f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0$, άρα $h'(x)=0\Leftrightarrow h(x)=k, k\in\mathbb{R}$.

29. Για $y=x_0$ και $x\neq x_0$, έχουμε: $|f(x)-f(x_0)|\le|x-x_0|^2\Leftrightarrow$

$\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\le|x-x_0|\Leftrightarrow -|x-x_0|\le\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le|x-x_0|$. Είναι

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(-|x-x_0|\right)=0=\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, άρα $f'(x_0)=0$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, επομένως

$f(x)=c, c\in\mathbb{R}$.

30. Έστω $f(x)=(\kappa+\lambda-x)^3+(\lambda+x-\kappa)^3+(x+\kappa-\lambda)^3-(x+\kappa+\lambda)^3+24\kappa\lambda x$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x)=-3(\kappa+\lambda-x)^2+3(\lambda+x-\kappa)^2+3(x+\kappa-\lambda)^2-3(x+\kappa+\lambda)^2+24\kappa\lambda(1)\Leftrightarrow$

$f'(x)=-3\left[(\kappa+\lambda-x)^2-(\lambda+x-\kappa)^2-(x+\kappa-\lambda)^2+(x+\kappa+\lambda)^2-8\kappa\lambda\right]\Leftrightarrow$

$f'(x)=-3\left[4\lambda(k-x)+4\lambda(k+x)-8\kappa\lambda\right]\Leftrightarrow$

$f'(x)=-3\left(4\lambda k-\cancel{4\lambda x}+4\lambda k+\cancel{4\lambda x}-8k\lambda\right)\Leftrightarrow$

$f'(x)=-3(8k\lambda-8k\lambda)\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=c, c\in\mathbb{R}$.. από την (1) για $x=0$

είναι $f'(x)=-3(\kappa+\lambda)^2+3(\lambda-\kappa)^2+3(\kappa-\lambda)^2-3(\kappa+\lambda)^2+24\kappa\lambda\Leftrightarrow$

$f'(x)=-6\left[(\kappa+\lambda)^2-(\kappa-\lambda)^2-4\kappa\lambda\right]\Leftrightarrow$

$f'(x)=-6\left(\cancel{\kappa^2}+2\kappa\lambda+\cancel{\lambda^2}-\cancel{\kappa^2}+2\kappa\lambda-\cancel{\lambda^2}-4\kappa\lambda\right)\Leftrightarrow$

$f'(x)=-6(4\kappa\lambda-4\kappa\lambda)\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=c_2, c_2\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ είναι $f(0)=\cancel{(\kappa+\lambda)^3}+(\lambda-\kappa)^3+(\kappa-\lambda)^3-\cancel{(\kappa+\lambda)^3}\Leftrightarrow$

$f(0)=(\lambda-\kappa)^3-(\lambda-\kappa)^3\Leftrightarrow f(0)=0=c_2$ οπότε

$f(x)=0\Leftrightarrow(\kappa+\lambda-x)^3+(\lambda+x-\kappa)^3+(x+\kappa-\lambda)^3=(x+\kappa+\lambda)^3-24\kappa\lambda x$

31. Έστω ότι $f''(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε, $f'(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$. Επειδή $f'(\alpha)=0$ είναι $c=0$ οπότε $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε, $f(x)=c_1$, $c_1\in\mathbb{R}$. Όμως $f(\alpha)=0$, άρα $c_1=0$ επομένως $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ που είναι άτοπο. Άρα υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi)\neq 0$.

32.α) Έστω $g(x)=\left[f^2(x)+(f'(x))^2\right]e^{-x}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=\left[2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)\right]e^{-x}-\left[f^2(x)+(f'(x))^2\right]e^{-x}\Leftrightarrow$

$g'(x)=\left[2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)-f^2(x)-(f'(x))^2\right]e^{-x}=$

$\left[2f'(x)f''(x)-(f(x)-f'(x))^2\right]e^{-x}=0$ άρα

$g(x)=c, c\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f^2(x)+\left[f'(x)\right]^2=ce^x$.

β) Για $x=0$ είναι $c=0$, άρα $f^2(x)+\left[f'(x)\right]^2=0 \Leftrightarrow f(x)=f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

33. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\left(x^2+1\right)-x^3=0$

Έστω $g(x)=f(x)\left(x^2+1\right)-x^3,\ x\in\mathbb{R}$. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)\left(x^2+1\right)+f(x)\cdot 2x-3x^2$ και δεύτερη παράγωγο

$g''(x)=f''(x)\left(x^2+1\right)+4xf'(x)+2f(x)-6x=6x-6x=0 \Leftrightarrow$

$g'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$. Η ευθεία (ε) $y=x-\frac{1}{2}$ είναι εφαπτομένη της C_f οπότε

$f(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ και $f'(1)=1$.Επομένως οπότε $g'(1)=2f'(1)+2f(1)-3 \Leftrightarrow$

$g'(1)=0 \Leftrightarrow c=0$ άρα $g'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=c_1, c_1\in\mathbb{R}$.

Είναι $g(1)=0 \Leftrightarrow c_1=0$ άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)=0 \Leftrightarrow$

$f(x)\left(x^2+1\right)-x^3=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$.

34.α) Έστω $g(x)=xf(x)-e^x+1+x,\ x\in\mathbb{R}$. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=f(x)+xf'(x)-e^x+1$ και δεύτερη παράγωγο

$g''(x)=f'(x)+f'(x)+xf''(x)-e^x=2f'(x)+xf''(x)-e^x=e^x-e^x=0 \Leftrightarrow$

$g'(x)=c, c\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(1)=f(1)+f'(1)-e+1=0 \Leftrightarrow c=0 \Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow$.

$g(x)=c_1, c_1\in\mathbb{R}$. Είναι $g(1)=f(1)-e+1+1=0 \Leftrightarrow c_1=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow$

$xf(x)-e^x+1+x=0 \Leftrightarrow xf(x)=e^x-1-x$ οπότε για $x\neq 0$ είναι

$f(x)=\frac{e^x-1-x}{x}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

άρα και στο $x=0$ οπότε $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x}\overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{1}=0$

επομένως $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1-x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

β) Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1-x}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\underset{\text{DLH}}{\lim\limits_{x\to 0}}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$.

γ) Για $x\neq 0$ είναι $f'(x)=\dfrac{(e^x-1)\cdot x-e^x+1+x}{x}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$.

Επίσης $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}-\dfrac{1}{2}}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x(x-1)+2-x^2}{2x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x(x-1)+2e^x-2x}{6x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^xx-x)}{6x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cancel{x}(e^x-1)}{6x^{\cancel{2}}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x}{6}=\dfrac{1}{3}$

35. Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}-\ln x,\ x>0$. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{xf'(x)-f(x)-x}{x^2}$ και δεύτερη παράγωγο

$g''(x)=\dfrac{\left(\cancel{f'(x)}+xf''(x)-\cancel{f'(x)}-1\right)x^{\cancel{2}}-(xf'(x)-f(x)-x)2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}^3}}\Leftrightarrow$

$g''(x)=\dfrac{x^2f''(x)-x-2xf'(x)+2f(x)+2x}{x^3}\Leftrightarrow$

$g''(x)=\dfrac{x^2f''(x)-2xf'(x)+2f(x)+x}{x^3}=\dfrac{-x+x}{x^3}=0\Leftrightarrow g'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}.$

Όμως $g'(1)=\dfrac{f'(1)-f(1)-1}{1}=0\Leftrightarrow c=0$ οπότε $g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=c_1,c_1\in\mathbb{R}$. Είναι $g(1)=f(1)=0\Leftrightarrow c_1=0$ οπότε $g(x)=0\Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x)}{x}-\ln x=0\Leftrightarrow f(x)=x\ln x,\ x>0$.

36.α) Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x)=2f(x)f'(x)+f'(x)f''(x)=$ $2f(x)f'(x)-2f(x)f'(x)=0$ άρα η g είναι σταθερή συνάρτηση.

Είναι $g(0)=\left[f(0)\right]^2+\dfrac{\left[f'(0)\right]^2}{2}=1+\dfrac{4}{2}=3$ άρα $g(x)=3$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Έστω ότι υπάρχει κι άλλη συνάρτηση h η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες της f. Αρκεί να δείξουμε ότι $f = h$. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - h(x)$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $\varphi'(x) = f'(x) - h'(x)$ και δεύτερη παράγωγο

$\varphi''(x) = f''(x) - h''(x) = -2f(x) + 2h(x) = = -2\left[f(x) - h(x)\right] = -2\varphi(x)$.

Άρα από το α) ερώτημα αφού η φ ικανοποιεί την ιδιότητα $\varphi''(x) = -2\varphi(x)$

τότε η συνάρτηση $k(x) = \left[\varphi(x)\right]^2 + \frac{\left[\varphi'(x)\right]^2}{2}$ είναι σταθερή.

Είναι $k(0) = \left[\varphi(0)\right]^2 + \frac{\left[\varphi'(0)\right]^2}{2} = \left[f(0) - h(0)\right]^2 + \frac{\left[f'(0) - h'(0)\right]^2}{2} =$

$= [1-1]^2 + \frac{(2-2)^2}{2} = 0$ άρα $k(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\varphi(x)\right]^2 + \frac{\left[\varphi'(x)\right]^2}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\varphi(x) = \varphi'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $f(x) - h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως είναι $f = h$ άρα η συνάρτηση που ικανοποιεί τις ιδιότητες είναι μοναδική.

γ) Αν $f(x) = \eta\mu(2x) + \sigma\upsilon\nu(2x)$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(0) = 1$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu(2x) - 2\eta\mu(2x)$

και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = -2\eta\mu\left(\sqrt{2}x\right) - 2\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{2}x\right) = -2f(x)$.

Είναι $f'(0) = 2$ άρα ικανοποιεί τις υποθέσεις , η f είναι μοναδική από β) ερώτημα άρα $f(x) = \eta\mu(2x) + \sigma\upsilon\nu(2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Εύρεση συνάρτησης από σχέση της μορφής f ΄(x) = h(x)

37.α) $f'(x) = \sigma\upsilon\nu 2x + 2x \Leftrightarrow f'(x) = \left(\eta\mu x + x^2\right)' \Leftrightarrow$

$f(x) = \eta\mu x + x^2 + c, c \in \mathbb{R}$.Είναι $f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$ άρα $f(x) = \eta\mu x + x^2 + 1$

β) $f'(x) = 16x^3 + 6x \Leftrightarrow f'(x) = \left(4x^4 + 3x^2\right)' \Leftrightarrow f(x) = 4x^4 + 3x^2 + c, c \in \mathbb{R}$.

Είναι $f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$ άρα $f(x) = 4x^4 + 3x^2 + 2$.

γ) $f'(x) = \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 3x \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{2}\eta\mu 2x - \frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3x\right)' \Leftrightarrow$

$f(x) = \frac{1}{2}\eta\mu 2x - \frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3x + c, c \in \mathbb{R}$. Είναι $f(0) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{4}{3}$ οπότε

$f(x)=\frac{1}{2}\eta\mu 2x-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3x+\frac{4}{3}$.

δ) $f'(x)=2e^{2x}+x^{\frac{1}{2}}=\left(e^{2x}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)'\Leftrightarrow f(x)=e^{2x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c, c\in\mathbb{R}$. Είναι

$f(1)=e^2\Leftrightarrow c=-\frac{2}{3}$ άρα $f(x)=e^{2x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{3}$.

ε) $f'(x)=\frac{2\ln x}{x}=2\ln x(\ln x)'=\left(\ln^2 x\right)'\Leftrightarrow f(x)=\ln^2 x+c, c\in\mathbb{R}$. Είναι

$f(1)=0\Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)=\ln^2 x$.

στ) $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}=\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}=\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(x^2+1\right)+c, c\in\mathbb{R}$,

Είναι $f(0)=0\Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$.

ζ) $f'(x)=3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x=3\eta\mu^2 x(\eta\mu x)'\left(\eta\mu^3 x\right)'\Leftrightarrow f(x)=\eta\mu^3 x+c, c\in\mathbb{R}$.

Είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\Leftrightarrow c=0$, $f(x)=\eta\mu^3 x$

η) $f'(x)=12\eta\mu^2 4x\sigma\upsilon\nu 4x=3\eta\mu^2 4x(\eta\mu 4x)'=\left(\eta\mu^3 4x\right)'\Leftrightarrow$

$f(x)=\eta\mu^3 4x+c, c\in\mathbb{R}$.Είναι $f(0)=0\Leftrightarrow c=0$ άρα

θ) $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'\Leftrightarrow$

$f(x)=\sqrt{x^2+1}+c, c\in\mathbb{R}$.Είναι $f(1)=1\Leftrightarrow c=1-\sqrt{2}$ οπότε

$f(x)=\sqrt{x^2+1}+1-\sqrt{2}$.

ι) $f'(x)=(2x-3)\left(x^2-3x+4\right)^2=\left(\frac{\left(x^2-3x+4\right)^3}{3}\right)'\Leftrightarrow$

$f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2-3x+4\right)^3+c, c\in\mathbb{R}$.Είναι $f(0)=16\Leftrightarrow c=-\frac{16}{3}$ οπότε,

$f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2-3x+4\right)^3-\frac{16}{3}$.

38.α) $f(x)=\left(e^x\right)'\ln x+e^x(\ln x)'=\left(e^x\ln x\right)'\Leftrightarrow f(x)=e^x\ln x+c, c\in\mathbb{R}$,
Είναι $f(1)=-1\Leftrightarrow c=-1$ οπότε $f(x)=e^x\ln x-1$.

β) $f'(x)=\dfrac{x\left(e^x\right)'-e^x(x)'}{x^2}=\left(\dfrac{e^x}{x}\right)'\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^x}{x}+c$.Είναι $f(1)=e\Leftrightarrow c=0$

οπότε $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

γ) $f'(x)=-\dfrac{(x)'\ln x-x(\ln x)'}{x^2}=\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right)'\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{\ln x}{x}+c, c\in\mathbb{R}$.Είναι

$f(1)=1\Leftrightarrow c=1$ οπότε $f(x)=-\dfrac{\ln x}{x}+1$

δ) $f'(x)=\left(e^x\right)'x+e^x(x)'=\left(xe^x\right)'\Leftrightarrow f(x)=xe^x+c, c\in\mathbb{R}$, $f(1)=e\Leftrightarrow c=0$,
οπότε $f(x)=xe^x$.

ε) $f'(x)=(x)'\eta\mu x+x(\eta\mu x)'=(x\eta\mu x)'\Leftrightarrow f(x)=x\eta\mu x+c, c\in\mathbb{R}$.Είναι
$f(\pi)=0\Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)=x\eta\mu x$.

στ) $f'(x)=e^{-x}(\eta\mu x)'+\eta\mu x\left(e^{-x}\right)'=\left(e^{-x}\eta\mu x\right)'\Leftrightarrow f(x)=e^{-x}\eta\mu x+c, c\in\mathbb{R}$ **.**
Είναι $f(\pi)=0\Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)=e^{-x}\eta\mu x$.

39.α) $f''(x)=6x\Leftrightarrow f'(x)=3x^2+c_1, c_1\in\mathbb{R}$.Είναι $f'(0)=2\Leftrightarrow c_1=2$, άρα
$f'(x)=3x^2+2\Leftrightarrow f(x)=x^3+2x+c_2, c_2\in\mathbb{R}$.Είναι $f(0)=2\Leftrightarrow c_2=2$, άρα
$f(x)=x^3+2x+2$.

β) $f''(x)=12x^2-9\Leftrightarrow f'(x)=4x^3-9x+c_1, c_1\in\mathbb{R}$.Είναι $f'(0)=4\Leftrightarrow c_1=4$

οπότε $f'(x)=4x^3-9x+4=\left(x^4-9\dfrac{x^2}{2}+4x\right)'\Leftrightarrow$

$f(x)=x^4-\dfrac{9}{2}x^2+4x+c_2, c_2\in\mathbb{R}$.Είναι $4f(0)=4\Leftrightarrow f(0)=1\Leftrightarrow$

$c_2=1$, άρα $f(x)=x^4-\dfrac{9}{2}x^2+4x+1$.

γ) $f''(x)=4e^{2x}=\left(2e^{2x}\right)'\Leftrightarrow f'(x)=2e^{2x}+c_1, c_1\in\mathbb{R}$.Είναι $f'(0)=3\Leftrightarrow c_1=1$

οπότε $f'(x)=2e^{2x}+1=\left(e^{2x}+x\right)'\Leftrightarrow f(x)=e^{2x}+x+c_2, c_2\in\mathbb{R}$.Όμως

$f(0)=3 \Leftrightarrow c_2=2$ άρα $f(x)=e^{2x}+x+2$.

δ) $f''(x)=-9\eta\mu 3x=(3\sigma\upsilon\nu 3x)' \Leftrightarrow f'(x)=3\sigma\upsilon\nu 3x+c_1, c_1\in\mathbb{R}$.Είναι

$f'(0)=1 \Leftrightarrow c_1=-2$ άρα $f'(x)=3\sigma\upsilon\nu 3x-2=(\eta\mu 3x-2x)' \Leftrightarrow$

$f(x)=\eta\mu 3x-2x+c_2, c_2\in\mathbb{R}$.Όμως $f(0)=1 \Leftrightarrow c_2=1$ οπότε

$f(x)=\eta\mu 3x-2x+1$

Αυξημένης δυσκολίας

40.α) $f'(4x-3)=2x+5 \Leftrightarrow 4f'(4x-3)=8x+20 \Leftrightarrow$

$(f(4x-3))'=(4x^2+20x)' \Leftrightarrow f(4x-3)=4x^2+20x+c, c\in\mathbb{R}$. Θέτουμε

$4x-3=u \Leftrightarrow x=\dfrac{u+3}{4}$ οπότε έχουμε

$f(u)=4\left(\dfrac{u+3}{4}\right)^2+20\dfrac{u+3}{4}+c=\dfrac{u^2+6u+9}{4}+5u+15+c$, άρα

$f(x)=\dfrac{1}{4}(x^2+6x+9)+5x+15+c, c\in\mathbb{R}$.Είναι $f(-3)=1 \Leftrightarrow c=c=1$, άρα

$f(x)=\dfrac{1}{4}(x^2+6x+9)+5x+16$.

β) $f'(x^2)=3x-9 \Leftrightarrow 2xf'(x^2)=6x^2-18x \Leftrightarrow (f(x^2))'=(2x^3-9x^2)' \Leftrightarrow$

$f(x^2)=2x^3-9x^2+c, c\in\mathbb{R}$. Θέτουμε $x^2=u \Leftrightarrow x=\sqrt{u}$, οπότε έχουμε

$f(u)=2u\sqrt{u}-9u+c$ άρα $f(x)=2x\sqrt{x}-9x+c, c\in\mathbb{R}, x>0$. Είναι

$f(0)=0 \Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)=2x\sqrt{x}-9x$.

γ) $f'(x^3)=4+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4} \Leftrightarrow 3x^2f'(x^3)=12x^2+3\dfrac{1}{x}-3\dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow$

$(f(x^3))'=\left(4x^3+3\ln x+\dfrac{3}{x}\right)' \Leftrightarrow f(x^3)=4x^3+3\ln x+\dfrac{3}{x}+c, c\in\mathbb{R}$. Θέτουμε

$x^3=u \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{u}$, οπότε έχουμε

$f(u)=4u+3\ln u^{\frac{1}{3}}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{u}}+c=4u+\ln u+\dfrac{3}{\sqrt[3]{u}}+c$.Είναι $f(1)=7 \Leftrightarrow c=0$,άρα

$f(x)=4x+\ln x+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$

41. $xf'(\ln x)=xe^x-e^x \Leftrightarrow \frac{1}{x}f'(\ln x)=\frac{x(e^x)'-e^x(x)'}{x^2} \Leftrightarrow (f(\ln x))'=\left(\frac{e^x}{x}\right)'$

$\Leftrightarrow f(\ln x)=\frac{e^x}{x}+c, c\in\mathbb{R}$. Θέτουμε $\ln x=u \Leftrightarrow x=e^u$, οπότε έχουμε

$f(u)=\frac{e^{e^u}}{e^u}+c=e^{e^u-u}+c$, άρα $f(x)=e^{e^x-x}+c$, $x>0$. Για $x=0$ είναι

$f(0)=e+c \Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)=e^{e^x-x}$, $x>0$.

42. Για $x>-2$ είναι : $f'(x^2+4x)=6x^2-5x+3$ (1) $\Leftrightarrow$

$(2x+4)f'(x^2+4x)=12x^3+14x^2-14x+12 \Leftrightarrow$

$(f(x^2+4x))'=\left(3x^4+\frac{14}{3}x^3-7x^2+12x\right)' \Leftrightarrow$

$f(x^2+4x)=3x^4+\frac{14}{3}x^3-7x^2+12x+c, c\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι

$f(0)=c \Leftrightarrow c=0$ αφού η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων οπότε

$f(x^2+4x)=3x^4+\frac{14}{3}x^3-7x^2+12x$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) για $x=1$

είναι $f'(5)=4$ και $f(5)=3+\frac{14}{3}-7+12=\frac{38}{3}$

Η εφαπτομένη στο Α έχει εξίσωση $\varepsilon: y-f(5)=f'(5)(x-5) \Leftrightarrow y=4x-\frac{22}{3}$.

43.α) $f'(x)=\frac{x^2-3x+2}{x+1}=\frac{(x+1)(x-4)+6}{x+1}=x-4+\frac{6}{x+1} \Leftrightarrow$

$f'(x)=\left(\frac{x^2}{2}-4x+6\ln(x+1)\right)' \Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}-4x+6\ln(x+1)+c, c\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(0)=1 \Leftrightarrow c=1$, άρα $f(x)=\frac{x^2}{2}-4x+6\ln(x+1)+1$.

β) $f'(x)=\frac{x^2-5x+6}{x+1}=\frac{(x+1)(x-6)+12}{x+1}=x-6+\frac{12}{x+1} \Leftrightarrow$

$f'(x)=\left(\frac{x^2}{2}-6x+12\ln(x+1)\right)' \Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}-6x+12\ln(x+1)+c, c\in\mathbb{R}$,

Είναι $f(0)=0 \Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)=\frac{x^2}{2}-6x+12\ln(x+1)$

44.Επειδή το πολυώνυμο $f(x)+2$ διαιρείται με το $(x-1)^2$, ισχύει:

$f(x)+2=(x-1)^2 g(x)$ (1), όπου $g(x)$ πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Το $f(x)-2$ πολυώνυμο διαιρείται με το $(x+1)^2$ οπότε ισχύει:

$f(x)-2=(x+1)^2 h(x)$ (2), όπου $h(x)$ πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (1),(2), προκύπτει:

$f'(x)=(x-1)\left[2g(x)+(x-1)g'(x)\right]$ και

$f'(x)=(x+1)\left[2h(x)+(x+1)h'(x)\right]$. Δηλαδή η f' έχει παράγοντες τα $(x-1)$ και $(x+1)$. Επειδή η f είναι πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, η f' είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, οπότε: $f'(x)=(x-1)(x+1)(\alpha x+\beta)$, $\alpha\neq 0$.

Δηλαδή $f'(x)=(x-1)(x+1)(\alpha x+\beta)=\alpha x^3+\beta x^2-\alpha x-\beta \Leftrightarrow$

$f'(x)=\left(\frac{\alpha}{4}x^4+\frac{\beta}{3}x^3-\frac{\alpha}{2}x^2-\beta x\right)' \Leftrightarrow f(x)=\frac{\alpha}{4}x^4+\frac{\beta}{3}x^3-\frac{\alpha}{2}x^2-\beta x+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Επειδή $f(0)=1$ είναι $c=1$ και $f(x)=\frac{\alpha}{4}x^4+\frac{\beta}{3}x^3-\frac{\alpha}{2}x^2-\beta x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

Αν στη σχέση (1) αντικαταστήσουμε $x=1$ και στη σχέση (2) $x=-1$, προκύπτει $f(1)=-2$ και $f(-1)=2$. Όμως $f(1)=\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{3}-\frac{\alpha}{2}-\beta+1=-2 \Leftrightarrow$

$3\alpha+4\beta-6\alpha-12\beta+12=-24 \Leftrightarrow -3\alpha-8\beta=-36$ (3) και

$f(-1)=\frac{\alpha}{4}-\frac{\beta}{3}-\frac{\alpha}{2}+\beta+1=2 \Leftrightarrow 3\alpha-4\beta-6\alpha+12\beta+12=24 \Leftrightarrow -3\alpha+8\beta=12$ (4).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (3),(4) προκύπτει: $-6\alpha=-24 \Leftrightarrow \alpha=4$ οπότε από την (4) είναι $\beta=3$. Άρα $f(x)=x^4+x^3-2x^2-3x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

Σχέσεις της μορφής (f ΄(x) , f(x), x) = h(x)

45.α) Είναι $f(x)+xf'(x)=3x^2+1 \Leftrightarrow \left(xf(x)\right)'=\left(x^3+x\right)' \Leftrightarrow$

$xf(x)=x^3+x+c \Leftrightarrow f(x)=x^2+1+\frac{c}{x}$. $f(1)=2 \Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)=x^2+1$

β) Είναι $xf'(x)+f(x)=e^x \Leftrightarrow \left(xf(x)\right)'=\left(e^x\right)' \Leftrightarrow$

$xf(x)=e^x+c, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^x+c}{x}$.

$f(1)=e+1 \Leftrightarrow c=1$ οπότε $f(x)=\dfrac{e^x+1}{x}$.

γ) Είναι $xf'(x)+x^2=f(x)+x^2e^x \Leftrightarrow \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=e^x-1 \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\left(e^x-x\right)' \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}=e^x-x+c, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)=x\left(e^x-x+c\right)$.

Όμως $f(1)=e-1 \Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)=x\left(e^x-x\right)$.

δ) Είναι $f'(x)=3x-\dfrac{1+f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x)=3x^2-1-f(x) \Leftrightarrow$

$xf'(x)+f(x)=3x^2-1 \Leftrightarrow \left(xf(x)\right)'=\left(x^3-x\right)' \Leftrightarrow$

$xf(x)=x^3-x+c, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)=x^2-1+\dfrac{c}{x}$.

Όμως $f(1)=1 \Leftrightarrow c=1$ οπότε $f(x)=x^2-1+\dfrac{1}{x}$.

ε) Είναι $xf'(x)-f(x)=x^2\eta\mu x+x^3\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\left(x\eta\mu x\right)' \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}=x\eta\mu x+c, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)=x^2\eta\mu x+cx$.

Όμως $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)=x^2\eta\mu x$.

46.α) Είναι $f'(x)-2f(x)=e^{3x} \Leftrightarrow e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)=e^x \Leftrightarrow$

$\left(e^{-2x}f(x)\right)'=\left(e^x\right)' \Leftrightarrow e^{-2x}f(x)=e^x+c, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)=e^{3x}+ce^{2x}$.

Όμως $f(0)=2 \Leftrightarrow c=1$ οπότε $f(x)=e^{3x}+e^{2x}$.

β) Είναι $f(x)+2xf'(x)=2x \Leftrightarrow e^{x^2}f(x)+xe^{x^2}f'(x)=2xe^{x^2} \Leftrightarrow$

$\left(e^{x^2}f(x)\right)'=\left(e^{x^2}\right)' \Leftrightarrow e^{x^2}f(x)=e^{x^2}+c, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)=1+ce^{-x^2}$.

$f(0)=1+e \Leftrightarrow c=e$ και $f(x)=1+e^{1-x^2}$.

γ) Είναι $2f'(x)+4f(x)=1 \Leftrightarrow e^{2x}f'(x)+2e^{2x}f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x} \Leftrightarrow$

$\left(e^{2x}f(x)\right)' = \left(\frac{1}{4}e^{2x}\right)' \Leftrightarrow e^{2x}f(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{4} + ce^{-2x}$.

Όμως $f(0) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}$ οπότε $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-2x}$.

δ) Είναι $f'(x) - f(x) = 2 \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = 2e^{-x} \Leftrightarrow$

$\left(e^{-x}f(x)\right)' = \left(-2e^{-x}\right)' \Leftrightarrow e^{-x}f(x) = -2e^{-x} + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = -2 + ce^{x}$.

Όμως $f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 4$ οπότε $f(x) = -2 + 4e^{x}$.

Αυξημένης δυσκολίας

47.α) Είναι $f(x) + xf'(x) = 6x^5 + 4x^3 + 2x \Leftrightarrow \left(xf(x)\right)' = \left(x^6 + x^4 + x^2\right)' \Leftrightarrow$

$xf(x) = x^6 + x^4 + x^2 + c, c \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ είναι $0 = c$, άρα για $x \neq 0$ είναι $f(x) = x^5 + x^3 + x$. Για $x = 0$ η αρχική σχέση γίνεται $f(0) = 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$ είναι $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(x^5 + x^3 + x\right) = 0$, άρα $f(x) = x^5 + x^3 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $(x-1)f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 - f(x)$

$\Leftrightarrow (x-1)f'(x) + f(x) = 3x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow$

$\left((x-1)f(x)\right)' = \left(x^3 - 3x^2 + x\right)' \Leftrightarrow (x-1)f(x) = x^3 - 3x^2 + x + c, c \in \mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 1, οπότε $\lim\limits_{x \to 1}\left[(x-1)f(x)\right] = \lim\limits_{x \to 1}\left(x^3 - 3x^2 + x + c\right) \Leftrightarrow 0 = c - 1 \Leftrightarrow c = 1$. Άρα για

$x \neq 1$ είναι $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x - 1} = \frac{\cancel{(x-1)}\left(x^2 - 2x - 1\right)}{\cancel{x-1}} = x^2 - 2x - 1$.

Επίσης $f(1) = \lim\limits_{x \to 1}\left(x^2 - 2x - 1\right) = -2$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$f(x) = x^2 - 2x - 1$.

γ) Είναι $(x+1)f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 - f(x) \Leftrightarrow$

$\left((x+1)f(x)\right)' = \left(x^4 + x^3 + x^2 + x\right)' \Leftrightarrow (x+1)f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + c, c \in \mathbb{R}$..

Για $x = -1$ είναι : $0 = c$, άρα για $x \neq -1$ έχουμε

$f(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{x + 1} = \frac{x\left(x^2 + 1\right)(x+1)}{x+1} = x^3 + x$.Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = -1$ είναι $f(-1) = \lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1}\left(x^3 + x\right) = -2$, άρα $f(x) = x^3 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Είναι $2f(x)+xf'(x)=6x^4+4x^2 \Leftrightarrow 2xf(x)+x^2f'(x)=6x^5+4x^3 \Leftrightarrow$

$\left(x^2f(x)\right)'=\left(x^6+x^4\right)' \Leftrightarrow x^2f(x)=x^6+x^4+c, c\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $0=c$, άρα για $x\neq 0$ είναι $f(x)=x^4+x^2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0$ είναι $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4+x^2\right)=0$, άρα $f(x)=x^4+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

48. Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x)g(x)=1$ (1) και

$g'(x)=-\dfrac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)g'(x)=-1$ (2). Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2)

έχουμε $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=0 \Leftrightarrow \left(f(x)g(x)\right)'=0 \Leftrightarrow$

$f(x)g(x)=c, c\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $c=1$, άρα $f(x)g(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

2ος τρόπος: Έστω $h(x)=f(x)g(x)-1,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \Leftrightarrow$

$h'(x)=f'(x)=\dfrac{1}{g(x)}g(x)+f(x)\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)=1-1=0 \Leftrightarrow h(x)=c,\ c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$f(x)g(x)-1=c \Leftrightarrow f(x)g(x)=c+1\ (1)$. Για x=0 η (1) γίνεται

$f(0)g(0)=c+1 \Leftrightarrow 1=c+1 \Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)g(x)=1, x\in\mathbb{R}$.

49. Παραγωγίζοντας κατά μέλη τη σχέση $f(x)g(x)=e^{-2x}$, προκύπτει:

$\left(f(x)g(x)\right)'=\left(e^{-2x}\right)' \Leftrightarrow f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=-2e^{-2x}$ (1). Από τις σχέσεις $f(x)g(x)=e^{-2x}\neq 0, f'(x)g'(x)=e^{-2x}\neq 0$ έχουμε $f(x)\neq 0, f'(x)\neq 0$

οπότε $g(x)=\dfrac{e^{-2x}}{f(x)}$ και $g'(x)=\dfrac{e^{-2x}}{f'(x)}$.

Επομένως η σχέση (1) γίνεται: $f'(x)\dfrac{e^{-2x}}{f(x)}+f(x)\dfrac{e^{-2x}}{f'(x)}=-2e^{-2x} \Leftrightarrow$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}+\dfrac{f(x)}{f'(x)}=-2 \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)^2+\left(f(x)\right)^2=-2f(x)f'(x) \Leftrightarrow$

$\left(f'(x)\right)^2+\left(f(x)\right)^2+2f(x)f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(f'(x)+f(x)\right)^2=0 \Leftrightarrow$

$f'(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^xf(x)\right)'=0 \Leftrightarrow$

$e^x f(x)=c \Leftrightarrow f(x)=ce^{-x}$, $c\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $f(0)=ce^0=c \Leftrightarrow c=1$ οπότε $f(x)=e^{-x}$. Τότε: $f(x)g(x)=e^{-2x} \Leftrightarrow e^{-x}g(x)=e^{-2x} \Leftrightarrow g(x)=e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

50. $(x^2+1)f''(x)+4xf'(x)+2f(x)=0 \Leftrightarrow$

$(x^2+1)f''(x)+2xf'(x)+2xf'(x)+2f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\left((x^2+1)f'(x)+2xf(x)\right)'=0 \Leftrightarrow (x^2+1)f'(x)+2xf(x)=c, c\in\mathbb{R}$ (1).

Η C_f είναι παράλληλη στην (ε) οπότε $f'(0)=2$ άρα από τη σχέση (1) για $x=0$ είναι $c=2$, επομένως

$(x^2+1)f'(x)+2xf(x)=2 \Leftrightarrow \left((x^2+1)f(x)\right)'=(2x)' \Leftrightarrow$

$(x^2+1)f(x)=2x+c_1 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2x+c_1}{x^2+1}, c_1\in\mathbb{R}$. Όμως η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων οπότε $f(0)=0 \Leftrightarrow c_1=0$, άρα $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

51. Είναι $f(x)+xf'(x)+f''(x)=0 \Leftrightarrow \left[xf(x)+f'(x)\right]'=0 \Leftrightarrow$

$xf(x)+f'(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $f'(0)=c \Leftrightarrow c=0$,

οπότε, $xf(x)+f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)e^{\frac{x^2}{2}}+xe^{\frac{x^2}{2}}f(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x^2}{2}}f(x)\right)'=0 \Leftrightarrow$

$e^{\frac{x^2}{2}}f(x)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)=c_1e^{-\frac{x^2}{2}}$. Επειδή $f(0)=2$ είναι $c_1=2$ οπότε $f(x)=2e^{-\frac{x^2}{2}}$.

52. Είναι $f''(x)+2f'(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow$

$e^x f''(x)+e^x f'(x)+e^x f'(x)+e^x f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\left(e^x f'(x)\right)'+\left(e^x f(x)\right)'=0 \Leftrightarrow \left(e^x f'(x)+e^x f(x)\right)'=0 \Leftrightarrow$

$e^x f'(x)+e^x f(x)=c, c\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $c=2$ οπότε

$e^x f'(x)+e^x f(x)=2 \Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)'=(2x)' \Leftrightarrow e^x f(x)=2x+c_1, c_1\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$f(x)=(2x+c_1)e^{-x}$. Επειδή $f(0)=1$ είναι $c_1=1$, άρα $f(x)=(2x+1)e^{-x}$.

53.α) Είναι $2f'(x)=e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x)=\frac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow 2f'(x)e^{f(x)}=e^x \Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}\right)'=\left(\frac{1}{2}e^x\right)' \Leftrightarrow e^{f(x)}=\frac{1}{2}e^x+c, c\in\mathbb{R}$. Όμως $f(0)=0 \Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$ οπότε

$e^{f(x)}=\frac{1}{2}\left(e^x+1\right) \Leftrightarrow f(x)=\ln\left[\frac{1}{2}\left(e^x+1\right)\right]$.

β) Είναι $f'(x)=\frac{2x\ln\left(x^2+1\right)f(x)}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2x}{x^2+1}\ln\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow$

$\left(\ln f(x)\right)'=\left(\frac{1}{2}\ln^2\left(x^2+1\right)\right)' \Leftrightarrow \ln f(x)=\frac{1}{2}\ln^2\left(x^2+1\right)+c, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$f(x)=e^{\frac{1}{2}\ln^2\left(x^2+1\right)+c}$. Όμως $f(0)=1 \Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)=e^{\frac{1}{2}\ln^2\left(x^2+1\right)}$

γ) Είναι $f(x)=\frac{-xf'(x)\ln x}{2} \Leftrightarrow f'(x)+\frac{2}{x\ln x}f(x)=0 \Leftrightarrow$

$e^{2\ln(\ln x)}f'(x)+e^{2\ln(\ln x)}\frac{2}{x\ln x}f(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^{2\ln(\ln x)}f(x)\right)'=0 \Leftrightarrow$

$e^{\ln\left(\ln^2 x\right)}f(x)=c \Leftrightarrow f(x)=ce^{-\ln\left(\ln^2 x\right)}$. Όμως $f(e)=1 \Leftrightarrow c=1$ και

$f(x)=e^{-\ln\left(\ln^2 x\right)}=\frac{1}{e^{\ln\left(\ln^2 x\right)}}=\frac{1}{\ln^2 x}$.

δ) Είναι $f'(x)=\frac{4x^3+2x}{3f^2(x)} \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)=4x^3+2x \Leftrightarrow$

$\left(f^3(x)\right)'=\left(x^4+x^2\right)' \Leftrightarrow f^3(x)=x^4+x^2+c, c\in\mathbb{R}$. Όμως $f(1)=2 \Leftrightarrow c=6$

οπότε $f^3(x)=x^4+x^2+6 \Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^4+x^2+6}$.

ε) Είναι $f'(x)=2xf^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)'=\left(x^2\right)' \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{f(x)}=x^2+c, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+c}$. Όμως $f(0)=-1 \Leftrightarrow c=1$ και

$f(x)=-\frac{1}{x^2+1}$.

στ) Είναι $f'(x)=4x\sqrt{f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=2x \Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)'=\left(x^2\right)' \Leftrightarrow$

$\sqrt{f(x)} = x^2 + c$. Όμως $f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$ οπότε $f(x) = (x^2+1)^2$.

54.α) Είναι $f'(x) = -4xf^2(x) \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 4x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (2x^2)' \Leftrightarrow$

$\frac{1}{f(x)} = 2x^2 + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2x^2+c}$. Όμως $f(1) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c = 1$, άρα

$f(x) = \frac{1}{2x^2+1}$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2xf(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{2x^2+1}\eta\mu\frac{1}{2x^2+1}\right]$. Για $x > 0$ είναι

$\left|\frac{2x}{2x^2+1}\eta\mu\frac{1}{2x^2+1}\right| = \frac{2x}{2x^2+1}\left|\eta\mu\frac{1}{2x^2+1}\right| \le \frac{2x}{2x^2+1} \Leftrightarrow$

$-\frac{2x}{2x^2+1} \le \frac{2x}{2x^2+1}\eta\mu\frac{1}{2x^2+1} \le \frac{2x}{2x^2+1}$. Όμως

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x}{2x^2+1}\right)$ οπότε από το κριτήριο

παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2xf(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right] = 0$.

55. Είναι $\left(f''(x) - f'(x)f(x)\right)f(x) - \left(f'(x)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$f''(x)f(x) - f'(x)f^2(x) - \left(f'(x)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$f''(x)f(x) - \left(f'(x)\right)^2 = f'(x)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x) - \left(f'(x)\right)^2}{f^2(x)} = f'(x) \Leftrightarrow$

$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = f'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = f(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$. Για $x = 1$, είναι

$\frac{f'(1)}{f(1)} = f(1) + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$, άρα

$\frac{f'(x)}{f(x)} = f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)' = (x)' \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$. Για

$x = 1$, είναι $-\frac{1}{f(1)} = 1 + c_1 \Leftrightarrow -1 = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -2$, άρα

$-\dfrac{1}{f(x)} = x-2 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2-x},\ x<2$.

Σχέσεις της μορφής f ΄(x) = f(x)

56.α) Από τη σχέση $xf'(x)-(x+1)f(x)=0$ (1) για $x=0$ είναι $f(0)=0$

β) Από τη σχέση (1) έχουμε

$xf'(x)-xf(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=xf(x)$ (2).

Από τη σχέση (2) έχουμε για $x\neq 0$: $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = \dfrac{f(x)}{x}$.

γ) Είναι $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x} = ce^x, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)=cxe^x$.

Όμως $f(1)=e \Leftrightarrow c=1$, άρα $f(x)=xe^x$.

57.α) Είναι $xf'(x)+(1-x)f(x)=0 \Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=xf(x) \Leftrightarrow$

$\left(xf(x)\right)' = xf(x) \Leftrightarrow xf(x)=ce^x, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{ce^x}{x},\ x>0$.

Όμως $f(1)=e \Leftrightarrow c=1$, άρα $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

β) Είναι $xf'(x)=(x+1)f(x) \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=xf(x) \Leftrightarrow$

$\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}=ce^x, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$f(x)=cxe^x,\ x>0$. Όμως $f(1)=e \Leftrightarrow c=1$ άρα $f(x)=xe^x$.

γ) Είναι $f'(x)\sigma\upsilon\nu x - f(x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=0 \Leftrightarrow$

$f'(x)\sigma\upsilon\nu x - f(x)\eta\mu x = f(x)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \left(f(x)\sigma\upsilon\nu x\right)' = f(x)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$f(x)\sigma\upsilon\nu x = ce^x, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{ce^x}{\sigma\upsilon\nu x}.\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Όμως $f(0)=1 \Leftrightarrow c=1$, άρα $f(x)=\dfrac{e^x}{\sigma\upsilon\nu x}$.

δ) Είναι $f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = f(x)\eta\mu x \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{f(x)\cancel{\eta\mu x}}{\eta\mu\cancel{^2} x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)' = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} = ce^x, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = ce^x \eta\mu x\ ,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Όμως $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow c = 2$, άρα $f(x) = 2e^x \eta\mu x$.

58. Είναι $f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x) \Leftrightarrow$

$(f'(x)\cdot f(x))' = f'(x)\cdot f(x) \Leftrightarrow f'(x)\cdot f(x) = c\cdot e^x, c \in \mathbb{R}$.. Όμως

$f(0) = 2, f'(0) = 1$ οπότε $c = 2$ άρα

$$f'(x)\cdot f(x) = 2e^x \Leftrightarrow 2f'(x)\cdot f(x) = 4e^x \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)' = \left(4e^x\right)' \Leftrightarrow$$

$f^2(x) = 4e^x + c, c \in \mathbb{R}$. Για $x = 0$ είναι $c = 0$ οπότε

$f^2(x) = 4e^x \Leftrightarrow |f(x)| = 2\sqrt{e^x}$ (1) .Είναι $2\sqrt{e^x} \neq 0 \Leftrightarrow |f(x)| \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Όμως $f(0) = 2 > 0$ άρα $f(x) > 0$ οπότε από τη σχέση (1) έχουμε

$f(x) = 2\sqrt{e^x}, x \in \mathbb{R}$.

59. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^{(\nu)}(x) = f^{(\nu-2)}(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f^{(\nu)}(x) + f^{(\nu-1)}(x) = f^{(\nu-1)}(x) + f^{(\nu-2)}(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f^{(\nu-1)}(x) + f^{(\nu-2)}(x)\right)' = f^{(\nu-1)}(x) + f^{(\nu-2)}(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{(\nu-1)}(x) + f^{(\nu-2)}(x) = C_1 e^x, C_1 \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Για $x = 0$ είναι $(1) \Leftrightarrow f^{(\nu-1)}(0) + f^{(\nu-2)}(0) = C_1 \Leftrightarrow C_1 = 0$

Άρα $(1) \Leftrightarrow f^{(\nu-1)}(x) + f^{(\nu-2)}(x) = 0 \Leftrightarrow \left(f^{(\nu-2)}(x) + f^{(\nu-3)}(x)\right)' = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f^{(\nu-2)}(x) + f^{(\nu-3)}(x) = C_2, C_2 \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Για $x = 0$ είναι $(2) \Leftrightarrow f^{(\nu-2)}(0) + f^{(\nu-3)}(0) = C_2 \Leftrightarrow C_2 = 0$.

Άρα $(2) \Leftrightarrow f^{(\nu-2)}(x) + f^{(\nu-3)}(x) = 0 \Leftrightarrow \left(f^{(\nu-3)}(x) + f^{(\nu-4)}(x)\right)' = 0$ και

ακολουθώντας την ίδια διαδικασία καταλήγουμε στην σχέση

$f'(x)+f''(x)=0 \Leftrightarrow \left(f(x)+f'(x)\right)'=0 \Leftrightarrow f(x)+f'(x)=C_v, C_v \in \mathbb{R}$ (ν)

Για $x=0$ είναι (ν) $\Leftrightarrow f(0)+f'(0)=C_v \Leftrightarrow C_v=0$.

Άρα (ν) $\Leftrightarrow f(x)+f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x f(x)+e^x f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)'=0 \Leftrightarrow e^x f(x)=C$ και για $x=0$ είναι $f(0)=C \Leftrightarrow C=0$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$.

Σχέσεις της μορφής f ΄(x) f(x)=h(x)

60. Είναι $\left(f(x)-x\ln x\right)\left(f'(x)-\ln x-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$\left(f(x)-x\ln x\right)\left(f(x)-x\ln x\right)'=0 \Leftrightarrow$

$\left[\frac{\left(f(x)-x\ln x\right)^2}{2}\right]'=0 \Leftrightarrow \frac{\left(f(x)-x\ln x\right)^2}{2}=c, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(f(x)-x\ln x\right)^2=2c$.

Για $x=1$ είναι $\left(f(1)-\ln 1\right)^2=0$, άρα $c=0$ οπότε

$\left(f(x)-x\ln x\right)^2=0 \Leftrightarrow f(x)-x\ln x=0 \Leftrightarrow f(x)=x\ln x$ για κάθε $x>0$.

61. Είναι $\left(f(x)-e^x\right)\left(f'(x)-e^x\right)=0 \Leftrightarrow \left(f(x)-e^x\right)\left(f(x)-e^x\right)'=0 \Leftrightarrow$

$\left(\frac{f(x)-e^x}{2}\right)'=0 \Leftrightarrow \frac{f(x)-e^x}{2}=c, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)-e^x=2c$

Για $x=0$ είναι $f(0)-e^0=0$ άρα $c=0$ οπότε $f(x)-e^x=0 \Leftrightarrow f(x)=e^x$,

$x \in \mathbb{R}$.

62.α) Είναι $f'(x)f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)' \Leftrightarrow$.

$f^2(x)=e^{2x}+c, c\in\mathbb{R}$. Όμως $f(0)=1 \Leftrightarrow c=0$ οπότε $f^2(x)=e^{2x}\neq 0$, άρα

$f(x)\neq 0$. Η f είναι συνεχής Όμως $f(0)=1>0$ οπότε $f(x)>0$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$, επομένως $f(x)=\sqrt{e^{2x}}=e^x$.

β) Είναι $f'(x)f(x)=2x+1 \Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=4x+2 \Leftrightarrow$

$\left(f^2(x)\right)'=\left(2x^2+2x\right)' \Leftrightarrow \quad f^2(x)=2x^2+2x+c, c\in\mathbb{R}$.

Όμως $f(0)=-1 \Leftrightarrow c=1$, άρα $f^2(x)=2x^2+2x+1$. .

Το τριώνυμο $2x^2+2x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-4<0$ οπότε
$2x^2+2x+1\neq 0\Leftrightarrow f^2(x)\neq 0\Leftrightarrow f(x)\neq 0$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $f(0)=-1<0$ οπότε
$f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $f(x)=-\sqrt{2x^2+2x+1}, x\in\mathbb{R}$.

63.α) Είναι $f'(x)f(x)+f(x)+x=-xf'(x)\Leftrightarrow$

$2f'(x)f(x)+2f(x)+2xf'(x)+2x=0\Leftrightarrow \left(f^2(x)+2xf(x)+x^2\right)'=0\Leftrightarrow$
$f^2(x)+2xf(x)+x^2=c, c\in\mathbb{R}$. Όμως $f(1)=0\Leftrightarrow c=1$, άρα
$f^2(x)+2xf(x)+x^2=1\Leftrightarrow \left(f(x)+x\right)^2=1\neq 0$, οπότε $f(x)+x\neq 0$.
Η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $g(1)=f(1)+1=1>0$ οπότε $g(x)>0\Leftrightarrow f(x)+x>0$
άρα $f(x)+x=1\Leftrightarrow f(x)=1-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
β) Είναι $f'(x)f(x)-e^{-x}\left(f(x)-f'(x)\right)-e^{-2x}=0\Leftrightarrow$
$2f'(x)f(x)+2\left(f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}\right)-2e^{-2x}=0\Leftrightarrow$

$\left(f^2(x)+2f(x)e^{-x}+e^{-2x}\right)'=0\Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)e^{-x}+e^{-2x}=c, c\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$
$\left(f(x)+e^{-x}\right)^2=c$. Όμως $f(0)=2\Leftrightarrow c=9$, άρα $\left(f(x)+e^{-x}\right)^2=9\neq 0$, οπότε
$f(x)+e^{-x}\neq 0$. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)+e^{-x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $g(0)=f(0)+e^0=3>0$ οπότε
$g(x)>0\Leftrightarrow f(x)+e^{-x}>0$, άρα $f(x)+e^{-x}=3\Leftrightarrow f(x)=3-e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.
γ) Είναι $f'(x)f(x)+\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=f'(x)\eta\mu x+f(x)\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow$
$2f'(x)f(x)-2\left(f'(x)\eta\mu x+f(x)\sigma\upsilon x\right)+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow$

$\left(f^2(x)-2f(x)\eta\mu x+\eta\mu^2 x\right)'=0\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)\eta\mu x+\eta\mu^2 x=c\Leftrightarrow$
$\left(f(x)-\eta\mu x\right)^2=c$. Όμως. $f(0)=4\Leftrightarrow c=16$, άρα $\left(f(x)-\eta\mu x\right)^2=16\neq 0$,
οπότε $f(x)-\eta\mu x\neq 0$. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $g(0)=f(0)-\eta\mu 0=4>0$
οπότε $g(x)>0\Leftrightarrow f(x)-\eta\mu x>0$, άρα
$f(x)-\eta\mu x=4\Leftrightarrow f(x)=\eta\mu x+4$, $x\in\mathbb{R}$.

64. Είναι $\left(f'(x)\right)^2-4f'(x)+\frac{4}{x^2+1}=0\Leftrightarrow\left(f'(x)\right)^2-4f'(x)+4=4-\frac{4}{x^2+1}\Leftrightarrow$

$\left(f'(x)-2\right)^2=\frac{4x^2}{x^2+1}$.Έστω $g(x)=f'(x)-2$ τότε $g^2(x)=\frac{4x^2}{x^2+1}$.

Για $x\in(-\infty,0)$ είναι $\frac{4x^2}{x^2+1}>0$ οπότε $g^2(x)>0$ άρα $g(x)\neq 0$.

Η g είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Όμως $g(-2)=f'(-2)-2<0$ άρα $g(x)<0$ στο $(-\infty,0)$.

Επομένως $g(x)=-\sqrt{\frac{4x^2}{x^2+1}}=-\frac{2|x|}{\sqrt{x^2+1}}\overset{x<0}{\Leftrightarrow}$

$g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow f'(x)=2+\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}},x<0$.

Για $x\in(0,+\infty)$ είναι $\frac{4x^2}{x^2+1}>0$ άρα $g^2(x)>0$ οπότε $g(x)\neq 0$. Η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Όμως $g(2)=f'(2)-2>0$ άρα $g(x)>0$ οπότε

$g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow f'(x)=2+\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Επίσης για $x=0$ είναι $\left(f'(0)\right)^2-4f'(0)+4=0\Leftrightarrow f'(0)=2$. Συνεπώς

$f'(x)=2+\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,άρα

$f'(x)=\left(2x+2\sqrt{x^2+1}\right)'\Leftrightarrow f(x)=2x+2\sqrt{x^2+1}+c,c\in\mathbb{R}$. .

Είναι $f(0)=2+c\Leftrightarrow c=0$. Επομένως $f(x)=2x+2\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

65. Είναι $\left(f''(x)+f'(x)\right)f(x)-\left(f'(x)\right)^2=0\Leftrightarrow$

$f''(x)f(x)+\left(f'(x)\right)^2=f(x)f'(x)\Leftrightarrow\left(f(x)f'(x)\right)'=f(x)f'(x)\Leftrightarrow$

$f(x)f'(x)=ce^x,c\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $c=2$ οπότε

$f(x)f'(x)=2e^x\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=4e^x\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(4e^x\right)'\Leftrightarrow$

$f^2(x)=4e^x+c_1,c_1\in\mathbb{R}$. Όμως $f(0)=2\Leftrightarrow c_1=0$ οπότε $f^2(x)=4e^x\neq 0$ άρα $f(x)\neq 0$. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta\mu x$ είναι συνεχής στο $(-\infty,2)$ οπότε

διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Όμως $f(0)=2>0$ οπότε

$f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $f(x)=\sqrt{4e^x}=2e^{\frac{x}{2}}$.

Εύρεση τύπου σε ένωση διαστημάτων

66. Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)=3x^2-2x+2=\left(x^3-x^2+2x\right)'\Leftrightarrow$

$f(x)=x^3-x^2+2x+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x\geq 0$ είναι

$f'(x)=2x+2=\left(x^2+2x\right)'\Leftrightarrow f(x)=x^2+2x+c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$

Είναι $f(1)=4\Leftrightarrow 3+c_2=4\Leftrightarrow c_2=1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x = 0 οπότε είναι και συνεχής σε αυτό, άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^3-x^2+2x+c_1\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+2x+1\right)=f(0)\Leftrightarrow c_1=1=f(0)$, άρα

$$f(x)=\begin{cases}x^3-x^2+2x+1, & x<0\\ x^2+2x+1, & x\geq 0\end{cases}$$

67.α) Για $x>3$ είναι $f'(x)=x-3=\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)'\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}-3x+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$.

Για $x<3$ είναι $f'(x)=-x+3=\left(-\frac{x^2}{2}+3x\right)'=-\frac{x^2}{2}+3x+c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$.

Όμως $f(0)=0\Leftrightarrow c_2=0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι συνεχής στο 3 άρα $f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)\Leftrightarrow f(3)=\frac{9}{2}=c_1-\frac{9}{2}\Rightarrow c_1=9$, άρα

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{x^2}{2}+3x, & x<3\\ 9/2, & x=3\\ \frac{x^2}{2}-3x+9, & x>3\end{cases}$$

β) Αν $x<1$ τότε $f'(x)=x^2-3x+2=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)'\Leftrightarrow$

$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$. Όμως $f(0)=0$ οπότε $c_1=0$. Αν $1<x<2$

τότε $f'(x)=-x^2+3x-2=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x\right)' \Leftrightarrow$

$f(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x+c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$.

Αν $x>2$ τότε $f'(x)=x^2-3x+2=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)' \Leftrightarrow$

$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x+c_3,\ c_3\in\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι συνεχής στο 1 και στο 2, άρα

$f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(1)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\Leftrightarrow f(1)=\frac{5}{6}=-\frac{5}{6}+c_2$ οπότε $c_2=\frac{5}{3}$,

$f(2)=\lim\limits_{x\to2^-}f(2)=\lim\limits_{x\to2^+}f(2)\Leftrightarrow f(2)=1=\frac{2}{3}+c_3$ άρα $c_3=\frac{1}{3}$.Επομένως

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{3}+2x,\ x<1\\ 0\quad,\ x=1\ \text{ή}\ x=2\\ -\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{3}-2x+\frac{5}{3},\ 1<x<2\\ \frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{3}+2x+\frac{1}{3}\quad,\ x>2\end{cases}.$$

Αυξημένης δυσκολίας

68.α) Για $x\neq0$ είναι

$xf'(x)=3x^3-4x^2+2x\Leftrightarrow f'(x)=3x^2-4x+2=\left(x^3-2x^2+2x\right)'\Leftrightarrow$

$f(x)=\begin{cases}x^3-2x^2+2x+c_1\ ,x>0\\ x^3-2x^2+2x+c_2\ ,x<0\end{cases},c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Όμως $f(1)=6\Leftrightarrow c_1=5$ οπότε

$f(x)=\begin{cases}x^3-2x^2+2x+5\ ,x>0\\ x^3-2x^2+2x+c_2\ ,x<0\end{cases}$ Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι

συνεχής στο 0 άρα $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow c_2=5=f(0)$, επομένως

$f(x)=x^3-2x^2+2x+5\ ,x\in\mathbb{R}$.

β) Για $x\neq-1$ είναι

$(x+1)f'(x)=2x^2-8x-10 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2(x-5)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=\left(x^2-10x\right)' \Leftrightarrow$

$f(x)=\begin{cases}x^2-10x+c_1\ ,x>-1\\ x^2-10x+c_2\ ,x<-1\end{cases}, c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Όμως $f(0)=2\Leftrightarrow c_1=2$ οπότε

$f(x)=\begin{cases}x^2-10x+2\ \ ,x>-1\\ x^2-10x+c_2\ ,x<-1\end{cases}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι

συνεχής στο -1 άρα $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)\Leftrightarrow c_2=2=f(-1)$, άρα

$f(x)=x^2-10x+2\ \ ,x\in\mathbb{R}$

γ) Για $x\neq 0$ είναι $x^2f'(x)=4x^5-2x^3 \Leftrightarrow f'(x)=4x^3-2x=\left(x^4-x^2\right)' \Leftrightarrow$

$f(x)=\begin{cases}x^4-x^2+c_1\ ,x>0\\ x^4-x^2+c_2\ ,x<0\end{cases}, c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Όμως $f(1)=1\Leftrightarrow c_1=1$ οπότε

$f(x)=\begin{cases}x^4-x^2+1\ \ ,x>0\\ x^4-x^2+c_2\ ,x<0\end{cases}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι

συνεχής στο 0 άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow c_2=1=f(0)$, άρα

$f(x)=x^4-x^2+1, x\in\mathbb{R}$.

69.α) Για $x=0$ είναι $f(0)=0$.

Για $x\neq 0$ είναι $f(x)=xf'(x)-x^2e^x \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=x^2e^x \Leftrightarrow$

$\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=e^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\left(e^x\right)' \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x)}{x}=\begin{cases}e^x+c_1\ ,x>0\\ e^x+c_2\ ,x<0\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}xe^x+c_1x\ ,x>0\\ xe^x+c_2x\ ,x<0\end{cases}, c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Όμως

$f(1)=e\Leftrightarrow c_1=0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι παραγωγίσιμη

στο 0 άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{x}e^x}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}\left(e^x+c_2\right)}{\cancel{x}}\Leftrightarrow 1=1+c_2\Leftrightarrow c_2=0$, άρα $f(x)=xe^x,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Για $x\neq 0$ είναι

$f(x)=xf'(x)\ (1)\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ c_2, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} c_1 x, & x < 0 \\ c_2 x, & x > 0 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Όμως $f(1) = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1$. Για $x = 0$ η (1) γίνεται $f(0) = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι παραγωγίσιμη στο 0 άρα $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} =$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{c_1 x}{x} \Leftrightarrow 1 = c_1$, επομένως $c_1 = 1$ και η f έχει τύπο $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x, x \in \mathbb{R}$.

γ) Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$. Για $x \neq 0$ είναι

$xf'(x) - 2f(x) = x^3 e^x \Leftrightarrow x^2 f'(x) - 2xf(x) = x^4 e^x \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = e^x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = (e^x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \begin{cases} e^x + c_1, & x > 0 \\ e^x + c_2, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x + c_1 x^2, & x > 0 \\ x^2 e^x + c_2 x^2, & x < 0 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Όμως $f(1) = e \Leftrightarrow c_1 = 0$ και $f(-1) = e \Leftrightarrow c_2 = 0$. Επομένως

$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 e^x, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x^2 e^x, x \in \mathbb{R}$.

δ) Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$. Για $x \neq 0$ είναι

$xf'(x) - x^2 \eta\mu x = x^3 \sigma\upsilon\nu x + f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = x^3 \sigma\upsilon\nu x + x^2 \eta\mu x \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow}$

$xf'(x) - f(x) = x^2 (x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \Leftrightarrow$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = (x\eta\mu x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x\eta\mu x + c_1, & x > 0 \\ x\eta\mu x + c_2, & x < 0 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu x + c_1 x, & x > 0 \\ x^2 \eta\mu x + c_2 x, & x < 0 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Όμως $f(\pi) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι παραγωγίσιμη στο 0 άρα

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2 \eta\mu x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x(x\eta\mu x + c_2)}{x} \Leftrightarrow$

$c_2 = 0$. Άρα $f(x) = x^2 \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

70. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ και η εφαπτομένη της f στο M είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Επειδή διέρχεται από το $(0,0)$ είναι $-f(x_0) = -x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$. Αφού ισχύει για όλες τις εφαπτόμενες τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $xf'(x) - f(x) = 0$.

Για $x \neq 0$ είναι $\dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x} = \begin{cases} c_1 \ , \ x < 0 \\ c_2 \ , \ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} xc_1 \ , \ x < 0 \\ xc_2 \ , \ x > 0 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Επειδή η f περιττή τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(-x) = -f(x)$. Για $x = 0 : f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ και για $x = 1 : f(-1) = -f(1) = -1$.

Είναι $f(1) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1$ και για $f(-1) = -1 \Leftrightarrow c_2 = 1$ άρα

$$f(x) = \begin{cases} x \ , \ x < 0 \\ 0 \ , \ x = 0 \\ x \ , \ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x \ , \ x \in \mathbb{R}$$

71. Για $x \neq 3$ είναι $xf'(x) = 3f'(x) + f(x) \Leftrightarrow (x-3)f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{(x-3)f'(x) - f(x)}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{f(x)}{x-3}\right)' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x-3} = \begin{cases} c_1 \ , x > 3 \\ c_2 \ , x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} c_1(x-3) \ , x > 3 \\ c_2(x-3) \ , x < 3 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι συνεχής στο 3 άρα $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3) \Leftrightarrow f(3) = 0$.

Είναι $f'(3) = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{c_1 \cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{c_2 \cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = 2$, άρα $c_1 = c_2 = 2$ οπότε

$f(x) = 2(x-3) = 2x - 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εύρεση συνάρτησης από σχήμα με f , f΄

72.α) Έστω ότι $C_1 \equiv C_f$ τότε $C_2 \equiv C_{f'}$. Στην περίπτωση αυτή η C_f είναι ευθεία οπότε θα έχει τύπο της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta, \alpha \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε όμως $f'(x) = \alpha$, οπότε η γραφική παράσταση της f΄ θα είναι μια οριζόντια ευθεία που δεν ισχύει. Επομένως $C_2 \equiv C_f$ και $C_1 \equiv C_{f'}$.

β) Έστω ότι η $C_1 \equiv C_f$ και $C_2 \equiv C_{f'}$ Στο σχήμα παρατηρούμε ότι ο άξονας x΄x εφάπτεται της C_1 στο x=1, οπότε $f'(1) = 0$ άτοπο αφού $f'(1) = -2$ όπως βλέπουμε από τη γραφική παράσταση της $C_2 \equiv C_{f'}$.

Επομένως $C_2 \equiv C_f$ και $C_1 \equiv C_{f'}$.

73.α) Έστω ότι $C_2 \equiv C_f$ και $C_1 \equiv C_g$, τότε $f(x) = 2,\ x \in [0, 2\pi]$ και $g(x) = 2 - \eta\mu x$. Τότε $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ άτοπο αφού $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ όπως βλέπουμε από τη γραφική παράσταση της $C_1 \equiv C_g$.

Επομένως η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της g.

β) Είναι $g(x) = f(x) - \eta\mu x \Leftrightarrow 2 = f(x) - \eta\mu x \Leftrightarrow f(x) = 2 + \eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$.

74.α) Έστω ότι $C_1 \equiv C_{f''}$ και $C_2 \equiv C_{f'}$. Αφού η μία είναι κατακόρυφη μετατόπιση της άλλης και τέμνουν τον άξονα y΄y στα σημεία (0,1) και (0,2) τότε είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = f''(x) + 1 \Leftrightarrow f''(x) - f'(x) = -1 \Leftrightarrow e^{-x} f''(x) - e^{-x} f'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-x} f'(x)\right)' = \left(e^{-x}\right)' \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) = e^{-x} + c \Leftrightarrow f'(x) = 1 + c \cdot e^{x}, c \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ είναι $f'(0) = 1 + c \Leftrightarrow 2 = 1 + c \Leftrightarrow c = 1$

Άρα $f'(x) = e^x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = \left(e^x + x\right)' \Leftrightarrow f(x) = e^x + x + c', c' \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ αφού η f είναι συνεχής. Άρα $0 \in f(\mathbb{R})$ επομένως υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ πράγμα άτοπο. Άρα $C_1 \equiv C_{f'}$ και $C_2 \equiv C_{f''}$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) = f'(x) + 1 \Leftrightarrow f''(x) - f'(x) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{-x} f''(x) - e^{-x} f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow \left(e^{-x} f'(x)\right)' = \left(-e^{-x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} f'(x) = -e^{-x} + c \Leftrightarrow f'(x) = -1 + c \cdot e^{x}, c \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ είναι $f'(0) = -1 + c \Leftrightarrow 1 = -1 + c \Leftrightarrow c = 2$

Άρα $f'(x)=2e^x-1\Leftrightarrow f'(x)=\left(2e^x-x\right)'\Leftrightarrow f(x)=2e^x-x+\alpha$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής άρα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ άρα υπάρχει $\beta<0$ σε περιοχή του $-\infty$ τέτοιο ώστε $f(\beta)>0$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=-\ln 2$, άρα πρέπει και η ελάχιστη τιμή να είναι θετική δηλαδή $f(-\ln 2)>0\Leftrightarrow$

$2e^{-\ln 2}+\ln 2+\alpha>0\Leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{2}+\ln 2+\alpha>0\Leftrightarrow \alpha+1>-\ln 2$.

75. Για κάθε $x>0$ είναι $h(x)=\varphi(x)+1\Leftrightarrow f'(x)-g'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(f(x)-g(x)\right)'=\left(x-\sqrt{x}\right)'\Leftrightarrow f(x)-g(x)=x-\sqrt{x}+c, c\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $k(x)=\begin{cases}x-\sqrt{x}+c\ , & x>0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ οπότε και στο 0 άρα $\lim\limits_{x\to0^+}k(x)=k(0)\Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)-g(x)=x-\sqrt{x}$ για κάθε $x\geq 0$.Είναι $f(x)\geq g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)\geq 0\Leftrightarrow x-\sqrt{x}\geq 0$.

1ος τρόπος: $x-\sqrt{x}\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{x}^2-\sqrt{x}\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\geq 0$

Είναι $\sqrt{x}\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.Είναι $\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1$ και $\sqrt{x}-1>0\Leftrightarrow\sqrt{x}>1\Leftrightarrow x>1$.

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$\sqrt{x}$		+	+
$\sqrt{x}-1$		-	+
$\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$		-	+

Άρα $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\geq 0\Leftrightarrow x\in[1,+\infty)\cup\{0\}$

2ος τρόπος: $x-\sqrt{x}\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{x}\leq x\overset{x\geq0}{\Leftrightarrow}x\leq x^2\Leftrightarrow x(x-1)\geq 0$ και ομοίως με πινακάκι βρίσκουμε ίδιο αποτέλεσμα..

76.α) Η $g(x)=\ln f(x)$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως η C_f δεν μπορεί να είναι η C_3. Αν $C_f\equiv C_2$ τότε οι f,g είναι σταθερές πράγμα άτοπο. Άρα η C_f είναι C_1. Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ και $g'(x)>0\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}>0\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f' δεν μπορεί να παριστάνεται από την C_3. Αν η f' παριστάνεται από την C_2 τότε

$f'(x)=\lambda \Leftrightarrow f'(x)=(\lambda x)' \Leftrightarrow f(x)=\lambda x+\kappa$, $\lambda,\kappa\in\mathbb{R}$, δηλαδή η C_f είναι ευθεία (οριζόντια ή πλάγια) πράγμα άτοπο γιατί η C_1 δεν είναι ευθεία. Άρα και η f' παριστάνεται από την C_1 .

β) Από το α σκέλος συμπεραίνουμε ότι $f(x)=f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=C\cdot e^x$. Είναι $g(0)=0\Leftrightarrow \ln f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=1$ άρα για $x=0$ είναι $f(0)=C\Leftrightarrow C=1$. Συνεπώς $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\ln f(x)=\ln e^x=x$, $x\in\mathbb{R}$.

Εύρεση τύπου συνάρτησης δύο μεταβλητών

77. Είναι $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$ (1).Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη ως προς y έχουμε: $f'(x+y)=f'(y)+2x$ (2) .

Από τη σχέση (2) για $y=0$ είναι $f'(x)=f'(0)+2x=1+2x=\left(x+x^2\right)'\Leftrightarrow$.

$f(x)=x+x^2+c, c\in\mathbb{R}$ Από τη σχέση (1) για $x=y=0$ είναι $f(0)=1\Leftrightarrow c=1$, άρα $f(x)=x^2+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

78. Είναι $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy+y$ (1).Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη ως προς y έχουμε: $f'(x+y)=f'(y)+x+1$ (2) .

Από τη σχέση (2) για $y=0$ είναι $f'(x)=f'(0)+x+1=x+1=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)'\Leftrightarrow$

$f(x)=\frac{x^2}{2}+x+c, c\in\mathbb{R}$. Από τη σχέση (1) για $x=y=0$ είναι $f(0)=0\Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)=\frac{x^2}{2}+x,\ x\in\mathbb{R}$.

79.α) Είναι $f(x+y)=f(x)+f(y)-6xy$ (1) , οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0)+f(h)-6x_0h-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}-6x_0\right)=12-6x_0$. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=12-6x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $f'(x)=12-6x\Leftrightarrow f'(x)=\left(12x-3x^2\right)'\Leftrightarrow f(x)=12x-3x^2+c$, $c\in\mathbb{R}$

Η σχέση (1) για $x=y=0$ γίνεται: $f(0)=f(0)+f(0)-6\cdot 0\cdot 0 \Leftrightarrow f(0)=0$.
Όμως $f(0)=c$, άρα $c=0$ οπότε $f(x)=12x-3x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

80. Είναι $f(x\cdot y)=xf(y)+yf(x)$ (1).Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη ως προς y έχουμε: $\left(f(xy)\right)'=\left(xf(y)+yf(x)\right)' \Leftrightarrow$

$f'(xy)(xy)'=xf'(y)+f(x) \Leftrightarrow xf'(xy)=xf'(y)+f(x)$ (2) . Από τη σχέση (2) για $y=1$ είναι :

$$xf'(x)=xf'(1)+f(x) \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=x \Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(\ln x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=\ln x+c \Leftrightarrow f(x)=x\ln x+cx,\ c\in\mathbb{R}.$$

Για $x=1$ είναι $f(1)=\ln 1+c \Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)=x\ln x$, $x>0$.

Προβλήματα

81. Είναι $K'(x)=6x^2+4x \Leftrightarrow K'(x)=\left(2x^3+2x^2\right)' \Leftrightarrow$

$K(x)=2x^3+2x^2+c, c\in\mathbb{R}$.Όμως $K(0)=2500 \Leftrightarrow c=2500$, *άρα*

$K(x)=2x^3+2x^2+2500$

82. Για κάθε $t>0$ είναι $u(t)=\frac{t\left(3-2\sqrt{t}\right)}{2\sqrt{t}} \Leftrightarrow u(t)=\frac{3t-2t\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} \Leftrightarrow$

$$u(t)=\frac{3t}{2\sqrt{t}}-t \Leftrightarrow u(t)=\frac{3\sqrt{t}}{2}-t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(t)=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}-t \Leftrightarrow x'(t)=\left(t^{\frac{3}{2}}-t\right)' \Leftrightarrow x(t)=t\sqrt{t}-t+c, c\in\mathbb{R}.$$

Είναι $x(0)=0$,η συνάρτηση θέσης $x(t)$ είναι συνεχής στο 0 οπότε,

$\lim\limits_{t\to 0^+}x(t)=x(0) \Leftrightarrow c=0$ άρα $x(t)=t\sqrt{t}-t$, $t\geq 0$.

Άρα ύστερα από 1 min είναι $x(1)=2$ km.

83. Έστω $f(t)$ η τιμή πώλησης του Η/Υ t έτη από την αγορά του. Είναι

$$f'(t)=\lambda f(t) \Leftrightarrow e^{-\lambda t}f'(t)-\lambda e^{-\lambda t}f(t)=0 \Leftrightarrow \left(e^{-\lambda t}f(t)\right)'=0 \Leftrightarrow e^{-\lambda t}f(t)=c \Leftrightarrow$$

$f(t)=ce^{\lambda t}, c\in\mathbb{R}$. Όμως $f(0)=1312\Leftrightarrow c=1312$ και

$f(2)=820\Leftrightarrow 1312\cdot e^{2\lambda}=820\Leftrightarrow e^{2\lambda}=\dfrac{820}{1312}=0,625\Leftrightarrow 2\lambda=\ln 0,625\Leftrightarrow$

$\lambda=-0,235$. Άρα $f(t)=1312e^{-0,235t}$.

84. Είναι $Q'(t)=\lambda Q(t)\Leftrightarrow Q'(t)-\lambda Q(t)=0\Leftrightarrow e^{-\lambda t}Q'(t)-\lambda e^{-\lambda t}Q(t)=0\Leftrightarrow$

$\left(e^{-\lambda t}Q(t)\right)'=0\Leftrightarrow e^{-\lambda t}Q(t)=c\Leftrightarrow Q(t)=ce^{\lambda t}, c\in\mathbb{R}$. Όμως

$Q(5)=2Q(0)\Leftrightarrow \cancel{c}e^{5\lambda}=2\cancel{c}\Leftrightarrow e^{5\lambda}=2\Leftrightarrow 5\lambda=\ln 2\Leftrightarrow \lambda=\dfrac{1}{5}\ln 2$, άρα

$Q(t)=ce^{\frac{t}{5}\ln 2}$. $Q(t_1)=5Q(0)\Leftrightarrow \cancel{c}e^{\frac{t_1}{5}\ln 2}=5\cancel{c}\Leftrightarrow \dfrac{t_1}{5}\ln 2=\ln 5\Leftrightarrow$

$\dfrac{t_1}{5}=\dfrac{\ln 5}{\ln 2}=2,32\Leftrightarrow t_1=11,5$ ώρες.

85. Έστω $\alpha(t)>0$ η πλευρά του τετραγώνου συναρτήσει του χρόνου t.
Ο ρυθμός μεταβολής της πλευράς του είναι ανάλογος του
εμβαδού του οπότε $\alpha'(t)=\lambda\alpha^2(t), \lambda\neq 0$ (1).

Είναι $E(t)=\alpha^2(t)$ οπότε $E(1)=4\Leftrightarrow \alpha^2(1)=4\overset{\alpha(1)>0}{\Leftrightarrow}\alpha(1)=2$ cm.

Επίσης $\alpha'(1)=1$ cm/sec. Άρα για $t=1$ $(1)\Leftrightarrow \alpha'(1)=\lambda\alpha^2(1)\Leftrightarrow \lambda=\dfrac{1}{4}$.

Άρα $(1)\Leftrightarrow \alpha'(t)=\dfrac{1}{4}\alpha^2(t)\overset{\alpha(t)\neq 0}{\Leftrightarrow}\dfrac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)}=-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{\alpha(t)}\right)'=\left(-\dfrac{1}{4}t\right)'\Leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha(t)}=-\dfrac{1}{4}t+c, c\in\mathbb{R}$.

Για $t=1$ είναι $\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}+c\Leftrightarrow c=\dfrac{3}{4}$

Άρα $\dfrac{1}{\alpha(t)}=-\dfrac{t}{4}+\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha(t)}=\dfrac{3-t}{4}\Leftrightarrow\alpha(t)=\dfrac{4}{3-t}$ cm/sec.

Πρέπει $\begin{cases}\alpha(t)>0\\ t\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4}{3-t}>0\\ t\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t<3\\ t\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow t\in[0,3)$

Επίσης είναι $\alpha(0)=\dfrac{4}{3}$ cm, επομένως $E(0)=\alpha^2(0)=\dfrac{16}{9}$ cm^2.

Σύνθετες ασκήσεις

86.α) Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^x f(x)-e^{x_0}f(x_0)}{x-x_0}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^x f(x)-e^x f(x_0)+e^x f(x_0)-e^{x_0}f(x_0)}{x-x_0}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[e^x\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\dfrac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}\right]$ (1)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Έστω $\varphi(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x)=e^x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}=\varphi'(x_0)=e^{x_0}$, οπότε η (1) γίνεται:

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^x f(x)-e^{x_0}f(x_0)}{x-x_0}=e^{x_0}f'(x_0)+f(x_0)e^{x_0}=e^{x_0}\left(f(x_0)+f'(x_0)\right)$

β) Για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ είναι $e^{x_0}\left(f(x_0)+f'(x_0)\right)=e^{x_0}$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$

είναι $e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=e^x\Leftrightarrow e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\Leftrightarrow\left(e^x f(x)\right)'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow$

$e^x f(x)=e^x+c\Leftrightarrow f(x)=1+ce^{-x}$, $c\in\mathbb{R}$. Είναι $f(0)=2\Leftrightarrow 1+c=2\Leftrightarrow c=1$,

οπότε $f(x)=1+e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x^3-3x+2=e^{-x}-x^3-3x+3$.

Έστω ότι η h έχει δύο ρίζες $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Η h είναι συνεχής στο

$[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $h'(x)=-e^{-x}-3x^2-3$ και

$h(x_1)=h(x_2)=0$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα

υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow -e^{-\xi}-3\xi^2-3=0$ που είναι

άτοπο αφού $-e^{-\xi}-3\xi^2-3<0$. Επομένως η εξίσωση

$h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x^3+3x-2$ δεν έχει δύο ρίζες άρα έχει το πολύ μία ρίζα.

δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=-e^{-x}$ οπότε $f'(0)=-1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο x = 0 είναι η ευθεία ε:

$y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=-x+2$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$g'(x)=\alpha-4x$. Αρχικά πρέπει να υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g'(x_0)=-1\Leftrightarrow$

$\alpha-4x_0=-1\Leftrightarrow\alpha=4x_0-1$ (2)

Η εφαπτομένη της C_g στο x_0 έχει εξίσωση:

$y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-(\alpha x_0-2x_0^2)=-x+x_0\Leftrightarrow$

$y=-x+x_0+\alpha x_0-2x_0^2\overset{(2)}{\Leftrightarrow} y=-x+x_0+(4x_0-1)x_0-2x_0^2\Leftrightarrow$

$y=-x+\cancel{x_0}+4x_0^2-\cancel{x_0}-2x_0^2\Leftrightarrow y=-x+2x_0^2$ (3).

Για να εφάπτεται η ε της C_g πρέπει να υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ για το οποίο η ε να ταυτίζεται με την (3), άρα $2x_0^2=2\Leftrightarrow x_0^2=1\Leftrightarrow x_0=\pm1$

Αν $x_0=1$ τότε $\alpha=4\cdot1-1=3$ και αν $x_0=-1$ τότε $\alpha=-5$.

2ος τρόπος: Είναι $f'(x)=-e^{-x}$ και $f'(0)=-1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο x = 0 είναι η ευθεία ε:

$y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=-x+2$.

Αρχικά πρέπει να υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g'(x_0)=-1$.

Είναι $g'(x)=\alpha-4x$ και $g'(x_0)=-1\Leftrightarrow\alpha-4x_0=-1\Leftrightarrow x_0=\dfrac{\alpha+1}{4}$ (2)

Το σημείο $(x_0,g(x_0))\equiv\left(\dfrac{\alpha+1}{4},\dfrac{\alpha^2-1}{8}\right)$ θα ανήκει στην (ε) οπότε

$\dfrac{\alpha^2-1}{8}=-\dfrac{\alpha+1}{4}+2\Leftrightarrow\alpha^2-1=-2\alpha-2+16\Leftrightarrow\alpha^2+2\alpha-15=0\Leftrightarrow$

$(\alpha=3)$ ή $(\alpha=-5)$.

ε) Αν $\alpha=3$ τότε $g(x)-1=-2x^2+3x-1$. Η γραφική παράσταση της $g(x)-1$ είναι παραβολή με μέγιστο το $y=-\dfrac{\Delta}{4\alpha}=-\dfrac{1}{-8}=\dfrac{1}{8}$ για $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{3}{-4}=\dfrac{3}{4}$,

οπότε $g(x)\le\dfrac{1}{8}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$e^{-x}>0\Leftrightarrow1+e^{-x}>1\Leftrightarrow f(x)>1$, είναι $f(x)>g(x)-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

87.α) Για κάθε $x\in[-2,2]$, έχουμε: $f'(x)+f'(-x)=0\ (1)\Leftrightarrow f'(x)=-f'(-x)\Leftrightarrow$

$f'(x)=[f(-x)]'\Leftrightarrow f(x)=f(-x)+c, c\in\mathbb{R}$, θέτουμε $x=0$, οπότε

$f(0)=f(0)+c\Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)=f(-x)$, που σημαίνει ότι η f είναι άρτια.

β) Στη σχέση (1), για $x=0$ έχουμε $f'(0)+f'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)=0$. Οπότε, το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$. Έστω ότι υπάρχει $\rho\in(-2,2)$, με $\rho\neq0$, ο οποίος είναι ρίζα της $f'(x)=0$. Δηλαδή, $f'(\rho)=f'(0)=0$. Επίσης, η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\rho]$ ή $[\rho,0]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\rho)$ ή $(\rho,0)$,

οπότε σύμφωνα με το θ. Rolle, θα υπάρχει $\xi\in(0,\rho)$ ή $\xi\in(\rho,0)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$, άτοπο, γιατί $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-2,2)$. Άρα, το 0 είναι μοναδική ρίζα της $f'(x)=0$.

γ) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[0,2]$, οπότε υπάρχει $\xi_1\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi_1)=\dfrac{f'(2)-f'(0)}{2}=\dfrac{f'(2)}{2}\Leftrightarrow 2f''(\xi_1)=f'(2)$ (2).

Επειδή $0<\xi_1<2\Leftrightarrow 0<\dfrac{\xi_1}{2}<1$ υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $\dfrac{\xi_1}{2}=x_0\Leftrightarrow$ $\xi_1=2x_0$ (3). Άρα, η (2), με βάση την (3) γίνεται $2f''(2x_0)=f'(2)$.

88.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

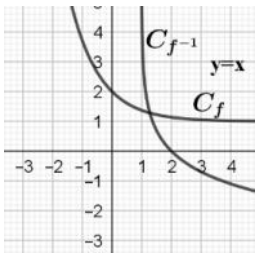
$$g'(x)=(f'(x)-f''(x))e^x+(f(x)-f'(x)+1)e^x\Leftrightarrow$$
$$g'(x)=(f'(x)-f(x)-1)e^x+(f(x)-f'(x)+1)e^x\Leftrightarrow$$
$$g'(x)=(f'(x)-f(x)+1)e^x-(f'(x)-f(x)+1)e^x\Leftrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow$$
$$g(x)=c, c\in\mathbb{R}.$$

β) Είναι $g(0)=2\Leftrightarrow c=2$ οπότε

$$g(x)=2\Leftrightarrow(f(x)-f'(x)+1)e^x=2\Leftrightarrow f(x)-f'(x)+1=2\cdot e^{-x}\Leftrightarrow$$
$$f'(x)-f(x)=-1-2e^{-x},\ x\in\mathbb{R}.$$

γ) Είναι $f'(x)-f(x)=-1-2e^{-x}\Leftrightarrow$

$$f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=-e^{-x}-2e^{-2x}\Leftrightarrow\left(f(x)e^{-x}\right)'=\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)'\Leftrightarrow$$
$$f(x)e^{-x}=e^{-x}+e^{-2x}+c_1\Leftrightarrow f(x)=1+e^{-x}+c_1e^x, c\in\mathbb{R}.$$ Όμως $f(0)=2\Leftrightarrow c_1=0$, άρα $f(x)=1+e^{-x}$.



δ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ είναι $-x_1\neq -x_2\Leftrightarrow$ $e^{-x_1}\neq e^{-x_2}\Leftrightarrow 1+e^{-x_1}\neq 1+e^{-x_2}\Leftrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$, άρα η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε

$$f(x)=y\Leftrightarrow 1-e^{-x}=y\Leftrightarrow -e^{-x}=y-1\Leftrightarrow e^{-x}=1-y$$

(1). Όμως $e^{-x}>0\Leftrightarrow 1-y>0\Leftrightarrow y<1$. Για $y<1$ έχουμε από τη σχέση (1):

$$-x=\ln(1-y)\Leftrightarrow x=-\ln(1-y)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=-\ln(1-y),\text{ άρα}$$
$$f^{-1}(x)=-\ln(1-x),\ x<1.$$

89.α) Αφού $4f''(x)f^3(x)=-1\ (1) \Leftrightarrow 4f''(x)f^3(x)\neq 0$ τότε $f^3(x)\neq 0$ άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Από τη σχέση (1) έχουμε $4f''(x)=-\dfrac{1}{f^3(x)} \overset{\cdot f'(x)}{\Leftrightarrow} 4f''(x)f'(x)=-\dfrac{f'(x)}{f^3(x)} \Leftrightarrow$

$$2\left[\left(f'(x)\right)^2\right]'=\frac{1}{2}\left(-\frac{2f'(x)}{f^3(x)}\right)\Leftrightarrow\left[2\left(f'(x)\right)^2\right]'=\left(\frac{1}{2f^2(x)}\right)'\Leftrightarrow$$

$2\left(f'(x)\right)^2=\dfrac{1}{2f^2(x)}+c, c\in\mathbb{R}$. . Για $x=1$ είναι $2\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}+c\Rightarrow c=0$. Άρα

$\left(f'(x)\right)^2=\dfrac{1}{4f^2(x)}$ (2).

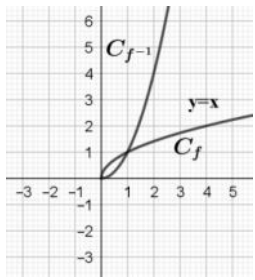
γ) Από τη σχέση (2) έχουμε $\left(2f'(x)f(x)\right)^2=1$ (3) οπότε $2f'(x)f(x)\neq 0$.

Η συνάρτηση $g(x)=2f'(x)f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty), g(x)\neq 0$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,+\infty)$.

Όμως $g(1)=2f'(1)f(1)=1>0$ οπότε $g(x)>0 \Leftrightarrow 2f'(x)f(x)>0$ Από τη σχέση (3) έχουμε : $2f'(x)f(x)=1\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=(x)'\Leftrightarrow f^2(x)=x+c_1, c_1\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ είναι $f^2(0)=c_1\Leftrightarrow c_1=1$ άρα $f^2(x)=x,\ x\in(0,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, $f(x)\neq 0$ και $f(1)>0$ οπότε $f(x)>0$, άρα $f(x)=\sqrt{x}$ στο $(0,+\infty)$. Η f είναι συνεχής, στο 0 οπότε $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$, επομένως $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$.



δ) Για κάθε $x_1, x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε αντιστρέφεται . Θέτουμε

$f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x}=y,\ y\geq 0\Leftrightarrow$

$x=y^2\Leftrightarrow f^{-1}(y)=y^2,\ y\geq 0$ άρα $f^{-1}(x)=x^2,\ x\geq 0$.

Είναι $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow\sqrt{x}=x^2\Leftrightarrow x=x^4\Leftrightarrow x^4-x=0\Leftrightarrow x\left(x^3-1\right)=0\Leftrightarrow$

$(x=0)$ ή $\left(x^3=1\Leftrightarrow x=1\right)$.

90.α) Είναι $f'(x)=e^{x-f(x)}+e^{2\ln x-f(x)}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{e^x}{e^{f(x)}}+\dfrac{e^{\ln x^2}}{e^{f(x)}}\Leftrightarrow$

$e^{f(x)}f'(x)=e^x+x^2 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=\left(e^x+\frac{x^3}{3}\right)' \Leftrightarrow e^{f(x)}=e^x+\frac{x^3}{3}+c, c\in\mathbb{R}$. Για

$x=0$ είναι $e^{f(0)}=1+c \Leftrightarrow 1=1+c \Leftrightarrow c=0$ οπότε $e^{f(x)}=\underbrace{e^x+\frac{x^3}{3}}_{>0} \Leftrightarrow$

$f(x)=\ln\left(e^x+\frac{x^3}{3}\right)$.

β) Έστω ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχει

$\xi\in(\alpha,\beta): f'(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{e^\xi+\xi^2}{e^\xi+\frac{\xi^3}{3}}=0 \Leftrightarrow e^\xi+\xi^2=0$ που είναι άτοπο.

γ) Θέτουμε $e^x+\frac{x^3}{3}=u$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+\frac{x^3}{3}\right)=+\infty$, άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^x+\frac{x^3}{3}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$.

δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{e^x+x^2}{e^x+\frac{x^3}{3}}$. Είναι

$f'(1)=\frac{e+1}{e+\frac{1}{3}}=\frac{3(e+1)}{3e+1}=\frac{3e+3}{3e+1}$, $\lambda_\varepsilon=-\frac{3e+1}{3e+3}$ οπότε

$f'(1)\cdot\lambda_\varepsilon=\frac{\cancel{3e+3}}{\cancel{3e+1}}\cdot\left(-\frac{\cancel{3e+1}}{\cancel{3e+3}}\right)=-1$ άρα η (ε) είναι κάθετη στην εφαπτομένη της C_f στο Α.

91.α) $f(x)f'(x)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=(\eta\mu x)' \Leftrightarrow$

$f^2(x)=\eta\mu x+c, c\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $f^2(0)=9+c \Leftrightarrow 9=9+c \Leftrightarrow c=0$

οπότε $f^2(x)=\eta\mu x+9$. Είναι $f(x)\neq 0$, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(0)=3$, είναι $f(x)>0$, άρα $f(x)=\sqrt{\eta\mu x+9}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) i. Είναι $f(x)e^{-g(x)}-2xe^{-g(x)}=g'(x) \Leftrightarrow \left(f(x)-2x\right)e^{-g(x)}=g'(x) \Leftrightarrow$

$e^{g(x)}g'(x)=f(x)-2x \Leftrightarrow f(x)=e^{g(x)}g'(x)+2x \Rightarrow f(x)=\left(e^{g(x)}+x^2\right)'$. Έστω

$h(x)=e^{g(x)}+x^2$, $x\in\mathbb{R}$ τότε $h'(x)=f(x)$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την h στο $[0,x], x>0$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x),\ x>0$:

$$h'(\xi)=\frac{h(x)-h(0)}{x}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{1}{x}\left(e^{g(x)}+x^2-e^{g(0)}\right).$$

Είναι $-1\le \eta\mu\xi\le 1\Leftrightarrow 8\le \eta\mu\xi+9\le 10\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\le\sqrt{\eta\mu\xi+9}\le\sqrt{10}\Leftrightarrow$

$$2\sqrt{2}\le f(\xi)\le\sqrt{10}\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\le\frac{1}{x}\left(e^{g(x)}+x^2-e^{g(0)}\right)\le\sqrt{10}\Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{2}x\le e^{g(x)}+x^2-e^{g(0)}\le\sqrt{10}x\Leftrightarrow 2\sqrt{2}x-x^2\le e^{g(x)}-e^{g(0)}\le\sqrt{10}x-x^2\Leftrightarrow$$

$$x\left(2\sqrt{2}-x\right)\le e^{g(x)}-e^{g(0)}\le x\left(\sqrt{10}-x\right)..$$

ii. Έστω ότι η εξίσωση $e^{g(x)}+x^2=2x\Leftrightarrow e^{g(x)}+x^2-2x=0$ έχει δύο ρίζες $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ με $\rho_1<\rho_2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=e^{g(x)}+x^2-2x$.

Η φ είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ σαν σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με παράγωγο

$\varphi'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)+2x-2=f(x)-2$, $\varphi(\rho_1)=\varphi(\rho_2)=0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$: $\varphi'(\xi)=0\Leftrightarrow$

$f(\xi)=2\Leftrightarrow\sqrt{\eta\mu\xi+9}=2\Leftrightarrow\eta\mu\xi=-5$ άτοπο. Άρα η εξίσωση

$e^{g(x)}+x^2=2x\Leftrightarrow e^{g(x)}+x^2-2x=0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

92.α) Είναι $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+2h)+2f(x-h)-3f(x)}{h^2}\overset{\text{DLH}}{=}$

$$\lim_{h\to0}\frac{2f'(x+2h)-2f'(x-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f'(x+2h)-f'(x)-f'(x-h)+f'(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to0}\left(\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}-\frac{f'(x-h)-f'(x)}{h}\right)=2f''(x)+f''(x)=3f''(x)\ \text{ γιατί}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f'(x+kh)-f'(x)}{h}\underset{\substack{h\to0\Rightarrow\\u\to0}}{\overset{kh=u\Leftrightarrow h=\frac{u}{k}}{=}}\lim_{u\to0}\frac{f'(x+u)-f'(x)}{\frac{u}{k}}=$$

$$\lim_{u\to0}k\frac{f'(x+u)-f'(x)}{u}=kf''(x),\ k\ne0.\ \text{Άρα}\quad 3f''(x)=-\frac{3}{4x\sqrt{x}}\Leftrightarrow$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4x\cdot x^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\Leftrightarrow\left(f'(x)\right)'=\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right)'\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+c=\frac{1}{2\sqrt{x}}+c,\ c\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\sqrt{x}+cx\right)'\Leftrightarrow$$

$f(x)=\sqrt{x}+cx+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$. Είναι $f(1)=1\Leftrightarrow c+c_1=0\Leftrightarrow c_1=-c\ (1)$,

$f(4)=2\Leftrightarrow 2+2c+c_1=2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}c=0$ οπότε $c_1=0$ άρα $f(x)=\sqrt{x}$.

β) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{AB}=\frac{\sqrt{\xi}-0}{\xi+\xi}=\frac{\sqrt{\xi}}{2\xi}=\frac{\cancel{\sqrt{\xi}}}{2\left(\sqrt{\xi}\right)^{\cancel{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=f'(\xi)$$, οπότε εφάπτεται της C_f στο Α.

γ) Έστω $0\le x_1<x_2$ τότε $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x}=y,\ y\ge 0\Leftrightarrow x=y^2$, άρα $f^{-1}(y)=y^2,\ y\ge 0$ οπότε $f^{-1}(x)=x^2,\ x\ge 0$.

δ) Έστω $B\left(x_1,x_1^2\right),\ x_1>0$ σημείο της $C_{f^{-1}}$. Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\left(f^{-1}\right)'(x)=2x$.Η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο Β είναι η ευθεία ε: $y-x_1^2=2x_1(x-x_1)\Leftrightarrow y=2x_1x-x_1^2$.

Για να διέρχεται η ε από το Γ πρέπει $-1=0-x_1^2\overset{x_1>0}{\Leftrightarrow}x_1=1$, άρα ε: $y=2x-1$.

ε) Έστω $M(x(t),y(t))$ με $y(t)=\sqrt{x(t)}$. Επειδή το Μ αυξάνει διαρκώς την απόστασή του από την αρχή των αξόνων είναι $x'(t)>0$. Είναι

$y'(t)=\frac{1}{2\sqrt{x(t)}}x'(t)$.Τη χρονική στιγμή t_0 που ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, είναι

$$y'(t_0)=\frac{1}{2\sqrt{x(t_0)}}x'(t_0)\Leftrightarrow\frac{\cancel{x'(t_0)}}{}=\frac{1}{2\sqrt{x(t_0)}}\cancel{x'(t_0)}\Leftrightarrow\sqrt{x(t_0)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$x_0=\frac{1}{4}$, άρα $M\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

στ) Είναι $f^{-1}(x)+f^2(x)=\eta\mu x+1\Leftrightarrow x^2+x-\eta\mu x-1=0$.

Έστω $g(x)=x^2+x-\eta\mu x-1,\ x\in[0,\pi]$. Είναι

$g(0)=-1<0,\ g(\pi)=\pi^2+\pi-1>0$ οπότε $g(0)g(\pi)<0$,η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\rho\in(0,\pi):\ g(\rho)=0$.

ζ) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την $f(x)=\sqrt{x}$ οπότε υπάρχει

$\xi\in(\alpha,\beta):\ f'(\xi)=\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}=\dfrac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta-\alpha}$.

Όμως $\alpha<\xi<\beta\Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha}<2\sqrt{\xi}<2\sqrt{\beta}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}>\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}>\dfrac{1}{2\sqrt{\beta}}\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2\sqrt{\beta}}<\dfrac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta-\alpha}<\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}\Leftrightarrow \dfrac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\beta}}<\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}<\dfrac{\beta-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$.

η) Είναι $\xi_1+\ln\left(x-\sqrt{x}\right)=\ln\left(e^x-e^{\sqrt{x}}\right)\Leftrightarrow \xi_1=\ln\left(e^x-e^{\sqrt{x}}\right)-\ln\left(x-\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow$

$\xi_1=\ln\dfrac{e^x-e^{\sqrt{x}}}{x-\sqrt{x}}$. Έστω $h(t)=e^t,\ t\in\left[\sqrt{x},x\right]$, $x>1$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την h οπότε υπάρχει $\xi_1\in\left(\sqrt{x},x\right)$ τέτοιο, ώστε

$h'(\xi_1)=\dfrac{h(x)-h\left(\sqrt{x}\right)}{x-\sqrt{x}}\Leftrightarrow e^{\xi_1}=\dfrac{e^x-e^{\sqrt{x}}}{x-\sqrt{x}}\Leftrightarrow \xi_1=\ln\dfrac{e^x-e^{\sqrt{x}}}{x-\sqrt{x}}$. Είναι

$\sqrt{x}<\xi_1<x\Leftrightarrow \sqrt{x}<\ln\dfrac{e^x-e^{\sqrt{x}}}{x-\sqrt{x}}<x\Leftrightarrow \sqrt{x}<\ln\left(e^x-e^{\sqrt{x}}\right)-\ln\left(x-\sqrt{x}\right)<x$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x-e^{\sqrt{x}}\right)-\ln\left(x-\sqrt{x}\right)\right]=+\infty$.

93.α) Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^2(x)+f(x)\left(1-f(x_0)\right)-f(x_0)}{x-x_0}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^2(x)+f(x)-f(x)f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)\left[f(x)-f(x_0)\right]+f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{\left[f(x)-f(x_0)\right]}{x-x_0}\left(f(x)+1\right)\right]=f'(x_0)\left(f(x_0)+1\right)$. Άρα για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x_0)\left(f(x_0)+1\right)=\left(e^{x_0}+x_0\right)\left(e^{x_0}+1\right)$, οπότε

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\left(f(x)+1\right)f'(x)=\left(e^x+x\right)\left(e^x+1\right)$.

β) Εστω $\varphi(x)=e^x+x,\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ (1), είναι $e^{x_1} < e^{x_2}$ (2). Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $e^{x_1}+x_1 < e^{x_2}+x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi \nearrow \mathbb{R}$.

Είναι $\varphi(-1)=e^{-1}-1<0,\ \varphi(0)=1>0$, δηλαδή $\varphi(-1)\varphi(0)<0$. Επειδή η φ είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (-1,0)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0$.

Επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι η μοναδική της ρίζα.

γ) Είναι $\left(f(x)+1\right)f'(x)=\left(e^x+x\right)\left(e^x+1\right) \Leftrightarrow$

$\left(f(x)+1\right)\left(f(x)+1\right)'=\left(e^x+x\right)\left(e^x+x\right)' \Leftrightarrow$

$2\left(f(x)+1\right)\left(f(x)+1\right)'=2\left(e^x+x\right)\left(e^x+x\right)' \Leftrightarrow$

$\left[\left(f(x)+1\right)^2\right]'=\left[\left(e^x+x\right)^2\right]' \Leftrightarrow \left(f(x)+1\right)^2=\left(e^x+x\right)^2+c,\ c\in\mathbb{R}$ (1)

Για x = 1η (1) γίνεται: $\left(f(1)+1\right)^2=\left(e+1\right)^2+c \Leftrightarrow \left(e+1\right)^2=\left(e+1\right)^2+c \Leftrightarrow c=0$,

άρα $\left(f(x)+1\right)^2=\left(e^x+x\right)^2 \Leftrightarrow \left|f(x)+1\right|=\left|\varphi(x)\right|$ (2).

Για κάθε $x<x_0 \overset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x)<\varphi(x_0)=0$ και για κάθε $x>x_0 \overset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x)>\varphi(x_0)=0$.

Έστω $g(x)=f(x)+1,\ x\in\mathbb{R}$. Η (2) γράφεται: $\left|g(x)\right|=\left|\varphi(x)\right|$ (3)

Είναι $g(x)=0 \Leftrightarrow \left|\varphi(x)\right|=0 \Leftrightarrow \varphi(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$.

Για κάθε $x\neq x_0$ είναι $g(x)\neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,x_0)$ και $(x_0,+\infty)$.

Είναι $g(-1)=f(-1)+1=\frac{1}{e}-1<0$, άρα $g(x)<0$ για κάθε $x<x_0$ και επειδή $\varphi(x)<0$, η (3) γίνεται: $-g(x)=-\varphi(x) \Leftrightarrow g(x)=\varphi(x)$.

Είναι $g(1)=f(1)+1=e+1>0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x>x_0$ και επειδή $\varphi(x)>0$, η (3) γίνεται: $g(x)=\varphi(x)$. Επομένως $g(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\neq x_0\\ 0, & x=x_0\end{cases}$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)=\varphi(x) \Leftrightarrow f(x)+1=e^x+x \Leftrightarrow f(x)=e^x+x-1$.

δ) Είναι $h(x)=x^2\left(f(x)+1\right)^2=x^2\varphi^2(x)$ όπου $\varphi(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$ με $\varphi(x_0)=0$ (από β)

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με
$h'(x)=2x\varphi^2(x)+x^2\cdot 2\varphi(x)\varphi'(x)=2x\varphi(x)\left(\varphi(x)+x\varphi'(x)\right)$.
Είναι $h'(0)=0$, $h'(x_0)=0$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\varphi(x)+x\varphi'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.
Η h είναι συνεχής στο $[0,x_0]$,παραγωγίσιμη στο $(0,x_0)$, $h(0)=h(x_0)=0$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle,άρα υπάρχει $\rho\in(x_0,0)$ τέτοιο, ώστε $h'(\rho)=0\Leftrightarrow 2\rho\varphi(\rho)\left(\varphi(\rho)+\rho\varphi'(\rho)\right)=0\Leftrightarrow\varphi(\rho)+\rho\varphi'(\rho)=0$.
Άρα η εξίσωση $h'(x)=0$ έχει τουλάχιστον τρείς ρίζες τις $0,x_0,\rho$, οπότε η h δέχεται τουλάχιστον 3 οριζόντιες εφαπτόμενες.
ε) Είναι $x\left(e^x+1\right)<e^{2x}-e^x+x<x\left(e^{2x}+1\right)\Leftrightarrow$
$xf'(x)<e^{2x}+2x-1-\left(e^x+x-1\right)<xf'(2x)\Leftrightarrow$
$xf'(x)<f(2x)-f(x)<xf'(2x)\Leftrightarrow f'(x)<\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}<f'(2x)$ (4).
Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο [x,2x] με $x>0$, οπότε υπάρχει $\xi\in(x,2x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$, οπότε η (4) γίνεται:
$f'(x)<f'(\xi)<f'(2x)\Leftrightarrow$
$e^x+1<e^{\xi}+1<e^{2x}+1\Leftrightarrow e^x<e^{\xi}<e^{2x}\Leftrightarrow x<\xi<2x$ ισχύει.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

23199.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=2f(x)f'(x)-\dfrac{1}{x}$. Όμως για κάθε $x>1$ είναι
$xf(x)f'(x)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f(x)f'(x)=\dfrac{1}{2x}$, άρα
$g'(x)=2\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}=0\Leftrightarrow g(x)=c,\ c\in\mathbb{R},\ x>1$.
Είναι $g(e)=f^2(e)-\ln e=1-1=0\Leftrightarrow c=0$, άρα για κάθε $x>1$ είναι
$g(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)-\ln x=0\Leftrightarrow f^2(x)=\ln x\Leftrightarrow|f(x)|=\sqrt{\ln x}$.
Για κάθε $x>1$ είναι $\ln x>0\Leftrightarrow\sqrt{\ln x}>0\Leftrightarrow|f(x)|>0\Leftrightarrow f(x)\neq 0$, η f είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f(e)=1>0$, οπότε για κάθε $x>1$ είναι $f(x)>0$, άρα $f(x)=\sqrt{\ln x}$.

β) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\frac{1-0}{e+e}=\frac{1}{2e}$.

Η ευθεία ΑΒ εφάπτεται της C_f στο Β αν και μόνο αν $f'(e)=\lambda_{AB}=\frac{1}{2e}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}(\ln x)'=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

Είναι $f'(e)=\frac{1}{2e\sqrt{\ln e}}=\frac{1}{2e}$, άρα η ευθεία ΑΒ εφάπτεται της C_f στο Β.

γ) Για κάθε $x>1$ είναι $\frac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\frac{1}{x}\Leftrightarrow$

$\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$.

Για τη συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x,\ x>1$, ισχύει το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα [x, x+1], οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε

$\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}=\ln(x+1)-\ln x$.

Είναι $x<\xi<x+1\Leftrightarrow\frac{1}{x}>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow\ \frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Στη σχέση $f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ (1) θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$, οπότε η σχέση γίνεται

$f'(x)=\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}\Leftrightarrow f'(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1$ (2). Επίσης από τη σχέση (1) έχουμε

$f'\left(\frac{1}{x}\right)f(x)=1\underset{-\frac{1}{x^2}}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}}-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)f(x)=-\frac{1}{x^2}$ (3). Με πρόσθεση κατά μέλη των (2),(3) έχουμε

$f'(x)f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)f(x)=1-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left(f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\left(x+\frac{1}{x}\right)'$ άρα

$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\frac{1}{x}+c,c\in\mathbb{R}$. Για $x=1$ έχουμε $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=1+1+c\Leftrightarrow c=0$.

Συνεπώς, $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\frac{1}{x}\overset{(2)}{\Leftrightarrow}f(x)\frac{1}{f'(x)}=\frac{x^2+1}{x}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{x^2+1}\Leftrightarrow$

$\left(\ln f(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)'$. Άρα $\ln f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$.Για $x = 1$ είναι $\ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$ οπότε $\ln f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow$ $\ln f(x) = \ln\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1}$. **Σωστή απάντηση Δ.**

2. Είναι $f'(x) = e^{2x} f(-x)\ (1) \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) = e^{x} f(-x)\ (2)$. Θέτουμε στην (2) όπου x το $\frac{1}{x}$ οπότε $e^{x} f'(-x) = e^{-x} f(x)\ (3)$. Προσθέτουμε τις (2),(3) κατά μέλη οπότε έχουμε $e^{-x} f'(x) + e^{x} f'(-x) = e^{x} f(-x) + e^{-x} f(x) \Leftrightarrow$ $e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^{x} f(-x) - e^{x} f'(-x) \Leftrightarrow$ $\left(e^{-x} f(x)\right)' = \left(e^{x} f(-x)\right)' \Leftrightarrow e^{-x} f(x) = e^{x} f(-x) + c, c \in \mathbb{R}$. .Για $x = 0$ είναι $c = 0$ οπότε $e^{-x} f(x) = e^{x} f(-x) \overset{\cdot e^{x}}{\Leftrightarrow} f(x) = e^{2x} f(-x)\ (4)$. Από (1) και (4) θα είναι $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = c_1 e^{x}, c_1 \in \mathbb{R}$. Για $x = 0$ είναι $c = 0$ οπότε $f(x) = e^{x}$
Σωστή απάντηση Β.

3. Είναι $f'(x)\sigma\upsilon\nu x = f(x)(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \Leftrightarrow$

$f'(x)\sigma\upsilon\nu x + f(x)\eta\mu x = f(x)\sigma\upsilon\nu x \underset{\div\sigma\upsilon\nu^2 x \neq 0}{\overset{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}}$

$\frac{f'(x)\sigma\upsilon\nu x + f(x)\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$ άρα $\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = ce^{x}, c \in \mathbb{R}$

Για $x = 0$ θα είναι $c = 1$, οπότε $f(x) = e^{x}\sigma\upsilon\nu x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Όμως η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ οπότε $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^{+}} \left(e^{x}\sigma\upsilon\nu x\right) = 0$ και

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^{-}} \left(e^{x}\sigma\upsilon\nu x\right) = 0$.Συνεπώς , $f(x) = e^{x}\sigma\upsilon\nu x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Σωστή απάντηση Β.

4. Θέτουμε $21 - x = \omega$ οπότε η σχέση $f(x-21)f'(21-x) = 21 - x$ γίνεται $f(-\omega)f'(\omega) = \omega\ (1)$. Θέτουμε στην (1) όπου ω το -ω και έχουμε $f(\omega)f'(-\omega) = -\omega\ (2)$. Με αφαίρεση των (1),(2) κατά μέλη έχουμε $f(-\omega)f'(\omega) - f(\omega)f'(-\omega) = 2\omega \Leftrightarrow \left[f(\omega)f(-\omega)\right]' = \left(\omega^2\right)'$

$f(\omega)f(-\omega)=\omega^2+c, c\in\mathbb{R}$.Για $\omega=0$ θα είναι $c=1$ οπότε

$f(x)f(-x)=x^2+1\neq 0$ (3)

Από την (1) για $x\neq 0$ θα είναι $f'(x)\neq 0$ οπότε $f(-x)=\dfrac{x}{f'(x)}$ (4)

Η (3) με βάση την (4) γίνεται $f(x)\dfrac{x}{f'(x)}=x^2+1\Leftrightarrow f'(x)-\dfrac{x}{x^2+1}f(x)=0$

$e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}f'(x)-\dfrac{x}{x^2+1}e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}f(x)=0\Leftrightarrow\left[e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}f(x)\right]'=0$. Άρα

$e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}f(x)=c_1, c_1\in\mathbb{R}$.. Για $x=0$ είναι $c_1=1$ οπότε

$e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}f(x)=1\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}=e^{\ln\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}$, $x\neq 0$.

Όμως $f(0)=1$ οπότε $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Σωστή απάντηση Α.

5. Είναι $(x-1)(x-3)f'(x)=-2f(x)-1\Leftrightarrow$

$(x^2-4x+3)f'(x)+(2x-4)f(x)=(2x-4)f(x)-2f(x)-1$

$\left[(x-1)(x-3)f(x)\right]'=2(x-3)f(x)-1$ (2) . Έστω $(x-3)f(x)=g(x)$ τότε η (2) γίνεται $\left[(x-1)g(x)\right]'=2g(x)-1\Leftrightarrow$

$g(x)+(x-1)g'(x)=2g(x)-1\Leftrightarrow (x-1)g'(x)-g(x)=-1$

$\underset{\div(x-1)^2}{\overset{x\in(1,3)}{\Leftrightarrow}}\dfrac{(x-1)g'(x)-g(x)}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{(x-1)^2}\Leftrightarrow\left(\dfrac{g(x)}{x-1}\right)'=\left(\dfrac{1}{x-1}\right)'\Leftrightarrow$

$\dfrac{g(x)}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}+c, c\in\mathbb{R}$ Για $x=2$ προκύπτει $c=0$ άρα

$g(x)=1\Leftrightarrow(x-3)f(x)=1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

Σωστή απάντηση Γ.

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος									
1. Σ	**2.** Λ	**3.** Λ	**4.** Λ	**5.** Λ	**6.** Σ	**7.** Λ	**8.** Λ	**9.** Λ	**10.** Σ
11. Λ	**12.** Σ	**13.** Σ	**14.** Σ						

Κριτήριο αξιολόγησης
Θεωρήματα Συνέχειας έως και Εύρεση Συνάρτησης

Θέμα Α

Α1. α) Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$ είναι συνεχής στο $[0,5]$ έχει δύο ρίζες στο διάστημα αυτό, τις $x=1$ και $x=3$, όμως $f(0)f(5)=24>0$



Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x+2, & 1\le x<3\\ -x+4, & 3\le x\le 5\end{cases}$ έχει 2 ρίζες στο $[1,5]$ τις 2 και 4, είναι $f(1)f(5)<0$ όμως δεν είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. ($\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-1\neq f(3)=1$)



β) Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & x\in\left[-1,\frac{1}{4}\right)\\ x-\frac{1}{4}, & x\in\left[\frac{1}{4},1\right]\end{cases}$,παρατηρούμε ότι:

Δεν είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ($\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}^-} f(x)=\frac{31}{16}\neq f\left(\frac{1}{4}\right)=0$)

- Δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$

- $f(-1)=1\neq\frac{3}{4}=f(1)$ Όμως στο $x_0=0$ ισχύει: $f'(0)=0$

Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$ είναι συνεχής στο $[1,4]$ παραγωγίσιμη στο $(1,4)$, $f(1)=0\neq f(4)=3$, όμως $f'(\xi)=0\Leftrightarrow 2\xi-4=0\Leftrightarrow\xi=2$

Α2. Για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$ είναι $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, όμως η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, όπως διαπιστώνουμε και στο διπλανό σχήμα.

Α3. α) Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Σ **ζ)** Σ **η)** Σ **θ)** Λ **ι)** Λ

Θέμα Β

Β1. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ (1), τότε $x_1^7<x_2^7$ (2) .Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $x_1^7+x_1<x_2^7+x_2\Leftrightarrow$

$x_1^7 + x_1 + 1 < x_2^7 + x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^7 + x + 1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^7 = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^7 + x + 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^7 = +\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$. Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών και η f είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικός $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(\rho) = 0$.

Β2. Αρκεί η εξίσωση $f(x) = 5x - 2 \Leftrightarrow x^7 + x + 1 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^7 - 4x + 3 = 0$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$. Έστω $g(x) = x^7 - 4x + 3,\ x \in [0,1]$. Παρατηρούμε ότι $g(1) = 0$, οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano για τη g στο $[0,1]$ και γι αυτό παραγοντοποιούμε τη g. Με βάση το διπλανό σχήμα Horner είναι

1	0	0	0	0	0	-4	3	ρ = 1
	1	1	1	1	1	1	-3	
1	1	1	1	1	1	-3	0	

$g(x) = (x-1)\left(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 3\right)$. Έστω $h(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 3,\ x \in [0,1]$.

Είναι $h(0) = -3,\ h(1) = 3$, δηλαδή $h(0)h(1) < 0$.

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο,. ώστε $h(x_0) = 0$. Είναι $g(x) = (x-1)h(x)$ οπότε $g(x_0) = (x_0 - 1)\underbrace{h(x_0)}_{0} = 0$.

Β3. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, άρα $A_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R}$.

Β4. Έστω ότι $f^{-1}(3) = a$ τότε $f\left(f^{-1}(3)\right) = f(a) \Leftrightarrow f(a) = 3 \Leftrightarrow$ $f(a) = f(1) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} a = 1$ οπότε $f^{-1}(3) = 1$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ (3) .Με παραγώγιση της σχέσης (3) κατά μέλη έχουμε

$\left[f^{-1}\left(x^7 + x + 1\right)\right]' = (x)' \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'\left(x^7 + x + 1\right)\cdot\left(x^7 + x + 1\right)' = 1 \Leftrightarrow$

$\left(f^{-1}\right)'\left(x^7 + x + 1\right)\cdot\left(7x^6 + 1\right) = 1$ (4).

Για $x = 1$ από τη σχέση (4) έχουμε $\left(f^{-1}\right)'(3)\cdot 8 = 1 \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{8}$.

Η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_1 = 3$ έχει εξίσωση:

$y-f^{-1}(3)=\left(f^{-1}\right)'(3)(x-3)\Leftrightarrow y-1=\frac{1}{8}(x-3)\Leftrightarrow$

$y=\frac{1}{8}x-\frac{3}{8}+1\Leftrightarrow y=\frac{1}{8}x+\frac{5}{8}$

Β5. Έστω $M(x(t),y(t))$, τότε $y(t)=\frac{1}{8}x(t)+\frac{5}{8}$ με $x'(t)=8\text{cm}/\sec$.

α) Είναι $d=(OM)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{x^2(t)+\left(\frac{1}{8}x(t)+\frac{5}{8}\right)^2}=$

$\sqrt{\frac{65}{64}x^2(t)+\frac{10}{64}x(t)+\frac{25}{64}}\Leftrightarrow$

$d=(OM)=\sqrt{\frac{5}{64}\left(13x^2(t)+2x(t)+5\right)}=\frac{1}{8}\sqrt{5\left(13x^2(t)+2x(t)+5\right)}$.

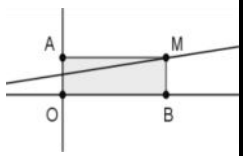
Επομένως $d(t)=\frac{1}{8}\sqrt{5\left(x^2(t)+2x(t)+5\right)}$, $t\geq 0$ .Hd είναι παραγωγίσιμη με

παράγωγο $d'(t)=\frac{5}{8}\frac{2x(t)x'(t)+2x'(t)}{2\cdot\sqrt{5\left(x^2(t)+2x(t)+5\right)}}=\frac{5x'(t)\left(x(t)+1\right)}{8\cdot\sqrt{5\left(x^2(t)+2x(t)+5\right)}}$

Τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $x(t_0)=3$ και $y(t_0)=1$, είναι:

$d'(t_0)=\frac{5x'(t_0)\left(x(t_0)+1\right)}{8\cdot\sqrt{5\left(x^2(t_0)+2x(t_0)+5\right)}}=\frac{\cancel{40}^{5}(3+1)}{\cancel{8}\sqrt{5\left(3^2+6+5\right)}}=\frac{20}{\sqrt{100}}=\frac{20}{10}=2$ cm/sec

β) Το ορθογώνιο ΟΑΜΒ έχει εμβαδό



$E=(OA)(OB)=y(t)x(t)=\left(\frac{1}{8}x(t)+\frac{5}{8}\right)x(t)=$

$\frac{1}{8}x^2(t)+\frac{5}{8}x(t)$. Είναι $E(t)=\frac{1}{8}x^2(t)+\frac{5}{8}x(t)$, $t\geq 0$ με

$E'(t)=\frac{1}{\cancel{8}^{4}}\cancel{2}x(t)x'(t)+\frac{5}{8}x'(t)$.Τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$E'(t_0)=\frac{1}{4}x(t_0)x'(t_0)+\frac{5}{8}x'(t_0)=\frac{1}{4}\cdot 3\cdot 8+\frac{5}{8}\cdot 8=11\text{cm}^2/\sec$

Θέμα Γ

Γ1. Έστω ότι η f' δεν αντιστρέφεται. Τότε θα (α,β) υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ τέτοια ώστε $f'(\alpha)=f'(\beta)$. Η f' είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$,παραγωγίσιμη στο (α,β) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο που είναι άτοπο.

Επομένως η f' αντιστρέφεται.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$,παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, $f(0)=f(1)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi_1 \in (0,1): f'(\xi_1)=0$. Επειδή η f' αντιστρέφεται είναι 1-1, οπότε το ξ_1 είναι μοναδικό.

Γ3. Έστω ότι η f είχε τρείς ρίζες ρ_1,ρ_2,ρ_3 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ .Hf είναι συνεχής στα $[\rho_1,\rho_2],[\rho_2,\rho_3]$,παραγωγίσιμη στα $(\rho_1,\rho_2),(\rho_2,\rho_3)$, $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in (\rho_1,\rho_2), x_2 \in (\rho_1,\rho_3)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

Η f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$,παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα η εξίσωση $f''(x)=0$ τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_1,x_2) , που είναι άτοπο αφού $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ4. Είναι $f'(x)+(2x-1)f(x)=0 \Leftrightarrow e^{x^2-x}f'(x)+(2x-1)e^{x^2-x}f(x)=0$

Έστω $g(x)=e^{x^2-x}f(x)$, $x\in[0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $g'(x)=e^{x^2-x}f'(x)+(2x-1)e^{x^2-x}f(x)$.Επειδή $g(0)=f(0)=f(1)=g(1)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow$

$e^{\xi^2-\xi}f'(\xi)+(2\xi-1)e^{\xi^2-\xi}f(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)+(2\xi-1)f(\xi)=0$

Γ5. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ισχύει το θεώρημα ελάχιστης –μέγιστης τιμής άρα υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[0,1]$.Άρα $m\le f\left(\frac{1}{3}\right)\le M\ (1)$, $m\le f(0,2)\le M\ (2)$, $m\le f\left(\frac{1}{e}\right)\le M\ (3)$.Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1),(2) και (3) έχουμε:

$3m\le f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0,2)+f\left(\frac{1}{e}\right)\le 3M \Leftrightarrow m\le \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0,2)+f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}\le M$. Επειδή ο αριθμός $\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0,2)+f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f, υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0,2)+f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}$.

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f'(x)f(x)-e^{-x}\left(f(x)-f'(x)\right)-e^{-2x}=0 \Leftrightarrow$

$2f'(x)f(x)-2\left(e^{-x}f(x)-e^{-x}f'(x)\right)-2e^{-2x}=0\Leftrightarrow$

$\left(f^2(x)+2f(x)e^{-x}+e^{-2x}\right)'=0\Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)e^{-x}+e^{-2x}=c\Leftrightarrow$

$\left(f(x)+e^{-x}\right)^2=c$. Για $x=0$ είναι $\left(f(0)+1\right)^2=c\Leftrightarrow c=9$ άρα

$\left(f(x)+e^{-x}\right)^2=9$ (1). Έστω $g(x)=f(x)+e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Επειδή $g^2(x)=9\neq 0$ είναι $g(x)\neq 0$. Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $g(0)=3>0$ άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται:

$\left(f(x)+e^{-x}\right)^2=9\Leftrightarrow g^2(x)=9\Leftrightarrow g(x)=3\Leftrightarrow f(x)+e^{-x}=3\Leftrightarrow f(x)=3-e^{-x}$

Δ2. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι και 1-1, οπότε δεν υπάρχουν $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ με $\gamma<\delta$ τέτοια, ώστε $f(\gamma)=f(\delta)$. Άρα δεν υπάρχει διάστημα $[\gamma,\delta]$ στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f.

Δ3. Αν $\alpha=\beta$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha<\beta$ τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f'(x)=e^{-x}$, ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow e^{-\xi}=\dfrac{\cancel{\beta}-e^{-\beta}-\cancel{\beta}+e^{-\alpha}}{\beta-\alpha}=\dfrac{e^{-\alpha}-e^{-\beta}}{\beta-\alpha}$.

Είναι $\alpha<\xi<\beta\Leftrightarrow-\alpha>-\xi>-\beta\Leftrightarrow e^{-\beta}<e^{-\xi}<e^{-\alpha}\Leftrightarrow e^{-\beta}<\dfrac{e^{-\alpha}-e^{-\beta}}{\beta-\alpha}<e^{-\alpha}\Leftrightarrow$

$e^{-\beta}(\beta-\alpha)<e^{-\alpha}-e^{-\beta}<e^{-\alpha}(\beta-\alpha)$. Όμοια αν $\alpha>\beta$.

Δ4. Είναι : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-e^{-x}+e^{-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-e^{-x}-\left(3-e^{-1}\right)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

Δ5. Είναι : $f\left(f(x_0)\right)=\dfrac{3e-1}{e}=3-e^{-1}\Leftrightarrow f\left(f(x_0)\right)=f(1)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}f(x_0)=1$.

Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-e^{-x}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-e^{-x}\right)=3$,

η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει σύνολο τιμών το

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,3)$.

Επειδή $1\in f(A)$ και $f\nearrow\mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=1$.

Κριτήριο αξιολόγησης έως και τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ.

Θέμα Α

Α1. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

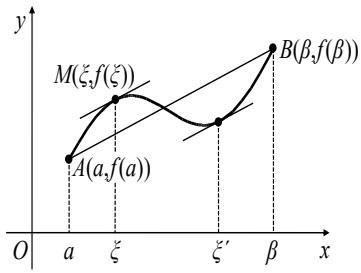
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)},$$

οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή. $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Στο $x_0=0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Α2. Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$



Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.

Α3. α) Ψευδής

β) Εφαρμόζοντας ΘΜΤ για την f στο $[0,3]$, έχουμε ότι υπάρχει $x_0\in(0,3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Η εφαπτομένη στο $x_0\in(0,3)$ έχει κλίση $\lambda=f'(x_0)=\varepsilon\varphi\omega\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\omega=30^o$

Α4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3+1\right)=2=f(1)$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+x\right)=2$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$, η f είναι συνεχής στο x = 1. Επιπλέον η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,1)$ και $(1,2]$ ως πολυωνυμική, οπότε η f είναι συνεχής στο $[0,2]$. Είναι

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+1\right)}{\cancel{x-1}}=3 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}}=3, \text{ οπότε η f είναι}$$

παραγωγίσιμη στο x = 1 με $f'(1)=3$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f'(x)=3x^2$ και στο $(1,2)$ με $f'(x)=2x+1$, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$. Επομένως για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[0,2]$ άρα υπάρχει $\xi\in(0,2)$ για τα οποία $f'(\xi)=\frac{6-1}{2}=\frac{5}{2}$.

Αν $\xi\in(0,1)$ τότε $f'(\xi)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 3\xi^2=\frac{5}{2}\Leftrightarrow \xi^2=\frac{5}{6}\overset{\xi>0}{\Leftrightarrow}\xi=\sqrt{\frac{5}{6}}$ δεκτή.

Αν $\xi\in(1,2)$ τότε $f'(\xi)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2\xi+1=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2\xi=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \xi=\frac{3}{4}<1$ απορρίπτεται.

Β2. Αν $f(x)=x^2+x,\ x>1$, τότε

$A_{f\circ g}=\{x\in A_g / g(x)\in A_f\}=\{x>0/\ln x>1\}=\{x>0/x>e\}=(e,+\infty)$

και $(f\circ g)(x)=\ln^2 x+\ln x$. Αν $f(x)=x^3+1,\ x\le 1$, τότε

$A_{f\circ g}=\{x\in A_g / g(x)\in A_f\}=\{x>0/\ln x\le 1\}=\{x>0/x\le e\}=(0,e]$

και $(f\circ g)(x)=\ln^3 x+1$. Άρα $(f\circ g)(x)=\begin{cases}\ln^3 x+1,\ x\in(0,e]\\ \ln^2 x+\ln x,\ x\in(e,+\infty)\end{cases}$.

Β3. α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=-\infty$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{2}$

Β4. Επειδή το σημείο $M(\alpha,f(\alpha)),\ \alpha>1$ απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με ταχύτητα 0,5cm/sec, είναι $\alpha'(t)=0,5\text{cm/sec}$. Η ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από τον άξονα x΄x είναι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του, οπότε $y'(t)=\left(f(\alpha(t))\right)'=f'(\alpha(t))\alpha'(t)=(2\alpha(t)+1)\alpha'(t)$

Τη χρονική στιγμή t_0 που διέρχεται από το σημείο $A(3,12)$, είναι $\alpha(t_0)=3$, οπότε $y'(t_0)=(2\alpha(t_0)+1)\alpha'(t_0)=7\cdot 0,5=3,5\text{cm/sec}$

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $\left[e^{f(x)}f'(x)-e^{f(x)}\right]^2-2\left[e^{f(x)}f'(x)-e^{f(x)}\right](x-1)\le-(x-1)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[e^{f(x)}f'(x)-e^{f(x)}\right]^2-2\left[e^{f(x)}f'(x)-e^{f(x)}\right](x-1)+(x-1)^2\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[e^{f(x)}f'(x)-e^{f(x)}-x+1\right]^2\le 0 \Leftrightarrow \left[e^{f(x)}f'(x)-e^{f(x)}-x+1\right]^2=0 \Leftrightarrow$

$e^{f(x)}f'(x)+1=e^{f(x)}+x \Leftrightarrow \left[e^{f(x)}+x\right]'=e^{f(x)}+x \Leftrightarrow e^{f(x)}+x=ce^x, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$e^{f(x)}=ce^x-x$. Για $x=0: e^{f(0)}=ce^0 \Leftrightarrow c=1$

Επίσης γνωρίζουμε ότι $\ln x<x<e^x$ άρα $e^x>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $e^{f(x)}=e^x-x \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$

Γ2. Είναι $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)=\ln\left(e^x-\ln e^x\right)$, $x\in\mathbb{R}$

Έστω οι συναρτήσεις $n(x)=x-\ln x$, $x>0$ και $k(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$

Για το πεδίο ορισμού της σύνθεσης της k με την n έχουμε:

$D_{n\circ k}=\begin{cases} x\in D_k \\ k(x)\in D_n \end{cases}=\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ e^x>0 \end{cases}=\mathbb{R}$. Η $n\circ k$ έχει τύπο

$(n\circ k)(x)=n(k(x))=e^x-\ln e^x=e^x-x$.

Έστω και η συνάρτηση $h(x)=\ln x$, $x>0$

Είναι $D_{h\circ(n\circ k)}=\begin{cases} x\in D_{n\circ k} \\ (n\circ k)(x)\in D_h \end{cases}=\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ e^x-x>0 \end{cases}=\mathbb{R}$ και

$\left(h\circ(n\circ k)\right)(x)=\ln\left((n\circ k)(x)\right)=\ln\left(e^x-x\right)=f(x)$

Γ3. Η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$, $x\in\mathbb{R}$

και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=\dfrac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x-x\right)^2}=$

$=\dfrac{\cancel{e^{2x}}-xe^x-\cancel{e^{2x}}+2e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}=\dfrac{2e^x-xe^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}$

Παρατηρούμε ότι $f''(0)=1$, επομένως το μηδέν είναι η μία ρίζα.

Τώρα θα αποδείξουμε την ύπαρξη άλλης μίας ρίζας με δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Η εξίσωση είναι $f''(x)=1 \Leftrightarrow f''(x)-1=0 \Leftrightarrow \left(f'(x)-x\right)'=0$.

Έστω η συνάρτηση $g(x)=f'(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο $g'(x)=f''(x)-1$, με $g(0)=g(1)=0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f''(\xi)=1$.

2ος τρόπος:

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = \dfrac{f'(1)-f'(0)}{1-0} = 1$

Γ4. Η $\varphi(x) = -x^{2022}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $\varphi'(x) = -2022x^{2021}$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow -2022x^{2021} < 0 \Leftrightarrow x^{2021} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Είναι $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow -2022x^{2021} > 0 \Leftrightarrow x^{2021} < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Είναι $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow -2022x^{2021} = 0 \Leftrightarrow x^{2021} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Επίσης $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ και αφού $e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Επομένως για $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 < \varphi'(x)$ και για $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 > \varphi'(x)$.Επομένως μοναδικό πιθανό σημείο που δέχονται κοινή εφαπτομένη είναι το μηδέν αφού $x < 0$ είναι $f'(0) = 0 = \varphi'(0)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $(0,0)$ είναι $\varepsilon_1 : y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = f(0) = 0$

Η εφαπτομένη της C_φ στο $(0,0)$ είναι $\varepsilon_2 : y - \varphi(0) = \varphi'(0)x \Leftrightarrow y = \varphi(0) = 0$

Άρα έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη τον άξονα x΄x.

Θέμα Δ

Δ1. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x| \le |x|$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε για $x > 0$ είναι $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$ οπότε $x > \eta\mu x \Leftrightarrow x - \eta\mu x > 0$ και $e^x > e^{\eta\mu x} \Leftrightarrow e^x - e^{\eta\mu x} > 0$, άρα $f(x) > 0$.

Δ2. Έστω $f(t) = e^t$. Η f είναι συνεχής στο $[\eta\mu x, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(\eta\mu x, x)$ με $f'(t) = e^t$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει $\xi \in (\eta\mu x, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\eta\mu x) - f(x)}{\eta\mu x - x} \Leftrightarrow e^\xi = \dfrac{e^{\eta\mu x} - e^x}{\eta\mu x - x}$

Δ3. Είναι $\eta\mu x < \xi < x \Leftrightarrow e^{\eta\mu x} < e^\xi < e^x \Leftrightarrow e^{\eta\mu x} < \dfrac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x} < e^x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} e^{\eta\mu x} \underset{\substack{x\to 0,\\ u\to 0}}{\overset{u=\eta\mu x}{=}} \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1 = \lim\limits_{x\to 0} e^x$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x} = 1$.

Δ4. Είναι $f(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x} = 1 \Leftrightarrow e^x - e^{\eta\mu x} = x - \eta\mu x \Leftrightarrow$

$e^x - e^{\eta\mu x} - x + \eta\mu x = 0$. Έστω $g(x) = e^x - e^{\eta\mu x} - x + \eta\mu x,\ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ με $\rho_1 < \rho_2$. Η g είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $g'(x) = e^x - \sigma\upsilon\nu x e^{\eta\mu x} - 1 + \sigma\upsilon\nu x = (e^x - 1) + \sigma\upsilon\nu x\left(1 - e^{\eta\mu x}\right)$

Επειδή $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$. Όμως

$g'(\xi) = (e^\xi - 1) + \sigma\upsilon\nu\xi\left(1 - e^{\eta\mu\xi}\right) > 0$, γιατί $\xi > \frac{\pi}{2} > 0$ οπότε

$e^\xi > e^0 = 1 \Leftrightarrow e^\xi - 1 > 0,\ \sigma\upsilon\nu\xi < 0$ και $\eta\mu\xi > 0 \Leftrightarrow e^{\eta\mu\xi} > 1 \Leftrightarrow 1 - e^{\eta\mu\xi} < 0$, άρα η εξίσωση $g'(\xi) = 0$ είναι αδύνατη. Οπότε η εξίσωση $f(x) = 1$ δεν έχει δύο ρίζες στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ άρα έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα αυτό.

Δ5. α) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \eta\mu x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right) = +\infty$ γιατί για $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{x}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1 - \frac{e^{\eta\mu x}}{e^x}\right)}{x\left(1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{x}\cdot\frac{1 - e^{\eta\mu x - x}}{1 - \frac{\eta\mu x}{x}}\right] = +\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\eta\mu x - x} \underset{\substack{x\to+\infty \Rightarrow \\ u\to-\infty}}{\overset{\eta\mu x - x = u}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

27 Μονοτονία συνάρτησης

Γραφική παράσταση f και f ΄

26. Έστω ότι η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_1 της f ΄.
Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(-1,0)$ η C_1 είναι πάνω από τον άξονα x΄x, άρα $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Όμως από τη $C_f \equiv C_2$ διαπιστώνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$ που είναι άτοπο. Άρα η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της f ΄.

27. Έστω ότι η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της f ΄. Για $x > 1$ βλέπουμε ότι η C_2 είναι πάνω από τον άξονα x΄x, άρα $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Όμως από τη $C_f \equiv C_1$ διαπιστώνουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ που είναι άτοπο. Επομένως η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_1 της f ΄.

28. Έστω ότι η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_1 της f ΄.
Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(0,+\infty)$ η C_1 είναι πάνω από τον άξονα x΄x, άρα $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Όμως από τη $C_f \equiv C_2$ διαπιστώνουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ που είναι άτοπο. Άρα η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της f ΄.

Αυξημένης δυσκολίας

29. Η καμπύλη C_5 δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο έστω $(x_0,0), x_0 < 0$ άρα είναι γραφική παράσταση παραγώγου συνάρτησης.
Η μοναδική καμπύλη που παριστάνει γραφική παράσταση συνάρτησης παραγωγίσιμης εκτός από ένα σημείο είναι η C_3 .
Άρα η C_5 παριστάνει την γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης που παριστάνει η C_3 .

- Επίσης η C_6 δεν είναι συνεχής άρα είναι γραφική παράσταση παραγώγου συνάρτησης.

Η C_6 τέμνει τον άξονα x΄x σε τρία σημεία με τετμημένες $x_1, 0, x_2$ με

$x_1 < 0 < x_2$. Η C_6 βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x στα διαστήματα $(-\infty, x_1), (0, x_2)$ και πάνω από τον άξονα x΄x στα διαστήματα $(x_1, 0)$ και $(x_2, +\infty)$.Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης που αντιστοιχεί η C_6 αλλάζει μονοτονία σε τρία σημεία οπότε είναι η C_4 .

Άρα η C_6 παριστάνει την γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης που παριστάνει η C_4 .

- Έστω ότι η C_2 παριστάνει συνάρτηση και η C_1 παριστάνει την παράγωγό της .

Η C_1 βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x σε δύο διαστήματα και πάνω από τον άξονα x΄x σε άλλα δύο διαστήματα.. Άρα η συνάρτηση που παριστάνεται από τη C_2 αλλάζει τρεις φορές μονοτονία άτοπο.

Επομένως η C_2 παριστάνει την γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης που παριστάνει η C_1 .

30.Αφού η g ορίζεται στο $\mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης είναι $g(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα η f' παριστάνεται είτε από την C_2 είτε από την C_4 .

Έστω ότι η C_2 παριστάνει την f' , τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x < 0$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα $f \nearrow (-\infty, 0]$ και $f \searrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x < 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) = 0$ πράγμα άτοπο. Άρα η f' παριστάνεται από την C_4 .Επειδή $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 0$ τότε η h ορίζεται για κάθε $x \neq 0$, άρα παριστάνεται είτε από την C_1 είτε από την C_3 . Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με παράγωγο $h'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ και αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ τότε το πρόσημο της h' είναι το ίδιο με την f' . Άρα $h'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$ και $h'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα $h \searrow (-\infty, 0)$ και $h \nearrow (0, +\infty)$. Επομένως η h παριστάνεται από την C_1 .

Μελέτη μονοτονίας

31.α) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$, $\searrow (-\infty, -1], [0, 1]$ και $\nearrow [-1, 0], [1, +\infty)$

β) $f'(x) = \ln x + 1$, $\searrow \left(0, \dfrac{1}{e}\right]$ και $\nearrow \left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$

γ) $f'(x)=\dfrac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+8}}$. Είναι $f\searrow(-\infty,2]$ και $\nearrow[4,+\infty)$

δ) $f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$, είναι $\nearrow(-\infty,1],[3,+\infty)$ και $\searrow[1,2),(2,3]$

ε) $f'(x)=(3x^2-12)e^{x^3-12x}$, $\nearrow(-\infty,-2],\ [2,+\infty)$ και $\searrow[-2,2]$

στ) $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$, $\nearrow\left(0,\sqrt{e}\right]$ και $\searrow\left[\sqrt{e},+\infty\right)$

ζ) $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, $\searrow(-\infty,0),(0,1]$ και $\nearrow[1,+\infty)$

η) $f'(x)=\dfrac{2(x-1)+\ln x}{4x\sqrt{x}}$.

Για κάθε $x>1$ είναι $x-1>0,\ \ln x>0$, άρα $f'(x)>0$ και $\nearrow[1,+\infty)$. Για κάθε $0<x<1$ είναι $x-1<0,\ \ln x<0$, άρα $f'(x)<0$ και $\searrow(0,1]$.

32.α) $f\nearrow(-\infty,1],\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$, $\searrow\left[1,\dfrac{5}{2}\right]$,

β) Είναι $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(1-\sqrt{2-x}\right)=1$,

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(\sqrt{x^2-2x}+1\right)=1=f(2)$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=2$.

Για κάθε $x<2$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}>0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,2]$.

Για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2-2x}}>0\Rightarrow f\nearrow[2,+\infty)$.

γ) $\searrow(-\infty,1],\nearrow[1,+\infty)$, **δ)** $\searrow(-\infty,-3],[0,3],\ \nearrow[-3,0],[3,+\infty)$

33. $3f^2(x)f'(x)-4f(x)f'(x)+5f'(x)=e^x+5\Leftrightarrow$

$f'(x)\left(3f^2(x)-4f(x)+5\right)=e^x+5$. Είναι $e^x+5>0$ και

$3f^2(x)-4f(x)+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

34.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) οπότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0 άρα

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)>0$ άρα $f'(x)>0$ για κάθε x κοντά στο x_0 οπότε υπάρχει υποσύνολο Δ του (α,β), με $x_0\in\Delta$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα.

Αυξημένης δυσκολίας

35. $f'(x)=6\left(2x^2-\lambda x+2\right)$, $\Delta=(\lambda-4)(\lambda+4)$.

Αν $\lambda<-4$ ή $\lambda>4$ τότε $\Delta>0$, η f' έχει δύο ρίζες και αλλάζει πρόσημο, άρα η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Αν $\lambda\in(-4,4)$ τότε

$\Delta<0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

Αν $\lambda=4$ τότε $f'(x)=12(x-1)^2>0$ για κάθε $x\neq 1$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Αν $\lambda=-4$ τότε $f'(x)=12(x+1)^2>0$ για κάθε $x\neq -1$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τελικά $\lambda\in[-4,4]$.

36. Είναι $f'(x)=\dfrac{\lambda^2-4}{(x+1)^2}$. Αν $\lambda=2$ ή -2, τότε $f(x)=4$ οπότε f σταθερή.

Αν $\lambda\in(-2,2)$, τότε $f'(x)<0$, αν $\lambda\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, τότε $f'(x)>0$.

Επομένως για $\lambda\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

37. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,x_0]$ $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f στο $[0,x]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)}{x}$. Είναι $0<\xi<x\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(0)>f'(\xi)>f'(x)$, άρα $\dfrac{f(x)}{x}>f'(x)\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)<0$, οπότε $h'(x)<0$ στο $(0,x_0]$ επομένως $h\searrow(0,x_0]$.

38. Η g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$g'(x)=e^{2x}+\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}+\ln 2$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f

στο $[0,x], x>0$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)}{x}$.Όμως

$0<\xi<x \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(0)<f'(\xi)<f'(x)$, άρα $\dfrac{f(x)}{x}<f'(x)\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)>0$,

άρα $g'(x)>0$ οπότε $g\nearrow(0,+\infty)$.

39.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=\frac{f'(x)e^x-f(x)\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}$$

$\Leftrightarrow g'(x)=\dfrac{e^x\left(f'(x)-f(x)\right)}{e^{2x}}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$ Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω ότι δεν υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε : $f(\xi)\geq f'(\xi)$. Τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θα ισχύει $f(x)<f'(x)$.Τότε η g θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε $g(0)<g(2)\Leftrightarrow\dfrac{f(0)}{e^0}<\dfrac{f(2)}{e^2}\Leftrightarrow 4<0$ που είναι άτοπο. Άρα υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$,τέτοιος ώστε $f(\xi)\geq f'(\xi)$.

40.Είναι $f'(x)>(1-x)f''(x)\Leftrightarrow f'(x)-(1-x)\cdot f''(x)>0$

$\Leftrightarrow f'(x)+(x-1)\cdot f''(x)>0\Leftrightarrow (x-1)'\cdot f'(x)+(x-1)\cdot\left(f'(x)\right)'>0$

$\Leftrightarrow\left[(x-1)f'(x)\right]'>0$ (1).

Θέτουμε $g(x)=(x-1)\cdot f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο

$g'(x)=\left((x-1)f'(x)\right)'>0\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$.

Αν $x>1$, τότε $g(x)>g(1)\Leftrightarrow(x-1)f'(x)>0\Leftrightarrow f'(x)>0$,αν $x<1$, τότε

$g(x)<g(1)\Leftrightarrow(x-1)f'(x)<0\overset{x-1<0}{\Leftrightarrow}f'(x)>0$ άρα $f'(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$.Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής, στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

41. Έστω $g(x)=(x-3)f'(x)$. Είναι $g'(x)>0$, άρα $g\nearrow\mathbb{R}$.

Αν $x>3\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(3)=0\Leftrightarrow(x-3)f'(x)>0\overset{x-3>0}{\Leftrightarrow}f'(x)>0$, αν

$x<3 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(3)=0 \Leftrightarrow (x-3)f'(x)<0 \overset{x-3<0}{\Leftrightarrow} f'(x)>0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής, στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

42.Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης που μας δίνεται έχουμε Είναι $f'(x)=-f'(2-x)$ (1). Από τη σχέση (1) για $x=1$ έχουμε $f'(1)=0$.

Είναι $f''(x)<0 \Rightarrow f'\searrow\mathbb{R}$.

Για κάθε $x<1 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(1)=0 \Rightarrow f\nearrow(-\infty,1]$ και για κάθε

$x>1 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(1)=0 \Rightarrow f\searrow[1,+\infty)$

43.Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ και υπάρχει διάστημα $\Delta_1 \subseteq \Delta$ τέτοιο ώστε $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\Delta_1$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ_1, πράγμα άτοπο αφού $f\nearrow\Delta$.

Αντιστρόφως, αν οι ρίζες της $f'(x)=0$ στο Δ είναι διακριτές τιμές στο Δ (άπειρες ή πεπερασμένες), έστω $\rho_1,\rho_2,...,\rho_v \ldots$, τότε μεταξύ των ριζών θα είναι $f'(x)>0$, η f είναι συνεχής στο Δ άρα $f\nearrow\Delta$.

44.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

Επειδή $f'(x)>0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Επειδή $1<\alpha<\beta$ είναι $f(1)<f(\alpha)<f(\beta) \Leftrightarrow 0<f(\alpha)<f(\beta)$, άρα:

$$\begin{cases} f(\alpha)f(\alpha)<f(\alpha)f(\beta) \\ f(\alpha)f(\beta)<f(\beta)f(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(\alpha)<f(\alpha)f(\beta) \\ f(\alpha)f(\beta)<f^2(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)<\sqrt{f(\alpha)f(\beta)} \\ \sqrt{f(\alpha)f(\beta)}<f(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$f(\alpha)<\sqrt{f(\alpha)f(\beta)}<f(\beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Ε.Τ. οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta): f(\xi)=\sqrt{f(\alpha)f(\beta)} \Leftrightarrow f^2(\xi)=f(\alpha)f(\beta)$.

45.α) Είναι $15x+\left[f'(x)\right]^2=5x^2 \Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2=5x^2-15x=5x(x-3)>0$ για κάθε $x\in(3,+\infty)$, άρα $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(3,+\infty)$ οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(3,+\infty)$.

β) Επειδή η f' είναι συνεχής, $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(3,+\infty)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή επιπλέον $f'(5)<0$, είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(3,+\infty)$

Μονοτονία με χρήση παραγώγων ανώτερης τάξης

46.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=2e^{x+1}-2x-4$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=2e^{x+1}-2$.

Είναι $f''(x)\geq 0\Leftrightarrow 2e^{x+1}-2\geq 0\Leftrightarrow 2e^{x+1}\geq 2\Leftrightarrow e^{x+1}\geq 1=e^0\Leftrightarrow$ $x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$.Επομένως $f''(x)>0$ για κάθε $x>-1$,η f' είναι συνεχής στο $[-1,+\infty)$, άρα $f'\nearrow[-1,+\infty)$.

Άρα για κάθε $x>-1\Leftrightarrow f'(x)>f'(-1)=0$, οπότε $f\nearrow[-1,+\infty)$.

Επίσης $f''(x)<0$ για κάθε $x<-1$,η f' είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$ άρα $f'\searrow(-\infty,-1]$.Επομένως για κάθε $x<-1\Leftrightarrow f'(x)>f'(-1)=0$, άρα $f\nearrow[-1,+\infty)$. Άρα $f\nearrow\mathbb{R}$.

β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=2\ln x+2-2x$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=2\dfrac{1-x}{x}$.

Είναι $f''(x)\geq 0\Leftrightarrow 2\dfrac{1-x}{x}\geq 0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}1-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$.

Επομένως $f''(x)>0$ για κάθε $0<x<1$,η f' είναι συνεχής στο $(0,1]$, άρα. $f'\nearrow(0,1]$. Άρα για κάθε $0<x<1\Leftrightarrow f'(x)<f'(1)=0$, οπότε $f\searrow(0,1]$.

Επίσης $f''(x)<0$ για κάθε $x>1$,η f' είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα $f'\searrow[1,+\infty)$.Επομένως για κάθε $x>1\Leftrightarrow f'(x)<f'(1)=0$, άρα $f\searrow[1,+\infty)$. Άρα $f\searrow\mathbb{R}$.

γ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=4e^x+4x-4$ και δεύτερη παράγωγο, $f''(x)=4e^x+4>0\Rightarrow f'\nearrow\mathbb{R}$.

Επομένως για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>f'(0)=0$ οπότε είναι $\nearrow[0,+\infty)$ και για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<f'(0)=0$ οπότε είναι $\searrow(-\infty,0]$.

δ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=x-1+\sigma\upsilon\nu x$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=1-\eta\mu x>0$ για κάθε $x\neq 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, άρα $f'\nearrow\mathbb{R}$.Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>f'(0)=0$ οπότε $f\nearrow[0,+\infty)$. Επίσης για κάθε $x<0$

είναι $f'(x) < f'(0) = 0$ οπότε $f \searrow (-\infty, 0]$.

ε) Η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 6\sigma\upsilon\nu x - 6 + 3x^2$,

δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 6x - 6\eta\mu x$ και τρίτη παράγωγο

$f^{(3)}(x) = 6 - 6\sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \neq 2k\pi$,άρα $f'' \nearrow \mathbb{R}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > f''(0) = 0$ οπότε $f' \nearrow [0, +\infty)$.

Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$ οπότε $f \nearrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) < f''(0) = 0$ οπότε $f' \searrow (-\infty, 0]$.

Άρα για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$ οπότε $f \nearrow (-\infty, 0]$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

47. Είναι $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 = f(1)$, άρα f συνεχής στο 1.

Για $x < 1$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = \dfrac{e^x (x-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0$.

Για κάθε $x > 1$ η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο

$f'(x) = \left(e^{x \ln x} - \ln x\right)' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) - \dfrac{1}{x}$ και δεύτερη παράγωγο

$f''(x) = e^{x \ln x}(\ln x + 1)^2 + e^{x \ln x}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f' \nearrow [1, +\infty)$.

Επομένως για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > f'(1) = 0$. Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε

$x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής , είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μελέτη μονοτονίας με βοηθητική συνάρτηση

48.α) Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ με παράγωγο

$f'(x) = \dfrac{\dfrac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{x - 1 - x \ln x}{x(x-1)^2}$. Έστω $g(x) = x - 1 - x \ln x,\ x > 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = -\ln x$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) < 0$, άρα $g \searrow [1, +\infty)$.

Επομένως για κάθε $x > 1$ ισχύει $g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ άρα $f \searrow (1, +\infty)$.

Για κάθε $0 < x < 1$, είναι $g'(x) > 0$ άρα $g \nearrow (0, 1]$.

Άρα για κάθε $0 < x < 1$ είναι $g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ οπότε $f \searrow (0,1)$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{x-\ln x-1}{(x-1)^2}$. Έστω $g(x)=x-\ln x-1,\ x>0$. Είναι $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $g'(x)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(0,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, οπότε $g(x)>g(1)=0$. Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $g'(x)>0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, οπότε $g(x)>g(1)=0$. Άρα για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι $g(x)>0$, οπότε $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ με παράγωγο ι $f'(x)=\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$.

Έστω $g(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x,\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Είναι $g'(x)=-x\eta\mu x<0$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, η g είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ άρα $g\searrow\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Επομένως για κάθε $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ είναι $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<g(x)<g(0)=0$, άρα $f'(x)<0$ στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ άρα $f\searrow\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

49.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{\dfrac{\ln(x+1)}{x}-\dfrac{\ln x}{x+1}}{\ln^2(x+1)}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{(x+1)\ln(x+1)-x\ln x}{x(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

Επειδή $x>1$ είναι $x+1>2$ και $\ln^2(x+1)>0$, οπότε το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $(x+1)\ln(x+1)-x\ln x$. Έστω $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x\ln x,\ x\geq 1$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με: $g'(x)=\ln(x+1)+\cancel{(x+1)}\dfrac{1}{\cancel{x+1}}-\ln x-\cancel{x}\dfrac{1}{\cancel{x}}=\ln(x+1)-\ln x$

Είναι $1<x<x+1$ άρα $\ln x<\ln(x+1)\Leftrightarrow g'(x)>0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Για κάθε $x>1$ είναι

$g(x) > g(1) = 2\ln 2 > 0$, οπότε $f'(x) > 0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1+\ln x - x}{x}$.

Έστω $g(x) = 1+\ln x - x,\ x > 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = \dfrac{1-x}{x}$. Για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) < 0$, άρα $g \searrow [1,+\infty)$, οπότε $g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ στο $(1,+\infty)$. Η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα $f \searrow [1,+\infty)$. Για κάθε $0 < x < 1$, είναι $g'(x) > 0$, η g συνεχής στο $(0,1]$ άρα $g \nearrow (0,1]$.Επομένως για $0 < x < 1$ ισχύει $g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ άρα $f \searrow (0,1]$.

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,k)$ με παράγωγο $f'(x) = \dfrac{1-\dfrac{k}{x} - \ln x + \ln k}{(x-k)^2}$.

Έστω $g(x) = 1-\dfrac{k}{x} - \ln x + \ln k,\ x \in (0,k]$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,k]$ με $g'(x) = \dfrac{k-x}{x^2}$. Είναι $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,k)$, η g συνεχής στο $(0,k]$ άρα $g \nearrow (0,k]$. Επομένως για κάθε $0 < x < k$ είναι $g(x) < g(k) = 0$, άρα $f'(x) < 0$ στο $(0,k)$ επομένως $f \searrow (0,k)$.

Εύρεση προσήμου

50.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = 2\ln(x+1) - 2x$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = -\dfrac{2x}{x+1} < 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$. Η f' είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα $f' \searrow [0,+\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) < f'(0) = 0$, η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα $f \searrow [0,+\infty)$.

Επομένως για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \leq f(0) = -5 < 0$, άρα $f(x) < 0$.

β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = 1 - 2x - e^x$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = -2 - e^x < 0 \Rightarrow f' \searrow [0,+\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) < f'(0) = 0$, άρα $f \searrow [0,+\infty)$.

Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0$.

γ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο

$f'(x)=2e^x+2x-2$ και δεύτερη παράγωγο

$f''(x)=2e^x+2>0\Rightarrow f'\nearrow[0,+\infty)$. Άρα για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>f'(0)=0$, άρα $f\nearrow[0,+\infty)$.Επομένως Για κάθε $x\geq 0$ είναι $f(x)\geq f(0)=5>0$.

δ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x)=e^x+18x^5+4x-1$ και δεύτερη παράγωγο

$f''(x)=e^x+90x^4+4>0\Rightarrow f'\nearrow\mathbb{R}$. Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>f'(0)=0$, οπότε $f\nearrow[0,+\infty)$.Άρα για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>f(0)=0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<f'(0)=0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$,

οπότε $f(x)>f(0)=0$.Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

ε) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με παράγωγο $f'(x)=x\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$, άρα $f\nearrow[0,\pi]$. Για κάθε $0<x<\pi \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} 0=f(0)<f(x)<f(\pi)$.

στ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\nu>0\Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$, οπότε για $x>1$ είναι $f(x)>f(1)=0$ και για κάθε $0<x<1$ είναι $f(x)<f(1)=0$

51.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με παράγωγο

$f'(x)=\eta\mu x\left(e^{\sigma\upsilon\nu x}-\sigma\upsilon\nu x-1\right)$.Έστω $g(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x}-\sigma\upsilon\nu x-1$, $x\in[0,\pi]$.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x\geq x+1$ και το ίσον ισχύει μόνο για x = 0, οπότε για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ είναι $e^{\sigma\upsilon\nu x}-\sigma\upsilon\nu x-1>0\Rightarrow f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$, είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό.

β) Είναι $\dfrac{5\pi}{9}>0$, άρα $f\left(\dfrac{5\pi}{9}\right)>f(0)=\dfrac{1}{2}+e>0$.

γ) $0<\dfrac{1}{2}<1<\pi$ και $f\nearrow$ στο $[0,\pi]$, άρα $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<f(1)$.

Αυξημένης δυσκολίας

52.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x+2e^{2x}>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

β) $-\dfrac{1}{100}<0<\dfrac{1}{100}\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(-\dfrac{1}{100}\right)<f(0)<f\left(\dfrac{1}{100}\right)\Leftrightarrow f\left(-\dfrac{1}{100}\right)<0<f\left(\dfrac{1}{100}\right)$

γ) Έστω $g(x)=x^{\frac{1}{2x}}=e^{\frac{\ln x}{2x}}$, $x>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=e^{\frac{\ln x}{2x}}\dfrac{1-\ln x}{2x^2}<0$ για κάθε $x>e$, άρα $g\searrow[e,+\infty)$. Είναι

$5<10<15 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(5)>g(10)>g(15)\Leftrightarrow 5^{\frac{1}{10}}>10^{\frac{1}{20}}>15^{\frac{1}{30}}\Leftrightarrow$

$\sqrt[10]{5}>\sqrt[20]{10}>\sqrt[30]{15}\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(\sqrt[10]{5}\right)>f\left(\sqrt[20]{10}\right)>f\left(\sqrt[30]{15}\right)$

53.α) Επειδή $f''(x)\neq 0$ και η f'' είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.
Αν $f''(x)>0$, τότε $f'\nearrow[\alpha,\beta]$, ενώ αν $f''(x)<0$, τότε $f'\searrow[\alpha,\beta]$.
Άρα η f' είναι γνησίως μονότονη.

β) Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Rolle άρα υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=0$. Είναι $f''(\alpha)>0$ άρα $f''(x)>0$ στο $[\alpha,\beta]$. Τότε για κάθε

$\alpha<x<x_1\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_1)=0\Rightarrow f\searrow[\alpha,x_1]$ οπότε $f(\alpha)>f(x)\Rightarrow f(x)<0$.

Για κάθε $x_1<x<\beta\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x_1)<f'(x)<f'(\beta)\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[x_1,\beta]$, οπότε $f(x_1)<f(x)<f(\beta)=0$.

Σύνολο τιμών

54.α) $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0\Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,
$f(A)=\mathbb{R}$.

β) $f'(x)=4x^3-4$, $f\searrow(-\infty,1]$ και $\nearrow[1,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f(1)=3$ άρα $f(A)=[3,+\infty)$

γ) $f'(x)=-\dfrac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}<0\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{1-e^{2x}}{e^{x}}}{\dfrac{e^{2x}+1}{e^{x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+1}=1,$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{e^{x}+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{e^{x}}\left(\cancel{e^{-2x}}^{0}-1\right)}{\cancel{e^{x}}\left(1+\cancel{e^{-2x}}^{0}\right)} = -1$, άρα $f(A)=(-1,1)$

δ) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $f\searrow(-\infty,-1],[1,+\infty)$ και $f\nearrow[-1,1]$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, άρα $f(A)=\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

ε) $f'(x) = \dfrac{1}{x}+1-\eta\mu x > 0$, αφού $1-\eta\mu x \geq 0$ και $\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$, άρα

$f\nearrow(0,+\infty)$. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x + x\left(1+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)\right) = +\infty$, γιατί

$\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right| \leq \dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|x|} \leq \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \leq \dfrac{1}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)$ οπότε από το

Κριτήριο Παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$, άρα $f(A)=\mathbb{R}$.

στ) $f'(x) = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

$f(A)=\mathbb{R}$.

55.α) Είναι $f'(x)=\ln x$. Για κάθε $0<x<1$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow(0,1]$ και

για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\ln x-1+\dfrac{1}{x}\right)\right] = +\infty$. Στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ είναι

$f(\Delta_1)=[0,1)$ και στο $\Delta_2=[1,+\infty)$ είναι $f(\Delta_2)=[0,+\infty)$, οπότε

$f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[0,+\infty)$.

56.Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$f'(t) = \dfrac{8t^3\left(t^4+1\right)-8t^7}{\left(t^4+1\right)^2} = \dfrac{8t^3}{\left(t^4+1\right)^2} > 0$ για κάθε $t>0$.Η f είναι συνεχής στο

$[0,+\infty)$ άρα $f\nearrow[0,+\infty)$. Επομένως οι μετοχές της εταιρείας συνεχώς αυξάνονται. Επειδή f συνεχής και $f\nearrow[0,+\infty)$ είναι

$f([0,+\infty))=\left[f(0),\lim\limits_{t\to+\infty}f(x)\right)=[f(0),2f(0))$ αφού $f(0)=2$ και

$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{2t^4}{t^4+1}+2\right)=4=2f(0)$ γιατί $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2t^4}{t^4+1}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2\cancel{t^4}}{\cancel{t^4}}=2$

Άρα οι μετοχές της εταιρείας συνεχώς αυξάνονται χωρίς να ξεπερνούν το διπλάσιο της αρχικής αξίας.

Αυξημένης δυσκολίας

57.α) Είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1=f(0)$, άρα f συνεχής στο 0 και επειδή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\neq0$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x^2}{x^2}$. Έστω $g(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x^2,\ x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=-x\eta\mu x+2x=x(2-\eta\mu x)$. Για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow[0,+\infty)$, οπότε $g(x)>g(0)=0$, άρα $f'(x)>0$ επομένως $f\nearrow(0,+\infty)$. Για $x<0$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\searrow(-\infty,0]$, οπότε $g(x)>g(0)=0$, άρα $f'(x)>0$ επομένως $f\nearrow(-\infty,0)$. Είναι

$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{|x|}=0=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}$ άρα

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ επομένως $f(A)=\mathbb{R}$.

58.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=e^{x\ln x}\cdot e^x\cdot\frac{x\ln x+1}{x}$. Έστω $g(x)=x\ln x+1,\ x>0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=\ln x+1,\ x>0$.

Η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, $g'(x)>0$ για κάθε $x>\frac{1}{e}$, $g'(x)<0$ για κάθε

$0<x<\frac{1}{e}$ οπότε $g\nearrow\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ και $g\searrow\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

Επομένως για κάθε $x>\frac{1}{e}$ είναι $g(x)>g\left(\frac{1}{e}\right)\Leftrightarrow g(x)>1-\frac{1}{e}>0$ άρα

$f'(x)>0$. Επίσης για κάθε $0<x<\frac{1}{e}$ είναι $g(x)>g\left(\frac{1}{e}\right)\Leftrightarrow g(x)>1-\frac{1}{e}>0$

άρα $f'(x)>0$. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα $f\nearrow(0,+\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln x\cdot e^x}\underset{\substack{x\to 0^+,\\ u\to-\infty}}{\overset{u=\ln x\cdot e^x}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty} e^u=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln x\cdot e^x}\underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to+\infty}}{\overset{u=\ln x\cdot e^x}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty} e^u=+\infty$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$(0,+\infty)$ οπότε $f(A)=(0,+\infty)$.

59.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{(x-1)e^x+1}{x(e^x-1)}$

Έστω $g(x)=(x-1)e^x+1,\ x\geq 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=xe^x$. Για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)>0$, η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Άρα για κάθε

$x>0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)=0$ οπότε $f'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ οπότε $f\nearrow(0,+\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+} e^x=1$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\frac{e^x-1}{x}\underset{u\to 1}{\overset{\frac{e^x-1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to 1}\ln u=0$.Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x-1}{x}\underset{u\to+\infty}{\overset{\frac{e^x-1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και $f\nearrow A=(0,+\infty)$, είναι $f(A)=(0,+\infty)$.

60.Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$f'(x)=\frac{(\ln x+1)(x-1)-x\ln x}{(x-1)^2}=\frac{x-\ln x-1}{(x-1)^2}$. Έστω $g(x)=x-\ln x-1,\ x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=1-\frac{1}{x}$. Είναι

$g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $g'(x)<0$, για κάθε $x>1$ είναι $g'(x)>0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Επομένως για $x>1$ ισχύει $g(x)>g(1)=0$ και για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $g(x)>g(1)=0$. Επομένως $f'(x)>0$ σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1),(1,+\infty)$ άρα είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x\ln x}{x-1} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln x+1}{1}=1=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x-1} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{1}=+\infty$. Στο διάστημα $\Delta_1=(0,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\right)=(0,1)$

Στο διάστημα $\Delta_2=(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα

$f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to 1^+} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(1,+\infty)$, άρα

$f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=(0,1)\cup(1,+\infty)$

61. Η f' είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Είναι $f^{(3)}(x)>0\Rightarrow f''\nearrow[\alpha,\beta]$.

Για κάθε $x\in(\alpha,\xi)$ είναι $f''(x)<f''(\xi)=0\Rightarrow f'\searrow[\alpha,\xi]$, οπότε $f'(x)<f'(\alpha)=\beta$. Για κάθε $x\in(\xi,\beta)$ είναι $f''(x)>f''(\xi)=0\Rightarrow f'\nearrow[\xi,\beta]$, οπότε $f'(x)<f'(\beta)=\beta$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-\beta<0\Rightarrow g\searrow[\alpha,\beta]$. Επομένως $g([\alpha,\beta])=[\beta(2-\beta),\alpha(2-\beta)]$

62.α) Η αρχική θερμοκρασία είναι $\theta(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ δεκάδες βαθμούς C άρα είναι $\frac{10}{4}=2,5\ ^{o}C$.

β) i) Η συνάρτηση θ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $t>0$ με παράγωγο $\theta'(t)=-\frac{-2\eta\mu t+2t}{\left(2\sigma\upsilon\nu t+t^2\right)^2}=-\frac{2(\eta\mu t-t)}{\left(2\sigma\upsilon\nu t+t^2\right)^2}<0$ για κάθε $t>0$ αφού

$|\eta\mu t|\le|t|\overset{t>0}{\Leftrightarrow}|\eta\mu t|<t\Leftrightarrow -t<\eta\mu t<t$ οπότε $\eta\mu t-t<0$ για κάθε $t>0$.

Η θ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε η θερμοκρασία συνεχώς μειώνεται.

ii) Αφού θ συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, έχει σύνολο τιμών $\theta([0,+\infty))=\left(\lim\limits_{t\to+\infty}\theta(t),\theta(0)\right]=\left(-\theta(0),\theta(0)\right]$. (Είναι

$$\lim_{t\to+\infty}\theta(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu t+t^2}-\frac{1}{4}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{t}}{2\frac{\sigma\upsilon\nu t}{t}+t}-\frac{1}{4}\right)=$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2\frac{\sigma\upsilon\nu t}{t}+t}-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}=-\theta(0).$$

Όμως $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu t}{t}\right|=\frac{|\sigma\upsilon\nu t|}{|t|}\le\frac{1}{|t|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|t|}\le\frac{\sigma\upsilon\nu t}{t}\le\frac{1}{|t|}$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{|t|}=0=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{|t|}\right)$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu t}{t}=0$ επομένως

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(2\frac{\sigma\upsilon\nu t}{t}+t\right)=+\infty$. Άρα είναι $\theta(t)>-\theta(0)$ για κάθε $t\ge0$.

Μονοτονία και ανισώσεις

63.α) Έστω $f(x)=\ln(x-1)-x+2,\ x\ge2$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{2-x}{x-1}$. Για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)<0$, η f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ οπότε $f\searrow[2,+\infty)$.

Επομένως για κάθε $x>2$ είναι $f(x)<f(2)\Leftrightarrow\ln(x-1)-x+2<0$.

β) Έστω $f(x)=e^{x}(x+1)-1,\ x\ge0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με

παράγωγο $f'(x)=e^x(x+2)>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $f(x)>f(0)=0\Leftrightarrow e^x(x+1)-1>0$

γ) $f(x)=e^x-ex$, $x\in[1,+\infty)$, Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=e^x-e>0$ για κάθε $x>1$, άρα $f\nearrow[1,+\infty)$

Επομένως για κάθε $x>1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(1)\Leftrightarrow e^x>ex$.

δ) Έστω $f(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in[0,\pi]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με παράγωγο $f'(x)=-x\eta\mu x$ οπότε $f'(x)<0$ στο $(0,\pi)$ άρα $f\searrow[0,\pi]$.

Επομένως για κάθε $0<x<\pi$ ισχύει $f(\pi)<f(x)<f(0)\Rightarrow x\sigma\upsilon\nu x<\eta\mu x$

ε) Έστω $f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x}$, $x>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$ οπότε $f\nearrow(0,+\infty)$.

$x>1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(1)=0\Leftrightarrow\ln x>\dfrac{x-1}{x}$.

η) Είναι $e^x<(1+x)^{1+x}\Leftrightarrow\ln e^x<\ln(1+x)^{1+x}\Leftrightarrow x<(1+x)\ln(1+x)$, $x>0$.

Έστω $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x$, $x\in[0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\ln(1+x)+(1+x)\dfrac{1}{1+x}-1=\ln(x+1)>0$ για κάθε $x>0$ οπότε $f\nearrow[0,+\infty)$.

$x>0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)\Leftrightarrow(1+x)\ln(1+x)-x>0\Leftrightarrow(1+x)\ln(1+x)>x$.

64.α) Έστω $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{24}$, $x\geq 0$. Η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=-\eta\mu x+x-\dfrac{x^3}{6}$,

δεύτερη παράγωγο $f''(x)=-\sigma\upsilon\nu x+1-\dfrac{x^2}{2}$ και τρίτη παράγωγο $f^{(3)}(x)=\eta\mu x-x<0$ για κάθε $x>0$ οπότε $f''\searrow[0,+\infty)$. Επομένως για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)<f''(0)=0\Rightarrow f'\searrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(0)=0$ οπότε $f\searrow[0,+\infty)$. Άρα για κάθε $x>0$ είναι $f(x)<f(0)=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x<1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$.

β) Έστω $f(x)=x+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με παράγωγο $f'(x)=1+\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$. Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $f'(x)>0$ γιατί $1-\eta\mu x>0,\ \sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Άρα $f\nearrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Επομένως για κάθε $0<x\le\frac{\pi}{2}\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0)<f(x)\le f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, άρα

$f(x)>f(0)=0\Leftrightarrow x+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x>1$.

γ) Έστω $f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$, $x\in[0,+\infty)$. Η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$, δεύτερη παράγωγο $f''(x)=e^x-1-x$ και τρίτη παράγωγο $f^{(3)}(x)=e^x-1>0$ άρα $f''\nearrow[0,+\infty)$. Επομένως για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)>f''(0)=0$ οπότε $f'\nearrow[0,+\infty)$. Άρα για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>f'(0)=0$ οπότε $f\nearrow[0,+\infty)$.

Επομένως για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>f(0)=0\Leftrightarrow e^x>1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$.

δ) Έστω $f(x)=2\ln(\eta\mu x)-\eta\mu^2 x,\ x\in(0,\pi)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, άρα $f(x)\le f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1<0$.

Για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$, άρα

$f(x)\le f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1<0$.

Επομένως για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $f(x)<0\Leftrightarrow 2\ln(\eta\mu x)<\eta\mu^2 x$.

65.α) Έστω $f(x)=x\ln x,\ x>1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\ln x+1>0$ οπότε $f\nearrow(1,+\infty)$. Επομένως για κάθε $1<\alpha<\beta$ είναι $f(\alpha)<f(\beta)\Leftrightarrow\beta\ln\beta<\alpha\ln\alpha\Leftrightarrow\frac{\ln\beta}{\alpha}>\frac{\ln\alpha}{\beta}$.

β) Είναι $\ln(\alpha+1)+\beta>\alpha+\ln(\beta+1)\Leftrightarrow \ln(\alpha+1)-\alpha>\ln(\beta+1)-\beta$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-x$ στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{-x}{x+1}<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Είναι $\alpha<\beta\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(\alpha)>f(\beta)\Leftrightarrow \ln(\alpha+1)-\alpha>\ln(\beta+1)-\beta$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+e^{-2x}-x,\ x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f(x)=-e^{-x}-2e^{-2x}-1<0\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$.

Επομένως για κάθε $\alpha<\beta\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(\alpha)>f(\beta)\Leftrightarrow$

$e^{-\alpha}+e^{-2\alpha}-\alpha>e^{-\beta}+e^{-2\beta}-\beta\Leftrightarrow e^{-\alpha}-e^{-\beta}+e^{-2\alpha}-e^{-2\beta}-(\alpha-\beta)>0$

Αυξημένης δυσκολίας

66.α) Έστω $f(x)=x\ln^2 x+2x+2-2x\ln x-e^{-x},\ x>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\ln^2 x+e^{-x}>0\Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$.

Είναι

$$\lim_{x\to0^+}x\ln^2 x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}2x=0\ ,$$

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0\text{, άρα}$$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0+0+2-0-1=1$. Επίσης

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln^2 x+2x+2-2x\ln x-e^{-x}\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln x(\ln x-2)+2x+2-e^{-x}\right]=+\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=(0,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών το $f(A)=(1,+\infty)$, άρα

$f(x)>0\Leftrightarrow x\ln^2 x+2x+2-2x\ln x-e^{-x}>0\Leftrightarrow$

$x\ln^2 x+2x+2>2x\ln x+e^{-x}$ για κάθε $x>0$.

β) Έστω $f(x)=2x-x^2-2\ln(x+1),\ x\geq0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο

$[0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=-\dfrac{2x^2}{x+1}<0$ για κάθε $x>0$ οπότε $f\searrow[0,+\infty)$.

Επομένως για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>0\Leftrightarrow 2x-x^2<2\ln(x+1)$.

Έστω $g(x)=2\ln(x+1)-2x,\ x\geq 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=-\dfrac{2x}{x+1}<0$ για κάθε $x>0$ οπότε $g\searrow[0,+\infty)$.

Επομένως για κάθε $x>0\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(0)=0\Leftrightarrow 2\ln(x+1)<2x$.

Άρα $2x-x^2<2\ln(x+1)<2x$.

γ) Έστω $f(x)=x^2\ln x+3x+e,\ x>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=2x\ln x+x+3$ και δεύτερη παράγωγο

$f''(x)=2\ln x+2+1=2\ln x+3$. Είναι $f''(x)\geq 0\Leftrightarrow x\geq e^{-\frac{3}{2}}$

Η f' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, για κάθε $x\in\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right)$ είναι $f''(x)<0$, για κάθε $x>e^{-\frac{3}{2}}$ είναι $f''(x)>0$ οπότε $f'\searrow\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right]$ και $f'\nearrow\left[e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right)$. Επομένως για κάθε $x\in\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right)$ είναι $f'(x)>f'\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=3-\dfrac{2}{e\sqrt{e}}>0\Rightarrow f\nearrow\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right]$ και για κάθε $x>e^{-\frac{3}{2}}$ είναι $f'(x)>f'\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=3-\dfrac{2}{e\sqrt{e}}>0\Rightarrow f\nearrow\left[e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$, άρα

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x+3x+e\right)=e$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Επομένως

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(e,+\infty)$, οπότε

$f(x)>e>0\Leftrightarrow x\left(x\ln x+3\right)+e>0$.

67. Έστω $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x,\ x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$

με παράγωγο $f'(x)=-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x<0$ γιατί $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$. Επειδή για $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\sigma\upsilon\nu x<\eta\mu x$,
έχουμε: $f(\sigma\upsilon\nu x)>f(\eta\mu x)\Leftrightarrow$
$\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)-\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)>\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)-\eta\mu(\eta\mu x)\Leftrightarrow$
$\eta\mu(\eta\mu x)-\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)>\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)-\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)$.

68.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο
$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.

β) Είναι $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(|\alpha+\beta|)\le f(|\alpha|+|\beta|)\Leftrightarrow$
$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|}\le\frac{|\alpha|+|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|}=\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|+|\beta|}+\frac{|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|}\le\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}+\frac{|\beta|}{1+|\beta|}$.

69.α) Έστω $f(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}$, $x\ge1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}>0$ για κάθε $x>1$ οπότε $f\nearrow[1,+\infty)$.

Επομένως κάθε $x>1$ είναι $f(x)>f(1)=0\Leftrightarrow\ln x>1-\frac{1}{x}$

β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}<0$
από α) άρα $g\searrow(1,+\infty)$.

γ) Είναι $(\kappa-1)\ln\lambda=(\lambda-1)\ln\kappa\Leftrightarrow\frac{\ln\lambda}{\lambda-1}=\frac{\ln\kappa}{\kappa-1}\Leftrightarrow g(\lambda)=g(\kappa)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}\lambda=\kappa$.

70.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με παράγωγο
$f'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1>0$ για κάθε $x>1$ αφού
$\ln x>0\Leftrightarrow\ln x+1>1$, άρα $f\nearrow$ στο $(1,+\infty)$.
Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με παράγωγο

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}\ln x-\ln(x+1)\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}\Leftrightarrow$$

$g'(x)=\dfrac{f(x)-f(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$. Είναι $1<x<x+1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<f(x+1)$ οπότε

$f(x)-f(x+1)<0$, άρα $g'(x)<0$ επομένως $g\searrow(1,+\infty)$.

β) Είναι $f(x)<f(x+1)$ για κάθε $x>1$, οπότε: $x\ln x<(x+1)\ln(x+1)\Leftrightarrow$

$\ln x^x<\ln(x+1)^{x+1}\Leftrightarrow x^x<(x+1)^{x+1}$.

γ) Είναι: $(\alpha+1)^{\ln\beta}>(\beta+1)^{\ln\alpha}\Leftrightarrow \ln\left[(\alpha+1)^{\ln\beta}\right]>\ln\left[(\beta+1)^{\ln\alpha}\right]\Leftrightarrow$

$\ln\beta\cdot\ln(\alpha+1)>\ln\alpha\cdot\ln(\beta+1)\Leftrightarrow \dfrac{\ln(\alpha+1)}{\ln\alpha}>\dfrac{\ln(\beta+1)}{\ln\beta}\Leftrightarrow g(\alpha)>g(\beta)$ που

ισχύει, γιατί $1<\alpha<\beta$ και $g\searrow$.

71.α) Πρέπει $\dfrac{1-\ln x}{\ln x}>0\Leftrightarrow x\in(1,e)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,e)$ με

παράγωγο $f'(x)=-\dfrac{1}{x(1-\ln x)\ln x}<0\Rightarrow f\searrow(1,e)$.

β) Για $\alpha<\beta\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha)>f(\beta)\Leftrightarrow \ln\dfrac{1-\ln\alpha}{\ln\alpha}>\ln\dfrac{1-\ln\beta}{\ln\beta}\Leftrightarrow \dfrac{1-\ln\alpha}{\ln\alpha}>\dfrac{1-\ln\beta}{\ln\beta}\Leftrightarrow$

$\dfrac{\ln\beta}{\ln\alpha}>\dfrac{1-\ln\beta}{1-\ln\alpha}$.

72.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\kappa,\kappa+1]$ οπότε υπάρχει

$\xi\in(\kappa,\kappa+1):f'(\xi)=\dfrac{f(\kappa+1)-f(\kappa)}{1}$..Όμως

$f'(\xi)<f(\kappa+1)$ άρα $\cancel{f(\kappa+1)}-f(\kappa)<\cancel{f(\kappa+1)}\Leftrightarrow f(\kappa)>0$.

Όμως $f'(x)>f(\kappa)>0$ οπότε $f\nearrow$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $h'(x)=f'(x)-f(\kappa)>0$ άρα

$h\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

γ) Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε $h(\kappa)<h(\kappa+1)\Leftrightarrow$

$f(\kappa)-\kappa f(\kappa)<f(\kappa+1)-(\kappa+1)f(\kappa)\Leftrightarrow$

$f(\kappa)-\cancel{\kappa f(\kappa)}<f(\kappa+1)-\cancel{\kappa f(\kappa)}-f(\kappa)\Leftrightarrow 2f(\kappa)<f(\kappa+1)\Leftrightarrow$

$f(\kappa)<\dfrac{f(\kappa+1)}{2}$

73.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$. Είναι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ οπότε $f\searrow(0,1]$, $f\nearrow[1,+\infty)$.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[e,x]$, $x>e$ οπότε υπάρχει $\xi\in(e,x)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=\dfrac{\ln^2 x-1}{x-e}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f''(x)=\dfrac{\frac{2}{x}x-2\ln x}{x^2}=2\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$ για κάθε $x>e$, άρα $f'\searrow$ στο $[e,+\infty)$. Επειδή $\xi<x$, είναι

$$f'(\xi)>f'(x)\Leftrightarrow\frac{\ln^2 x-1}{x-e}>\frac{2\ln x}{x}\Leftrightarrow x\left(\ln^2 x-1\right)>2\ln x(x-e).$$

74.α) $f'(x)=\dfrac{\sqrt[3]{(8-x)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(8-x)^2}}$, $x\in(0,8)$. Είναι

$$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\sqrt[3]{(8-x)^2}\geq\sqrt[3]{x^2}\Leftrightarrow 64-16x+x^2\geq x^2\Leftrightarrow x\leq 4$$

Για κάθε $x\in(0,4)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,4]$ και για κάθε $x\in(4,8)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[4,8]$

β) $2<3\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(2)<f(3)\Leftrightarrow\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}<\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}\Leftrightarrow\alpha<\beta$.

75.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{x+1}}{\left(1+e^{x+1}\right)^2}<0$, αφού $e^x<e^{x+1}$, άρα $f\searrow\mathbb{R}$.

β) Για $x<0$ είναι $\left(\dfrac{5}{6}\right)^x>\left(\dfrac{5}{6}\right)^0\Leftrightarrow\left(\dfrac{5}{6}\right)^x>1\Leftrightarrow 5^x>6^x\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(5^x\right)<f\left(6^x\right)$ και $\left(\dfrac{7}{8}\right)^x>\left(\dfrac{7}{8}\right)^0\Leftrightarrow\left(\dfrac{7}{8}\right)^x>1\Leftrightarrow 7^x>8^x\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(7^x\right)<f\left(8^x\right)$, άρα

$$f\left(5^x\right)+f\left(7^x\right)<f\left(6^x\right)+f\left(8^x\right).$$

76.α) Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ οπότε $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

β) Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{0}{0+1} = 0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} \overset{e^x=\omega\to+\infty}{=} \lim\limits_{\omega\to+\infty} \dfrac{\omega}{\omega+1} = \lim\limits_{\omega\to+\infty} \dfrac{\omega}{\omega} = 1$. Άρα $f(A) = (0,1)$.

γ) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$$f''(x) = \frac{e^x\cdot(e^x+1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(e^x+1)}e^{2x}}{(e^x+1)^{\cancel{4}}} \Leftrightarrow f''(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^3} \Leftrightarrow$$

$f''(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} < 0$ οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι :

- $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x < \left(\dfrac{3}{5}\right)^0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^x < 1 \Leftrightarrow 3^x < 5^x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(3^x) < f(5^x)$ (1)
- $3^x < 5^x \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(5^x) < f'(3^x)$ (2)

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $f(3^x) + f'(5^x) < f(5^x) + f'(3^x)$.

77. Οι εξισώσεις των ευθειών ε_1, ε_2 γράφονται:

$\varepsilon_1 : y = \dfrac{x-6}{2}$, $\varepsilon_2 : y = \dfrac{x-30}{8}$, $\dfrac{x-6}{2} - \dfrac{x-30}{8} = \dfrac{3x+6}{8}$.

Είναι $\dfrac{x-6}{2} > \dfrac{x-30}{8} \Leftrightarrow 8x-48 > 2x-60 \Leftrightarrow 6x > -12 \Leftrightarrow x > -2$ ισχύει για

$x \in (2,8)$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\dfrac{x-30}{8} < \dfrac{8}{x-2}\ln\dfrac{4}{x+2} < \dfrac{x-6}{2}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \ln\dfrac{4}{x+2} - \dfrac{(x-2)(x-30)}{64}$. Η g είναι

παραγωγίσιμη στο $(2,8)$ με παράγωγο $g'(x) = \dfrac{x(14-x)}{32} > 0 \Rightarrow g \nearrow$. Άρα για

$x > 2$ είναι $g(x) > g(2) \Leftrightarrow \ln\dfrac{4}{x+2} - \dfrac{(x-2)(x-30)}{64} > 0$. Όμοια,

αποδεικνύουμε ότι $\frac{8}{x-2}\ln\frac{4}{x+2}<\frac{x-6}{2}\Leftrightarrow\ln\frac{4}{x+2}<\frac{(x-6)(x-2)}{16}$,

θεωρώντας την $h(x)=\ln\frac{4}{x+2}-\frac{(x-6)(x-2)}{16}$ και δείχνοντας ότι η h είναι $\searrow$ στο $(2,8)$.

78. Είναι $27^{27}>28^{26}\Leftrightarrow 27\ln 27>26\ln 28\Leftrightarrow\frac{\ln 27}{26}>\frac{\ln 28}{27}$.

Έστω $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$. Έστω $g(x)=x-1-x\ln x$, $x\geq 1$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=-\ln x$.

Η g είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, $g'(x)<0$ για κάθε $x>1$ οπότε $g\searrow[1,+\infty)$.

Επομένως για κάθε $x>1$ είναι $g(x)<g(1)=0$ οπότε $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(1,+\infty)$.

Είναι $27<28$, άρα: $f(27)>f(28)\Leftrightarrow\frac{\ln 27}{26}>\frac{\ln 28}{27}\Leftrightarrow 27\ln 27>26\ln 28\Leftrightarrow$ $\ln 27^{27}>\ln 28^{26}\Leftrightarrow 27^{27}>28^{26}$.

79. Έστω $f(x)=\eta\mu^{\nu}x+\sigma\upsilon\nu^{\nu}x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με παράγωγο $f'(x)=\nu\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu^{\nu-2}x-\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x\right)$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\eta\mu x>0,\sigma\upsilon\nu x>0$ και

$\eta\mu^{\nu-2}x-\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x\geq 0\Leftrightarrow\eta\mu^{\nu-2}x\geq\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}x\Leftrightarrow\varepsilon\varphi^{\nu-2}x\geq 1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x\geq 1\Leftrightarrow x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ οπότε $f\searrow\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ και $f\nearrow\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

Επομένως για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ είναι $f(x)\geq f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2^{1-\frac{\nu}{2}}$.

Επίσης για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(x)\geq f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2^{1-\frac{\nu}{2}}$.

Πρέπει $f(x)>\frac{1}{2}$. Για $x=\frac{\pi}{4}$ είναι $f\left(\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$2^{1-\frac{\nu}{2}}>2^{-1}\Leftrightarrow 1-\frac{\nu}{2}>-1\Leftrightarrow \nu<4$. Όμως $\nu>2$, άρα $\nu=3$.

80.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με παράγωγο

$$f'(x)=\ln\frac{x}{x-1}+x\frac{1}{\frac{x}{x-1}}\left(\frac{x}{x-1}\right)'+\frac{1}{\frac{x-1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)'\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\ln\frac{x}{x-1}+\cancel{x}\,\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x}}\cdot\frac{-1}{(x-1)^{\cancel{2}}}+\frac{\cancel{x}}{x-1}\cdot\frac{1}{x^{\cancel{2}}}=\ln\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x(x-1)}\Leftrightarrow$$

$f'(x)=\ln\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x}$ και δεύτερη παράγωγο

$$f''(x)=\frac{1}{\frac{x}{x-1}}\left(\frac{x}{x-1}\right)'+\frac{1}{x^2}=\frac{\cancel{x-1}}{x}\cdot\frac{-1}{(x-1)^{\cancel{2}}}+\frac{1}{x^2}=\frac{-\cancel{x}+\cancel{x}-1}{x^2(x-1)}>0$$, άρα

$f'\nearrow(-\infty,0)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$ οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\frac{x}{x-1}\underset{u\to1}{\overset{u=\frac{x}{x-1}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty,\ u\to1}\ln u=0$ άρα

$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$. Επίσης $\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\ln(-x)-\ln(1-x)-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ αφού

$$\lim_{x\to0^-}\left(\ln(-x)-\frac{1}{x}\right)\underset{\substack{x\to0^-,\ k\to0^+\\ k\to0^+,}}{\overset{k=-x}{=}}\lim\left(\ln k+\frac{1}{k}\right)=\lim_{k\to0^+}\frac{k\ln k+1}{k}=$$

$$\lim_{k\to0^+}(k\ln k+1)\frac{1}{k}=1\cdot(+\infty)=+\infty.$$

$$\left(\lim_{k\to0^+}k\ln k=\lim_{k\to0^+}\frac{\ln k}{\frac{1}{k}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{k\to0^+}\frac{\frac{1}{\cancel{k}}}{-\frac{1}{k^{\cancel{2}}}}=\lim_{k\to0^+}(-k)=0\right.$$.

Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το
$f'((-\infty,0))=(0,+\infty)$, άρα $f'(x)>0$ και $f\nearrow(-\infty,0)$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\frac{x}{x-1}\underset{\substack{x\to-\infty,\\ t\to1}}{\overset{t=\frac{x}{x-1}}{=}}\lim\limits_{t\to1}\ln t=0$ και

$$\lim_{x\to-\infty} x\ln\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x}}\cdot\frac{-1}{(x-1)^{\cancel{2}}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=1\ .$$

Επίσης $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$ οπότε $\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{x-1}{x}\underset{\substack{x\to-\infty,\\ a\to1}}{\overset{a=\frac{x-1}{x}}{=}}\lim_{a\to1}\ln a=0$ επομένως,

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=1+0=1$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το $f\left((-\infty,0)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to0^-}f(x)\right)=\left(1,\lim_{x\to0^-}f(x)\right)$, άρα $f(x)>1$ για κάθε $x<0$.

Λύση ανίσωσης

81.α) Έστω $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)-x,\ x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=-\frac{(x-1)^2}{x^2+1}<0$ για κάθε $x\neq1$ άρα $f\searrow\mathbb{R}$. Είναι $\ln\left(x^2+1\right)<x\Leftrightarrow f(x)<f(0)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}x>0$.

β) Έστω $f(x)=\ln x-e^{x-1}+1,\ x>0$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{1}{x}-e^{x-1}$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=-\frac{1}{x^2}-e^{x-1}<0\Rightarrow f'\searrow(0,+\infty)$.

Για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)<f'(1)=0\Rightarrow f\searrow[1,+\infty)$ και για κάθε $0<x<1$ είναι $f'(x)>f'(1)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$. Αν $x\in(0,1)$ τότε $f(x)<f(1)$ και αν $x>1$, τότε $f(x)<f(1)$.

Επομένως η ανίσωση $\ln x<e^{x-1}-1\Leftrightarrow\ln x-e^{x-1}+1<0\Leftrightarrow f(x)<f(1)$ έχει λύσεις την ένωση των διαστημάτων $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

γ) $f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2},\ x\geq0$. $f'(x)=e^x-1-x$, $f''(x)=e^x-1$

Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)>0$ και για κάθε $x<0$ είναι $f''(x)<0$, επειδή η f΄ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Για κάθε $x<0\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(0)=0$ και για κάθε

$x>0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0)=0$, άρα $f(x)>f(0)=0$, άρα για κάθε $x\neq 0$ είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$e^x-1>x+\dfrac{x^2}{2} \Leftrightarrow f(x)>f(0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x>0$.

82.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi)$ με παράγωγο :

$$f'(x)=\frac{(\eta\mu x)'(1+\sigma\upsilon\nu x)-\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)'}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}=\frac{\sigma\upsilon\nu x(1+\sigma\upsilon\nu x)+\eta\mu x\cdot\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}\Leftrightarrow$$

$f'(x)=\dfrac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}$. Επειδή $x\in[0,\pi)$, είναι $\sigma\upsilon\nu x>-1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x+1>0$, άρα $f'(x)>0$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0,\pi)$.

β) $\eta\mu x<1+\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}<1\Leftrightarrow f(x)<1\Leftrightarrow f(x)<f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

83.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,2)$ με παράγωγο :

$f'(x)=-e^{-x}-\dfrac{1}{2-x}<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,2)$.

β) Πρέπει $\dfrac{5-2x}{4-3x}>0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$ οπότε η ανίσωση ορίζεται στο $\left(-\infty,\dfrac{4}{3}\right)$. Είναι $e^{2-3x}-e^{3-2x}>\ln\dfrac{5-2x}{4-3x}\Leftrightarrow$

$e^{-(3x-2)}+\ln[2-(3x-2)]>e^{-(2x-3)}+\ln[2-(2x-3)]\Leftrightarrow$

$f(3x-2)>f(2x-3)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}3x-2<2x-3\Leftrightarrow x<-1$ οι οποίες είναι οι λύσεις της ανίσωσης αφού ανήκουν στο $\left(-\infty,\dfrac{4}{3}\right)$.

Αυξημένης δυσκολίας

84.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο :

$f'(x)=\left(\dfrac{3}{7}\right)^x\ln\dfrac{3}{7}+\left(\dfrac{4}{7}\right)^x\ln\dfrac{4}{7}<0\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$ γιατί $\ln\dfrac{3}{7}<\ln1=0$, $\ln\dfrac{4}{7}<\ln1=0$ και $\left(\dfrac{3}{7}\right)^x,\left(\dfrac{4}{7}\right)^x>0$

β) $\left(3^{x-5}+4^{x-5}\right)7^{4-2x}>\left(3^{4-2x}+4^{4-2x}\right)7^{x-5}\Leftrightarrow\dfrac{3^{x-5}}{7^{x-5}}+\dfrac{4^{x-5}}{7^{x-5}}>\dfrac{3^{4-2x}}{7^{4-2x}}+\dfrac{4^{4-2x}}{7^{4-2x}}\Leftrightarrow$

$f(x-5)>f(4-2x)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}x-5<4-2x\Leftrightarrow x<3$.

85.α) Έστω $f(x)=\ln x+2^x$, $x>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f(x)=\dfrac{1}{x}+2^x\ln 2>0$ οπότε $f\nearrow(0,+\infty)$.

Είναι $\ln\left(x^2-3x+7\right)+2^{x^2-3x+7}<\ln(2x+1)+2^{2x+1}\Leftrightarrow$

$f\left(x^2-3x+7\right)<f(2x+1)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$x^2-3x+7<2x+1\Leftrightarrow x^2-5x+6<0\Leftrightarrow 2<x<3$.

Το $(2,3)\subseteq(0,+\infty)$ οπότε οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα $(2,3)$.

β) Είναι $e^{x^2-x}+\left(x^2-x\right)^3+x^2-2x<e^{x+3}+(x+3)^3+3\Leftrightarrow$

$e^{x^2-x}+\left(x^2-x\right)^3+x^2-x<e^{x+3}+(x+3)^3+x+3$ (1). Έστω

$f(x)=e^x+x^3+x,\ x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x)=e^x+3x^2+1>0\Rightarrow\nearrow\mathbb{R}$.

$(1)\Rightarrow f\left(x^2-x\right)<f(x+3)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x^2-x<x+3\Leftrightarrow x^2-2x-3<0\Leftrightarrow -1<x<3$.

86. Αν $x+1\le 0\Leftrightarrow x\le -1$ τότε η ανισότητα αληθεύει. Αν $x>-1$, τότε

$\ln 2^{x^2}\ge\ln(x+1)\Leftrightarrow x^2\ln 2\ge\ln(x+1)\Leftrightarrow x^2\ln 2-\ln(x+1)\ge 0$.

Έστω $f(x)=x^2\ln 2-\ln(x+1),\ x>-1$.

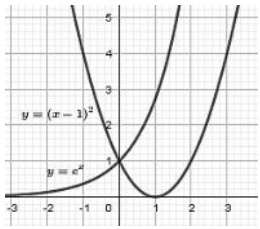
Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων , παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο $f'(x)=2x\ln 2-\dfrac{1}{x+1}$, $f(0)=f(1)=0$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με παράγωγο

$f''(x)=2\ln 2+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0\Rightarrow f'\nearrow(-1,+\infty)$. Για κάθε

$-1<x<x_0\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0\Rightarrow f\searrow(-1,x_0]$. Επομένως για κάθε $-1<x<0$ είναι $f(x)>f(0)=0$, για κάθε $0<x<x_0$ είναι $f(x)<f(0)=0$.

Επίσης για κάθε $x > x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0$ οπότε $f\nearrow[x_0, +\infty)$. Για κάθε $x_0 < x < 1$ είναι $f(x) < f(1) = 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = 0$.
Άρα η σχέση $f(x) = x^2 \ln 2 - \ln(x+1) \geq 0$ ισχύει όταν $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

87.α) Είναι $f(0) = 0$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = e^x - 2x + 2$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = e^x - 2$. Είναι $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$. Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x < \ln 2$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f'\searrow(-\infty, \ln 2]$ και για $x > \ln 2$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f'\nearrow[\ln 2, +\infty)$. Η f' έχει ελάχιστο το $f'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 + 2 = 2(2 - \ln 2) > 0$, άρα $f'(x) \geq f'(\ln 2) > 0 \Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$ οπότε η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.



β) Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x = (x-1)^2$
Η λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι η τετμημένη του κοινού σημείου των $y = e^x$ και $y = (x-1)^2$. Επειδή τέμνονται στον άξονα y΄y, λύση είναι η $x = 0$.

Ανισοτικές σχέσεις με άγνωστες συναρτήσεις

88. Έστω $g(x) = f(x) - x$, $x \in [0, +\infty)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 1 > 0$, η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ άρα $g\nearrow$ στο $[0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) > x$.

89. Έστω $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο $h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0$, η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ άρα $h\searrow$ στο $[\alpha, \beta]$. Για κάθε $\alpha < x < \beta$ είναι $h(x) > h(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

90. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f'(x) - 2e^{2x}$. Είναι $f'(x) < 2e^{2x} \Leftrightarrow f'(x) - 2e^{2x} < 0$, οπότε $g'(x) < 0$ και η g είναι $\searrow$ στο $\mathbb{R}$.
α) Για κάθε $x < 0$ είναι $g(x) > g(0)$. Όμως, $g(0) = f(0) - e^0 = 0$, άρα

$g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>e^{2x}$.

β) Για κάθε $x>0$ είναι $g(x)<g(0)=0 \Leftrightarrow f(x)-e^{2x}<0 \Leftrightarrow f(x)<e^{2x}$.

Αυξημένης δυσκολίας

91. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), $f(\alpha)=f(\beta)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):\ f'(\xi)=0$.

α) Για κάθε $\alpha<x<\xi \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(\xi)=0 \Rightarrow f\searrow[\alpha,\xi]$. Επομένως για κάθε $\alpha<x\le\xi \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)<f(\alpha)$. Για κάθε $\xi<x<\beta \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi)<f'(x) \Leftrightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[\xi,\beta]$, άρα $f(x)<f(\beta)=f(\alpha)$ επομένως $f(x)<f(\alpha)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

β) Για κάθε $\alpha<x<\xi \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(\xi)=0 \Rightarrow f\nearrow[\alpha,\xi]$. Επομένως για κάθε $\alpha<x\le\xi \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)>f(\alpha)$. Για κάθε $\xi<x<\beta \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(\xi)>f'(x) \Leftrightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow[\xi,\beta]$, άρα $f(x)>f(\beta)=f(\alpha)$ επομένως $f(x)>f(\alpha)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

92. Είναι $f''(x)<0 \Rightarrow f'\searrow[\alpha,\beta]$. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), $f(\alpha)=f(\beta)=0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):\ f'(\xi)=0$.

Για κάθε $\alpha<x<\xi \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(\xi)=0 \Rightarrow f\nearrow[\alpha,\xi]$. Άρα για κάθε $\alpha<x\le\xi \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)>f(\alpha)=0$.

Για κάθε $\xi<x<\beta \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(\xi)>f'(x) \Leftrightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow[\xi,\beta]$, άρα $f(x)>f(\beta)=0$, επομένως $f(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

93. Είναι $f''(x)<0 \Rightarrow f'\searrow[\alpha,\beta]$. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), $f(\alpha)=f(\beta)=0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):\ f'(\xi)=0$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε για κάθε $\alpha < \xi < \beta$ ισχύει
$f'(\alpha) > f'(\xi) > f'(\beta) \Leftrightarrow f'(\alpha) > 0 > f'(\beta)$,άρα $f'(\alpha) f'(\beta) < 0$.

94.Είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow [0,3]$. Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, $f(1) = f(2) = 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (1,2)$: $f'(\xi) = 0$.

Για κάθε $0 < x < \xi \overset{f' \searrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \nearrow [0,\xi]$.

Άρα ε $0 < 1 < \xi \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(0) < f(1) = 0$

Για κάθε $\xi < x < 3 \overset{f' \searrow}{\Rightarrow} f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [\xi,3]$,

Επομένως $\xi < 2 < 3 \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f(2) > f(3)$ οπότε $f(3) < 0$. Άρα $f(0) f(3) > 0$.

95.α) Είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [0,2]$ στο $[0,2]$.
Άρα $0 < 1 < 2 \Leftrightarrow f'(0) < f'(1) < f'(2) \Leftrightarrow f'(0) < 0 < f'(2)$.
β) Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$.

- Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) < f'(1) = 0$, άρα $f \searrow$ στο $[0,1]$.

Επομένως για κάθε $0 \le x < 1$ είναι $f(x) > f(1)$.

- Για κάθε $x \in (1,2)$ είναι $f'(x) > f'(1) = 0$, άρα $f \nearrow$ στο $[1,2]$.

Επομένως για κάθε $1 \le x \le 2$ είναι $f(x) \ge f(1)$.
Άρα, $f(x) \ge f(1)$ για κάθε $x \in [0,2]$.

96.α) Έστω $g(x) = f(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) + 1$. Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) > -1 \Leftrightarrow f'(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.
Άρα για κάθε $x < 0$ είναι $g(x) < g(0) \Leftrightarrow f(x) + x < -1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < -x$.
Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) < -1 \Leftrightarrow f'(x) + 1 < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Άρα για κάθε $x \ge 0$ είναι $g(x) \le g(0) \Leftrightarrow f(x) + x \le -1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < -x$. Τελικά για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$f(x)<-x$.

β) Έστω $h(x)=f(x)-\ln(x^2+1)+1,\ x\geq 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $h'(x)=f'(x)-\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)<-1\Leftrightarrow$

$f'(x)-\dfrac{2x}{x^2+1}<-1-\dfrac{2x}{x^2+1}<0\Leftrightarrow h'(x)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Άρα για κάθε $x>0$ είναι $h(x)<h(0)=f(0)+1=0\Leftrightarrow$

$f(x)-\ln(x^2+1)+1<0\Leftrightarrow f(x)<\ln(x^2+1)-1$.

97. Η ε_1 διέρχεται από τα σημεία $(0,-1)$ και $(1,0)$, οπότε έχει εξίσωση y = x-1.

Η ε_2 είναι παράλληλη στην ε_1 και διέρχεται από το (0,2) άρα έχει εξίσωση y=x+2. Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)>x-1$ και $f'(x)\leq x+2$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x = 0.

α) Έστω $g(x)=x^2-2x-2f(x),\ x\in\mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$g'(x)=2x-2-2f'(x)=-2(f'(x)-(x-1))$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g'(x)<0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x>0$ είναι $g(x)<g(0)\Leftrightarrow x^2-2x-2f(x)<0\Leftrightarrow x^2-2x<2f(x)$.

Έστω $h(x)=2f(x)-x^2-4x,\ x\in\mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=2f'(x)-2x-4=2(f'(x)-(x+2))$. Για κάθε $x\neq 0$ είναι $h'(x)<0$ και η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι γνησίως αύξουσα.

Για κάθε $x>0$ είναι $h(x)<h(0)\Leftrightarrow 2f(x)-x^2-4x<0\Leftrightarrow 2f(x)<x^2+4x$.

β) Για κάθε $x<0$ είναι $g(x)>g(0)\Leftrightarrow x^2-2x-2f(x)>0\Leftrightarrow$

$2f(x)<x^2-2x$ και $h(x)>h(0)\Leftrightarrow 2f(x)-x^2-4x>0\Leftrightarrow 2f(x)>x^2+4x$.

98. Είναι $f(x)\geq x\ln x\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}-\ln x\geq 0$.

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}-\ln x,\ x\geq 1$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με

παράγωγο $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-\dfrac{1}{x}$.

Είναι $f'(x)>\dfrac{f(x)+x}{x}\Leftrightarrow xf'(x)>f(x)+x\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)>x\Leftrightarrow$

$\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}\Leftrightarrow\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-\dfrac{1}{x}>0\Leftrightarrow g'(x)>0$ για κάθε $x>1$, και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Άρα για κάθε $x\geq 1$ είναι $g(x)\geq g(1)\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}-\ln x\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq x\ln x$.

99. Έστω $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο

$g'(x)=\dfrac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}>0\Rightarrow g\nearrow[0,+\infty)$. Άρα για κάθε $x>0$ είναι

$g(x)>g(0)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}>2$ (1). Επειδή $f(x)\neq 0$ και f συνεχής στο $[0,+\infty)$ θα διατηρεί πρόσημο στο διάστημα αυτό. Όμως $f(0)=1>0$ οπότε $f(x)>0$. Άρα

$(1)\Leftrightarrow f'(x)>2f(x)\Leftrightarrow f'(x)-2f(x)>0\Leftrightarrow$

$e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)>0\Rightarrow\left(e^{-2x}f(x)\right)'>0$. Έστω $h(x)=e^{-2x}f(x)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο

$h'(x)=e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)>0\Rightarrow\left(e^{-2x}f(x)\right)'>0$ οπότε $h\nearrow[0,+\infty)$.

Επομένως για κάθε $x\geq 0$ είναι $h(x)\geq h(0)\Leftrightarrow e^{-2x}f(x)\geq 1\Leftrightarrow f(x)\geq e^{-2x}$.

100. Έστω $g(x)=f(x)-\dfrac{\alpha}{\beta}x$. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-\dfrac{\alpha}{\beta}$ και δεύτερη παράγωγο $g''(x)=f''(x)$. Είναι $g''(x)<0$, άρα $g'\searrow$ στο $[\alpha,\beta]$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β), $g(\alpha)=g(\beta)=0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta):g'(\xi)=0$. Για κάθε $\alpha<x<\xi$ είναι $g'(x)>g'(\xi)>0$, άρα $g\nearrow$ στο $[\alpha,\xi]$. Για κάθε $\xi<x<\beta$ είναι $g'(x)<g'(\xi)=0$, άρα $g\searrow$ στο

$[\xi,\beta]$.Για κάθε $\alpha < x < \xi$ είναι $g(x) > g(\alpha) > 0$ και για κάθε $\xi \le x < \beta$ είναι $g(x) > g(\beta) > 0$, άρα $g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - \frac{\alpha}{\beta}x > 0 \Leftrightarrow f(x) > \frac{\alpha}{\beta}x$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$.

101. Έστω $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0 \Rightarrow h \searrow \mathbb{R}$.

Άρα $0 < 1 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(0) > h(1) \Leftrightarrow \frac{f(0)}{\cancel{g(0)}} > \frac{f(1)}{\cancel{g(1)}} \Leftrightarrow f(0) > f(1)$.

102. Έστω $f(x) = (2-x)g(x), x \in [0,2]$. Hf είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με παράγωγο $f'(x) = (2-x)g'(x) - g(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [0,2]$.

Άρα $0 < 2 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(0) > f(2) \Leftrightarrow 2g(0) > 0 \Leftrightarrow g(0) > 0$.

103. Έστω $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} - x$, $x \ge 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - x^2 - 1 > 0$ οπότε $g \nearrow [0,+\infty)$.

Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) > \frac{x^3}{3} + x + f(0)$.

Έστω $h(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$, $x \ge 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $h'(x) = f'(x) - x^2 - x - 2 < 0$ οπότε $h \searrow [0,+\infty)$.

Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) < \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + f(0)$.

Άρα $\frac{x^3}{3} + x + f(0) < f(x) < \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + f(0) \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{x^2} + \frac{f(0)}{x^3} < \frac{f(x)}{x^3} < \frac{1}{3} + \frac{1}{2x} + \frac{2}{x^2} + \frac{f(0)}{x^3}$. Όμως

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x^2} + \frac{f(0)}{x^3}\right) = \frac{1}{3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2x} + \frac{2}{x^2} + \frac{f(0)}{x^3}\right)$ οπότε από το κριτήριο

παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

104. Αν ε_1 η μία από τις δύο παράλληλες που διέρχεται από τα σημεία $(0,2)$ και $(-2,0)$ τότε έχει εξίσωση y = x+2.

Αν ε_2 η ευθεία η οποία είναι παράλληλη στην ε_1 και διέρχεται από το (1,1) και την αρχή των αξόνων τότε έχει εξίσωση y=x.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)>x$ και $f'(x)\le x+2$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x = 0.

Έστω $g(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$, $x\ge 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-x>0$ οπότε $g\nearrow[0,+\infty)$.

Άρα για κάθε $x>0$ είναι $g(x)>g(0)\Leftrightarrow f(x)>\dfrac{x^2}{2}+f(0)$ Έστω

$h(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}-2x$, $x\ge 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο $h'(x)=f'(x)-x-2<0$ οπότε $h\searrow[0,+\infty)$.

Επομένως για κάθε $x>0$ είναι $h(x)<h(0)\Leftrightarrow f(x)<\dfrac{x^2}{2}+2x+f(0)$, άρα

$\dfrac{x^2}{2}+f(0)<f(x)<\dfrac{x^2}{2}+2x+f(0)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{1}{2}+\dfrac{f(0)}{x^2}<\dfrac{f(x)}{x^2}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{f(0)}{x^2}$ Όμως

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{f(0)}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{f(0)}{x^2}\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

105. Έστω $g(x)=f(x)-x^3-1$, $x\ge 0$. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-3x^2$ και δεύτερη παράγωγο $g''(x)=f''(x)-6x<0\Rightarrow g'\searrow[0,+\infty)$. Άρα για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)<g'(0)=0\Rightarrow g\searrow[0,+\infty)$.Επομένως για κάθε $x>0$ είναι $g(x)<g(0)\Leftrightarrow f(x)<x^3+1$.

Έστω $h(x)=f(x)-(x-1)^2$, $x\ge 0$. Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο $h'(x)=f'(x)-2(x-1)$ και δεύτερη παράγωγο

$h''(x)=f''(x)-2>0\Rightarrow h'\nearrow[0,+\infty)$. Άρα για κάθε $x>0$ είναι
$h'(x)>h'(0)=2>0\Rightarrow h\nearrow[0,+\infty)$.Επομένως για κάθε $x>0$ είναι
$h(x)>h(0)=0\Leftrightarrow f(x)>(x-1)^2$.

106.Έστω $g(x)=f(x)-e^x+x^2$, $x\in[0,1]$. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-e^x+2x$ και δεύτερη παράγωγο $g''(x)=f''(x)-e^x+2>0\Rightarrow g'\nearrow[0,1]$.Επομένως για κάθε
$0<x<1\Rightarrow g'(0)<g'(x)\Leftrightarrow g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow[0,1]$, άρα
$g(0)<g(1)\Leftrightarrow f(0)-1<f(1)-e+1\Leftrightarrow f(0)-f(1)=2-e<0$.

107. Έστω $g(x)=f(x)-2x^3+3x^2$, $x\in[1,5]$. Είναι $g'(x)=f'(x)-6x^2+6x$ και $g''(x)=f''(x)-12x+6>0\Rightarrow g'\nearrow[1,5]$.
$1<x<5\Rightarrow g'(1)<g'(x)\Leftrightarrow g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow[1,5]$, άρα
$g(1)<g(5)\Leftrightarrow f(5)-f(1)>176$

108. $f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow\mathbb{R}$. Από το ΘΜΤ $\exists\xi_1\in(-2,-1):f'(\xi_1)=f(-1)-f(-2)$ και $\exists\xi_2\in(1,2):f'(\xi_2)=f(2)-f(1)$. Είναι $\xi_1<\xi_2\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow$
$f(-1)-f(-2)>f(2)-f(1)\Leftrightarrow f(-1)+f(1)>f(-2)+f(2)\Leftrightarrow A>B$

109. $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow\mathbb{R}$. Επειδή τα α, β, γ, δ, είναι διαδοχικοί όροι μίας γνησίως αύξουσας αριθμητικής προόδου, ισχύει ότι $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ και $\beta-\alpha=\gamma-\beta=\delta-\gamma$.
Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ και $\xi_2\in(\gamma,\delta):f'(\xi_1)=f(\beta)-f(\alpha)$ και $f'(\xi_2)=f(\delta)-f(\gamma)$. Είναι $\xi_1<\xi_2\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow$
$f(\beta)-f(\alpha)>f(\delta)-f(\gamma)\Leftrightarrow f(\beta)+f(\gamma)>f(\alpha)+f(\delta)$

110. α) $h'(x)=4f'(x)-4x^3=4\left[f'(x)-x^3\right]<0\Rightarrow h\searrow\mathbb{R}$
β) ΘΜΤ στο $[2,3]:f'(\xi)=f(3)-f(2)$ $2<3\overset{h\searrow}{\Leftrightarrow}h(2)>h(3)\Rightarrow$
$4f(2)-16>4f(3)-81\Leftrightarrow f(3)-f(2)<\frac{65}{4}<17$ άρα $f'(\xi)<17$

111. Λόγω Θ.Μ.Τ. για την g στο $[-\rho,x]$, $x\in(-\rho,\rho)$, υπάρχει

$\xi\in(-\rho,x):g'(\xi)=\dfrac{g(x)-g(-\rho)}{x+\rho}$. Είναι $-\rho<\xi<x<\rho$, άρα:

$g'(\xi)<g'(\rho)\Leftrightarrow\dfrac{g(x)-g(-\rho)}{x+\rho}<g'(\rho)\Leftrightarrow g(x)<(x+\rho)g'(\rho)+g(-\rho)$.

112. α΄ τρόπος: Έστω

$g(x)=6f(x)-(f(8)-f(2))x-8f(2)+2f(8),\ x\in[2,8]$

$g'(x)=6f'(x)-(f(8)-f(2))$. Από το ΘΜΤ $\exists\xi\in(2,8):\ f'(\xi)=\dfrac{f(8)-f(2)}{6}$.

Για $2<x<\xi\ \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}\ f'(x)<f'(\xi)\Leftrightarrow f'(x)<\dfrac{f(8)-f(2)}{6}\Leftrightarrow$

$6f'(x)-f(8)+f(2)<0$, άρα $g'(x)<0\Rightarrow g\searrow[2,8]$. Για κάθε $2<x<8$ είναι

$g(x)<g(2)=0$

β΄ τρόπος

Έστω $x\in(2,8)$, σε καθένα από τα διαστήματα $[2,x]$ και $[x,8]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Συνεπώς υπάρχουν $\xi_1\in(2,x)$ και $\xi_2\in(\chi,8)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(8)-f(x)}{8-x}$.

Επειδή $f''(x)>0$, τότε η f' θα είναι γνησίως αύξουσα και αφού $\xi_1<\xi_2$, θα είναι $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}<\dfrac{f(8)-f(x)}{8-x}\Leftrightarrow$

$(8-x)[f(x)-f(2)]<(x-2)[f(8)-f(x)]\Leftrightarrow$

$8f(x)-8f(2)-xf(x)+xf(2)<xf(8)-xf(x)-2f(8)+2f(x)\Leftrightarrow$

$6f(x)<xf(8)-xf(2)+8f(2)-2f(8)\Leftrightarrow$

$f(x)<\dfrac{f(8)-f(2)}{6}x+\dfrac{8f(2)-2f(8)}{6}$

Μονοτονία και εξισώσεις

113. Έστω $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in\mathbb{R}$. . Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $h'(x)=f'(x)-g'(x)>0\Rightarrow h\nearrow\mathbb{R}$ οπότε η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ έχει το πολύ μία ρίζα.

114. Αρκεί για κάθε $x>0$ η εξίσωση

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)=2x-x\ln x\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}-2+\ln x=0$$

να έχει το πολύ μια ρίζα. Έστω $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}-2+\ln x,\ x>0.$ Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}+\dfrac{1}{x}$. Ισχύουν οι υποθέσεις του .Θ.Μ.Τ για την h στο $[0,x],x>0$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x):f'(\xi)=\dfrac{f(x)}{x}$. Είναι $f''(x)>0$ οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα για κάθε $0<\xi<x$ ισχύει $f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}<f'(x)\Leftrightarrow$ $xf'(x)-f(x)>0$ άρα $h'(x)>0\Rightarrow h\nearrow(0,+\infty)$ οπότε η $h(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

115. Έστω $h(x)=f(x)-\ln(x^2+2x+5)-2$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $h'(x)=f'(x)-\dfrac{2x+2}{x^2+2x+5}>0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα

116. Έστω $f(x)=x^7+7x-\lambda,\ x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=7x^6+7>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$. Στο διάστημα $(0,1)$ η f έχει σύνολο τιμών το $f((0,1))=(-\lambda,8-\lambda)$.Για να έχει η f ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$ πρέπει $0\in f((0,1))$ και αυτό συμβαίνει όταν $-\lambda<0\Leftrightarrow\lambda>0$ και $8-\lambda>0\Leftrightarrow\lambda<8.$ Άρα $0<\lambda<8.$

117. *α)* Έστω $f(x)=x^5+4x^3+7x+\eta\mu x-1,\ x\in[0,1]$. Είναι $f(0)=-1<0,\ f(1)=11+\eta\mu 1>0$ και f συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών

συναρτήσεων, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (0,1) : f(x_0) = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με παράγωγο $f'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 7 + \sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

β) Έστω $f(x) = 6x^3 + 5x - 3x^2 - 3,\ x \in [0,1]$. Είναι $f(0) = -3 < 0,\ f(1) = 5 > 0$ και f συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (0,1) : f(x_0) = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με παράγωγο $f'(x) = 18x^2 - 6x + 5 > 0$ $(\Delta = -324 < 0)$ οπότε $f \nearrow [0,1]$ άρα x_0 μοναδικό.

γ) Έστω $f(x) = 3x^4 + 7\ln x - 1,\ x \in (0,1]$. Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ οπότε υπάρχει $\alpha > 0$ που βρίσκεται πολύ κοντά στο 0, τέτοιο, ώστε $f(\alpha) < 0$. Επίσης $f(1) = 2 > 0$ οπότε $f(\alpha) f(1) < 0$, f συνεχής στο $[\alpha, 1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, 1) : f(x_0) = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με παράγωγο $f'(x) = 12x^3 + \dfrac{7}{x} > 0$ οπότε $f \nearrow (0,1] \Rightarrow x_0$ μοναδικό.

δ) Έστω $f(x) = e^x + 3x + 4$. Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ οπότε υπάρχει $\alpha < 0 : f(\alpha) < 0$ όπου ο α είναι πολύ μικρός αρνητικός αριθμός. Επίσης $f(-1) = \dfrac{1}{e} + 1 > 0$ άρα $f(\alpha) f(-1) < 0$, f συνεχής στο $[\alpha, -1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, -1) : f(x_0) = 0$.Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με παράγωγο $f'(x) = e^x + 3 > 0 \Rightarrow f \nearrow (0,1] \Rightarrow x_0$ μοναδικό.

118. Έστω $h(x) = f(x) - x(1 - \ln x),\ x \in [1, e]$. Δεν παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα του πεδίου ορισμού της άρα $f(1) < 1, f(e) > 0$.Επομένως $h(1) = f(1) - 1 < 0,\ h(e) = f(e) > 0$ οπότε $h(1) h(e) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0 \in (1, e) : f(x_0) = 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με παράγωγο $h'(x) = f'(x) + \ln x > 0$ για κάθε $x \in (1, e) \Rightarrow h \nearrow [1, e] \Rightarrow x_0$ μοναδικό.

119. Έστω $f(x)=x^4-4x+6,\ x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=4x^3-4$, οπότε για $x<1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,1]$ ενώ για $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$. Για κάθε $x<1\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(1)=3$ και για κάθε $x\geq 1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)\geq f(1)=3$ άρα η $f(x)=0$ είναι αδύνατη.

Αυξημένης δυσκολίας

120. α) Είναι $x\ln x\geq x-1\Leftrightarrow x\ln x-x+1\geq 0$. Έστω $f(x)=x\ln x-x+1$, $x>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x+1-1=\ln x$. Είναι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Επομένως για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f(x)\geq f(1)=0\Leftrightarrow f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow x\ln x-x+1\geq 0$ για κάθε $x>0$.

β) Έστω $g(x)=2x^2\ln x-3x^2+4x-1,\ x>0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$g'(x)=4x\ln x+2x-6x+4=4(x\ln x-x+1)=4f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x^2\ln x-3x^2+4x-1)=-1$. Επίσης

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(2\ln x-3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=+\infty$ οπότε η f έχει σύνολο τιμών :

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=(-1,+\infty)$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f και η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

121. Η εφαπτομένη της C_f στο $M(x_0,f(x_0))$ είναι η ε:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Για να διέρχεται από το Ο πρέπει

$-f(x_0)=f'(x_0)(-x_0)\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}(x_0-1)+e^{-x_0}(x_0+1)=0$

Έστω $g(x)=e^x(x-1)+e^{-x}(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=x\left(e^x-e^{-x}\right)>0$ για κάθε $x\neq 0$.

(Για $x>0$ είναι $x>-x\Leftrightarrow e^x>e^{-x}\Leftrightarrow e^x-e^{-x}>0$ και για $x<0$ είναι $x<-x\Leftrightarrow e^x<e^{-x}\Leftrightarrow e^x-e^{-x}>0$. Επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή $g(0)=0$ η $x=0$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x)=0$.

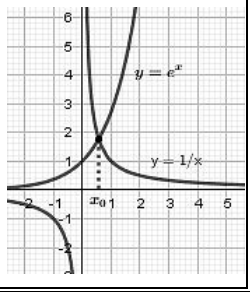
122. Έστω $f(x)=6\eta\mu x-x+x^3$, $x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=6\sigma\upsilon\nu x-1+3x^2$.Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f''(x)=-6\eta\mu x+6x=6(x-\eta\mu x)$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x|\le|x|$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$. Για $x<0$ είναι $|\eta\mu x|<-x\Leftrightarrow x<\eta\mu x<-x$ οπότε $x-\eta\mu x<0\Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow(-\infty,0]$.Για $x>0$ είναι $|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x$ οπότε $x-\eta\mu x>0\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x<0\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(0)=0$ οπότε $f\nearrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(0)=0$ οπότε $f\nearrow[0,+\infty)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0)=0$, η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0\Leftrightarrow 6\eta\mu x-x+x^3=0$

123. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\ln\alpha\cdot(\alpha^x-1)+\ln\beta\cdot(\beta^x-1)$. Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$ άρα $f(x)\ge f(0)=2$ και για $x<0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$, οπότε $f(x)\ge f(0)=2$. Άρα $f(x)\ge 2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

124. Έστω $f(x)=xe^x-1$, $x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,για κάθε $x<-1$ είναι $f'(x)<0$, για κάθε $x>-1$ είναι $f'(x)>0$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[-1,+\infty)$.Είναι



$f(-1)=-\frac{1}{e}-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$.Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=\left[-1-\frac{1}{e},-1\right)$. Επειδή $0\notin f(\Delta_1)$ η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο Δ_1 . Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2 , άρα $f(\Delta_2)=\left[-1-\frac{1}{e},+\infty\right)$. Επειδή $0\in f(\Delta_2)$ η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0\in\Delta_2$, οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2..

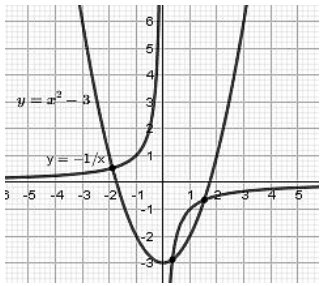
$f(x)=0\Leftrightarrow xe^x=1$. Αν $x=0$ η εξίσωση είναι αδύνατη, οπότε για $x\neq 0$ είναι $e^x=\frac{1}{x}$. Η λύση της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι η τετμημένη του κοινού σημείου των $y=e^x$ και $y=\frac{1}{x}$.

125. Έστω $f(x)=x^3-3x+1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=3x^2-3$.Είναι $f'(x)=3x^2-3\geq 0\Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

- για κάθε $x<-1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,-1]$ άρα $f((-\infty,-1])=(-\infty,3]$. Το $0\in(-\infty,3)$, άρα υπάρχει μοναδικός $x_1<-1<0$ τέτοιος, ώστε $f(x_1)=0$.
- για κάθε $-1<x<1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[-1,1]$. Στο $[-1,0]$ είναι $f([-1,0])=[1,3]$ άρα η $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $[-1,0]$ και στο $(0,1)$ είναι $f((0,1))=(-1,1)$.Επειδή $0\in(-1,1)$ υπάρχει μοναδικός $x_2\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_2)=0$.
- για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$ άρα $f([1,+\infty))=[-1,+\infty)$.Επειδή $0\in[-1,+\infty)$ υπάρχει μοναδικός $x_3>1>0$ τέτοιος, ώστε $f(x_3)=0$.



$x^3-3x+1=0\Leftrightarrow x(x^2-3)=-1$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία αρνητική ρίζα την x_1 και δύο θετικές ρίζες τις x_2, x_3.

Αν $x=0$ η εξίσωση είναι αδύνατη, οπότε για $x\neq 0$ είναι $x^2-3=-\frac{1}{x}$. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=x^2-3$ και $y=-\frac{1}{x}$ τέμνονται σε 3 σημεία, από τα οποία το ένα έχει αρνητική τετμημένη και τα άλλα δύο θετική τετμημένη.

126. α) Έστω $f(x)=x\left(e^x-e^{-x}\right)-e^x-e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=x\left(e^x+e^{-x}\right)$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0\Leftrightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x(x-1)-e^{-x}(x+1)\right]=0-(+\infty)=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x(x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^{-x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}(x+1)\right)=+\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x(x-1)-e^{-x}(x+1)\right]=+\infty-0=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x(x-1)\right)=+\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0)$ είναι $f(\Delta_1)=(-2,+\infty)$ και στο $\Delta_2=(0,+\infty)$ είναι $f(\Delta_2)=(-2,+\infty)$. Επειδή $0\in f(\Delta_1), 0\in f(\Delta_2)$, υπάρχουν μοναδικοί $x_1\in\Delta_1$, $x_2\in\Delta_2$ τέτοιοι , ώστε $f(x_1)=0, f(x_2)=0$. Οι x_1, x_2 μοναδικοί αφού η f είναι γνησίως μονότονη στα Δ_1,Δ_2.

β) Έστω $f(x)=x^2-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=2x-x\sigma\upsilon\nu x=x(2-\sigma\upsilon\nu x)$.Επειδή $2-\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

- για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$ και
- για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.

Είναι $f(0)=-1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\left(1-\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)\right]=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1-\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)\right]=+\infty$.

(Είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0 = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$. Όμοια $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = 0.$)

Επομένως στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ είναι $f(\Delta_1) = (-1, +\infty)$ και στο $\Delta_2 = (0, +\infty)$ είναι $f(\Delta_2) = (-1, +\infty)$. Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$, $0 \in f(\Delta_2)$ υπάρχουν μοναδικοί $x_1 \in \Delta_1$, $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιοι, ώστε $f(x_1) = 0$ και $f(x_2) = 0$. Οι x_1, x_2 μοναδικοί αφού η f είναι γνησίως μονότονη στα Δ_1, Δ_2.

127. Αρκεί η εξίσωση $\ln x = \alpha x$ να έχει δύο ρίζες. Έστω $g(x) = \ln x - \alpha x$, $x > 0$. Είναι $g(1) = -\alpha < 0$, $g(e) = 1 - \alpha e > 0$, οπότε $g(1)g(e) < 0$. Η g είναι συνεχής στο $[1, e]$ επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_1 \in (1, e) : g(x_1) = 0$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - \alpha x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\ln x}{x} - \alpha\right)\right] = -\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, οπότε υπάρχει $\beta > e$ τέτοιος, ώστε $g(\beta) < 0$. Είναι $g(e)g(\beta) < 0$, g είναι συνεχής στο $[e, \beta]$ επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_2 \in (e, \beta) : g(x_2) = 0$.

Έστω ότι η g έχει και τρίτη ρίζα, την $x_3 > x_2 > x_1$.

Η g είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$, παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$,

$f(x_1) = f(x_2) = 0, f(x_2) = f(x_3) = 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα εξίσωση $g'(x) = \frac{1}{x} - \alpha = 0$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες.

Όμως $\frac{1}{x} - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g'(x) = \frac{1}{x} - \alpha = 0$. Άρα, η εξίσωση $g(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει 3 ρίζες οπότε και έχει ακριβώς 2 ρίζες.

128. α) Έστω $f(x) = \ln x^2 - x - 2,\ x \ne 0$. Όταν $x > 0$ τότε

$f(x)=2\ln x-x-2$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$:

• για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(0,2]$ οπότε $f(x)\le f(2)=2(\ln 2-2)<0$.

• για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[2,+\infty)$ άρα $f(x)\le f(2)<0$. Οπότε η $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(0,+\infty)$.

β) Για $x<0$ είναι $f(x)=2\ln(-x)-x-2$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{2-x}{x}>0$ άρα $f'(x)>0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(2\frac{\ln(-x)}{x}-1-\frac{2}{x}\right)\right]=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty-0-2=-\infty$. Επομένως στο διάστημα $A=(-\infty,0)$ η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\mathbb{R}$ και επειδή $0\in f(A)$ η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty,0)$.Η ρίζα είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

129. Έστω $f(x)=4\eta\mu x-2x\sigma\upsilon\nu x-x-1,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ με παράγωγο $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+2x\eta\mu x-1$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=2x\sigma\upsilon\nu x$. Η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

• για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ οπότε $f'(x)\ge f'(0)=1$ και

• για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ οπότε $f'(x)\ge f'(0)=1$.

Επομένως για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x)\ge1>0\Rightarrow f\nearrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Είναι $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-5+\frac{\pi}{2}<0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3-\frac{\pi}{2}>0$ άρα $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$,η f είναι συνεχής

στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Το x_0 είναι μοναδικό αφού $f \nearrow \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

130.α) Έστω $f(x)=\ln^2 x-2x\ln x+1$, $x\in(0,+\infty)$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=2\frac{\ln x}{x}-2\ln x+2$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{2}{x}=2\frac{1-\ln x-x}{x^2}$.

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f'' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $1-\ln x-x$. Έστω $g(x)=1-\ln x-x$, $x\in(0,+\infty)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=-\frac{1}{x}-1<0$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $g(1)=0$.

- Για κάθε $x>1$ είναι $g(x)<g(1)=0$, άρα $f''(x)<0$ οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Άρα $f'(x)<f'(1)=-2<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.
- Για κάθε $0<x<1$ είναι $g(x)>g(1)=0$, άρα $f''(x)>0$ οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$. Άρα $f'(x)<f'(1)=-2<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Είναι

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln^2 x-2x\ln x+1\right)=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln^2 x=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$. Ακόμη

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\ln^2 x}{x}-2\ln x+\frac{1}{x}\right)\right]=-\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Για το σύνολο τιμών της f έχουμε:

$f\left((0,+\infty)\right)\overset{f\searrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

β) Έστω $f(x)=e^x+x^2-2x-2,\ x\in\mathbb{R}$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=e^x+2x-2$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=e^x+2>0\Rightarrow f'\nearrow\mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ οπότε η f' έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα υπάρχει $x_1\in\mathbb{R}:f'(x_1)=0$. Το x_1 είναι μοναδικό αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(0)=-1<0,\ f'(1)=e>0$ οπότε $f'(0)\cdot f'(1)<0$, η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Bolzano επομένως η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$, η οποία είναι μοναδική αφού η η f' είναι γνησίως φθίνουσα οπότε ταυτίζεται με το x_1.Άρα $x_1\in(0,1)$.

Για κάθε $x<x_1\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_1)=0$ οπότε $f\searrow(-\infty,x_1]$ και για κάθε $x>x_1\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_1)=0$ οπότε $f\nearrow[x_1,+\infty)$.Είναι $f(0)=-1,\ f(1)=e-3$, οπότε $0<x_1\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(0)<0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Στα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty,0),\Delta_2=[0,x_1],\ \Delta_3=[x_1,+\infty)$ η f έχει αντίστοιχα σύνολα τιμών $f(\Delta_1)=(-1,+\infty),f(\Delta_2)=\left[f(x_1),-1\right]$ και $f(\Delta_3)=\left[f(x_1),+\infty\right)$. Το 0 ανήκει μόνο στα διαστήματα $f(\Delta_1),f(\Delta_3)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ρίζα στο Δ_1, η οποία είναι αρνητική ρίζα και μία στο Δ_3, η οποία είναι θετική.

131. α) Έστω $f(x)=e^x+x^2+5x+1,\ x\in\mathbb{R}$.. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=e^x+2x+5,$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=e^x+2$. Είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow\mathbb{R}.$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ οπότε $f'(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Επειδή $0\in f'(\mathbb{R})$, υπάρχει $x_1\in\mathbb{R}:f'(x_1)=0\Leftrightarrow e^{x_1}=-2x_1-5$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,για κάθε $x<x_1\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_1)=0$ οπότε $f\searrow(-\infty,x_1]$ και για κάθε $x>x_1\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_1)=0$ οπότε $f\nearrow[x_1,+\infty)$. Είναι

$f(x_1)=e^{x_1}+x_1^2+5x_1+1=-2x_1-5+x_1^2+5x_1+1=x_1^2+3x_1-4=(x_1-1)(x_1+4)$

Είναι $f'(1)=e+7>0$, $f'(-4)=e^{-4}-3<0$ οπότε $f'(-4)\cdot f'(1)<0$, η f' είναι συνεχής στο $[-4,1]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Bolzano επομένως η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-4,1)$, η οποία ταυτίζεται με την x_1 αφού η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα . Επομένως , $x_1\in(-1,4)$. Άρα $-4<x_1\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(-4)<0$ Ακόμη $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Στο διάστημα $A_1=(-\infty,x_1]$ είναι $f(A_1)=[f(x_1),+\infty)$ και στο $A_2=[x_1,+\infty)$ είναι $f(A_2)=[f(x_1),+\infty)$. Επειδή το 0 περιέχεται σε καθένα από τα $f(A_1),f(A_2)$, υπάρχουν $x_2\in A_1$, $x_3\in A_2$ τέτοια, ώστε $f(x_2)=0=f(x_3)$. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα A_1, A_2, τα x_2,x_3 είναι μοναδικά.

β) Έστω $f(x)=x^2-2x\ln x-x-1,\ x>0$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=2x-2\ln x-3$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=2\dfrac{x-1}{x}$. Η f' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$,

- για κάθε $0<x<1$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow(0,1]$.Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=+\infty$ και $f'(1)=-1$, οπότε στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ η f' έχει σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1)=[-1,+\infty)$, άρα υπάρχει $x_1\in(0,1):\ f'(x_1)=0$.

- Επομένως για κάθε $0<x<x_1\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_1)=0\Rightarrow f\nearrow(0,x_1]$.

Είναι $f'(x_1)=0\Leftrightarrow 2x_1-2\ln x_1-3=0\Leftrightarrow 2\ln x_1=2x_1-3\ (1)$.

Είναι $f(x_1)=x_1^2-x_1\cdot 2\ln x_1-x_1-1\overset{(1)}{=}x_1^2-x_1(2x_1-3)-x_1-1=-(x_1-1)^2<0$,

$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-1$, άρα στο διάστημα $A_1=(0,x_1]$ η f έχει σύνολο τιμών το $f(A_1)=(-1,f(x_1)]$. Επειδή $0\notin f(A_1)$ η $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο A_1 .

- Για κάθε $x_1<x<1\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_1)=0\Rightarrow f\searrow[x_1,1]$, οπότε $f(x)<f(x_1)<0$ για κάθε $x\in[x_1,1]$.

- Για κάθε $x>1$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow[1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(2-2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{3}{x}\right)\right]=+\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$ η f' έχει σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2)=[-1,+\infty)$, άρα υπάρχει $x_2\in(1,+\infty)$: $f'(x_2)=0$.

Είναι $f'(x_2)=0\Leftrightarrow 2x_2-2\ln x_2-3=0\Leftrightarrow 2\ln x_2=2x_2-3$ (2) οπότε

$f(x_2)=x_2^2-x_2\cdot 2\ln x_2-x_2-1\overset{(2)}{=}-(x_2-1)^2<0$.

- Για κάθε $1<x<x_2\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_2)<0\Rightarrow f\searrow[1,x_2]$, άρα $f(x)<f(1)=-1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$ οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1-2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=+\infty$.

Στο διάστημα $A_2=[x_2,+\infty)$ η f έχει σύνολο τιμών το $f(A_2)=[f(x_2),+\infty)$.

Επειδή $0\in f(A_2)$ η $f(x)=0$ έχει μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(0,+\infty)$.

132. Έστω $g(x)=f(x)-4x,\ x\in[1,3]$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1,3]$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-4>0\Rightarrow g\nearrow[1,3]$.

Επομένως $g(1)<g(3)\Leftrightarrow f(1)-4<f(3)-12\Leftrightarrow f(3)>5$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,3]$, $f(1)\cdot f(3)<0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,3)$. Επειδή $f'(x)>4>0\Rightarrow f\nearrow[1,3]$ η ρίζα είναι μοναδική.

133. Έστω $g(x)=f(x)-x, x\in[1,2]$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-1>0\Rightarrow g\nearrow[1,2]$.

Είναι $1<2\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(1)<g(2)\Leftrightarrow f(1)-1<f(2)-2\Leftrightarrow f(2)>0$. Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$, $f(1)\cdot f(2)<0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$. Επειδή $f'(x)>1>0\Rightarrow f\nearrow[1,2]$ η ρίζα είναι μοναδική.

134. Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0,x]$, $x>0$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Είναι $f'(\xi)>1\Leftrightarrow\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>1\Leftrightarrow$ $f(x)>x+f(0)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+f(0)\right)=+\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[x,0]$, $x<0$ οπότε υπάρχει $\xi'\in(x,0)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi')=\dfrac{f(0)-f(x)}{-x}$. Είναι $f'(\xi)>1\Leftrightarrow\dfrac{f(0)-f(x)}{-x}>1\Leftrightarrow f(x)<x+f(0)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+f(0)\right)=-\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.Είναι $f'(x)>1>0\Rightarrow$ $f\nearrow\mathbb{R}$ οπότε η f έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Επειδή $0\in f(\mathbb{R})$ και η f είναι γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_1\in\mathbb{R}:f(x_1)=0$.

135. Αρκεί η εξίσωση $f(x)=4x+1821\Leftrightarrow f(x)-4x-1821=0$ να έχει ακριβώς μία ρίζα. Έστω $g(x)=f(x)-4x-1821$, $x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-4>1>0\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$. Για την g εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0,x]$, $x>0$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$. Είναι $g'(\xi)>1\Leftrightarrow\dfrac{g(x)-g(0)}{x}>1\Leftrightarrow g(x)>x+g(0)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+g(0)\right)=+\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$. Για την g εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[x,0]$, $x<0$ οπότε υπάρχει $\xi'\in(x,0)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi')=\dfrac{g(0)-g(x)}{-x}$. Είναι $g'(\xi)>1\Leftrightarrow\dfrac{g(0)-g(x)}{-x}>1\Leftrightarrow g(x)<x+g(0)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+g(0)\right)=-\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχει σύνολο τιμών το $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. . Επειδή $0\in g(\mathbb{R})$ υπάρχει $x_1\in\mathbb{R}:g(x_1)=0$, μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα

.

Λύση εξίσωσης

136. α) Έστω $f(x)=2x^2+x+\ln x-3,\ x>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=4x+1+\dfrac{1}{x}>0\Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$. Επειδή $f(1)=0$, η $x=1$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$.

β) Έστω $f(x)=e^x+e^{3x}-2,\ x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

παράγωγο $f'(x)=e^x+3e^{3x}>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

Επειδή $f(0)=0$, η $x=0$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Έστω $f(x)=3^{-x}+3^{-2x}-2,\ x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=-3^{-x}\ln 3-3^{-2x}\ln 3<0\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$.

Επειδή $f(0)=0$, η $x=0$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ) Έστω $f(x)=\ln(x-1)+x^2+x-6,\ x>1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}+2x+1>0\Rightarrow f\nearrow(1,+\infty)$. Επειδή $f(2)=0$, η $x=2$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$.

137. **α)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=e^{x-3}+1>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ άρα $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

β) Επειδή $f(3)=0$, η $x=3$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Είναι $e^{2x^2}-e^{2x+12}=2x-2x^2+12\Leftrightarrow$

$e^{(2x^2+3)-3}+(2x^2+3)-4=e^{(2x+15)-3}+2x+15-4\Leftrightarrow$

$f(2x^2+3)=f(2x+15)\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow}2x^2+3=2x+15\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow x=3$ ή $x=-2$

Αυξημένης δυσκολίας

138. **α)** Έστω $f(x)=\ln(xe^x+1)-x$. Για να ορίζεται η f πρέπει $xe^x+1>0$.

Έστω $g(x)=xe^x+1$, $x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$.

Είναι $g'(x)\geq 0\Leftrightarrow(x+1)e^x\geq 0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$. Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

- για κάθε $x<-1$ είναι $g'(x)<0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$. Επομένως για κάθε $x\leq -1\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}g(x)\geq g(-1)=1-\dfrac{1}{e}>0$.
- για κάθε $x>-1$ είναι $g'(x)>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$. Για κάθε $x>-1$ είναι $g(x)>g(-1)>0$. Άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως $A_f=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x)=\dfrac{xe^x+e^x}{xe^x+1}-1=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$. Είναι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{e^x-1}{xe^x+1}\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq 1\Leftrightarrow x\geq 0$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

• για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Για κάθε $x<0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0$.

• για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0$. Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$.

Επομένως η $x=0$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

β) Είναι $x^x=2^{x+4}\Leftrightarrow \ln x^x=\ln 2^{x+4}\Leftrightarrow x\ln x=(x+4)\ln 2\Leftrightarrow$

$x\ln x-x\ln 2-4\ln 2=0.$

Έστω $f(x)=x\ln x-x\ln 2-4\ln 2$, $x>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

με παράγωγο $f'(x)=\ln x+1-\ln 2=\ln\dfrac{x}{2}+1$.

Είναι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \ln\dfrac{x}{2}+1\geq 0\Leftrightarrow \ln\dfrac{x}{2}\geq -1\Leftrightarrow \dfrac{x}{2}\geq\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow x\geq\dfrac{2}{e}$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$,

• $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{2}{e}\right)$, οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{2}{e}\right]$.

• $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{2}{e},+\infty\right)$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{2}{e},+\infty\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$, άρα

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-4\ln 2$ και $f\left(\dfrac{2}{e}\right)=-\dfrac{2}{e}-4\ln 2$, άρα η f στο διάστημα $\Delta_1=\left(0,\dfrac{2}{e}\right]$,

έχει σύνολο τιμών: $f(\Delta_1)=\left[-\dfrac{2}{e}-4\ln 2,-4\ln 2\right)$. Επομένως $f(x)<0$ για κάθε

$x\in\left(0,\dfrac{2}{e}\right]$. Επειδή $f(4)=4\ln 4-4\ln 2-4\ln 2=0$ και f γνησίως αύξουσα στο

$\left[\dfrac{2}{e},+\infty\right)$, η $x=4$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

139. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x^4-x^4+1$, $x\neq 0$. Παρατηρούμε ότι

$f(1)=0$ και $f(-1)=0$, δηλαδή το 1 και το –1 είναι προφανείς ρίζες της εξίσωσης. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{4(1-x)(1+x)(1+x^2)}{x}$. Είναι

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(1-x)(1+x)}{x}\geq 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x)\geq 0$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$,

- $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$, οπότε f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$.

Επομένως για κάθε $x<-1$ είναι $f(x)<f(-1)=0$.

- $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$, οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0)$.

Επομένως για κάθε $-1<x\leq 0$ είναι $f(x)<f(-1)=0$.

Άρα το -1 είναι η μοναδική ρίζα της f στο $(-\infty,0)$.

- $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$.

Επομένως για κάθε $0<x\leq 1$ είναι $f(x)\leq f(1)=0$.

- $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Επομένως για κάθε $x\geq 1$ είναι $f(x)\leq f(1)=0$.

Άρα το 1 είναι η μοναδική ρίζα της f στο $(0,+\infty)$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, το –1 και το 1.

β) Έστω $f(x)=4^x+4^{\frac{1}{x}}-18$, $x>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=4^x\ln 4+4^{\frac{1}{x}}\ln 4\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{\ln 4\left(x^2 4^x-4^{\frac{1}{x}}\right)}{x^2}$.

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $x^2 4^x-4^{\frac{1}{x}}$. Οπότε, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^2 4^x-4^{\frac{1}{x}}$, $x>0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$g'(x)=2x\cdot 4^x+x^2\cdot 4^x\cdot\ln 4+4^{\frac{1}{x}}\cdot\ln 4\cdot\dfrac{1}{x^2}>0$, οπότε η g είναι $\nearrow$ στο $(0,+\infty)$

.Παρατηρούμε ότι $g(1)=4-4=0$, οπότε για κάθε $x>1$ είναι $g(x)>g(1)=0$, άρα $f'(x)>0$, οπότε $f\nearrow$ στο $[1,+\infty)$. Για κάθε $0<x<1$ είναι $g(x)<g(1)=0$, άρα $f'(x)<0$, οπότε $f\searrow$ στο $(0,1]$. Στο διάστημα $[1,+\infty)$ η f έχει προφανή ρίζα την $x=2$, γιατί $f(2)=4^2+4^{\frac{1}{2}}-18=16+2-18=0$

.Επειδή η f είναι $\nearrow$ στο $[1,+\infty)$, η $x=2$ είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)=0$ στο διάστημα αυτό. Στο διάστημα $(0,1]$ η f έχει ρίζα την $x=\frac{1}{2}$, γιατί $f\left(\frac{1}{2}\right)=4^{\frac{1}{2}}+4^2-18=2+16-18=0$. Επειδή η f είναι $\searrow$ στο $(0,1]$, η $x=\frac{1}{2}$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα αυτό.

Άρα, η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow 4^x+4^{\frac{1}{x}}=18$ αληθεύει μόνο για $x=2$ ή $x=\frac{1}{2}$.

140. α) Είναι $3^x+4^x=5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1=0$ (1).

Έστω $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^x\ln\frac{4}{5}<0 \Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$.

Από τη (1) έχουμε : $f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(2) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=2$.

β) Είναι $4^x+2^x=6^x \Leftrightarrow \left(\frac{4}{6}\right)^x+\left(\frac{2}{6}\right)^x-1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x-1=0$ (1).

Έστω $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x\ln\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^x\ln\frac{1}{3}<0 \Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$.

Από τη (1) έχουμε : $f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(1) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

γ) Έστω $f(x)=3^x-2x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$. Προφανείς ρίζες οι $x=0$, $x=1$, $x=2$.
Έστω ότι υπάρχει και 4^{η} ρίζα, η ρ, με $\rho>2$.
Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[0,1],[1,2],[2,\rho]$
,παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1),(1,2),(2,\rho)$ με παράγωγο $f'(x)=3^x\cdot\ln 3-4x$, $f(0)=f(1),f(1)=f(2),f(2)=f(\rho)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν
$x_1\in(0,1),x_2\in(1,2),x_3\in(2,\rho)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=0,f'(x_2)=0$ και
$f'(x_3)=0$. Η f' είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$,
παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(x_1,x_2),(x_2,x_3)$ με παράγωγο

$f''(x)=3^x\cdot\ln^2 3-4$, $f'(x_1)=f'(x_2)=0, f'(x_2)=f'(x_3)=0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,x_2), \xi_2\in(x_2,x_3)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)=0, f''(\xi_2)=0$.

Η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$,παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) με παράγωγο $f^{(3)}(x)=3^x\cdot\ln^3 3$, $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$ άτοπο Άρα έχει μοναδικές ρίζες τις $x=0$, $x=1$, $x=2$.

δ) Έστω $f(x)=2^x+2\cdot3^x-5x-3,\ x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$ και $f(1)=2^1+2\cdot3^1-5\cdot1-3=2+6-5-3=0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2^x\ln2+2\cdot3^x\ln3-5$ και $f''(x)=2^x\ln^2 2+2\cdot3^x\ln^2 3>0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$,παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, $f(0)=f(1)=0$ άρα ικανοποιούνται για την f οι προϋποθέσεις του θ.Rolle, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$.

• Για κάθε $x>\xi \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(\xi)=0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\xi,+\infty)$. Επειδή το 1 περιέχεται στο διάστημα $(\xi,+\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, το 1 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)=0$ στο $(\xi,+\infty)$.

• Για κάθε $x<\xi \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(\xi)=0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\xi]$. Επειδή το 0 περιέχεται στο διάστημα $(-\infty,\xi)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, το 0 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)=0$ στο $(-\infty,\xi)$.Επειδή $\xi<1$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\xi,+\infty)$ ισχύει ότι $f(\xi)<f(1)\Leftrightarrow f(\xi)<0$, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζες τα 0 και 1.

141. Οι τετμημένες των σημείων τομής των C_f , C_g, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 3x^2(2\ln x-1)=2x^3-6x+1\Leftrightarrow$
$6x^2\ln x-3x^2-2x^3+6x-1=0$.

Έστω $h(x)=6x^2\ln x-3x^2-2x^3+6x-1$, $x>0$.Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $h'(x)=12x\ln x+6x^2\cdot\frac{1}{x}-6x-6x^2+6=12x\ln x-6x^2+6$.

Η h' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$h''(x)=12\ln x+12x\cdot\frac{1}{x}-12x=12\ln x+12-12x=12(\ln x-x+1)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ άρα η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

(Γνωρίζουμε ότι $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει για $x=1$)
Η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$,

• για κάθε $0<x<1$ είναι $h'(x)>h'(1)=0$, άρα $h\nearrow$ στο $(0,1]$.

Επομένως για κάθε $0<x<1$ είναι $h(x)<h(1)=0$ (1).

• για κάθε $x>1$ είναι $h'(x)<h'(1)=0$, άρα $h\searrow$ $[1,+\infty)$.

Επομένως για κάθε $x>1$ είναι $h(x)<h(1)=0$ (2). Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $h(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Επειδή $h(1)=0$, η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$.

142. α) Η εξίσωση γίνεται $3^x-2^x=5^x-4^x$ (1). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=t^x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(t)=xt^{x-1}$. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[2,3]$ και $[4,5]$, παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(2,3),(4,5)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχουν $\xi_1\in(2,3)$ και $\xi_2\in(4,5)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}\Leftrightarrow x\xi_1^{x-1}=3^x-2^x$ και $f'(\xi_2)=\frac{f(5)-f(4)}{5-4}\Leftrightarrow x\xi_2^{x-1}=5^x-4^x$. Οπότε, η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση: $x\xi_1^{x-1}=x\xi_2^{x-1}\Leftrightarrow x\left(\xi_1^{x-1}-\xi_2^{x-1}\right)=0\Leftrightarrow(x=0)$ ή $\left(\xi_1^{x-1}=\xi_2^{x-1}\right)$ (2).

Από την (2) έχουμε $\frac{\xi_1^{x-1}}{\xi_2^{x-1}}=1\Leftrightarrow\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1}=1$ και επειδή $\frac{\xi_1}{\xi_2}\ne1$ γιατί $\xi_1\ne\xi_2$ θα είναι $x-1=0\Leftrightarrow x=1$. Άρα, η εξίσωση (1) έχει ακριβώς δύο λύσεις, $(x=0)$ ή $(x=1)$.

β) Όμοια Θ.Μ.Τ. στα $[7,8]$ και $[9,10]$ για την $f(x)=t^x$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Όμοια Θ.Μ.Τ. στο $[2,3]$ για την $f(x)=t^x$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}$.

143. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$f'(x)=1+\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}>0$ για κάθε $x\neq -1$ και επειδή η f είναι συνεχής, , είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\ln\left(x^2+1\right)\right)=$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\frac{1}{x}}\right)=-\infty(+\infty)=-\infty \text{ γιατί } \lim_{x\to-\infty}\ln\left(x^2+1\right)\overset{\substack{u=x^2+1\\ x\to-\infty,\ u\to+\infty}}{=}\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{2x}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^3}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\ln\left(x^2+1\right)\right)=+\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x^2+1\right)\overset{\substack{k=x^2+1\\ x\to+\infty,\ k\to+\infty}}{=}\lim\limits_{k\to+\infty}\ln k=+\infty$**.** Επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Είναι $e^x\left(x^2+1\right)=e^\alpha\Leftrightarrow x^2+1=\dfrac{e^\alpha}{e^x}\Leftrightarrow x^2+1=e^{\alpha-x}\Leftrightarrow$

$\ln\left(x^2+1\right)=\ln e^{\alpha-x}\Leftrightarrow\ln\left(x^2+1\right)=\alpha-x\Leftrightarrow x+\ln\left(x^2+1\right)=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha$.

Επειδή το α ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς μία λύση.

γ) Είναι $x-3=\ln\dfrac{10}{x^2+1}\Leftrightarrow x-3=\ln 10-\ln\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow$

$x+\ln\left(x^2+1\right)=\ln 10+3\Leftrightarrow f(x)=f(3)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=3$

δ) $\ln\dfrac{x^2+1}{x^6+1}<x^3-x\Leftrightarrow\ln\left(x^2+1\right)+x<\ln\left(x^6+1\right)+x^3\Leftrightarrow f(x)<f\left(x^3\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$x<x^3\Leftrightarrow x-x^3<0\Leftrightarrow x\left(1-x^2\right)<0\Leftrightarrow x(1-x)(1+x)<0\Leftrightarrow$

$x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$

144. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}>0$ για κάθε $x\neq 1$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι $\nearrow\mathbb{R}$.

β) Είναι $\sqrt{2}<\sqrt{3}\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(\sqrt{2}\right)<f\left(\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow\dfrac{e^{\sqrt{2}}}{2+1}<\dfrac{e^{\sqrt{3}}}{3+1}\Leftrightarrow\dfrac{4}{3}<\dfrac{e^{\sqrt{3}}}{e^{\sqrt{2}}}\Leftrightarrow e^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}>\dfrac{4}{3}$

γ) Είναι $e^{x^2-x} > \frac{x^4+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{e^x} > \frac{x^4+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{x^4+1} > \frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow$

$f(x^2) > f(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow (x < 0)$ ή $(x > 1)$.

δ) Είναι $e^x = \frac{4x^2+4x+2}{x^2+2x+2} \Leftrightarrow e^{(2x+1)-(x+1)} = \frac{(2x+1)^2+1}{(x+1)^2+1} \Leftrightarrow$

$\frac{e^{2x+1}}{e^{x+1}} = \frac{(2x+1)^2+1}{(x+1)^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{(2x+1)^2+1} = \frac{e^{x+1}}{(x+1)^2+1} \Leftrightarrow$

$f(2x+1) = f(x+1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} 2x+1 = x+1 \Leftrightarrow x = 0$

145. α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οι συναρτήσεις $f^3(x)+2f^2(x)+3f(x)$ και $e^x - e^{-x} - 2x$ είναι παραγωγίσιμες, με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης που μας δίνεται έχουμε

$\left[f^3(x)+2f^2(x)+3f(x)\right]' = \left(e^x - e^{-x} - 2x\right)' \Leftrightarrow$

$3f^2(x)f'(x)+4f(x)f'(x)+3f'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \Leftrightarrow$

$f'(x)\left(3f^2(x)+4f(x)+3\right) = e^x + e^{-x} - 2$ (1). Το τριώνυμο $3f^2(x)+4f(x)+3$ έχει $\Delta < 0$ άρα $3f^2(x)+4f(x)+3 > 0$ (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης

$e^x + e^{-x} - 2 = e^x + \frac{1}{e^x} - 2 = \frac{e^{2x}+1-2e^x}{e^x} = \frac{(e^x-1)^2}{e^x} > 0$ (3) για κάθε $x \neq 0$.

Από (1),(2),(3) $\Rightarrow f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι $\nearrow \mathbb{R}$.

β) Είναι $f^3(x)+2f^2(x)+3f(x) = e^x - e^{-x} - 2x \Leftrightarrow$

$f(x)\left(f^2(x)+2f(x)+3\right) = e^x - e^{-x} - 2x$ (1).

Αν στη παράσταση $f^2(x)+2f(x)+3$ θέσουμε $f(x) = \omega$ προκύπτει το τριώνυμο $\omega^2+2\omega+3$, το οποίο έχει διακρίνουσα $\Delta = -8 < 0$ οπότε $\omega^2+2\omega+3 > 0 \Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)+3 > 0$.

Επομένως από τη σχέση (1) έχουμε $f(x) = \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{f^2(x)+2f(x)+3}$ (2).

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $e^x - e^{-x} - 2x = 0$.

Έστω $g(x) = e^x - e^{-x} - 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Hg είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = e^x + e^{-x} - 2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι $\nearrow \mathbb{R}$.

Επειδή $g(0)=0$ η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ άρα και της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Για κάθε $x>0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0$ και για κάθε $x<0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0)=0$.

δ) Είναι $\alpha<\beta \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha)<f(\beta)\ (3)$ και $\gamma<\delta \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\gamma)<f(\delta)\ (4)$. Από $(3)+(4) \Rightarrow$ $f(\alpha)+f(\gamma)<f(\beta)+f(\delta)$.

πλήθος ριζών

146. α) Έστω $f(x)=x^3-2x^2+7x-4,\ x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=3x^2-4x+7>0\ (\Delta<0) \Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, είναι $f(A)=\mathbb{R}$. Επειδή $0\in f(A)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_0\in A=\mathbb{R}: f(x_0)=0$.

β) Έστω $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-2,\ x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=4x(x-1)(x-2)\geq 0 \Leftrightarrow$ $x\in[0,1]\cup[2,+\infty)$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

- για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow$ στο $\Delta_1=(-\infty,0]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^4=+\infty$, $f(0)=-2$, άρα $f(\Delta_1)=[-2,+\infty)$. Επειδή $0\in f(\Delta_1)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1: f(x_1)=0$

- για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow$ στο $\Delta_2=[0,1]$. Είναι $f(1)=-1$, άρα $f(\Delta_2)=[-2,-1]$. Επειδή $0\notin f(\Delta_2)$ η $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο Δ_2.
- για κάθε $x\in(1,2)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow$ στο $\Delta_3=[1,2]$. Είναι $f(2)=-2$, άρα $f(\Delta_3)=[-2,-1]$. Επειδή $0\notin f(\Delta_3)$ η $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο Δ_3.
- για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow$ στο $\Delta_4=[2,+\infty)$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$, άρα $f(\Delta_4)=[-2,+\infty)$. Επειδή $0\in f(\Delta_4)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_2\in\Delta_4: f(x_2)=0$. Άρα η $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες.

γ) Είναι $\dfrac{2x^3+3x^2}{6}=2x-1 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-12x+6=0$. Έστω $f(x)=2x^3+3x^2-12x+6,\ x\in\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=6x^2+6x-12=6(x-1)(x+2)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -2$ ή $x\geq 1$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

• για κάθε $x<-2$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow$ στο $\Delta_1=(-\infty,-2]$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $f(-2)=26$, οπότε $f(\Delta_1)=[26,+\infty)$. Επειδή $0\notin f(\Delta_1)$ η $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο Δ_1.

• για κάθε $-2<x<1$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow$ στο $\Delta_2=[-2,1]$. Είναι $f(1)=-1$, άρα $f(\Delta_2)=[-1,26]$. Επειδή $0\in f(\Delta_2)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_2 : f(x_1)=0$.

• για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow$ στο $\Delta_3=[1,+\infty)$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, άρα $f(\Delta_3)=[-1,+\infty)$. Επειδή $0\in f(\Delta_3)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικό $x_3\in\Delta_3 : f(x_3)=0$. Άρα η $f(x)=0$ έχει τρείς ρίζες.

147. α) Έστω $f(x)=2x^2\ln x+x-1+5x^2$, $x>0$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=4x\ln x+12x+1$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=4\ln x+16\geq 0$. Είναι $f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq e^{-4}$.
Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

• για κάθε $0<x<e^{-4}$ είναι

$$f''(x)<0 \Rightarrow f'\searrow\left(0,e^{-4}\right] \text{ οπότε } f'(x)>f'\left(e^{-4}\right)=1-\frac{4}{e^4}>0 \Rightarrow f\nearrow\left(0,e^{-4}\right].$$

• για κάθε $x>e^{-4}$ είναι $f''(x)>0 \Rightarrow f'\nearrow\left[e^{-4},+\infty\right)$ οπότε

$$f'(x)>f'\left(e^{-4}\right)=1-\frac{4}{e^4}>0 \Rightarrow f\nearrow\left[e^{-4},+\infty\right).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-1$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(2\ln x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+5\right)\right]=+\infty$, οπότε η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=(-1,+\infty)$. Επειδή $0\in f(A)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $A=(0,+\infty)$.

β) Έστω $f(x)=2e^x-x^2-3x-3$, $x\in\mathbb{R}$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=2e^x-2x-3$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=2e^x-2$.
Είναι $f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2e^x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$.
Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

• για κάθε $x<0$ είναι $f''(x)<0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty,0]$

Είναι $f'(0)=-1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(2\dfrac{e^x}{x}-2-\dfrac{3}{x}\right)\right]=+\infty(+\infty-2-0)=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1}=+\infty$. Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0]$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1)=[-1,+\infty)$. Το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_1)$ οπότε υπάρχει $x_1<0 : f'(x_1)=0$.

Είναι $f'(x_1)=0 \Leftrightarrow 2e^{x_1}=2x_1+3$ οπότε

$f(x_1)=2e^{x_1}-x_1^2-3x_1-3=2x_1+3-x_1^2-3x_1-3=-x_1^2-x_1=-x_1(x_1-1)<0$

-Για κάθε $x<x_1 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_1)=0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty,x_1]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ οπότε $f((-\infty,x_1])\overset{f\nearrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(x_1)\right]=(-\infty,f(x_1)]$.

Το $0\notin f((-\infty,x_1])$ οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζες στο $(-\infty,x_1]$

- για κάθε $x_1<x<0 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_1)=0 \Rightarrow f \searrow [x_1,0]$.

Επομένως $f([x_1,0])\overset{f\searrow}{=}[f(0),f(x_1)]=[-1,f(x_1)]$.

Το $0\notin f([x_1,0])$ οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζες στο $[x_1,0]$

• για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)>0 \Rightarrow f' \nearrow [0,+\infty)$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[0,+\infty)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2)=[-1,+\infty)$. Το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_2)$ οπότε υπάρχει $x_2>0 : f'(x_2)=0$.

Είναι $f'(x_2)=0 \Leftrightarrow 2e^{x_2}=2x_2+3$ οπότε

$f(x_2)=2e^{x_2}-x_2^2-3x_2-3=2x_2+3-x_2^2-3x_2-3=-x_2^2-x_2=-x_2(x_2-1)<0$.

- Για κάθε $0<x<x_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_2)=0 \Rightarrow f \searrow [0,x_2]$ και

Επομένως $f([0,x_2])\overset{f\searrow}{=}[f(x_2),f(0)]=[f(x_2),-1]$.

Το $0\notin f([0,x_2])$ οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζες στο $[0,x_2]$

- για κάθε $x>x_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_2)=0 \Rightarrow f \nearrow [x_2,+\infty)$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(2\frac{e^x}{x}-2-\frac{3}{x}\right)\right]=+\infty(+\infty-2-0)=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$ οπότε $f\left([x_2,+\infty)\right)\overset{f\nearrow}{=}\left[f(x_2),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[f(x_2),+\infty\right)$

Επειδή το $0\in f\left([x_2,+\infty)\right)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_3>x_2: f(x_3)=0$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα .

148. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$, $x\in\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$.

Είναι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 12\left(x^3-2x^2-x+2\right)\geq 0\Leftrightarrow$

$12\left(x^2-1\right)(x-2)\geq 0\Leftrightarrow x\in[-1,1]\cup[2,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,1)\cup(2,+\infty)$, $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in[-1,1]\cup[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in(-\infty,-1]\cup[1,2]$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}3x^4=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}3x^4=+\infty$, $f(-1)=-19$, $f(1)=13$ και $f(2)=8$.

Στα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty,-1),\Delta_2=[-1,1],\Delta_3=(1,2]$ και $\Delta_4=(2,+\infty)$ έχει αντίστοιχα σύνολα τιμών :

$f(\Delta_1)\overset{f\searrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to-1^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-19,+\infty)$, $f(\Delta_2)\overset{f\nearrow}{=}\left[f(-1),f(1)\right]=[-19,13]$,

$f(\Delta_3)\overset{f\searrow}{=}\left[\lim\limits_{x\to2^-}f(x),f(1)\right)=[8,13)$ και $f(\Delta_4)\overset{f\nearrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to2^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(8,+\infty)$.

- Αν $\lambda<-19$ τότε το λ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$, δεν έχει πραγματικές ρίζες.
- Αν $\lambda=-19$, τότε το λ ανήκει μόνο στο $f(\Delta_2)$ οπότε $f(x)=\lambda$ η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα, την $\rho_1=-1$.
- Αν $-19<\lambda<8$, τότε το λ ανήκει μόνο στα $f(\Delta_1),f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δύο ρίζες, $\rho_2\in(-\infty,-1)$ και $\rho_3\in(-1,1)$.
- Αν $\lambda=8$, τότε το λ ανήκει μόνο στα $f(\Delta_1),f(\Delta_2),f(\Delta_3)$,οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει 3 ρίζες, $\rho_4\in(-\infty,-1)$, $\rho_5\in(-1,1)$ και $\rho_6=2$.

- Αν $8<\lambda<13$, τότε λ ανήκει σε καθένα από τα διαστήματα $f(\Delta_1), f(\Delta_2), f(\Delta_3), f(\Delta_4)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει 4 ρίζες, $\rho_7 \in (-\infty,-1)$, $\rho_8 \in (-1,1)$, $\rho_9 \in (1,2)$ και $\rho_{10} \in (2,+\infty)$.
- Αν $\lambda=13$, τότε το λ ανήκει μόνο στα $f(\Delta_1), f(\Delta_2), f(\Delta_4)$, και η εξίσωση έχει 3 ρίζες, $\rho_{11} \in (-\infty,-1)$, $\rho_{12}=1$ και $\rho_{13} \in (2,+\infty)$.
- Τέλος, αν $\lambda>13$, τότε το λ ανήκει μόνο στα $f(\Delta_1), f(\Delta_4)$, οπότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες, $\rho_{14} \in (-\infty,-1)$ και $\rho_{15} \in (2,+\infty)$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4-4x+\lambda,\ x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=4x^3-4$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in(-\infty,1]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $f(1)=\lambda-3$.

Επομένως, $f((-\infty,-1)) \overset{f\searrow}{=} (\lambda-3,+\infty)$ και $f([1,+\infty))=[\lambda-3,+\infty)$.

- Αν $\lambda>3$, τότε $0\notin f(A)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda=3$ τότε το 0 ανήκει μόνο στο $f([1,+\infty))$, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x=1$.
- Αν $\lambda<3$ τότε $0\in f((-\infty,-1)), f([1,+\infty))$ οπότε υπάρχουν $x_1\in(-\infty,1)$ και $x_2\in(1,+\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=0=f(x_2)$ και επειδή στα αντίστοιχα διαστήματα η f είναι γνήσια μονότονη, οι ρίζες αυτές είναι μοναδικές.

γ) Έστω $f(x)=2\ln x-1+\lambda x^2,\ x>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{2}{x}+2\lambda x>0 \Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ οπότε $f(A)=\mathbb{R}$, άρα η $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) Για $x=0$ είναι $-1=0$ άτοπο άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα το 0.

είναι $2x^3+6\lambda x^2-1=0 \Leftrightarrow 6\lambda x^2=1-2x^3 \Leftrightarrow \dfrac{1-2x^3}{6x^2}=\lambda$. Έστω

$f(x)=\dfrac{1-2x^3}{6x^2},\ x\neq0$. Για $x\neq0$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=-\dfrac{x^3+1}{3x^3}$. Είναι $f'(x)\geq0 \Leftrightarrow -1\leq x<0$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

- Για κάθε $x<-1$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow$ στο $(-\infty,-1]$. Είναι

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^{\not 3}}{6x^{\not 2}}=+\infty$, $f(-1)=\dfrac{1}{2}$, άρα $f(\Delta_1)=\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ όπου

$\Delta_1=(-\infty,-1)$.

- Για κάθε $x\in(-1,0)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow$ στο $\Delta_2=[-1,0)$.Είναι

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\left(1-2x^3\right)\dfrac{1}{6x^2}\right)=+\infty$, άρα $f(\Delta_2)=\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

- Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow$ στο $\Delta_3=(0,+\infty)$.Είναι

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\left(1-2x^3\right)\dfrac{1}{6x^2}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^{\not 3}}{6x^{\not 2}}=-\infty$, άρα

$f(\Delta_3)=\mathbb{R}$.

-Αν $\lambda<\dfrac{1}{2}$, τότε $\lambda\notin f(\Delta_1)$, $\lambda\notin f(\Delta_2)$ και $\lambda\in f(\Delta_3)$, οπότε υπάρχει μοναδικός $x_1\in\Delta_3$ τέτοιος ώστε $f(x_1)=\lambda$.

-Αν $\lambda>\dfrac{1}{2}$, τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$, $\lambda\in f(\Delta_2)$ και $\lambda\in f(\Delta_3)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς τρείς λύσεις, μία σε κάθε ένα από τα διαστήματα Δ_1, Δ_2, Δ_3.

-Αν $\lambda=\dfrac{1}{2}$,τότε $\lambda\notin f(\Delta_1)$, $\lambda\in f(\Delta_2)$ και $\lambda\in f(\Delta_3)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, μία σε κάθε ένα από τα διαστήματα Δ_2, Δ_3.
Η μοναδικότητα των λύσεων προκύπτει από το γεγονός ότι f είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα Δ_1, Δ_2, Δ_3.

149. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=4\left[x^3-(2-x)^3\right]$.

Είναι $f'(x)\geq0\Leftrightarrow x^3\geq(2-x)^3\Leftrightarrow x\geq2-x\Leftrightarrow x\geq1$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f'(x)>0$ στο $(-\infty,1)$, $f'(x)<0$ στο $(1,+\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1=[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=(-\infty,1]$.

β) Είναι $f(A_1)\overset{f\nearrow}{=}\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=[2,+\infty)$,

$f(A_2)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=[2,+\infty)$ οπότε $f(A)=[2,+\infty)$.

γ) Αν $\lambda = 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη (0=1) .

Για $\lambda \neq 0$ είναι $\lambda x^4 + \lambda(2-x)^4 = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\lambda}$.

Αν $\frac{1}{\lambda} < 2 \Leftrightarrow \frac{1-2\lambda}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow \lambda(1-2\lambda) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2} + \infty\right)$ το $\frac{1}{\lambda}$ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f οπότε η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{\lambda}$ δεν έχει πραγματικές λύσεις .

Αν $\frac{1}{\lambda} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ έχει μία λύση την $x = 1$.

Αν $\frac{1}{\lambda} > 2 \Rightarrow \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ δύο λύσεις.

Σύνθετες ασκήσεις

150. α) Έστω $g(x) = f(x) - x^2 - 2,\ x \geq 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 2x > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) > x^2 + 2$.

Έστω $h(x) = f(x) - e^x - 1,\ x \geq 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $h'(x) = f'(x) - e^x < 0 \Rightarrow h \searrow [0, +\infty)$. Για κάθε

$x > 0 \overset{h\searrow}{\Leftrightarrow} h(x) < h(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) < e^x + 1$

β) Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2 + 2) = +\infty$ άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, οπότε η f έχει σύνολο τιμών το $f([0, +\infty)) = [2, +\infty)$. Αν $\alpha \geq 2$ τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα αφού το α ανήκει στο σύνολο τιμών της f. Αν $\alpha < 2$ τότε $\alpha \notin [2, +\infty)$ οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

γ) Έστω $\varphi(x) = xf(x) - 10$, $x \in [1, 2]$. Είναι $\varphi(1) = f(1) - 10$ και $\varphi(2) = 2f(2) - 10$. Από τη σχέση του α) για $x = 1$: είναι

$1^2 + 2 < f(1) < e + 1 \Leftrightarrow -7 < f(1) - 10 < e - 9 < 0$, άρα $\varphi(1) < 0$.

Επίσης για $x = 2$ είναι $2^2 + 2 < f(2) < e^2 + 1 \Leftrightarrow 12 < 2f(2) < 2e^2 + 2 \Leftrightarrow$ $2 < 2f(2) - 10 < 2e^2 - 8$, άρα $\varphi(2) > 2 > 0$. Επειδή $\varphi(1)\varphi(2) < 0$ και η φ είναι συνεχής στο $[1, 2]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano,οπότε υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 f(x_0) = 10$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ με παράγωγο $\varphi'(x) = f(x) + xf'(x)$.

Για $1\le x\le 2\Leftrightarrow 2\le 2x\le 4$ οπότε $f'(x)>2x\ge 2>0$ άρα $xf'(x)>0$ στο $[1,2]$.Επίσης $f(x)>x^2+1>1>0$ επομένως $\varphi'(x)>0$ άρα φ γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$ οπότε x_0 μοναδικό.

Είναι $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}f\left(\frac{3}{2}\right)-10$. Όμως $\frac{17}{4}<f\left(\frac{3}{2}\right)<e^{\frac{3}{2}}+1\Leftrightarrow$

$\frac{51}{8}<\frac{3}{2}f\left(\frac{3}{2}\right)<\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\Leftrightarrow -\frac{29}{8}<\frac{3}{2}f\left(\frac{3}{2}\right)-10<\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}-\frac{17}{2}$. Δηλαδή

$h\left(\frac{3}{2}\right)<\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}-\frac{17}{2}=\frac{1}{2}\left(3e^{\frac{3}{2}}-17\right)<0$ γιατί $3e^{\frac{3}{2}}<17\Leftrightarrow$

$\left(3e^{\frac{3}{2}}\right)^2<17^2\Leftrightarrow 9e^3<289$ που ισχύει αφού $e<3\Leftrightarrow e^3<27\Leftrightarrow 9e^3<243<289$

Επειδή $\varphi(2)\varphi\left(\frac{3}{2}\right)<0$ και η φ είναι συνεχής στο $\left[\frac{3}{2},2\right]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1\in\left(\frac{3}{2},2\right)$.Όμως το x_0 είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $\varphi(x)=0$ στο $[1,2]$ άρα το x_1 ταυτίζεται με το x_0.

Επομένως $x_0\in\left(\frac{3}{2},2\right)$ οπότε βρίσκεται πιο κοντά στο 2.

151. α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{x-1}=\frac{0}{-1}=0=f(0)$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$,άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{1}=1=f(1)$ άρα η f είναι συνεχής στο 1.Επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$ σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων , είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

β) Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=\frac{-\ln x+x-1}{(x-1)^2}$. Έστω $g(x)=-\ln x+x-1,\ x>0$. Η g είναι

παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=-\frac{1}{x}+1=\frac{x-1}{x}$.

Η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$,

- για κάθε $0<x<1$ είναι $g'(x)<0 \Rightarrow g\searrow(0,1]$ άρα

$g(x)>g(1)=0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[0,1]$.

- για κάθε $x>1$ είναι $g'(x)>0 \Rightarrow g\nearrow[1,+\infty)$ άρα

$g(x)>g(1)=0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$. Επειδή η f είναι συνεχής , είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

γ) Είναι $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{-\frac{\ln x}{x}}{\frac{1-x}{x}}=\frac{\ln x}{x-1}$ οπότε $f\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x=\frac{\ln x}{x-1}+\ln x=$

$\frac{\cancel{\ln x}+x\ln x-\cancel{\ln x}}{x-1}=f(x)$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f\left(e^x\right)}{e^{f(x)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x\ln e^x}{e^x-1}}{e^{f(x)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{e^{f(x)}\left(e^x-1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x-1}\cdot\frac{x}{e^{f(x)}}\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x-1}\cdot\frac{e^{\ln x}}{e^{f(x)}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x-1}\cdot e^{\ln x-f(x)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1-e^{-x}\right)}\cdot e^{-f\left(\frac{1}{x}\right)}\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\cdot e^{-\frac{\ln x}{x-1}}\right)=1\cdot1=1$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$ οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x-1}}\underset{\substack{x\to+\infty,\ u\to0^+\\ u\to0^+}}{\overset{u=\frac{\ln x}{x-1}}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}e^u=1$.

152.α) Έστω $g(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=e^x+1>0 \Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$. Επειδή

$g(0)=0$, η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$

β) i. Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\geq f(x_2)\ (1)$ τότε $e^{f(x_1)}\geq e^{f(x_2)}\ (2)$.Από $(1)+(2)\Rightarrow 3x_1+1\geq 3x_2+1\Leftrightarrow x_1\geq x_2$ άτοπο. Άρα $f(x_1)<f(x_2)$ για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Για $x=0$ είναι $f(0)+e^{f(0)}=1 \Leftrightarrow g(f(0))=g(0) \overset{g1-1}{\Leftrightarrow} f(0)=0$

iii. Με παραγώγιση της σχέσης $f(x)+e^{f(x)}=3x+1$ έχουμε

$\left(f(x)+e^{f(x)}\right)'=(3x+1)' \Leftrightarrow f'(x)+e^{f(x)}f'(x)=3 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{3}{1+e^{f(x)}}>0$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f''(x)=-\dfrac{3}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2}e^{f(x)}f'(x)<0 \Rightarrow f' \searrow \mathbb{R}$. Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ.

στο $[x,x+1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (x,x+1)$:

$f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$. Είναι $x<\xi<x+1 \overset{f' \searrow}{\Leftrightarrow}$

$f'(x)>f'(\xi)>f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x)>f(x+1)-f(x)>f'(x+1)$

iv. Είναι $f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f$ $1-1 \Rightarrow$ f αντιστρέφεται. Είναι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}=A_{f^{-1}}$.

Θέτουμε $f(x)=y$ οπότε έχουμε: $y+e^y=3x+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}\left(y+e^y-1\right)$ άρα

$f^{-1}(y)=\dfrac{1}{3}\left(y+e^y-1\right),\ y \in \mathbb{R}$ οπότε $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}\left(x+e^x-1\right),\ x \in \mathbb{R}$.

153. α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, η συνάρτηση $y=\ln f(x)+f(x)-1$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε:

$\left(\ln f(x)+f(x)-1\right)'=(x)' \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}+f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)\left(\dfrac{1}{f(x)}+1\right)=1 \Leftrightarrow$

$f'(x)\cdot\dfrac{1+f(x)}{f(x)}=1 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)+1}$.

β) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x)>0$, ισχύει ότι $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)+1}>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)+1}$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε η f ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$f''(x)=\dfrac{f'(x)\left(f(x)+1\right)-f(x)f'(x)}{\left(f(x)+1\right)^2}=\dfrac{f'(x)}{\left(f(x)+1\right)^2}$. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x)>0$ και $f'(x)>0$, είναι $f''(x)>0$ και επειδή η f ΄είναι συνεχής, είναι

γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

γ) Για x = 0 είναι $\ln f(0)+f(0)-1=0$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x+x-1,\ x>0$. Για κάθε x > 0 είναι

$\varphi'(x)=\frac{1}{x}+1>0$, οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα είναι 1-1.

Η (1) γίνεται $\varphi(f(0))=0\Leftrightarrow\varphi(f(0))=\varphi(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(0)=1$.

δ) Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x\geq 0$ είναι $\frac{x}{2}+1\leq f(x)$ και $f(x)\leq xf'(x)+1$

Έστω $g(x)=\frac{x}{2}+1-f(x),\ x\geq 0$. Είναι

$g'(x)=\frac{1}{2}-f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{f(x)}{f(x)+1}=\frac{1-f(x)}{2(f(x)+1)}$.

Για κάθε $x>0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)=1\Leftrightarrow 1-f(x)<0$, άρα $g'(x)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Για κάθε $x\geq 0$ είναι

$g(x)\leq g(0)\Leftrightarrow\frac{x}{2}+1-f(x)\leq 0\Leftrightarrow\frac{x}{2}+1\leq f(x)$.

Έστω $h(x)=f(x)-xf'(x)-1,\ x\geq 0$. Είναι

$h'(x)=f'(x)-f'(x)-xf''(x)=-xf''(x)$. Για κάθε $x>0$ είναι $h'(x)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Για κάθε $x\geq 0$ είναι $h(x)\leq h(0)=0\Leftrightarrow f(x)-xf'(x)-1\leq 0\Leftrightarrow f(x)\leq xf'(x)+1$.

154. α) Η σχέση $f^3(x)+2f(x)+3x=0$ (1) αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις οπότε :

$(f^3(x)+2f(x)+3x)'=0\Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)+2f'(x)+3=0\Leftrightarrow$

$f'(x)=-\frac{3}{3f^2(x)+2}<0\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$.

β) Από τη σχέση (1) για $x=1$ έχουμε :

$f^3(1)+2f(1)+3=0\Leftrightarrow(f(1)+1)(f^2(1)-f(1)+3)=0\Leftrightarrow f(1)=-1$.

Έστω $h(x)=f(x)+3-x\cdot 4^x,\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. Είναι $h\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+2>0$ γιατί

$\frac{1}{2}<1\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(\frac{1}{2}\right)>f(1)=-1\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)+2>1$ και $h(1)=f(1)-1-2<0$.Επειδή η h

είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ και $h(1)h\left(\frac{1}{2}\right)<0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano,οπότε υπάρχει $\rho\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho)=0\Leftrightarrow f(\rho)+3=\rho\cdot 4^{\rho}$.

γ) Είναι $f\searrow\mathbb{R}\Rightarrow 1-1\Rightarrow$ f αντιστρέφεται .Από την σχέση (1) έχουμε $f^3(x)+2f(x)=-3x$ (2). Η f έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ άρα $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

Θέτουμε $f(x)=y,\ (2)\Rightarrow y^3+2y=-3x\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}\left(y^3+2y\right)$, άρα

$f^{-1}(y)=-\frac{1}{3}\left(y^3+2y\right),\ y\in\mathbb{R}$ οπότε $f^{-1}(x)=-\frac{1}{3}\left(x^3+2x\right),\ x\in\mathbb{R}$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+f(x+1)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)>f(x_2)$ (3) και

$x_1+1<x_2+1\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x_1+1)>f(x_2+1)$ (4) .Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $f(x_1)+f(x_1+1)>f(x_2)+f(x_2+1)\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως $f(x)+f(x+1)=f(x^2)+f(x^2+1)\Leftrightarrow g(x)=g(x^2)\overset{g1-1}{\Leftrightarrow}$

$x=x^2\Leftrightarrow(x=0)$ ή $(x=1)$.

ε) $\eta\mu^3x+2\eta\mu x=x^3+2x\overset{(2)}{\Leftrightarrow}-3\eta\mu x=-3x\Leftrightarrow\eta\mu x=x\Leftrightarrow x=0$.

(Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x|\le|x|$ με την ισότητα να ισχύει για x=0.)

155. α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}$. Είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow(0,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $f'(1)=0$, οπότε: για κάθε $x>1\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(1)=0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$ και για κάθε $0<x<1\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(1)=0\Rightarrow f\searrow(0,1]$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{x-1}\left(1-\frac{\ln x}{e^{x-1}}\right)\right]=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^{x-1}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^{x-1}}=0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^{x-1}-\ln x\right)=+\infty$

Στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα $f(\Delta_1)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=[1,+\infty)$. Στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα $f(\Delta_2)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$. Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[1,+\infty)$.

β) Αρχικά πρέπει $\begin{cases}f(x)-\dfrac{1}{2}>0\Leftrightarrow f(x)>\dfrac{1}{2}\text{ ισχύει}\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$.

Για κάθε $x>1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)>f(1)$ και για κάθε $0<x<1\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(x)>f(1)$, οπότε:

$$f\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=1=f(1)\Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{2}$$

Επειδή το $\dfrac{3}{2}$ βρίσκεται στο εσωτερικό του $[1,+\infty)$, υπάρχει x_1 στο εσωτερικό του $(0,1]$ και x_2 στο εσωτερικό του $[1,+\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=\dfrac{3}{2}$ και $f(x_2)=\dfrac{3}{2}$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη στα αντίστοιχα διαστήματα, τα x_1,x_2 είναι τα μοναδικά στα διαστήματα αυτά.

156. α) Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$h'(x)=e^x\left(f(x)+f'(x)\right)$ και δεύτερη παράγωγο

$h''(x)=e^x\left(f(x)+2f'(x)+f''(x)\right)>0\Rightarrow$

$h'\nearrow(0,+\infty)$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την h στο $[x-1,x],x>1$

οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(x-1,x)$, $\xi_2\in(x,x+1)$, τέτοια ώστε

$h'(\xi_1)=h(x)-h(x-1)=e^xf(x)-e^{x-1}f(x-1)$ και

$h'(\xi_2)=h(x+1)-h(x)=e^{x+1}f(x+1)-e^xf(x)$. Είναι

$\xi_1<x<\xi_2\overset{h'\nearrow}{\Leftrightarrow}h'(\xi_1)<h'(x)<h'(\xi_2)\ (1)\Leftrightarrow$

$e^xf(x)-e^{x-1}f(x-1)<e^x\left(f(x)+f'(x)\right)<e^{x+1}f(x+1)-e^xf(x)\overset{:e^x}{\Leftrightarrow}$

$f(x)-\dfrac{f(x-1)}{e}<f(x)+f'(x)<ef(x+1)-f(x), x>1.$

β) Από τη σχέση (1) έχουμε $h(x)-h(x-1)<h'(x)<h(x+1)-h(x)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x-1)\overset{x-1=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}h(u)=2,$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x+1)\overset{x+1=k}{=}\lim\limits_{k\to+\infty}h(k)=2$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(h(x)-h(x-1)\big)=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\big(h(x+1)-h(x)\big)=0$.Επομένως από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$\lim\limits_{x\to+\infty}h'(x)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\big(e^xf(x)+e^xf'(x)\big)=0$.Θέτουμε

$e^xf(x)+e^xf'(x)=\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$. Τότε $e^xf'(x)=\varphi(x)-e^xf(x)$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}e^xf'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\varphi(x)-e^xf(x)\big)=0-2=-2$.

γ) Έστω $e^xf'(x)=t(x)\Leftrightarrow f'(x)=t(x)e^{-x}$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}t(x)e^{-x}=-2\cdot0=0$.

157. α) Είναι $f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow[2,3]$, οπότε $f'(x)\geq f'(3)=1>0\Rightarrow f\nearrow[2,3]$.

β) Είναι $f([2,3])\overset{f\nearrow}{=}\big[f(2),f(3)\big]=[0,2]$.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο $x=3$ έχει εξίσωση

$y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y=x-1$

δ) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2,3]$ οπότε υπάρχει

$\xi_1\in(2,3):f'(\xi_1)=f(3)-f(2)=2$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την

f' στο $[\xi_1,3]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\xi_1,3):f''(\xi)=\dfrac{f'(3)-f'(\xi_1)}{3-\xi_1}=\dfrac{1-2}{3-\xi_1}=\dfrac{-1}{3-\xi_1}$.

Είναι $f''(\xi)<-1\Leftrightarrow\dfrac{-1}{3-\xi_1}<-1\Leftrightarrow3-\xi_1>0\Leftrightarrow\xi_1<3$ που ισχύει.

ε) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα
$[2,x],[x,3]$, $2<x<3$ οπότε υπάρχουν $x_1\in(2,x)$, $x_2\in(x,3)$:

$f'(x_1)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{f(x)}{x-2}$ και $f'(x_2)=\dfrac{f(3)-f(x)}{3-x}=\dfrac{2-f(x)}{3-x}$ Είναι

$x_1<x_2\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x_1)>f'(x_2)\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x-2}>\dfrac{2-f(x)}{3-x}\Leftrightarrow$

$3f(x)-\cancel{xf(x)}>2x-4-\cancel{xf(x)}+2f(x)\Leftrightarrow f(x)>2(x-2)$.Επειδή

$f(2)=2(2-2)=0$ και $f(3)=2(3-2)=2$ τελικά $f(x)\geq2(x-2)$ για

κάθε $x \in [2,3]$.

158. α) Αν υπήρχε $\rho \in (0,2)$ με $f(\rho)=0$ τότε $[f'(\rho)]^2 + f(\rho)f''(\rho) = -1 \Leftrightarrow$ $[f'(\rho)]^2 = -1$ άτοπο, άρα $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,2)$. Επειδή $f(1) = \sqrt{3} > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,2)$.

β) Είναι $[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = -1 \Leftrightarrow [f'(x)f(x)]' = (-x)' \Leftrightarrow$ $f'(x)f(x) = -x + c,\ c \in \mathbb{R}$. Για $x = 1$ είναι $f'(1)f(1) = -1 + c \Leftrightarrow c = 0$, άρα

$f'(x)f(x) = -x \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = -2x \Leftrightarrow (f^2(x))' = (-x^2)' \Leftrightarrow$

$f^2(x) = -x^2 + c'$. Για $x = 1$ είναι $f^2(1) = -1 + c' \Leftrightarrow c' = 4$, άρα $f^2(x) = 4 - x^2$.

Επειδή $f(x) > 0$ είναι $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ $x \in (0,2)$. Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$, άρα $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 2$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow f(2) = 0$.

Επομένως $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ για κάθε $x \in [0,2]$.

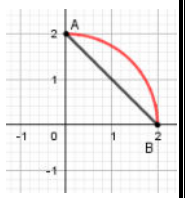
γ) Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (0,2)$ με παράγωγο

$f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = y$ με $y \geq 0$ (1) οπότε $4 - x^2 = y^2 \Leftrightarrow 4 - y^2 = x^2$ (2).

Πρέπει $4 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 4 \Leftrightarrow |y| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 2$ οπότε από την (1) είναι $0 \leq y \leq 2$. Η (2) γίνεται: $x = \sqrt{4-y^2}$, άρα $f^{-1}(y) = \sqrt{4-y^2}$, $y \in [0,2]$, άρα $f^{-1}(x) = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [0,2]$.

ε) Είναι $4 - y^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ με $x \in [0,2]$, $y \in [0,2]$. Η γραφική παράσταση της f είναι το τεταρτοκύκλιο του διπλανού σχήματος και το ΑΒ είναι χορδή του. Η μέγιστη χορδή είναι αυτή του σχήματος και έχει μήκος



$(AB) = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, άρα $(AB) \leq 2\sqrt{2}$

στ) Έστω $M(x(t), y(t))$ όπου t ο χρόνος σε sec με $t \geq 0$.

Είναι $y(t) = \sqrt{4 - x^2(t)}$ και $x'(t) = 0{,}1$ μ.μ./sec.

i. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το Α, τότε:

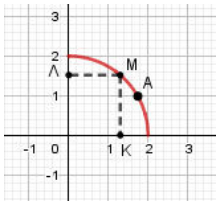
$x(t_0)=\sqrt{3},\ y(t_0)=1$.Είναι $y'(t)=\left(\sqrt{4-x^2(t)}\right)'=\dfrac{-2x(t)x'(t)}{2\sqrt{4-x^2(t)}}$ και την

χρονική στιγμή t_0 : $y'(t_0)=-\dfrac{x(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{4-x^2(t_0)}}=-\dfrac{0,1\cdot\sqrt{3}}{1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{10}$ μ.μ./ sec

ii. $E(t)=(OK)(O\Lambda)=x(t)y(t)$

Είναι $E'(t)=x'(t)y(t)+x(t)y'(t)$ και την χρονική στιγμή t_0 :

$E'(t_0)=x'(t_0)y(t_0)+x(t_0)y'(t_0)=-0,2(\text{μ.μ.})^2/\text{sec}$



ζ) Έστω $K(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f , Η εφαπτομένη της C_f στο Κ είναι η

ευθεία ε: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow y-\sqrt{4-x_0^2}=-\dfrac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}(x-x_0)$. Για $y=0$ είναι $x=\dfrac{4}{x_0}$ και για $x=0$ είναι

$y=\dfrac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}$, δηλαδή η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $B\left(\dfrac{4}{x_0},0\right)$ και

$\Gamma\left(0,\dfrac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}\right)$. Είναι $(OB\Gamma)=\alpha\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}(OB)(O\Gamma)=\alpha\Leftrightarrow$

$\dfrac{4}{x_0}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}=2\alpha\Leftrightarrow 8=\alpha x_0\sqrt{4-x_0^2}\Leftrightarrow\ 64=\alpha^2x_0^2(4-x_0^2)$ (3). Θέτουμε

$x_0^2=\omega\geq 0$ οπότε η (3) γίνεται: $64=\alpha^2\omega(4-\omega)\Leftrightarrow 64=4\alpha^2\omega-\alpha^2\omega^2\Leftrightarrow$

$\alpha^2\omega^2-4\alpha^2\omega+64=0$ (4)

Η (4) είναι 2ου βαθμού ως προς ω με $\Delta=16\alpha^4-256\alpha^2=16\alpha^2(\alpha^2-16)$.

Αν $\Delta>0\Leftrightarrow 16\alpha^2(\alpha^2-16)>0\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha^2-16>0\Leftrightarrow\alpha^2>16\Leftrightarrow\alpha>4$ η (4) έχει ρίζες

τις $\omega=\dfrac{4\alpha^2\pm 4\alpha\sqrt{\alpha^2-16}}{2\alpha^2}=2\pm\dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}$. Επειδή $x_0\in[0,2]$, είναι

$0\leq x_0^2\leq 4$, άρα $0\leq\omega\leq 4$.

Αν $\omega=2+\dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}$, τότε $2+\dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}\leq 4\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2-16}\leq\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-16\leq\alpha^2$

που ισχύει. Αν $\omega=2-\dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}$, τότε

$2-\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}\geq 0 \Leftrightarrow 2\geq \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16} \Leftrightarrow \alpha \geq \sqrt{\alpha^2-16} \Leftrightarrow \alpha^2 \geq \alpha^2-16$ ισχύει.

Τότε $x_0^2=2+\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16} \overset{x_0\in[0,2]}{\Leftrightarrow} x_0=\sqrt{2+\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}}$ ή

$x_0^2=2-\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16} \overset{x_0\in[0,2]}{\Leftrightarrow} x_0=\sqrt{2-\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}}$.Οπότε η C_f δέχεται δύο εφαπτόμενες που σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν α.

Αν $\Delta=0 \Leftrightarrow \alpha=4$, τότε η (4) γίνεται

$16\omega^2-64\omega+64=0 \Leftrightarrow \omega^2-4\omega+4=0 \Leftrightarrow (\omega-2)^2=0 \Leftrightarrow \omega=2$.

Τότε $x_0^2=2 \overset{x_0\in[0,2]}{\Leftrightarrow} x_0=\sqrt{2}$ και η C_f δέχεται μοναδική εφαπτομένη στη περίπτωση αυτή.

Τέλος αν $\Delta<0 \Leftrightarrow 0<\alpha<4$ η (4) είναι αδύνατη και δεν υπάρχουν τέτοιες εφαπτόμενες. Επομένως έχει δύο εφαπτομένες για α>4.

159. α) Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με παράγωγο

$g'(x)=f(x)+xf'(x)+1-\sigma\upsilon\nu x$ και δεύτερη παράγωγο

$g''(x)=2f'(x)+xf''(x)+\eta\mu x \Leftrightarrow$

$g''(x)=2f'(x)+x\left(-\frac{2f'(x)+\eta\mu x}{x}\right)+\eta\mu x=2f'(x)-2f'(x)-\eta\mu x+\eta\mu x=0 \Leftrightarrow$

$g'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$. Είναι

$g'(\pi)=f(\pi)+\pi f'(\pi)+1-\sigma\upsilon\nu\pi=-1-1+1+1=0 \Rightarrow c=0$ άρα

$g'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=c',\ c'\in\mathbb{R}$. Είναι $g(\pi)=-\pi+\pi-0=0$, άρα $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $g(x)=0 \Leftrightarrow xf(x)+x-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow xf(x)=\eta\mu x-x$.Για $x\in(0,\pi]$ είναι $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}-1$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ είναι συνεχής στο $x=0$, άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}-1\right)=1-1=0$, επομένως

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu x}{x}-1,\ 0<x\leq\pi\\ 0\ ,\ x=0\end{cases}$$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{xf(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x\left(\frac{\eta\mu x}{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\eta\mu x-x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[e^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{\eta\mu x-x}\right]=+\infty(-\infty)=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\eta\mu x-x}\overset{\eta\mu x-x=u}{=}\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{1}{u}=-\infty$ αφού $|\eta\mu x|\le|x|$ και για $x>0$ είναι

$|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x\Rightarrow \eta\mu x-x<0$.

δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi]$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$. Έστω $h(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με παράγωγο $h'(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=-x\eta\mu x<0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$,η h είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Για κάθε $0<x<\pi$ είναι $h(x)<h(0)=0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[0,\pi]$.

ε) Έστω $t(x)=f(x)+\dfrac{1}{6}x^2,\ x\in[0,\pi]$. Είναι $t'(x)=\dfrac{3x\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x+x^3}{3x^2}$.

Έστω $\varphi(x)=3x\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x+x^3,\ x\in[0,\pi]$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με παράγωγο $\varphi'(x)=3x(x-\eta\mu x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ άρα η φ είναι $\nearrow[0,\pi]$. Για κάθε $0<x\le\pi$ είναι $\varphi(x)>\varphi(0)=0\Leftrightarrow f(x)>-\dfrac{1}{6}x^2$.

160. α) Για $x>0$ η $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Στο $x_0=0$ είναι:

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1}=1=f(0)$. Άρα η f συνεχής στο $[0,+\infty)$.

β) Για $x>0$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{x-\ln(x+1)(x+1)}{x^2(x+1)}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+1)-x}{x^2}\overset{\text{DLH}}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x+1}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{2x+2}=-\dfrac{1}{2}$

Άρα $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\ln(x+1)(x+1)}{x^2(x+1)} & ,\ x>0\\ -\dfrac{1}{2} & ,x=0\end{cases}$

γ) Έστω $g(x)=x-\ln(x+1)(x+1),\ x\geq 0$.Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x)=-\ln(x+1)<0$ για $x>0$, άρα $g\searrow[0,+\infty)$.

Επομένως για $x>0$ είναι $g(x)<g(0)=0$. Άρα

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(x+1)}<0\Rightarrow f\searrow(0,+\infty)$, άρα $0<x<x+1\overset{f\searrow}{\Rightarrow}$

$f(x)>f(x+1)\Leftrightarrow \dfrac{\ln(x+1)}{x}>\dfrac{\ln(x+2)}{x+1}\Leftrightarrow (x+1)^{x+1}>(x+2)^x$, οπότε για $x=1820$ προκύπτει $1821^{1821}>1822^{1820}$, δηλαδή $\alpha>\beta$.

δ) Είναι $f(e^x)\leq\dfrac{x+k}{e^x}\Leftrightarrow\dfrac{\ln(e^x+1)}{e^x}\leq\dfrac{x+k}{e^x}\Leftrightarrow\ln(e^x+1)-x\leq k$ για κάθε $x\geq 0$.

Έστω $\varphi(x)=\ln(e^x+1)-x,\ x\geq 0$. Η φ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$\varphi'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-1=\dfrac{e^x-e^x-1}{e^x+1}=-\dfrac{1}{e^x+1}<0$, άρα $\varphi\searrow$ στο $[0,+\infty)$. Συνεπώς για $x\geq 0$ είναι $\varphi(x)\leq\varphi(0)\Leftrightarrow\varphi(x)\leq\ln 2$. Άρα $k_{min}=\ln 2$.

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{f(x)}-e+\lambda x}{x}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{e^{f(x)}-e}{x}+\lambda\right]=0\quad(1)$. Αρκεί να

υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{f(x)}-e}{x}$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ είναι

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=1$, οπότε το όριο είναι της μορφής $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Έχουμε

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{f(x)}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{f(x)}\cdot f'(x)}{1}$ με $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{f(x)}=e^1=e$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\ln(x+1)(x+1)}{x^2(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{x-\ln(x+1)(x+1)}{x^2}\right]=-\dfrac{1}{2}$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\ln(x+1)(x+1)}{x^2}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-1-\ln(x+1)}{2x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\frac{1}{x+1}}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}e^{f(x)}\cdot f'(x)=e\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{e}{2}$. Συνεπώς από $(1)\Rightarrow-\dfrac{e}{2}+\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{e}{2}$.

161. α) i. Έστω $g(t)=\ln t,\ t\in[x,x+1],\ x>0$. Η g είναι συνεχής στο $[x,x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$ με $g'(t)=\dfrac{1}{t}$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε :

$g'(\xi)=\dfrac{g(x+1)-g(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\xi}=\ln(x+1)-\ln x$. Είναι $x<\xi<x+1$ άρα

$\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow\ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x}$.

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$f'(x)=\ln(x+1)+x\cdot\dfrac{1}{x+1}-\ln x-\dfrac{x+1}{x}\Leftrightarrow$

$f'(x)=\left(\ln(x+1)-\ln x\right)+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+1}{x}<\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+1}{x}=-\dfrac{1}{x+1}<0$, άρα

$f\searrow(0,+\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\underset{\substack{x\to+\infty,\\ y\to1}}{\overset{y=1+\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{y\to1}\ln y=0$.

γ) Είναι $f(x)=x\ln(x+1)-x\ln x-\ln x=x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)-\ln x=$

$x\ln\dfrac{x+1}{x}-\ln x=\ =x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\ln x$. Είναι :

$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=0$

και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. Για το σύνολο τιμών της f, έχουμε :

$f(A)=f\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=\mathbb{R}$.

Επειδή $0 \in f(A)$ και $f \searrow (0,+\infty)$ υπάρχει μοναδικός $\alpha \in (0,+\infty)$ τέτοιος, ώστε :
$f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \ln(\alpha+1)-(\alpha+1)\ln\alpha=0 \Leftrightarrow \ln(\alpha+1)^{\alpha}=\ln\alpha^{\alpha+1} \Leftrightarrow (\alpha+1)^{\alpha}=\alpha^{\alpha+1}$.

162. α) Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>-1$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)+x}{x+1}$. Έστω $g(x)=\ln(x+1)+x, x>-1$. Η g είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>-1$ με παράγωγο $g'(x)=1+\dfrac{1}{x+1}>0$.Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $g(0)=0$ οπότε η g έχει μοναδική ρίζα την $x=0$. Για κάθε $-1<x<0 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x)<g(0)=0$ και για κάθε $x>0 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x)>g(0)$.

Επομένως για κάθε $-1<x<0$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f \searrow (-1,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f \nearrow [0,+\infty)$ αφού η f είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$.

β) Είναι $2x+\ln^2(x+1)=2\ln(x+1) \overset{:2}{\Leftrightarrow} x+\dfrac{\ln^2(x+1)}{2}=\ln(x+1) \Leftrightarrow f(x)=0$.

Όμως για κάθε $-1<x<0 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)>f(0)=0$ και για κάθε $x>0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x \in (-1,0)\cup(0,+\infty)$.Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x=0$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to -1^+}\ln(x+1) \underset{\substack{u\to 0^+}}{\overset{u=x+1}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$, είναι $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\dfrac{\ln(x+1)}{x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln^2(x+1)}{x}\right)\right]=+\infty\cdot(1-0+0)=+\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1}=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2(x+1)}{x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2\ln(x+1)}{x+1}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1} \underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x+1}}{1}=0$.

Για το $\Delta_1=(-1,0]$ είναι $f(\Delta_1)=[0,+\infty)$ και για το $\Delta_2=[0,+\infty)$ είναι $f(\Delta_2)=[0,+\infty)$, οπότε το $f(A)=[0,+\infty)$.

δ) Επειδή $f(\Delta_1)=[0,+\infty)$, υπάρχει $x_1 \in (-1,0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=1$. Επειδή $f(\Delta_2)=[0,+\infty)$, υπάρχει $x_2 \in (0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=1$.Στο διάστημα

$[x_1,x_2]$ η f είναι συνεχής, και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) , οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f στο $[x_1,x_2]$.

163. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$.

Είναι $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

β) i. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $g'(x)=e^{f(x)}f'(x)>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$,οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ άρα έχει σύνολο τιμών

$$g((1,+\infty))=\left(\lim_{x\to 1^+}g(x),\lim_{x\to+\infty}g(x)\right)=(1,+\infty)=A_{g^{-1}}.$$

Θέτουμε $g(x)=y\Leftrightarrow e^{\ln^2 x}=y\Leftrightarrow \ln^2 x=\ln y\Leftrightarrow \ln x=\sqrt{\ln y}\Leftrightarrow x=e^{\sqrt{\ln y}}\Leftrightarrow$

$x=e^{\ln y^{\frac{1}{2}}}\Leftrightarrow x=\sqrt{y}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\sqrt{y}$ άρα $g^{-1}(x)=\sqrt{x},x>1$.

ii. Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$, ισχύει:

$$g(x)>g^{-1}(x)\Leftrightarrow g(x)>x\Leftrightarrow e^{\ln^2 x}>x\Leftrightarrow \ln^2 x>\ln x\Leftrightarrow$$

$$\underset{>0}{\ln x}\cdot(\ln x-1)>0\Leftrightarrow \ln x>1\Leftrightarrow x>e.$$

iii. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g^{-1}(x)-1}{\sqrt[4]{f(x)}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\sqrt{\ln x}}-1}{\sqrt{\ln x}}\overset{\sqrt{\ln x}=u}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u}{1}=1$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln g^{-1}(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^{\sqrt{\ln x}}}{\ln^2 x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\ln x}}{\ln^2 x}\overset{k=\ln x}{=}\lim_{\substack{x\to+\infty,\\ k\to+\infty}}\frac{\sqrt{k}}{k^2}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}=0.$$

γ) $2\left(1-\dfrac{e}{\pi}\right)\ln\pi<\ln\dfrac{\pi}{e}\ln(\pi e)<\dfrac{2\pi}{e}-2\Leftrightarrow$

$$2\left(\frac{\pi-e}{\pi}\right)\ln\pi<(\ln\pi-\ln e)(\ln\pi+\ln e)<2\frac{\pi-e}{e}\Leftrightarrow$$

$2\dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{\ln^2\pi-\ln^2 e}{\pi-e}<2\dfrac{\ln e}{e}$. Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο $[e,\pi]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(e,\pi)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\pi)-f(e)}{\pi-e}=\dfrac{\ln^2\pi-\ln^2 e}{\pi-e}$. Είναι

$f''(x)=2\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$ για κάθε $x>e$, άρα η f' είναι $\searrow[e,+\infty)$. Όμως

$e<\xi<\pi \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(e)>f'(\xi)>f'(\pi) \Leftrightarrow 2\dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{\ln^2\pi-\ln^2 e}{\pi-e}<2\dfrac{\ln e}{e}$.

164. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=e^x+3x^2$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ 1–1.

Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=0$.

Για κάθε $x<0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(0)=0\Rightarrow xf(x)>0$ και για κάθε

$x>0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)=0\Rightarrow xf(x)>0$. Άρα $xf(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $g(-1)=-3,\ g(0)=1$, δηλαδή $g(-1)g(0)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $[-1,0]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $\rho\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho)=0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=3x^2-2x+2>0\ (\Delta<0)\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$ οπότε το ρ είναι η μοναδική ρίζα της $g(x)=0$ στο διάστημα $(-1,0)$ άρα $\alpha=-1$. Είναι $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{8}<0$, δηλαδή $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)g(0)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Bolzano, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$. Όμως το ρ είναι η μοναδική ρίζα της g στο $(-1,0)$, άρα $\rho\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ επομένως βρίσκεται πλησιέστερα στο 0.

γ) Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=e^x+x^2-2x-2,\ x\in\mathbb{R}$. Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $h'(x)=e^x+2x-2$ και δεύτερη παράγωγο $h''(x)=e^x+2>0\Rightarrow h'\nearrow\mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h'(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}h'(x)=+\infty$ οπότε η h' έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα υπάρχει $x_1\in\mathbb{R}: h'(x_1)=0$. Επειδή $h'(0)=-1<0,\ h'(1)=e>0$ δηλαδή $h'(0)\cdot h'(1)<0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1\in(0,1): h'(x_1)=0$.

Για κάθε $x<x_1\overset{h'\nearrow}{\Leftrightarrow}h'(x)<h'(x_1)=0\Rightarrow h\searrow(-\infty,x_1]$ και για κάθε

$x > x_1 \overset{h'\nearrow}{\Leftrightarrow} h'(x) > h'(x_1) = 0 \Rightarrow h\nearrow[x_1, +\infty)$. Είναι

$h'(x_1) = 0 \Leftrightarrow e^{x_1} + 2x_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x_1} = 2 - 2x_1 \ (1)$, οπότε

$h(x_1) = e^{x_1} + x_1^2 - 2x_1 - 2 = 2 - 2x_1 + x_1^2 - 2x_1 - 2 = x_1^2 - 4x_1 = x_1(x_1 - 4) < 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 - 2x - 2) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 - 2x - 2) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Στο $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ είναι $h(\Delta_1) = (-1, +\infty)$. Επειδή $0 \in h(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $\rho_1 \in \Delta_1$ άρα $\rho_1 < 0$ τέτοιο, ώστε $h(\rho_1) = 0 \Leftrightarrow f(\rho_1) = g(\rho_1)$.

Στο $\Delta_2 = [0, x_1]$ είναι $h(\Delta_2) = [h(x_1), -1]$ οπότε η h δεν έχει ρίζα στο Δ_2.

Τέλος στο $\Delta_3 = [x_1, +\infty)$ είναι $h(\Delta_3) = [h(x_1), +\infty)$. Επειδή $0 \in h(\Delta_3)$ υπάρχει μοναδικό $\rho_2 \in \Delta_3$ άρα $\rho_2 > 0$ τέτοιο, ώστε $h(\rho_2) = 0 \Leftrightarrow f(\rho_2) = g(\rho_2)$.

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.

δ) Έστω $\varphi(x) = e^x + \dfrac{x^4}{4} - x - 1,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι $\varphi'(x) = e^x + x^3 - 1 = f(x)$, οπότε:

για $x < 0$ είναι $f(x) < 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0 \Rightarrow \varphi\searrow(-\infty, 0]$ οπότε για $x \le 0$ είναι $\varphi(x) \ge \varphi(0) = 0$ και για $x > 0$ είναι $f(x) > 0 \Rightarrow \varphi'(x) > 0 \Rightarrow \varphi\nearrow[0, +\infty)$ άρα $\varphi(x) \ge \varphi(0) = 0$ και για κάθε $x \ge 0$.

Άρα $\varphi(x) \ge 0 \Leftrightarrow e^x + \dfrac{x^4}{4} - x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow e^x + \dfrac{x^4}{4} \ge x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(\eta\mu^\nu x)}{x^\nu} = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(\eta\mu^\nu x)}{\eta\mu^\nu x} \cdot \dfrac{\eta\mu^\nu x}{x^\nu}\right)$ (1). Θέτουμε $\eta\mu^\nu x = u$ με $\lim\limits_{x\to0} u = 0$,

τότε $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(\eta\mu^\nu x)}{\eta\mu^\nu x} = \lim\limits_{u\to0} \dfrac{f(u)}{u} = \lim\limits_{u\to0} \dfrac{e^u + u^3 - 1}{u} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{u\to0} \dfrac{e^u + 3u^2}{1} = 1$. Επίσης

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\eta\mu^\nu x}{x^\nu} = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^\nu = 1$, οπότε $(1) \Rightarrow \lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(\eta\mu^\nu x)}{x^\nu} = 1 \cdot 1 = 1$.

στ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο,

ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \dfrac{e^\beta + \beta^3 - \cancel{1} - e^\alpha - \alpha^3 + \cancel{1}}{\beta - \alpha} =$

$\dfrac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} + \dfrac{\beta^3 - \alpha^3}{\beta - \alpha} = \dfrac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} + \dfrac{\cancel{(\beta - \alpha)}(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2)}{\cancel{\beta - \alpha}} \Leftrightarrow$

$f'(\xi_1)=\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}+\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2$ (2). Έστω $a(x)=e^x$, $x\in[\alpha,\beta]$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την a στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $a'(\xi_2)=\dfrac{a(\beta)-a(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow e^{\xi_2}=\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}$ (3). Από τις (2),(3) $\Rightarrow f'(\xi_1)=e^{\xi_2}+\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2$.

165.α) Είναι $f'(0)=2f(0)(0-\eta\mu 0)=0\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-e^2}{x}=0$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)-e^2f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\left(f(x)-e^2\right)}{x}=f(0)f'(0)=0$.

β) Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει ότι $|\eta\mu x|<|x|$. Αν $x>0$, τότε $|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x\Rightarrow x-\eta\mu x>0$ και επειδή $f(x)>0$, από τη σχέση $f'(x)=2f(x)(x-\eta\mu x)$ προκύπτει ότι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Αν $x<0$, τότε $|\eta\mu x|<-x\Leftrightarrow x<\eta\mu x<-x\Rightarrow x-\eta\mu x<0$ και επειδή $f(x)>0$, από τη σχέση $f'(x)=2f(x)(x-\eta\mu x)$ προκύπτει ότι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

γ) Είναι $f'(x)=2f(x)(x-\eta\mu x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2x-2\eta\mu x\Leftrightarrow$

$\left[\ln(f(x))\right]'=\left(x^2+2\sigma\upsilon\nu x\right)'\Leftrightarrow\ln(f(x))=x^2+2\sigma\upsilon\nu x+c$, $c\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $\ln(f(0))=2+c\Leftrightarrow 2=2+c\Leftrightarrow c=0$, άρα

$\ln(f(x))=x^2+2\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2+2\sigma\upsilon\nu x}$

δ) Για κάθε $x<0\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)$ και για κάθε $x>0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)$. Όμως $f(0)=0$ άρα $f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow e^{x^2+2\sigma\upsilon\nu x}\geq e^2\Leftrightarrow x^2+2\sigma\upsilon\nu x\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Έστω $g(x)=f(x)f'(x)+x^2-1-ef'(x)=f'(x)(f(x)-e)+x^2-1$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Είναι $g(0)=\cancel{f'(0)}^{0}(f(0)-e)-1=-1<0$ και

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)-e\right)+\frac{\pi^2}{4}-1=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)-e\right)+\frac{\pi^2}{4}-1\Leftrightarrow$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)-e\right)+\frac{\pi^2}{4}-1=2e^{\frac{\pi^2}{4}}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(e^{\frac{\pi^2}{4}}-e\right)+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(\frac{\pi}{2}+1\right)>0$$

γιατί $\frac{\pi}{2}>1\Leftrightarrow\frac{\pi^2}{4}>1\Leftrightarrow e^{\frac{\pi^2}{4}}>e$. Επομένως $g(0)g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

166.α) Επειδή $e^{-x}+1\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $A_f=\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in A_f$ και $-x\in A_f$. Επίσης $f(-x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=-\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-f(x)$, άρα η f είναι περιττή.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$. Είναι

$$\left(f(-x)\right)'=\left(-f(x)\right)'\Leftrightarrow -f'(-x)=-f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)=f'(x)\text{ άρα}$$

$$\left(f'(-x)\right)'=f''(x)\Leftrightarrow -f''(-x)=f''(x)\text{ οπότε}$$

$$\left(-f''(-x)\right)'=f^{(3)}(x)\Leftrightarrow f^{(3)}(-x)=f^{(3)}(x),\text{ άρα η } f^{(3)}\text{ είναι άρτια.}$$

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}\left(e^{-x}+1\right)-\left(e^{-x}-1\right)\left(-e^{-x}\right)}{\left(e^{-x}+1\right)^2}=\frac{-2e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2}<0\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$$

δ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

1ος τρόπος εύρεσης αντίστροφης:

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}\left(1-e^x\right)}{e^{-x}\left(1+e^x\right)}=\frac{1-0}{1+0}=1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$ άρα επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-1,1)$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-1 < y < 1$ είναι :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = y \Leftrightarrow e^{-x} - 1 = ye^{-x} + y \Leftrightarrow$$

$$e^{-x} - ye^{-x} = y + 1 \Leftrightarrow e^{-x}(1-y) = y+1 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{y+1}{1-y} \Leftrightarrow$$

$$-x = \ln\frac{y+1}{1-y} \Leftrightarrow x = -\ln\frac{y+1}{1-y} \text{ άρα } f^{-1}(y) = -\ln\frac{y+1}{1-y},\ y \in (-1,1) \text{ οπότε}$$

$$f^{-1}(x) = -\ln\frac{x+1}{1-x},\ x \in (-1,1).$$

2ος τρόπος εύρεσης αντίστροφης:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = y \Leftrightarrow e^{-x} - 1 = ye^{-x} + y \Leftrightarrow e^{-x} - ye^{-x} = y+1 \Leftrightarrow$$

$e^{-x}(1-y) = y+1$ (3). Αν $y = 1$ τότε η (3) γίνεται $0 = 2$ και είναι αδύνατη.

Για $y \neq 1$ είναι $e^{-x} = \frac{y+1}{1-y}$. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^{-x} > 0$, έχουμε

$$\frac{y+1}{1-y} > 0 \Leftrightarrow (y+1)(1-y) > 0 \Leftrightarrow -1 < y < 1.$$

Από τη σχέση (3) για $y \in (-1,1)$ έχουμε: $-x = \ln\frac{y+1}{1-y} \Leftrightarrow x = -\ln\frac{y+1}{1-y}$, άρα

$$f^{-1}(y) = -\ln\frac{y+1}{1-y},\ y \in (-1,1) \text{ οπότε } f^{-1}(x) = -\ln\frac{x+1}{1-x},\ x \in (-1,1).$$

ε) Είναι $e^{f(x)}(f(x)+1) + f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) + 1 + \frac{f(x)}{e^{f(x)}} < \frac{1}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow$

$$f(x) + f(x)e^{-f(x)} < e^{-f(x)} - 1 \Leftrightarrow f(x)\left(1 + e^{-f(x)}\right) < e^{-f(x)} - 1 \Leftrightarrow f(x) < \frac{e^{-f(x)}-1}{e^{-f(x)}+1} \Leftrightarrow$$

$$f(x) < f(f(x)) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x > f(x) \Leftrightarrow f(x) - x < 0 \ (5)$$

Έστω $h(x) = f(x) - x,\ x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $h(0) = f(0) - 0 = 0$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$ και $-x_1 > -x_2$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη: $f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2) \Leftrightarrow h \searrow \mathbb{R}$.

Η σχέση (5) γίνεται: $h(x) < h(0) \overset{h\searrow}{\Leftrightarrow} x > 0$

στ) Αρκεί η εξίσωση $f(x) = x + \kappa \Leftrightarrow f(x) - x = \kappa \Leftrightarrow h(x) = \kappa$ να έχει ακριβώς μία ρίζα για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$. Από δ) ερώτημα είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$,

οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right) = 1+\infty = +\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = -1-\infty = -\infty$.

Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε έχει σύνολο τιμών το $h(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} h(x), \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)\right) = \mathbb{R}$. Επειδή το κ περιέχεται στο σύνολο τιμών της h και η h είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $h(\rho) = 0$.

Τράπεζα θεμάτων Ι.Ε.Π.

23937.α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει εξίσωση:

$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = 4x - 4 \Leftrightarrow y = 4x - 3$.

25764.α) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \ln(x+1) \overset{\substack{u=x+1\\ x\to0^+,\, u\to1^+}}{=} \lim\limits_{u\to1^+} \ln u = 0 = f(0)$ και

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} x^3 = 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = f(0)$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = 3x^2 > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

27082.α) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 3(x-1)^2 - 3 = 3(x^2 - 2x + 1 - 1) = 3x(x-2)$.

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ή $x \geq 2$.

Για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από αυτά.

Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $f'(x) < 0$ και η f είναι συνεχής στο [0, 2], οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

β) Είναι $f(2)=(2-1)^3-6=-5$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-1)^3-3x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2+3x-1-3x\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f([2,+\infty))=\left[f(2),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=[-5,+\infty)$.

γ) Επειδή το 0 περιέχεται στο $f([2,+\infty))=[-5,+\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2,+\infty)$.

29211.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(-\infty,0)$ έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^-} f(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=(-\infty,1)$.

γ) i. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι και 1-1.
ii. Για κάθε $x<0$ και $y<1$ είναι

$f(x)=y\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x^2}=y\Leftrightarrow\dfrac{1}{x^2}=1-y\Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{1-y}\Leftrightarrow$

$|x|=\sqrt{\dfrac{1}{1-y}}\overset{x<0}{\Leftrightarrow}-x=\sqrt{\dfrac{1}{1-y}}\Leftrightarrow x=-\sqrt{\dfrac{1}{1-y}}$, άρα $f^{-1}(y)=-\sqrt{\dfrac{1}{1-y}}$, $y<1$, οπότε

$f^{-1}(x)=-\sqrt{\dfrac{1}{1-x}}$, $x<1$.

33633.α) Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x}+3>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) i. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x+3x+2)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+3x+2)=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ii. $f(x)+2023=0 \Leftrightarrow f(x)=-2023$

Επειδή ο αριθμός – 2023 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, η εξίσωση $f(x)=-2023 \Leftrightarrow f(x)+2023=0$ έχει ακριβώς μία θετική λύση.

23376.α) Επειδή η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f(x)>0,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι

$A_h = \{x \in A_f / f(x) \in A_g\} = \{x \in \mathbb{R} / f(x) > 0\} = \mathbb{R}$ και

$h(x) = g(f(x)) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

β) i. Για κάθε $x \in A_h = \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$. Επίσης

$h(-x) = -h(x) \Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \Leftrightarrow$

$\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]=0 \Leftrightarrow$

$\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2\right]=0 \Leftrightarrow \ln\left(x^2+1-x^2\right)=0 \Leftrightarrow \ln 1=0$ ισχύει. Άρα η h είναι περιττή.

ii. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$\frac{-\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x)<0$, άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1.

γ) Είναι $h(x-1)+h\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0 \Leftrightarrow h(x-1)=-h\left(\ln\frac{1}{x}\right) \overset{\text{h περιττή}}{\Leftrightarrow}$

$h(x-1)=h\left(-\ln\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow h(x-1)=h(-\ln 1+\ln x) \Leftrightarrow$

$h(x-1)=h(\ln x) \overset{\text{h 1–1}}{\Leftrightarrow} x-1=\ln x \Leftrightarrow x=1$ αφού για κάθε $x>0$ είναι $\ln x \le x-1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

26605.α) i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^2(x)-5=x^2 \Leftrightarrow f^2(x)=x^2+5>0$. Άρα $f^2(x)\neq 0 \Leftrightarrow f(x)\neq 0$

ii. Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(2) = 3 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f^2(x) = x^2 + 5 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$.

β) i. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με παράγωγο $g'(x) = 2x + \eta\mu x$ και δεύτερη παράγωγο $g''(x) = 2 + \sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$, άρα $g''(x) > 0$ οπότε g΄γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g΄΄		+	
g΄	−	0	+
g	↘		↗

Επομένως για κάθε $x < 0$ είναι $g'(x) < g'(0) = 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Επίσης για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > g'(0) = 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

ii. Είναι $f^2(x) = 5 + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x^2 + 5 = 5 + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x^2 - \sigma\upsilon\nu x = 0$.

Είναι $g(-\pi) = \pi^2 + 1 > 0$, $g(0) = -1 < 0$ και $g(\pi) = \pi^2 - 1 > 0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στα διαστήματα [-π, 0], [0, π] και $g(-\pi)g(0) < 0$, $g(\pi)g(0) < 0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα υπάρχουν $x_1 \in (-\pi, 0)$ και $x_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε $g(x_1) = 0$, $g(x_2) = 0$.

Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$, τα x_1, x_2 είναι οι μοναδικές της ρίζες.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-x \in \mathbb{R}$ και $g(-x) = (-x)^2 - \sigma\upsilon\nu(-x) = x^2 - \sigma\upsilon\nu x = g(x)$, δηλαδή η g είναι άρτια. Είναι $g(-x_1) = g(x_1) = 0$, οπότε ρίζα της g είναι και η $-x_1 \in (0, \pi)$. Όμως το x_2 είναι η μοναδική ρίζα της g στο διάστημα αυτό, άρα $x_2 = -x_1$.

27319.α) Είναι $f(1) = -e < 0$, $f(2) = \ln 2 > 0$.

Επειδή $f(1)f(2) < 0$ και η f είναι συνεχής στο [1, 2] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$f'(x)=e^x+(x-2)e^x+\ln x+\dfrac{x-1}{x}=e^x(x-1)+\ln x+\dfrac{x-1}{x}$..

Για κάθε $x>1$ είναι $e^x(x-1)>0$, $\ln x>0$, $\dfrac{x-1}{x}>0$, οπότε $f'(x)>0$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $e^x(x-1)<0$, $\ln x<0$, $\dfrac{x-1}{x}<0$, οπότε $f'(x)<0$.

Επειδή $f'(1)=0$ η $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το x = 1 και στο σημείο αυτό η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Επειδή για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής στο $(0,1]$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[(x-2)e^x+(x-1)\ln x\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}(x-2)e^x=-2$ και $\lim\limits_{x\to0^+}(x-1)\ln x=+\infty$. Στο διάστημα $\Delta=(0,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta)=[-e,+\infty)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f(\Delta)$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ. Επειδή $x_0\in(1,+\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f στο $(1,+\infty)$. Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

27455.α) i. Είναι $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(e^{x-2}-2\right)=-1=f(0)=\lim\limits_{x\to2^-}f(x)$ επομένως η f είναι συνεχής στο x = 2. Για κάθε $x<2$ είναι $f(x)=-1$ οπότε είναι σταθερή.

Για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)=e^{x-2}>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\ge2$ είναι $f(x)\ge f(2)\Leftrightarrow f(x)\ge-1$. Επειδή για κάθε $x<2$ είναι $f(x)=-1$, είναι $f(x)\ge-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=-x+2$.

Για κάθε $x<2$ είναι $g'(x)>0$ και για κάθε $x>2$ είναι $g'(x)<0$, η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,2]$και γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{2}x^2+2x-3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}x^2+2x-3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)=-\infty$

Στο διάστημα $(-\infty,2]$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g((-\infty,2])=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),g(2)\right]=(-\infty,-1]$. Στο διάστημα $[2,+\infty)$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g([2,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}g(x),g(2)\right]=(-\infty,-1]$.

Η g έχει σύνολο τιμών το $g(\mathbb{R})=(-\infty,-1]$.

β) Από το σύνολο τιμών της g προκύπτει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\le -1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 2. Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\ge -1$, ισχύει ότι $f(x)>-1>g(x)$ για κάθε $x\ne 2$.

γ) Ο ισχυρισμός είναι ψευδής γιατί ενώ κοντά στο 2 είναι $f(x)>g(x)$ ισχύει $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}g(x)=-1$.

31793.α) Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0\Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$, οπότε για κάθε x > 0 είναι

$f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(1)\overset{f\nearrow\Rightarrow 1-1}{\Leftrightarrow}x=1$.

β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\frac{1}{\ln x}(\ln x)'=\frac{1}{x\ln x}$.

Η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_g=g'(e)=\frac{1}{e\ln e}=\frac{1}{e}$.

Η C_f δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στην ε, αν υπάρχει σημείο της $M(x_1,f(x_1))$, $x_1>0$ τέτοιο, ώστε

$f'(x_1)=\lambda_g\Leftrightarrow\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1^2}=\frac{1}{e}\Leftrightarrow ex_1+e=x_1^2\Leftrightarrow x_1^2-ex_1-e=0$.

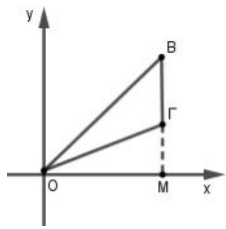
Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες $x_1=\frac{e\pm\sqrt{e^2+4e}}{2}$.

Είναι $e^2<e^2+4e\Leftrightarrow e<\sqrt{e^2+4e}\Leftrightarrow e-\sqrt{e^2+4e}<0$, οπότε η λύση $x_1=\frac{e-\sqrt{e^2+4e}}{2}$ απορρίπτεται.

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $x_1=\frac{e+\sqrt{e^2+4e}}{2}$ είναι παράλληλη στην ε.

γ) Είναι $(\text{ΟΒΓ}) = \frac{1}{2}(\text{ΒΓ})(\text{ΟΜ}) = \frac{1}{2}\left(f(x)-g(x)\right)\cdot x$, $x > 1$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ βρίσκεται στο σημείο $\left(e^2, 0\right)$, τότε $x(t_0) = e^2$ και $x'(t) = 2$, $t \geq 0$.



Είναι $f\left(x(t_0)\right) = \ln e^2 + 1 - \frac{1}{e^2} = 3 - \frac{1}{e^2}$,

$g\left(x(t_0)\right) = \ln\left(\ln e^2\right) = \ln 2$,

$f'\left(x(t_0)\right) = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4}$, $g'\left(x(t_0)\right) = \frac{1}{e^2 \ln e^2} = \frac{1}{2e^2}$

Έστω $E(t) = \frac{1}{2}x\left(f\left(x(t)\right) - g\left(x(t)\right)\right)$, $x(t) > 1$.Είναι

$$E'(t) = \frac{1}{2}x'(t)\left(f\left(x(t)\right) - g\left(x(t)\right)\right) + \frac{1}{2}x(t)\left(f'\left(x(t)\right)x'(t) - g'\left(x(t)\right)x'(t)\right) \Leftrightarrow$$

$$E'(t) = \frac{1}{2}\cdot 2\left(f\left(x(t)\right) - g\left(x(t)\right)\right) + \frac{1}{2}x(t)\left(f'\left(x(t)\right)\cdot 2 - g'\left(x(t)\right)\cdot 2\right) \Leftrightarrow$$

$$E'(t) = \left(f\left(x(t)\right) - g\left(x(t)\right)\right) + x(t)\left(f'\left(x(t)\right) - g'\left(x(t)\right)\right)$$

Τη χρονική στιγμή t= t_0 , είναι

$$E'(t_0) = \left(f\left(x(t_0)\right) - g\left(x(t_0)\right)\right) + x(t_0)\left(f'\left(x(t_0)\right) - g'\left(x(t_0)\right)\right) \Leftrightarrow \ldots$$

$$E'(t_0) = \frac{7}{2} - \ln 2 \ \text{cm}^2/\text{sec}$$

32524.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x) = -\frac{e}{x^2} - \frac{1}{x}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) < 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $e(1-x) = x\ln x \Leftrightarrow e - ex = x\ln x \overset{:x}{\Leftrightarrow}$

$$\frac{e}{x} - e = \ln x \Leftrightarrow \frac{e}{x} - \ln x = e \Leftrightarrow g(x) = g(1) \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} x = 1$$

γ) i. Η f ορίζεται όταν $x > 0$ και $e - x\ln x - ex \neq 0 \overset{\text{β) σκέλος}}{\Leftrightarrow} x \neq 1$, άρα $D_f = (0,1)\cup(1,+\infty)$.

ii. Για κάθε $x > 1 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(1)$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 + x}{e - x\ln x - ex} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}\left(\frac{e}{x} - \ln x - e\right)} =$$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left[(x+1)\dfrac{1}{g(x)-g(1)}\right]=2(-\infty)=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 1^+}\big(g(x)-g(1)\big)=0$ και για κάθε $x>1 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(1)$.

33388.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2+\sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1$, άρα $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) i. Είναι $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2+\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}=2$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\left(\dfrac{\pi}{2},\pi+1\right)$ είναι η ευθεία ε:

$$y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y-\pi-1=2x-\pi\Leftrightarrow y=2x+1.$$

ii. Για τα κοινά σημεία των ε, C_f έχουμε:

$$\begin{cases}y=2x+\eta\mu x\\ y=2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\eta\mu x=2x+1\\ y=2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\eta\mu x=1\\ y=2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\\ y=2x+1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\begin{cases}x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\\ y=4\kappa\pi+\pi+1\end{cases}$. Τα κοινά σημεία των ε, C_f είναι της μορφής

$M\left(2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},4\kappa\pi+\pi+1\right),\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

Είναι $f'\left(2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=2+\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=2+\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}=2=\lambda_\varepsilon$, οπότε η ε εφάπτεται της C_f στα άπειρα σημεία Μ.

γ) i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $|f'(x)|=|2+\sigma\upsilon\nu x|\le 2+|\sigma\upsilon\nu x|\le 2+1=3$.

ii. Αν α< β τότε για την f ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο [α, β], οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Είναι

$$|f'(\xi)|\le 3\Leftrightarrow\left|\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right|\le 3\Leftrightarrow\frac{|f(\beta)-f(\alpha)|}{|\beta-\alpha|}\le 3\Leftrightarrow|f(\beta)-f(\alpha)|\le 3|\beta-\alpha|.$$

Ομοίως αν α > β και τέλος αν α = β ισχύει η ισότητα.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $e^x = e^{f(x)} + e^x e^{f(x)} \Leftrightarrow e^{f(x)}\left(e^x+1\right) = e^x \Leftrightarrow$

$e^{f(x)} = \dfrac{e^x}{e^x+1} \Leftrightarrow f(x) = \ln\dfrac{e^x}{e^x+1} = x - \ln\left(e^x+1\right)$ και $f'(x) = 1 - \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{e^x+1}$

Επομένως, η εξίσωση $f'(x) = \dfrac{1}{16}$ γίνεται

$\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{1}{16} \Leftrightarrow e^x+1 = 16 \Leftrightarrow e^x = 15 \Leftrightarrow x = \ln 15$. **Σωστή απάντηση Γ.**

2. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f'(x)}{x}x\right)^{1\cdot(+\infty)} = +\infty$,άρα $f'(x) > 1$ για κάθε $x > x_0$

οπότε η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0, +\infty)$ αφού

$g'(x) = f'(x) - 1 > 0$.Για $x > x_0 + 1$ είναι $g(x) > g(x_0+1) \Leftrightarrow$

$f(x) - x > f(x_0+1) - (x_0+1) \Leftrightarrow f(x) > x + f(x_0+1) - x_0 - 1$

Με $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + f(x_0+1) - x_0 - 1\right) = +\infty$,οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{2x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x} = \dfrac{1}{2}\cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

Σωστή απάντηση Γ.

3. Έστω $g(x) = f(x) - x^2$ με $g'(x) = f'(x) - 2x > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και για

$x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) - x^2 > f(0) \Leftrightarrow f(x) > x^2 + f(0)$ (1)

Επίσης , θεωρούμε την $h(x) = f(x) - x^2 - x$ με $h'(x) = f'(x) - 2x - 1 < 0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και για

$x > 0 \Leftrightarrow h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) - x^2 - x < f(0) \Leftrightarrow f(x) < x^2 + x + f(0)$ (2)

Από (1),(2) είναι

$x^2 + f(0) < f(x) < x^2 + x + f(0) \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} 1 + \dfrac{f(0)}{x^2} < \dfrac{f(x)}{x^2} < 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{f(0)}{x^2}$

Και από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2} = 1$

Σωστή απάντηση Α.

4. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=(1-x)f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=(1-x)f'(x)-f(x)>0$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα για $0<1 \Leftrightarrow h(0)<h(1) \Leftrightarrow f(0)<0$. **Σωστή απάντηση Δ.**

5. Η συνάρτηση $f(x)=x^2-2-(1-x)(\ln x-2)$ είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=2x-\left[-(\ln x-2)+(1-x)\frac{1}{x}\right]=2x-\frac{1}{x}+\ln x-1 \text{ και}$$

$f''(x)=2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}>0$ αφού $x>0$. Οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα και $f'(1)=0$.

Αν $0<x<1$ τότε $f'(x)<f'(1)=0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(0,1]$ και $x>1$ θα είναι $f'(x)>f'(1)=0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2=[1,+\infty)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=-1$

Επίσης, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+2x+x\ln x-\ln x\right)=+\infty$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0 \text{. Άρα } f(A)=[-1,+\infty)$$

Σωστή απάντηση Β.

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος

1. Σ	**2.** Λ	**3.** Σ	**4.** Λ	**5.** Σ	**6.** Λ	**7.** Σ	**8.** Λ	**9.** Σ

10. Λ	**11.** Σ	**12.** Λ	**13.** Σ	**14.** Σ	**15.** Λ	**16.** Σ	**17.** Σ

28 Ακρότατα συνάρτησης

Μελέτη ακρότατου

25.α) $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$. Για κάθε $x<-1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,-1]$. Για κάθε $-1<x<2$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[-1,2]$ και για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[2,+\infty)$. Τοπ. μέγιστο το $f(-1)=13$ και τοπ. ελάχιστο το $f(2)=-14$.

β) $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq 1\Leftrightarrow x\leq e$. Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(0,e]$ και για κάθε $x>e$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[e,+\infty)$.

Μέγιστο το $f(e)=\dfrac{1}{e}$.

γ) $f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$. Για κάθε $x>3$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[3,+\infty)$ και για κάθε $x<-1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,-1]$.

Τοπικά ελάχιστα τα $f(-1)=0$ και $f(3)=0$.

δ) $f'(x)=2-4\eta\mu 2x\geq 0\Leftrightarrow \eta\mu 2x\leq \dfrac{1}{2}=\eta\mu\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow 0\leq 2x\leq\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow 0\leq x\leq\dfrac{\pi}{12}$ ή $\pi-\dfrac{\pi}{6}\leq 2x\leq 2\pi\Leftrightarrow\dfrac{5\pi}{12}\leq x\leq\pi$. Η f είναι $\nearrow$ στα $\left[0,\dfrac{\pi}{12}\right]$, $\left[\dfrac{5\pi}{12},\pi\right]$ και $\searrow$ στο $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$. Τοπικά ελάχιστα τα $f(0)=2$, $f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$ και τοπικά μέγιστα τα $f(\pi)=2\pi+2$, $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$.

ε) $f'(x)=(x-2)\ln x\geq 0\Leftrightarrow 0<x\leq 1$ ή $x\geq 2$. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(0,1]$. Για κάθε $x\in(1,2)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[1,2]$ και για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[2,+\infty)$.

Τοπικό μέγιστο το $f(1)=\dfrac{7}{4}$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2)=3-2\ln 2$.

στ) Επειδή $\ln x<x$ έχουμε $A_f=(0,+\infty)$. Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x-x)^2}\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq 1\Leftrightarrow x\geq e$. Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι

$f'(x)<0 \Rightarrow f \searrow (0,e]$ και για κάθε $x>e$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f \nearrow [e,+\infty)$.

Ελάχιστο το $f(e)=\dfrac{1}{1-e}$.

26.α) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)=0$, άρα f συνεχής στο 3. Για $x>3$ είναι $f'(x)=-2x+4<0 \Rightarrow f \searrow [3,+\infty)$. Για $x<3$ είναι $f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$. Για κάθε $x<1$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty,1]$ και για κάθε $x\in(1,3)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f \searrow [1,3]$.

Μέγιστο το $f(1)=20$.

β) $f(x)=\begin{cases} x^2-6x+8, & x\le 2 \text{ ή } x\ge 4 \\ -x^2+6x-8, & 2<x<4 \end{cases}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$f'(x)=\begin{cases} 2x-6, & x<2 \text{ ή } x>4 \\ -2x+6, & 2<x<4 \end{cases}$. Για κάθε $x<2$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f \searrow (-\infty,2]$.

Για κάθε $x>4$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f \nearrow [4,+\infty)$. Για κάθε $x\in(2,3)$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f \nearrow [2,3]$ και για κάθε $x\in(3,4)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f \searrow [3,4]$.

Τοπ. ελάχιστα τα $f(2)=0$, $f(4)=0$ και τοπ. μέγιστο το $f(3)=1$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-8=f(2)$ άρα η f είναι συνεχής στο 2.

$f'(x)=\begin{cases} 1, & x<2 \\ 2x-6, & x>2 \end{cases}$. Για κάθε $x<2$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty,2]$, για κάθε $x\in(2,3)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f \searrow [2,3]$ και για κάθε $x>3$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f \nearrow [3,+\infty)$. Τοπ. ελάχιστο το $f(3)=-9$ και τοπικό μέγιστο το $f(2)=-8$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-2=f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Είναι $f'(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x>0 \end{cases}$. Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f \searrow (-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f \nearrow [0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο 0 το $f(0)=-2$.

27.α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta)$ και σύνολο τιμών το σύνολο $[f(\alpha),\ell_1)\cup(\ell_1,\ell_2)$.

β) Η f δεν είναι συνεχής στα σημεία x_1, x_2 και x_3.

γ) Παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=\alpha$ το $f(\alpha)$.

Παρατηρούμε ότι στο x_1 η τιμή της συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή της σε κάθε «γειτονικό» σημείο του x_1, δηλαδή υπάρχει $\delta_1>0$ τέτοιο ώστε $f(x)\le f(x_1)$ για κάθε $x\in(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1)$ άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 το $f(x_1)$.

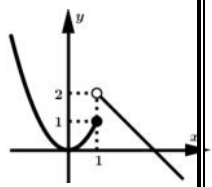
Ομοίως παρατηρούμε ότι στο x_2 η τιμή της συνάρτησης είναι μικρότερη από την τιμή της σε κάθε «γειτονικό» σημείο του x_2, δηλαδή ότι υπάρχει $\delta_2>0$ τέτοιο ώστε $f(x)\ge f(x_2)$ για κάθε $x\in(x_2-\delta_2,x_2+\delta_2)$ άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_2 το $f(x_2)$.

Στο x_3 δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, καθώς βλέπουμε ότι υπάρχει $\delta_3>0$ για το οποίο ισχύει $f(x)\ge f(x_3)$ για κάθε $x\in(x_3-\delta_3,x_3)$ και $\delta_4>0$ για το οποίο ισχύει $f(x)\le f(x_3)$ για κάθε $x\in(x_3,x_3+\delta_4)$.

Το $f(\alpha)$ είναι ολικό ελάχιστο και το παρουσιάζει μόνον για $x=\alpha$.

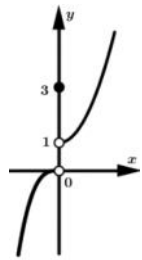
Η συνάρτηση f δεν έχει ολικό μέγιστο.

28.α) *Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα* $(-\infty,1)$ *και* $(1,+\infty)$ *ως* πολυωνυμική. Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1\ne\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2$ άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$. Είναι $f\searrow(-\infty,0]$, $f\nearrow[0,1]$ και $f\searrow(1,+\infty)$. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=0$. Στο $x_0=1$ δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο,



καθώς βλέπουμε ότι υπάρχει $\delta_1>0$ για το οποίο ισχύει $f(x)\le f(1)$ για κάθε $x\in(1-\delta_1,1)$ και $\delta_2>0$ για το οποίο ισχύει $f(x)\ge f(1)$ για κάθε $x\in(1,1+\delta_2)$.

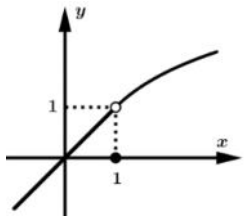
β) Η g είναι σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ ως πολυωνυμική. Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=0\ne\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=1$ άρα η g δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$. Είναι $g\nearrow(-\infty,0]$ και $g\nearrow(0,+\infty)$.



Παρατηρούμε ότι στο $x_0=0$ η τιμή της συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή της σε κάθε «γειτονικό» σημείο του $x_0=0$, δηλαδή υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $g(x)\le g(0)$ για κάθε $x\in(-\delta,\delta)$ άρα η g

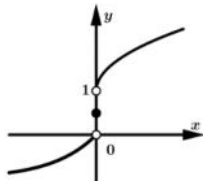
παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=0$ το $g(0)=3$.

γ) Η h είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ ως πολυωνυμική και λογαριθμική αντίστοιχα. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=1\neq h(1)=0$ άρα η h δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$. Είναι $h\nearrow(-\infty,1)$ και $h\nearrow[1,+\infty)$.



Παρατηρούμε ότι στο $x_0=1$ η τιμή της συνάρτησης είναι μικρότερη από την τιμή της σε κάθε «γειτονικό» σημείο του $x_0=1$, δηλαδή υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $h(x)\geq h(1)$ για κάθε $x\in(1-\delta,1+\delta)$ άρα η h παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=1$ το $h(1)=0$.

δ) Η φ είναι σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ ως εκθετική και πράξεις συνεχών αντίστοιχα.



Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)=0\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=1$ άρα η φ δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$. Είναι $\varphi\nearrow(-\infty,0]$ και $\varphi\nearrow(0,+\infty)$.

Στο $x_0=0$ δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, καθώς βλέπουμε ότι υπάρχει $\delta_1>0$ για το οποίο ισχύει $\varphi(x)\leq\varphi(1)$ για κάθε $x\in(-\delta_1,0)$ και $\delta_2>0$ για το οποίο ισχύει $\varphi(x)\geq\varphi(1)$ για κάθε $x\in(0,\delta_2)$.

Αυξημένης δυσκολίας

29.α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f ΄έχει ελάχιστο το -2 για x = -2, τοπικό μέγιστο
το 2 για x = 0 και τοπικό ελάχιστο το 1 για x = 1. Η f ΄είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2,0)$, $[1,3)$ και γνησίως φθίνουσα στο [0,1].

β) Για κάθε $x\in[-2,0)$ είναι $f'(x)<0$, για κάθε $x\in[0,3)$ είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής στο [-2,3], είναι γνησίως φθίνουσα στο [-2, 0] και γνησίως αύξουσα στο [0, 3]. Η f έχει τοπικά μέγιστα τα $f(-2)=3$, $f(3)=4$ και ελάχιστο το $f(0)=1$. Το $f(3)=4$ είναι ολικό μέγιστο της f.

γ) Είναι $f([-2,0])=[1,3]$ και $f((0,3])=(1,4]$, οπότε $f([-2,3])=[1,4]$.

Η f είναι γνησίως μονότονη στα $[-2,0],(0,3]$, το 2 περιέχεται στα $f([-2,0])$, $f((0,3])$, οπότε υπάρχουν μοναδικά $x_1\in[-2,0]$ και $x_2\in(0,3]$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=2=f(x_2)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο

(x_1, x_2) και $f(x_1) = f(x_2)$, εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2]$.

30.α) Είναι $f'(x) = e^x - \lambda \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \lambda \Leftrightarrow x \geq \ln\lambda$. Για κάθε $x < \ln\lambda$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, \ln\lambda]$ και για κάθε $x > \ln\lambda$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [\ln\lambda, +\infty)$.

Η f έχει ελάχιστο το $f(\ln\lambda) = \lambda - \lambda\ln\lambda - 1$.

β) Έστω $g(\lambda) = \lambda - \lambda\ln\lambda - 1$, $\lambda \geq 1$. Είναι $g'(\lambda) = -\ln\lambda < 0$ για $x \neq 1$, η g είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα $g \searrow [1, +\infty)$. Για κάθε $\lambda > 1$ είναι $g(\lambda) < g(1) = 0$. Άρα το ελάχιστο της f είναι αρνητικός αριθμός.

31.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$

Η f είναι $\searrow(-\infty -1]$, $\nearrow[-1, 0]$, $\searrow[0, 1]$ και $\nearrow[1, +\infty)$. Έχει τοπικά ελάχιστα τα $f(-1) = \alpha - 1$, $f(1) = \alpha - 1$ και τοπικό μέγιστο το $f(0) = \alpha$. Επομένως

$A(-1, \alpha - 1)$, $B(0, \alpha)$ και $\Gamma(1, \alpha - 1)$, $\lambda_{AB} = \dfrac{\alpha - \alpha + 1}{1} = 1$ και

$\lambda_{B\Gamma} = \dfrac{\alpha - 1 - \alpha}{1} = -1$. Επειδή $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1$ είναι $AB \perp B\Gamma$.

β) Είναι $f(0) = \alpha > 0$, $f(-1) = \alpha - 1 < 0$ και f συνεχής στο $[-1, 0]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1, 0)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 0)$, η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

32.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 4x^3 + 4x - 4\sigma\upsilon\nu x$, $f''(x) = 12x^2 + 4(1 + \eta\mu x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

άρα $f' \nearrow \mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x\left(4x^2 + 4 - 4\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right) \right] = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to -+\infty} \left[x\left(4x^2 + 4 - 4\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right) \right] = +\infty$.

(Για $x \neq 0$ είναι $\left| \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right| = \dfrac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|} \leq \dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|x|} \leq \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \leq \dfrac{1}{|x|}$. Όμως

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{|x|}=0=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.)

Επομένως $f'(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ οπότε το $0\in f'(\mathbb{R})$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$. Για κάθε $x<x_0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0\Rightarrow f\searrow(-\infty,x_0]$ και για κάθε $x>x_0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_0)=0\Rightarrow f\nearrow[x_0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο x_0.

β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με
$f'(x)=2x-\eta\mu x+1,\ f''(x)=2-\sigma\upsilon\nu x>0\Rightarrow f'\nearrow\mathbb{R}$. Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(2-\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{1}{x}\right)\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(2-\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty.$$

(Για $x\neq0$ είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}$. Όμως

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{|x|}=0=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$).Επομένως $f'(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ οπότε το $0\in f'(\mathbb{R})$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$. Για κάθε $x<x_0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0\Rightarrow f\searrow(-\infty,x_0]$ και για κάθε $x>x_0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_0)=0\Rightarrow f\nearrow[x_0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο x_0.

33. Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=2(e^x-1)-2\ln(x+1)$, $x>-1$. Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με

$$h'(x)=2e^x-\frac{2}{x+1},\ h''(x)=2e^x+\frac{2}{(x+1)^2}>0\Rightarrow h'\nearrow(-1,+\infty).$$

Για κάθε $x>0$ είναι $h'(x)>h'(0)=0\Rightarrow h\nearrow[0,+\infty)$ και για κάθε $-1<x<0$ είναι $h'(x)<0\Rightarrow h\searrow(-1,0]$. Η h έχει ελάχιστο το $h(0)=0$, οπότε $h(x)>0$

για κάθε $x \in (-1,0) \cup (0+\infty)$, άρα η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

34.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με

$f'(x) = 20x^3 - 60x + 20 = 20(x^3 - 3x + 1)$ και

$f''(x) = 20(3x^2 - 3) = 60(x^2 - 1)$.

Για κάθε $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$.

Για κάθε $x \in (-1,1)$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow [-1,1]$. Είναι

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (20x^3 - 60x + 20) = \lim\limits_{x\to-\infty} 20x^3 = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 20x^3 = +\infty$, $f'(-1) = 60$ και $f'(1) = -20$. Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty,-1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1) = (-\infty,60]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό x_1 στο εσωτερικό του Δ_1 τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$. Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [-1,1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2) = [-20,60]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο, ώστε $f'(x_2) = 0$. Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3 = [1,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_3) = [-20,+\infty)$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_3)$ υπάρχει μοναδικό x_3 στο εσωτερικό του Δ_3 τέτοιο, ώστε $f'(x_3) = 0$.

Για κάθε $x < x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}$
$f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow$
$f \searrow (-\infty, x_1]$

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	1	x_3	$+\infty$
f'	$-\infty$ -	+	60	-	-20	+	$+\infty$
f	↘	T.E. ↗		T.M. ↘		T.E ↗	

Για κάθε $x_1 < x < -1 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}$
$f'(x) > f'(x_1) = 0 \Rightarrow f \nearrow [x_1,-1]$ Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(x_1)$. Για κάθε

$-1 < x < x_2 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_2) = 0 \Rightarrow f \nearrow [-1,x_2]$.

Για κάθε $x_2 < x < 1 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_2) = 0 \Rightarrow f \searrow [x_2,1]$. Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(x_2)$. Για κάθε $1 < x < x_3 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_3) = 0 \Rightarrow f \searrow [1,x_3]$ και για κάθε

$x > x_3 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_3) = 0 \Rightarrow f\nearrow[x_3, +\infty)$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(x_3)$.

β) $x^4 + 4x + 1 = 6x^2 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 30x^2 + 20x + 5 = 0 \Leftrightarrow$ $f(x) = 0$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 5x^4 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 5x^4 = +\infty$. Είναι $x_1 < -1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(-1) = -40 < 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, x_1)$,έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1) = (f(x_1), +\infty)$. Επειδή $0 \in f(A_1)$ υπάρχει μοναδικό $\rho_1 \in A_1$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1) = 0$. Είναι $x_2 < 1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x_2) > f(1) = 0$. Η f είναι συνεχής στο -1, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [x_1, x_2]$ και έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2) = [f(x_1), f(x_2)]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(A_2)$, υπάρχει μοναδικό ρ_2 στο εσωτερικό του A_2 τέτοιο, ώστε $f(\rho_2) = 0$. Επειδή $f(1) = 0$, η εξίσωση έχει ρίζα το 1. Η f είναι συνεχής στο $x = 1$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_3 = [x_2, x_3]$ και η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της f στο διάστημα αυτό.

Είναι $x_3 > 1 \overset{f\searrow[1,x_3]}{\Leftrightarrow} f(x_3) < f(1) = 0$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_4 = [x_3, +\infty)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_4) = [f(x_3), +\infty)$. Επειδή $0 \in f(A_4)$ η f έχει μοναδική ρίζα ρ_3 στο A_4. Τελικά η f έχει τέσσερις ρίζες. Ακέραια ρίζα της f είναι το 1. Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 5, δηλαδή οι $\pm1, \pm5$. Είναι $f(-1) = -40 \neq 0$ άρα το -1 δεν είναι ρίζα. Μοναδική ακέραια ρίζα της f είναι το 1.

35.Είναι $f'(x) + (x-1)^3 f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -(x-1)^3 f^2(x)$. Αν $x < 1$ τότε $f'(x) > 0 \Rightarrow f\nearrow(-\infty, 1]$ και αν $x > 1$ τότε $f'(x) < 0 \Rightarrow f\searrow[1, +\infty)$.
Η f έχε μέγιστο το $f(1)$.

36. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με
$f'(x) = 2x + \sigma\upsilon\nu x + 1$ και $f''(x) = 2 - \eta\mu x > 0 \Rightarrow f'\nearrow\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to=\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(2 + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x} + \dfrac{1}{x}\right)\right] = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(2+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}+\dfrac{1}{x}\right)\right] = +\infty$.

(Για $x \neq 0$ είναι $\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right| = \dfrac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|} \le \dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|x|} \le \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \le \dfrac{1}{|x|}$. Όμως

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{|x|} = 0 = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$. Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το $f'(A) = \mathbb{R}$. Επειδή $0 \in f'(A)$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$.Για κάθε $x < x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow f\searrow(-\infty, x_1]$ και για κάθε $x > x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_1) = 0 \Rightarrow f\nearrow[x_1, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο x_1 .
Παρατηρούμε ότι $f'(0) = 2 > 0 = f'(x_1) \Leftrightarrow x_1 < 0$. Είναι
$x_1 < 0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(0) = -1$, άρα $f(x_1) < 0$.

37.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με
$f'(x) = e^x + 2x - 2$ και $f''(x) = e^x + 2 > 0 \Rightarrow f'\nearrow\mathbb{R}$.
Είναι $\lim\limits_{x\to=\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x + 2x - 2) = 0 - \infty - 2 = -\infty$ και
$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x + 2x - 2) = +\infty + \infty - 2 = +\infty$.Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το $f'(A) = \mathbb{R}$. Επειδή $0 \in f'(A)$ υπάρχει μοναδικό $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho) = 0$.
β) Για κάθε $x < \rho \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\rho) = 0 \Rightarrow f\searrow(-\infty, \rho]$ και για κάθε $x > \rho \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\rho) = 0 \Rightarrow f\nearrow[\rho, +\infty)$. Επομένως η f έχει ελάχιστο στο ρ.
Παρατηρούμε ότι $f'(0) = -1 < 0 = f'(\rho) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} \rho > 0$ άρα $0 \in (-\infty, \rho]$. Είναι
$\rho > 0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(\rho) < f(0) = 0$, άρα $f(\rho) < 0$.
γ) Είναι $f'(\rho) = 0 \Leftrightarrow e^\rho + 2\rho - 2 = 0 \Leftrightarrow e^\rho = 2 - 2\rho$ (1)
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \ge f(\rho) = e^\rho + \rho^2 - 2\rho - 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$
$f(x) \ge 2 - 2\rho + \rho^2 - 2\rho - 1 \Leftrightarrow f(x) \ge \rho^2 - 4\rho + 1$

38.Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=6x^2-12x+18,\ f''(x)=12x-12\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.
Για κάθε $x<1$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow(-\infty,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow[1,+\infty)$.Ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος για $x=1$.

39.Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3e^{3x-2}-9e^{x+8}$ και $f''(x)=9e^{3x-2}-9e^{x+8}\geq 0\Leftrightarrow e^{3x-2}\geq e^{x+8}\Leftrightarrow 3x-2\geq x+8\Leftrightarrow x\geq 5$.Για κάθε $x<5$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow(-\infty,5]$ και για κάθε $x>5$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow[5,+\infty)$. Η f' έχει ελάχιστο για $x=5$. επομένως το ζητούμενο σημείο της C_f είναι το $(5,-8e^{13})$.

40.α) Η f είναι συνεχής στα $[\alpha,\beta],[\beta,\gamma]$ και *παραγωγίσιμη στα* $(\alpha,\beta),\ (\beta,\gamma)$ *με* $f'(x)=(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)$. Είναι
$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$ *οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα*
υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ και $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και $f'(\xi_2)=0$.
Όμως η $f'(x)=3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ είναι δευτέρου βαθμού, οπότε
τα ξ_1,ξ_2 είναι οι μοναδικές της ρίζες και για το πρόσημο της ισχύει:

- Για κάθε $x<\xi_1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,\xi_1]$.
- Για κάθε $x\in(\xi_1,\xi_2)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[\xi_1,\xi_2]$ και
- για κάθε $x>\xi_2$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[\xi_2,+\infty)$.

Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο ξ_1 και τοπικό ελάχιστο στο ξ_2.
β) Αν η f έχει ακρότατο στο $x=\xi$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της και η f είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα :

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow(\xi-\beta)(\xi-\gamma)+(\xi-\alpha)(\xi-\gamma)+(\xi-\alpha)(\xi-\beta)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{(\xi-\beta)}\cancel{(\xi-\gamma)}}{(\xi-\alpha)\cancel{(\xi-\beta)}\cancel{(\xi-\gamma)}}+\frac{\cancel{(\xi-\alpha)}\cancel{(\xi-\gamma)}}{\cancel{(\xi-\alpha)}(\xi-\beta)\cancel{(\xi-\gamma)}}+\frac{\cancel{(\xi-\alpha)}\cancel{(\xi-\beta)}}{\cancel{(\xi-\alpha)}\cancel{(\xi-\beta)}(\xi-\gamma)}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\xi-\alpha}+\frac{1}{\xi-\beta}+\frac{1}{\xi-\gamma}=0.$$

41.Είναι $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$, η f είναι συνεχής στα $[\alpha,\beta],[\beta,\gamma]$ και παραγωγίσιμη στα $(\alpha,\beta),\ (\beta,\gamma)$, οπότε από το θ.Rolle
υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ και $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και $f'(\xi_2)=0$.

Είναι $f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)^2+2(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)^2+$
$2(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)\Leftrightarrow$
$f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\left[3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right]$.
Έχουμε $f'(x)=0\Leftrightarrow(x=\alpha)$ ή $(x=\beta)$ ή $(x=\gamma)$ ή
$\tau(x)=3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$. Η f' έχει ρίζες τα ξ_1,ξ_2 οι οποίες προφανώς είναι ρίζες του τριωνύμου
$\tau(x)=3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$.
Για το πρόσημο της f' και τη μονοτονία της f ισχύει ο παρακάτω πίνακας:

x	$-\infty$	α	ξ_1	β	ξ_2	γ	$+\infty$
$x-\alpha$	−	0	+	+	+	+	+
$x-\beta$	−	−	−	0	+	+	+
$x-\gamma$	−	−	−	−	−	0	+
$\tau(x)$	+	+	0	−	0	+	+
f'	−	+	−	+	−	+	
f		↘	↗	↘	↗	↘	↗

Η f έχει τοπικά ελάχιστα στα α, β, γ και τοπικά μέγιστα στα ξ_1,ξ_2.

Εύρεση παραμέτρων

42. Οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με παραγώγους αντίστοιχα $f'(x)=e^{x^2-(\alpha+\beta)x}(2x-\alpha-\beta)$, $g'(x)=3x^2-2\alpha x+\beta$ άρα είναι παραγωγίσιμες και στα x_1,x_2 αντίστοιχα. Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_1=6$ και η g παρουσιάζει ακρότατο στο $x_2=-2$, τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού τους ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα :
$\begin{cases}e^{36-6(\alpha+\beta)}(12-\alpha-\beta)=0\\12+4\alpha+\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12-\alpha-\beta=0\\4\alpha+\beta=-12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-8\\\beta=20\end{cases}$. Τότε $f(x)=e^{x^2-12x}$ και $g(x)=x^3+8x^2+20x+1$. Είναι $f'(x)=e^{x^2-12x}(2x-12)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 6$. Για κάθε $x<6$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,6]$ και για κάθε $x>6$ είναι

$f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[6,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο 6.Είναι

$g'(x)=3x^2+16x+20=3(x+2)\left(x+\frac{10}{3}\right)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -\frac{10}{3}$ ή $x\geq -2$.

Επομένως η g είναι $\nearrow\left(-\infty,-\frac{10}{3}\right]$, $\searrow\left[-\frac{10}{3},-2\right]$ και $\nearrow[-2,+\infty)$. Έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_2=-2$.

43.Η f παρουσιάζει ακρότατο στα $x_1=-1$, $x_2=1$ τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της ,είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2-2\alpha x+\beta$ άρα και στα x_1,x_2, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα :

$\begin{cases} f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2\alpha+\beta=0 \\ 3-2\alpha+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-3 \\ \alpha=0 \end{cases}$. Τότε

$f(x)=x^3-3x+2,\ f'(x)=3x^2-3\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 1$. Η f είναι $\nearrow(-\infty,-1]$, $\searrow[-1,1]$ και $\nearrow[1,+\infty)$. Έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1=-1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2=1$.

44.Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $A(1,-2)$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της , είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\neq 3$ με $f'(x)=\frac{(2\alpha x+\beta)(x-3)-\alpha x^2-\beta x-2}{(x-3)^2}$ άρα και στο 1, επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα ισχύει $f'(1)=0 \Leftrightarrow 5\alpha+3\beta=-2$ (1). Επειδή το Α ανήκει στη C_f , ισχύει ότι:

$f(1)=-2 \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta+2}{-2}=-2 \Leftrightarrow$

$\alpha+\beta=2$ (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1),(2) προκύπτει ότι $\alpha=-4$ και $\beta=6$. Τότε

$f(x)=\frac{-4x^2+6x+2}{x-3}$, $f'(x)=-\frac{4(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}\geq 0 \Leftrightarrow x\in[1,3)\cup(3,5]$.

Η f είναι $\searrow(-\infty,1]$, $\nearrow[1,3)$, $\nearrow(3,5]$, $\searrow[5,+\infty)$ και έχει τοπ. ελάχιστο στο Α.

45. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=3x^2+2\lambda x+3$.Είναι $\Delta=4\lambda^2-36=4(\lambda-3)(\lambda+3)$.

Αν $\lambda\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$, τότε $\Delta>0$, η f' έχει δύο ρίζες και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν τους, οπότε η f στη περίπτωση αυτή έχει ακρότατα.

Αν $\lambda=-3$, τότε $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2>0$ για κάθε $x\neq 1$, άρα $f\nearrow\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει ακρότατα.

Αν $\lambda=3$, τότε $f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2>0$ για κάθε $x\neq -1$, άρα $f\nearrow\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει ακρότατα Αν $\lambda\in(-3,3)$, τότε $\Delta<0$ άρα $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει ακρότατα. Άρα $\lambda\in[-3,3]$.

46. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=8x-4\lambda$. Είναι

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{\lambda}{2}$.

Επομένως για κάθε $x<\frac{\lambda}{2}$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow\left(-\infty,\frac{\lambda}{2}\right]$, για κάθε $x>\frac{\lambda}{2}$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\left[\frac{\lambda}{2},+\infty\right)$ και έχει ελάχιστο το

$f\left(\frac{\lambda}{2}\right)=2\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda^2+\lambda^2+3\lambda+5=2\Leftrightarrow\lambda=-1$.

47. Έστω ότι η f έχει ακρότατο $x_0\in\mathbb{R}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x)=(2x+\alpha)e^x+(x^2+\alpha x+\beta)e^x=\left[x^2+(\alpha+2)x+\alpha+\beta\right]e^x$ είναι παραγωγίσιμη και στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της x_0, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat, άρα $f'(x_0)=0\Leftrightarrow$

$\left[x_0^2+(\alpha+2)x_0+\alpha+\beta\right]e^{x_0}=0\Leftrightarrow x_0^2+(\alpha+2)x_0+\alpha+\beta=0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με $\Delta=\alpha^2+4-4\beta<0$, οπότε είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ επομένως η f δεν έχει ακρότατα.

Αυξημένης δυσκολίας

48. Με παραγώγιση της σχέσης που μας δίνεται κατά μέλη έχουμε $\left(f^3(x)+x^2\right)'=\left(xf(x)\right)'\Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)+2x=f(x)+xf'(x)$ (1). Επειδή η f έχει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της x_0 και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα $f'(x_0)=0$. Για $x=x_0$ η (1) γίνεται

$3f^2(x_0)\cancel{f'(x_0)}^{0}+2x_0=f(x_0)+x\cancel{f'(x_0)}^{0}\Leftrightarrow f(x_0)=2x_0$.

Η αρχική σχέση για $x=x_0$ γίνεται: $f^3(x_0)+x_0^2=x_0f(x_0)\Leftrightarrow$

$(2x_0)^3+x_0^2=x_0\cdot 2x_0\Leftrightarrow 8x_0^3-x_0^2=0\Leftrightarrow x_0^2(8x_0-1)=0\Leftrightarrow$

$\left(x_0 = 0 \text{ απορρίπτεται }\right)$ ή $\left(x_0 = \frac{1}{8}\right)$.

49. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0+\infty)$ με $f'(x) = \lambda x^{\lambda-1} e^{-\lambda^2 x}(1-\lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow$ $x \leq \frac{1}{\lambda}$. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left(0, \frac{1}{\lambda}\right]$ και για κάθε $x > \frac{1}{\lambda}$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left[\frac{1}{\lambda}, +\infty\right)$. Η f έχει μέγιστο το $f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda^{-\lambda} e^{-\lambda}$. Έστω $g(\lambda) = \lambda^{-\lambda} e^{-\lambda} = e^{-\lambda \ln \lambda} e^{-\lambda} = e^{-\lambda \ln \lambda - \lambda}$, $\lambda > 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(\lambda) = e^{-\lambda \ln \lambda - \lambda}(-\ln \lambda - 2)$. Είναι $g'(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq -2 \Leftrightarrow \lambda \leq e^{-2}$. Για κάθε $0 < x < e^{-2}$ είναι $g'(\lambda) > 0 \Rightarrow g \nearrow \left(0, e^{-2}\right]$ και για κάθε $x > e^{-2}$ είναι $g'(\lambda) < 0 \Rightarrow g \searrow \left[e^{-2}, +\infty\right)$. Η g έχει μέγιστο για $\lambda = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.

50. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0+\infty)$ με
$f'(x) = x^{\lambda-1} e^{2\lambda x}(\lambda - x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \lambda$
Για κάθε $0 < x < \lambda$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, \lambda]$ και για κάθε $x > \lambda$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [\lambda, +\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(\lambda) = \lambda^{\lambda} e^{\lambda}$. Έστω $g(\lambda) = \lambda^{\lambda} e^{\lambda} = e^{\lambda \ln \lambda} e^{\lambda} = e^{\lambda \ln \lambda + \lambda}$, $\lambda > 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0+\infty)$ με $g'(\lambda) = e^{\lambda \ln \lambda + \lambda}(\ln \lambda + 2) \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \geq -2 \Leftrightarrow \lambda \geq e^{-2}$. Για κάθε $\lambda \in \left(0, e^{-2}\right)$ είναι $g'(\lambda) < 0 \Rightarrow g \searrow \left(0, e^{-2}\right]$ και για κάθε $x > e^{-2}$ είναι $g'(\lambda) > 0 \Rightarrow g \nearrow \left[e^{-2}, +\infty\right)$.
Η g έχει ελάχιστο για $\lambda = e^{-2}$.

51. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2 - 4\lambda e^x + 2e^{2x}$ και $f''(x) = -4\lambda e^x + 4e^{2x} = 4e^x\left(e^x - \lambda\right)$.
Είναι $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4e^x\left(e^x - \lambda\right) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - \lambda \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \lambda \Leftrightarrow x \geq \ln \lambda$. Για κάθε $x < \ln \lambda$ είναι $f''(x) < 0$, άρα f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \ln \lambda]$. Για κάθε $x > \ln \lambda$ είναι $f''(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln \lambda, +\infty)$.
Η f' έχει ελάχιστο το
$f'(\ln \lambda) = 2 - 4\lambda e^{\ln \lambda} + 2e^{2\ln \lambda} = 2 - 4\lambda \cdot \lambda + 2e^{\ln \lambda^2} = 2 - 4\lambda^2 + 2\lambda^2 = 2 - 2\lambda^2$.

- Αν $2 - 2\lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 < 1 \overset{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} 0 < \lambda < 1$, τότε $f'(x) \geq f'(\ln \lambda) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Αν $2 - 2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, τότε:

$f'(x)=2-4e^x+2e^{2x}=2\left[\left(e^x\right)^2-2e^x+1\right]=2\left(e^x-1\right)^2>0$ για κάθε $x\neq 0$,η f είναι συνεχής οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Αν $2-2\lambda^2<0\Leftrightarrow \lambda>1$, τότε επειδή το ελάχιστο της f' είναι αρνητικός αριθμός και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2-2e^x\left(2\lambda-e^x\right)\right]=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2e^x\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\lambda-e^x\right)=-\infty$, η f' θα αλλάζει πρόσημο, οπότε η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τελικά πρέπει: $\lambda\in(0,1]$ οπότε η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του λ είναι το 1.

52. $e^x\geq\lambda x\Leftrightarrow\dfrac{e^x}{x}\geq\lambda$ (1) Έστω $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, $x>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$. Είναι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, για κάθε $0<x<1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=e$, άρα $f(x)\geq f(1)=e$
Από τη σχέση (1) έχουμε $f(x)\geq\lambda$ οπότε για $x=1$ είναι $f(1)\geq\lambda\Leftrightarrow e\geq\lambda$, άρα $\lambda_{max}=e$.

53.Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατα στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού τους ρ_1,ρ_2,ρ_3 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+1$ οπότε και στα ρ_1,ρ_2,ρ_3 άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα $f'(\rho_1)=f'(\rho_2)=f'(\rho_3)=0$.Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2],[\rho_2,\rho_3]$, παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(\rho_1,\rho_2),(\rho_2,\rho_3)$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοια, ώστε: $f''(\xi_1)=0$ και $f''(\xi_2)=0$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με δεύτερη παράγωγο $f''(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$. Η f'' είναι δευτέρου βαθμού, οπότε έχει ακριβώς δύο ρίζες και αυτό συμβαίνει όταν $\Delta>0\Leftrightarrow 4\beta^2-12\alpha\gamma>0\Leftrightarrow\beta^2>3\alpha\gamma$.

Κρίσιμα σημεία

54.α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f ΄έχει τοπικό ελάχιστο το $f'(-3)=-5$.
β) Η f΄έχει ρίζες τις -2, 2 και δεν ορίζεται στο 0, οπότε αυτά είναι τα κρίσιμα σημεία της.

γ) Για κάθε $x \in [-3,-2) \cup (2,+\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (-2,0) \cup (0,2)$ είναι $f'(x) > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στα $[-3,-2], [-2,2]$ και $[2,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-3,-2], [2,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-2,2]$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο για x = -3, τοπικό ελάχιστο για x = -2 και τοπικό μέγιστο για x = 2.

55.α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ οπότε η f είναι συνεχής στο 0.

- Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cancel{x}e^x}{\cancel{x}} = 1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (x-1) = -1$ οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 άρα έχει κρίσιμο σημείο στο $x_0 = 0$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη για $x < 0$ με $f'(x) = (x+1)e^x$.

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ οπότε έχει κρίσιμο σημείο το -1.

- Η f είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ με $f'(x) = 2x-1$. Έχουμε

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ οπότε έχει κρίσιμο σημείο το $\dfrac{1}{2}$.

Άρα κρίσιμα σημεία της f τα 0,-1, $\dfrac{1}{2}$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -3 = f(1)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -3$ οπότε η f είναι συνεχής στο 1.

- Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x\ln x + x^2 - 1}{x-1} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln x + 1 + 2x}{1} = 3$,

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^4 + 3\ln x - 1}{x-1} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4x^3 + \dfrac{3}{x}}{1} = 7$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1. Η f έχει κρίσιμο σημείο στο $x_0 = 1$.

- Για $0 < x < 1$ η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x) = \ln x + 1 + 2x$ και

$f''(x) = \dfrac{1}{x} + 2 > 0 \Rightarrow f' \nearrow (0,1]$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, $f'(1) = 3$, οπότε $f'((0,1]) = (-\infty, 3]$. Επειδή $0 \in (-\infty, 3)$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1) : f'(x_1) = 0$, οπότε το $x = x_1$ είναι κρίσιμο σημείο της f.

- Για $x>1$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=4x^3+\frac{1}{x}>0$ οπότε η f δεν έχει κρίσιμο σημείο στο $(1,+\infty)$.Άρα έχει δύο κρίσιμα σημεία τα $x_1,1$.

56.Είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow(0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{g'(x)(1-\ln g(x))}{g^2(x)}$. Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow$

$\ln g(x)=1\Leftrightarrow g(x)=e=g(e)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}x=e$ οπότε μοναδικό της κρίσιμο σημείο είναι το $(e,f(e))$.

57.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3xe^x+1$ και $f''(x)=3(x+1)e^x$.Για κάθε $x<-1$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow(-\infty,-1]$ και για κάθε $x>-1$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow[-1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{e^{-x}}\right)=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=1$.

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ και $f'(-1)=1-\frac{3}{e}<0$.

Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,-1]$ οπότε $f'(A_1)=\left[1-\frac{3}{e},1\right)$.

Το $0\in\left(1-\frac{3}{e},1\right)$ οπότε υπάρχει μοναδικό $x_1\in(-\infty,-1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=0$. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_2=[-1,+\infty)$ οπότε $f'(A_2)=\left[1-\frac{3}{e},+\infty\right)$.Το $0\in\left(1-\frac{3}{e},+\infty\right)$ οπότε υπάρχει μοναδικό $x_2\in(-1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2)=0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' έχει δύο ρίζες, η f έχει δύο κρίσιμα σημεία.

β) Για κάθε $x<x_1\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_1)=0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,x_1]$. Για κάθε $x_1<x<-1\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_1)=0\Rightarrow f\searrow[x_1,-1]$. Η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_1. Για κάθε $-1<x<x_2\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_2)=0\Rightarrow f\searrow[-1,x_2]$ και για κάθε $x>x_2\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_2)=0\Rightarrow f\nearrow[x_2,+\infty)$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_2.

58.α) Με παραγώγιση της σχέσης που μας δίνεται έχουμε
$3f^2(x)f'(x)-12f(x)f'(x)+\lambda f'(x)=3x^2-12x \Leftrightarrow$
$f'(x)\left(3f^2(x)-12f(x)+\lambda\right)=3x(x-4)$. Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow$
$3x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=4$. Κρίσιμα σημεία της f τα $(0,f(0))$ και
$(4,f(4))$.

β) Είναι $3f^2(x)-12f(x)+\lambda>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(Αν θέσουμε $f(x)=\omega$ έχουμε το τριώνυμο $3\omega^2-12\omega+\lambda$ με διακρίνουσα
$\Delta=144-12\lambda=-12(\lambda-12)<0$ οπότε $3\omega^2-12\omega+\lambda>0$). Το πρόσημο της f'
εξαρτάται από το πρόσημο του $3x(x-4)$. Όταν $x<0$, είναι $3x(x-4)>0$
οπότε $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow(-\infty,0]$. Όταν $x\in(0,4)$ είναι $3x(x-4)<0$ οπότε
$f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow[0,4]$ και όταν $x>4$, τότε $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[4,+\infty)$.
Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(0)$ και τοπικό ελάχιστο το $f(4)$.

59.Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}-\ln x$.Είναι
$f'(1)=f'(2)=0$. Επειδή η f' είναι συνεχής *στο* $[1,2]$ *ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων*
και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $f''(x)=2\dfrac{1-\ln x}{x^2}-\dfrac{1}{x}$, ισχύουν οι υποθέσεις
του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi)=0 \Leftrightarrow$
$\dfrac{2-2\ln\xi}{\xi^2}-\dfrac{1}{\xi}=0 \Leftrightarrow 2-2\ln\xi-\xi=0$. Έστω ότι υπάρχει $\rho\in(1,2)$ με $\rho\neq\xi$ και
$2-2\ln\rho-\rho=0$, τότε για τη συνάρτηση $h(x)=2-2\ln x-x$, $x>0$
εφαρμόζεται το Θ.Rolle στο $[\rho,\xi]$ ή $[\xi,\rho]\subseteq(1,2)$ και υπάρχει $\xi_1\in(\rho,\xi)$
ή (ξ,ρ) τέτοιο, ώστε $h'(\xi_1)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{\xi_1}-1=0 \Leftrightarrow \xi_1=-2$ που είναι άτοπο.
Άρα το ξ είναι η μοναδική ρίζα της $f''(x)=0$ στο $(1,2)$ και η f' έχει ακριβώς
ένα κρίσιμο σημείο στο διάστημα $(1,2)$.

60.Είναι $\alpha<\beta<\gamma \Leftrightarrow 3\alpha<2\alpha+\beta<2\alpha+\gamma<3\gamma \Leftrightarrow$
$\alpha<\dfrac{2\alpha+\beta}{3}<\gamma \Leftrightarrow f(\alpha)<f(\gamma)<f(\beta)$.Επειδή το $f(\gamma)$ είναι ενδιάμεση τιμή της
f, δεν θα έχει ελάχιστο ή μέγιστο στο σημείο αυτό. Άρα θα υπάρχει εσωτερικό
σημείο x_0 του διαστήματος (α,γ), στο οποίο η f θα έχει ακρότατο. Η f είναι

παραγωγίσιμη στο x_0 οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα $f'(x_0)=0$, οπότε η f έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha,\gamma)$.

61. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^{h(x^2)+2}h'(x^2)2x$ και $f''(x)=e^{h(x^2)+2}\left(h'(x^2)\right)^2 4x^2+e^{h(x^2)+2}h''(x^2)4x^2+2e^{h(x^2)+2}h'(x^2) \Leftrightarrow$ $f''(x)=2e^{h(x^2)+2}\left[2x^2\left(h'(x^2)\right)^2+2x^2h''(x^2)+h'(x^2)\right]$. Έστω ότι η f έχει δύο κρίσιμα σημεία x_1, x_2 με $x_1<x_2$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, τα x_1, x_2 είναι ρίζες της f', δηλαδή $f'(x_1)=f'(x_2)=0$, τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος οπότε η εξίσωση

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\left[2x^2\left(\left(h'(x^2)\right)^2+h''(x^2)\right)+h'(x^2)\right]=0 \Leftrightarrow$

$2x^2\left(\left(h'(x^2)\right)^2+h''(x^2)\right)+h'(x^2)=0 \Leftrightarrow 2x^2\left(\left(h'(x^2)\right)^2+h''(x^2)\right)=-h'(x^2)$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η f έχει το πολύ ένα κρίσιμο σημείο.

62. Επειδή $f(0)+f(2)=f(1)$, είναι $f(0)<f(1)$ και $f(2)<f(1)$. Άρα η f δεν παρουσιάζει μέγιστο στα άκρα 0 και 2 του διαστήματος $[0,2]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό, οπότε θα παρουσιάζει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο x_1 του $(0,2)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_1 οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα $f'(x_1)=0$. Επομένως παρουσιάζει κρίσιμο σημείο στο x_1.

Ακρότατα και ανισώσεις

63.α) Έστω $f(x)=\varepsilon\varphi x-x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Είναι $f'(x)=\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f\nearrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Για κάθε $0\le x<\frac{\pi}{2} \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(0)\le f(x)$ οπότε $0\le \varepsilon\varphi x-x$.

β) Έστω $f(x)=2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο

$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3=\frac{2\sigma\upsilon\nu x+1-3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\Leftrightarrow$

$f'(x)=\frac{-3(\sigma\upsilon\nu x-1)\left(\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,γιατί $\sigma\upsilon\nu x-1<0$,

$\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{3}>0$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Άρα η f είναι γνησίως

αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$ το $f(0)=0$.

Επομένως $f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow 2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x\geq 3x$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Έστω $f(x)=e^x-ex,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=e^x-e\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $x<1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>1$ είναι

$f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο 1, άρα $f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow e^x\geq xe$.

δ) Έστω $f(x)=x^2-2\ln x-1,\ x>0$. Είναι

$f'(x)=2\frac{x^2-1}{x}\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 1\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\geq 1$.Για κάθε $0<x<1$ είναι

$f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$. Η f έχει

ελάχιστο το $f(1)=0$, άρα $f(x)\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 2\ln x+1$.

ε) Έστω $f(x)=2e^x-\ln(2x+1)-2,\ x>-\frac{1}{2}$. Είναι $f'(x)=2e^x-\frac{2}{2x+1}$ και

$f''(x)=2e^x+\frac{4}{(2x+1)^2}>0\Rightarrow f'\nearrow\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$. Παρατηρούμε ότι $f'(0)=0$,

οπότε για κάθε $-\frac{1}{2}<x<0\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(0)=0\Rightarrow f\searrow\left(-\frac{1}{2},0\right]$ και για κάθε

$x>0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0)=0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=0$, άρα

$f(x)\geq 0\Leftrightarrow 2e^x\geq\ln(2x+1)+2$.

στ) $x^x(2-x)^{2-x}\geq 1\Leftrightarrow\ln\left[x^x(2-x)^{2-x}\right]\geq\ln 1\Leftrightarrow\ln x^x+\ln(2-x)^{2-x}\geq 0\Leftrightarrow$

$x\ln x+(2-x)\ln(2-x)\geq 0$. Έστω $f(x)=x\ln x+(2-x)\ln(2-x),\ x\in(0,2)$.

Είναι $f'(x)=\ln x+1-\ln(2-x)-1=\ln\frac{x}{2-x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{x}{2-x}\geq 1\Leftrightarrow$

$x\geq 2-x\Leftrightarrow 2x\geq 2\Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(0,1]$ και για κάθε $x\in(1,2)$ είναι

$f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[1,2)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=0$, άρα $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow$
$x\ln x+(2-x)\ln(2-x)\geq 0$.

ζ) Έστω $f(x)=2\eta\mu x+x^2+2e^{-x}-2,\ x\geq 0$. Είναι $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+2x-2e^{-x}$
και $f''(x)=-2\eta\mu x+2+2e^{-x}=2(1-\eta\mu x)+2e^{-x}>0 \Rightarrow f'\nearrow[0,+\infty)$. Για κάθε
$x>0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0)=0 \Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=0$, άρα
$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x+x^2+2e^{-x}\geq 2$.

η) Έστω $f(x)=x^3+3x^2+6x+6-6e^x,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι
$f'(x)=3x^2+6x+6-6e^x$, $f''(x)=6x+6-6e^x$ και
$f^{(3)}(x)=6-6e^x\geq 0\Leftrightarrow e^x\leq 1\Leftrightarrow x\leq 0$. Για κάθε $x<0$ είναι
$f^{(3)}(x)>0\Rightarrow f''\nearrow(-\infty,0]$, άρα $f''(x)<f''(0)=0\Rightarrow f'\searrow(-\infty,0]$.
Άρα $f'(x)>f'(0)=0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,0]$. Για κάθε $x>0$ είναι
$f^{(3)}(x)<0\Rightarrow f''\searrow[0,+\infty)$, άρα $f''(x)<f''(0)=0\Rightarrow f'\searrow[0,+\infty)$.
Άρα $f'(x)<f'(0)=0\Rightarrow f\searrow[0,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(0)=0$, άρα
$f(x)\leq f(0)\Leftrightarrow x^3+3x^2+6x+6\leq 6e^x$.

64.α) $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq 1\Leftrightarrow x\leq e$. Για κάθε $0<x<e$ είναι

$f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(0,e]$ και για κάθε $x>e$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[e,+\infty)$.

Η f έχει μέγιστο το $f(e)=\dfrac{1}{e}$.

β) $e^\pi>\pi^e\Leftrightarrow \ln e^\pi>\ln\pi^e\Leftrightarrow \pi>e\ln\pi\Leftrightarrow \dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow f(\pi)<f(e)$ που ισχύει.

γ) $e<\lambda<\lambda+1\overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(\lambda)>f(\lambda+1)\Leftrightarrow \dfrac{\ln\lambda}{\lambda}>\dfrac{\ln(\lambda+1)}{\lambda+1}\Leftrightarrow$
$(\lambda+1)\ln\lambda>\lambda\ln(\lambda+1)\Leftrightarrow \ln\lambda^{\lambda+1}>\ln(\lambda+1)^\lambda\Leftrightarrow \lambda^{\lambda+1}>(\lambda+1)^\lambda$.

65.α) $f(x)=x^{\ln x}=e^{\ln x^{\ln x}}=e^{\ln^2 x}$, $x>0$. Είναι
$f'(x)=e^{\ln^2 x}2\dfrac{\ln x}{x}\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.
Για κάθε $0<x<1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι
$f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=1$.

β) Είναι $f(x)\geq f(1)=1$ για κάθε $x>0$, άρα $f(\alpha)\geq 1\Leftrightarrow \alpha^{\ln\alpha}\geq 1$ και

$f(\beta)\geq 1\Leftrightarrow \beta^{\ln\beta}\geq 1$, άρα $\alpha^{\ln\alpha}+\beta^{\ln\beta}\geq 2$.

66.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x+1-1=\ln x$.
$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$. Για $0<x<1$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$. Για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.Η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(1)=0$.
β) Επειδή η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(1)=0$, ισχύει:
$f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow x\ln x-x+1\geq 0\Leftrightarrow x\ln x\geq x-1$.

67.Έστω $f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$, $x\in[0,1]$. Είναι
$f'(x)=-e^{-x}(x^2-3x+2)<0\Rightarrow$ $f\searrow[0,1]$. Η f έχει μέγιστο το $f(0)=1$ και ελάχιστο το $f(1)=\frac{1}{e}$, άρα $\frac{1}{e}\leq (x^2-x+1)e^{-x}\leq 1$ για κάθε $x\in[0,1]$.

68. $2\ln x\geq \alpha\frac{x-1}{x}\Leftrightarrow 2x\ln x-\alpha(x-1)\geq 0$ (1).
Έστω $f(x)=2x\ln x-\alpha(x-1)$, $x>0$. Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$,οπότε η (1) γίνεται: $f(x)\geq f(1)$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0=1$ του πεδίου ορισμού της. .Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2\ln x+2-\alpha$, από το θ.Fermat ισχύει ότι $f'(1)=0\Leftrightarrow \alpha=2$.

69. $xg(x)-e^x\leq \eta\mu 2x-1\Leftrightarrow xg(x)-e^x-\eta\mu 2x+1\leq 0$ (1).
Έστω $f(x)=xg(x)-e^x-\eta\mu 2x+1$, $x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$, οπότε η (1) γίνεται: $f(x)\leq f(0)$. Άρα η f έχει μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0=0$ του πεδίου ορισμού της . Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=g(x)+xg'(x)-e^x-2\sigma\upsilon\nu 2x$, από το θ.Fermat ισχύει ότι:
$f'(0)=0\Leftrightarrow g(0)=3$.

70. $e^{x-1}f(x)+x\leq x^2-2\Leftrightarrow e^{x-1}f(x)+x-x^2+2\leq 0$ (1).
Έστω $g(x)=e^{x-1}f(x)+x-x^2+2$, $x\in\mathbb{R}$.Παρατηρούμε ότι $g(1)=0$, οπότε η (1) γίνεται: $g(x)\leq g(1)$. Άρα η g παρουσιάζει μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0=1$ του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=e^{x-1}f(x)+e^{x-1}f'(x)+1-2x$, από το θ.Fermat ισχύει:

$g'(1)=0 \Leftrightarrow f(1)+f'(1)+1-2=0 \Leftrightarrow f'(1)=3$. Η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει εξίσωση: $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y+2=3x-3 \Leftrightarrow y=3x-5$.

Αυξημένης δυσκολίας

71.α) $f'(x)=2xe^{\frac{1}{x}}-\cancel{x^2}e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{\cancel{x^2}}=e^{\frac{1}{x}}(2x-1)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2}$ Για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow(-\infty,0)$ και $\searrow\left(0,\frac{1}{2}\right]$. Για κάθε $x>\frac{1}{2}$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2}{4}$.

β) $4^x x^{2x}\geq e^{2x-1} \Leftrightarrow \ln\left(4^x x^{2x}\right)\geq \ln e^{2x-1} \Leftrightarrow \ln 4^x+\ln x^{2x}\geq 2x-1 \Leftrightarrow$

$x\ln 4+x\ln x^2\geq 2x-1 \Leftrightarrow \ln 4+\ln x^2\geq 2-\frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x^2+\ln e^{\frac{1}{x}}\geq \ln e^2-\ln 4 \Leftrightarrow$

$\ln\left(x^2e^{\frac{1}{x}}\right)\geq \ln\frac{e^2}{4} \Leftrightarrow f(x)\geq \frac{e^2}{4}$ που ισχύει.

72.α) Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$. Είναι $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2\ln x}{x^3}\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x\leq e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$. Για κάθε $x<\sqrt{e}$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow\left(0,\sqrt{e}\right]$ και για κάθε $x>\sqrt{e}$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow\left[\sqrt{e},+\infty\right)$.

Η f έχει ολικό μέγιστο το $f\left(\sqrt{e}\right)=\frac{\ln\sqrt{e}}{\left(\sqrt{e}\right)^2}=\frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{e}=\frac{1}{2e}$.

β) Επειδή η f έχει ολικό μέγιστο το $f\left(\sqrt{e}\right)=\frac{1}{2e}$, ισχύει $f(x)\leq\frac{1}{2e}$ για κάθε $x>0$. Άρα, $\frac{\ln x}{x^2}\leq\frac{1}{2e} \Leftrightarrow 2e\ln x\leq x^2 \Leftrightarrow \ln x^{2e}\leq \ln e^{x^2} \Leftrightarrow x^{2e}\leq e^{x^2}$.

γ) $\alpha^{x^2}\geq x^{2e} \Leftrightarrow x^2\ln\alpha\geq 2e\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2}\leq\frac{\ln\alpha}{2e} \Leftrightarrow f(x)\leq\frac{\ln\alpha}{2e}$.

Για $x=\sqrt{e}$ έχουμε : $f(e)\leq\frac{\ln\alpha}{2e} \Leftrightarrow \frac{1}{2e}\leq\frac{\ln\alpha}{2e} \Leftrightarrow \ln\alpha\geq 1 \Leftrightarrow \alpha\geq e$.

73.α) $f'(x)=\dfrac{e^x x^\nu - e^x \nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=\dfrac{e^x x^{\nu-1}(x-\nu)}{x^{2\nu}}=\dfrac{e^x(x-\nu)}{x^{\nu+1}}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \nu$. Για κάθε

$x\in(0,\nu)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(0,\nu]$ και για κάθε $x>\nu$ είναι

$f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[\nu,+\infty)$. Ελάχιστο το $f(\nu)=\dfrac{e^\nu}{\nu^\nu}$.

β) $e^x\geq\left(\dfrac{xe}{\nu}\right)^\nu \Leftrightarrow e^x\geq\dfrac{x^\nu e^\nu}{\nu^\nu}\Leftrightarrow\dfrac{e^x}{x^\nu}\geq\dfrac{e^\nu}{\nu^\nu}\Leftrightarrow f(x)\geq\dfrac{e^\nu}{\nu^\nu}$ που ισχύει.

γ) Έστω $g(x)=\theta^x-\left(\dfrac{\theta x}{\nu}\right)^\nu$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g(x)\geq g(\nu)$. Η g παρουσιάζει

ελάχιστο στο $x=\nu$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη με

$g'(x)=\theta^x\ln\theta-\nu\left(\dfrac{\theta x}{\nu}\right)^{\nu-1}\dfrac{\theta}{\nu}$, από το θ.Fermat είναι $g'(\nu)=0\Leftrightarrow\theta=e$.

74.α) Έστω $f(x)=\pi\cdot\eta\mu x-2x$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ με $f'(x)=\pi\cdot\sigma\upsilon\nu x-2$ και $f''(x)=-\pi\cdot\eta\mu x<0$ για

$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

οπότε $f'\searrow\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Άρα $f'\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)=\left[f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right),f'(0)\right]=[-2,\pi-2]$. Το

$0\in f'\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ οπότε υπάρχει $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Για $0\leq x\leq x_0\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)\geq f'(x_0)=0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$[0,x_0]$ άρα $f(x)\geq f(0)=0$. Για $x_0<x<\dfrac{\pi}{2}\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0$ οπότε η f

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[x_0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ άρα $f(x)\geq f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

Άρα $f(x)\geq 0\Leftrightarrow\pi\cdot\eta\mu x\geq 2x$ για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

β) Έστω $g(x)=\pi\cdot\sigma\upsilon\nu x-\pi+x^2$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο

$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ με $g'(x)=-\pi\cdot\eta\mu x+2x=-f(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Άρα η g

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Για κάθε $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, είναι:

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)\le g(x)\le g(0)$, δηλαδή $g(x)\le g(0)\Leftrightarrow \pi\cdot\sigma\upsilon\nu x\le\pi-x^2$.

75. $\left(\sigma\upsilon\nu^2x\right)^{\eta\mu^2x}\left(\eta\mu^2x\right)^{\sigma\upsilon\nu^2x}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\sigma\upsilon\nu^2x\right)^{1-\sigma\upsilon\nu^2x}\left(1-\sigma\upsilon\nu^2x\right)^{\sigma\upsilon\nu^2x}\ge\frac{1}{2}$.

Έστω $f(x)=x^{1-x}(1-x)^x$, $x\in(0,1)$. Είναι

$f'(x)=x^{1-x}(1-x)^x\left[\ln\frac{1-x}{x}+\frac{1-2x}{x(1-x)}\right]$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $\ln\frac{1-x}{x}>0$ και $\frac{1-2x}{x(1-x)}>0$, άρα $f'(x)>0$ και $f\nearrow$ στο $\left(0,\frac{1}{2}\right]$. Ομοια, για $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι $f'(x)<0$ και $f\searrow$ στο $\left[\frac{1}{2},1\right)$. Η f έχει ολικό μέγιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$, άρα $f(x)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)$ για κάθε $x\in(0,1)\Leftrightarrow x^{1-x}(1-x)^x\ge\frac{1}{2}$.

Επειδή $\sigma\upsilon\nu^2x\in(0,1)$, ισχύει: $\left(\sigma\upsilon\nu^2x\right)^{1-\sigma\upsilon\nu^2x}\left(1-\sigma\upsilon\nu^2x\right)^{\sigma\upsilon\nu^2x}\ge\frac{1}{2}$

76. ***<u>1ος τρόπος</u>*****:** Θα δείξουμε ότι $e^x\ge x+1$ που ισχύει και $e^x\le xe^x+1$.
Έστω η συνάρτηση $g(x)=e^x-xe^x-1$. Είναι $g'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x$ και $g'(x)\ge0\Leftrightarrow-xe^x\ge0\Leftrightarrow x\le0$. Για κάθε $x<0$ είναι $g'(x)>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$. Για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)<0$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Οπότε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\le g(0)\Leftrightarrow e^x\le xe^x+1$.

<u>2ος τρόπος</u>**:** Έστω $x>0$, θεωρούμε τη συνάρτηση $h(t)=e^t$ με $t\in[0,x]$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,x]$, με $h'(t)=e^t$. Άρα, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=\frac{h(x)-h(0)}{x}\Leftrightarrow$

$e^\xi=\frac{e^x-1}{x}$ (1). Είναι $0<\xi<x\Leftrightarrow e^0<e^\xi<e^x\overset{(1)}{\Leftrightarrow}1<\frac{e^x-1}{x}<e^x\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$x<e^x-1<xe^x\Leftrightarrow x+1<e^x<xe^x+1$. Ομοια, με χρήση του Θ.Μ.Τ. στο $[x,0]$ δείχνουμε ότι ισχύει η προηγούμενη για $x<0$. Για $x=0$ είναι

$0+1\le e^0\le 0\cdot e^0+1$ και ισχύει η ισότητα. Άρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x+1\le e^x\le xe^x+1$.

77. Για $x=1$ είναι $0\le f(1)\le 0$ ισχύει. Αν $x>1$ τότε λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)}{x-1}$. Είναι $1<\xi<x \overset{f''(x)>0\Leftrightarrow f'\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$f'(1)<f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow 1<\dfrac{f(x)}{x-1}<f'(x)\Leftrightarrow x-1<f(x)<(x-1)f'(x)$.

Αν $x<1$ τότε λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(x,1)$ τέτοιο, ώστε:

$f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}=\dfrac{f(x)}{x-1}$. Είναι $x<\xi<1 \overset{f''(x)>0\Leftrightarrow f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(\xi)<f'(1)\Leftrightarrow$

$f'(x)<\dfrac{f(x)}{x-1}<1\Leftrightarrow x-1<f(x)<(x-1)f'(x)$

78.α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$.

Είναι $xf(x)\ge 2\ln(x+1)-2x$ (1). Αν $x>0$ τότε

$f(x)\ge 2\dfrac{\ln(x+1)}{x}-2\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\ge\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\dfrac{\ln(x+1)}{x}-2\right)=0\Leftrightarrow$

$f(0)\ge 0$ (2) γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1}=1$. Αν $x\in(-1,0)$ τότε

$f(x)\le 2\dfrac{\ln(x+1)}{x}-2\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\le\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2\dfrac{\ln(x+1)}{x}-2\right)=0\Leftrightarrow f(0)\le 0$ (3). Από (2),(3) $\Rightarrow f(0)=0$

β) $xf(x)+2x\ge 2\ln(x+1)\Leftrightarrow xf(x)+2x-2\ln(x+1)\ge 0$ (1).

Έστω $g(x)=xf(x)+2x-2\ln(x+1)$, $x>-1$. Παρατηρούμε ότι $g(0)=0$, οπότε η (1) γίνεται: $g(x)\ge g(0)$. Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0=0$ του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με $g'(x)=f(x)+xf'(x)+2-\dfrac{2}{x+1}$, από το θ.Fermat, ισχύει ότι: $g'(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$

79. $f(x)\geq \alpha x+\beta \Leftrightarrow f(x)-\alpha x-\beta \geq 0$ (1).

Έστω $g(x)=f(x)-\alpha x-\beta,\ x\in \mathbb{R}$.Παρατηρούμε ότι $g(x)=f(x_0)-\alpha x_0-\beta=0$, οπότε η (1) γίνεται: $g(x)\geq g(x_0)$. Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 που είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)-\alpha$, από το θ.Fermat ισχύει ότι: $g'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)=\alpha=\lambda_\varepsilon$.

80.Παρατηρούμε ότι η f έχει ελάχιστο στο Α(1,0).Επειδή το x = 1 είναι στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της f και η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x-\lambda$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(1)=0\Leftrightarrow e-\lambda=0\Leftrightarrow \lambda=e$.

81.α) Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι $\alpha-(x+\alpha)e^{-x}\geq 0$ για κάθε $x\in \mathbb{R}$. Έστω $g(x)=\alpha-(x+\alpha)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$, τότε $g(x)\geq g(0)$. Άρα η g έχει ελάχιστο στο $x=0$ το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=(x+\alpha-1)e^{-x}$, λόγω του Θ.Fermat είναι $g'(0)=0\Leftrightarrow \alpha-1=0\Leftrightarrow \alpha=1$.

β) Είναι $f(x)=\sqrt{1-(x+1)e^{-x}}$ και για $x\neq 0$ είναι $f'(x)=\dfrac{xe^{-x}}{2\sqrt{1-(x+1)e^{-x}}}$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$, για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$.

82.α) Είναι $f(x)\geq 0=f(0)$ άρα η f έχει ελάχιστο στο 0. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη σύμφωνα με το Θ.Fermat είναι $f'(0)=0$.

β) Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|e^x+\alpha x-1|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|e^x+\alpha x-1|}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{e^x+\alpha x-1}{x}\right|=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{e^x-1}{x}+\alpha\right|=|1+\alpha| \text{ άρα } 1+\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=-1 \text{ γιατί } \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{1}=1$$

.

γ) Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x\geq x+1\Leftrightarrow e^x-x-1\geq 0$, είναι

$f(x)=e^x-x-1$.

δ) $e^x-2\geq x-x^{\ln x}\Leftrightarrow f(x)\geq 1-x^{\ln x}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=1-x^{\ln x}$, $x>0$.Είναι $g'(x)=\left(1-e^{\ln^2 x}\right)'=-e^{\ln^2 x}\dfrac{2\ln x}{x}$.

$g'(x)\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\searrow[1,+\infty)$. Η g έχει μέγιστο το $g(1)=0$, οπότε για κάθε $x>0$ είναι $g(x)\leq 0$. Όμως για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>0$, άρα $f(x)>g(x)$.

83.α) Είναι $f(x)\geq 0=f(1)$, οπότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\alpha}{x^2}$, από το θ.Fermat είναι: $f'(1)=0\Leftrightarrow 1+\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=-1$.

β) $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=0$.

γ) Για κάθε $x\in(0,1)\overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)>f(1)=0$ και για κάθε $x>1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)>f(1)=0$. Επειδή $f(1)=0$, η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ) $\ln\left(2\lambda^2+2\right)-\dfrac{1}{\lambda^2+3}>\ln\left(\lambda^2+3\right)-\dfrac{1}{2\lambda^2+2}\Leftrightarrow$

$\ln\left(2\lambda^2+2\right)+\dfrac{1}{2\lambda^2+2}-1>\ln\left(\lambda^2+3\right)+\dfrac{1}{\lambda^2+3}-1\Leftrightarrow f\left(2\lambda^2+2\right)>f\left(\lambda^2+3\right)$ (1)

Επειδή $2\lambda^2+2>1$, $\lambda^2+3>1$ και $f\nearrow[1,+\infty)$, η (1) γίνεται:

$2\lambda^2+2>\lambda^2+3\Leftrightarrow\lambda^2>1\Leftrightarrow\lambda<-1$ ή $\lambda>1$.

84.α) Έστω $\varphi(x)=e^x-x$, $\varphi'(x)=e^x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$. Για κάθε $x>0$ είναι $\varphi'(x)>0$ οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ άρα $\varphi(x)>\varphi(0)=1>0\Leftrightarrow f(x)>g(x)$. Γνωρίζουμε ότι $\ln x\leq x-1<x$ για κάθε $x>0$ οπότε $x>\ln x\Leftrightarrow g(x)>h(x)$.

β) Είναι $A\left(\alpha,e^{\alpha}\right)$ και $B(\alpha,\ln\alpha)$, $d(\alpha)=e^{\alpha}-\ln\alpha$

γ) $d'(\alpha)=e^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}$, $d''(\alpha)=e^{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}>0\Rightarrow d'\nearrow(0,+\infty)$.Είναι $d'(1)=e-1>0$ και $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}d'(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\left(e^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\right)=-\infty$,οπότε υπάρχει $\theta\in(0,1):d'(\theta)<0$. Η d είναι συνεχής στο $[0,\theta]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $\alpha_0\in(\theta,1)\subseteq(0,1):d'(\alpha_0)=0$ και αφού $d'\nearrow$, το α_0 είναι μοναδικό. Για $x<\alpha_0\overset{d'\nearrow}{\Leftrightarrow}d'(x)<d'(\alpha_0)=0\Rightarrow d\searrow(0,\alpha_0]$ και για $x>\alpha_0\overset{d'\nearrow}{\Leftrightarrow}d'(x)>d'(\alpha_0)=0\Rightarrow d\nearrow[\alpha_0,+\infty)$. Επομένως η d έχει ελάχιστο στο α_0.

85.α) $f'(x)=\frac{1}{x}-\alpha=\frac{1-\alpha x}{x}\geq 0\Leftrightarrow x\leq\frac{1}{\alpha}$. Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{\alpha}\right)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\left(0,\frac{1}{\alpha}\right]$ και για κάθε $x\in\left(\frac{1}{\alpha},+\infty\right)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow\left[\frac{1}{\alpha},+\infty\right)$ Η f έχει μέγιστο το $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=1-\ln\alpha$.

β) $A\left(\frac{1}{\alpha},1-\ln\alpha\right)$, $\begin{cases}x=\frac{1}{\alpha}\\ y=1-\ln\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{1}{x}\\ y=1-\ln\frac{1}{x}\Leftrightarrow y=1+\ln x\end{cases}$.Άρα κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=1+\ln x$.

γ) $\ln x\leq\alpha x-2\Leftrightarrow\ln x-\alpha x+2\leq 0\Leftrightarrow f(x)\leq 0$. Για $x=\frac{1}{\alpha}$ είναι $f(\alpha)\leq 0\Leftrightarrow 1-\ln\alpha\leq 0\Leftrightarrow\ln\alpha\geq 1=\ln e\Leftrightarrow\alpha\geq e$.Άρα $\alpha_{min}=e$.

Θεωρητικές ασκήσεις

86.Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\mathbb{R}$, τότε επειδή είναι παραγωγίσιμη, από το θ.Fermat ισχύει: $f'(x_0)=0$. Είναι:

$\left(f^2(x)+x^2\right)'=\left(1+2xf(x)\right)'\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)+2x=2f(x)+2xf'(x)$.Για $x=x_0$ είναι $2f(x_0)\cancel{f'(x_0)}^{0}+2x_0=2f(x_0)+2x\cancel{f'(x_0)}^{0}\Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.

Τότε $f^2(x_0)+x_0^2=1+2x_0f(x_0)\Leftrightarrow x_0^2+x_0^2=1+2x_0^2\Leftrightarrow 0=1$ άτοπο.

Άρα η f δεν έχει ακρότατα.

87.Αφού η f έχει σύνολο τιμών κλειστό διάστημα τότε έχει μέγιστο και ελάχιστο. Το πεδίο ορισμού της f είναι ανοιχτό διάστημα άρα τα παρουσιάζει σε εσωτερικά σημεία, οπότε από το Θ.Fermat προκύπτει το ζητούμενο.

88.α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 1$.Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της f και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, από το θεώρημα Fermat είναι $f'(0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = 0.$$

β) Στο σχήμα βλέπουμε ότι $f(1) = 2$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(f(x))-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(f(x))-f(1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(f(x))-f(f(0))}{x}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(f(x))$, $x \in \mathbb{R}$.Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = f'(f(x))f'(x)$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(f(x))-f(f(0))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(f(x))-f(f(0))}{x} = g'(0) = f'(f(0))f'(0) = f'(1)\cdot 0 = 0$$

γ) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x f(f(x))-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x f(f(x))-2e^x+2e^x-2}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x\left(f(f(x))-2\right)}{x} + 2\frac{e^x-1}{x}\right) = e^0\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \underset{\substack{k'(x)=e^x,\\ k'(0)=1}}{\overset{k(x)=e^x}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{k(x)-k(0)}{x} = k'(0) = 1$$

89.α) Είναι $f(x+2) = f(4-x)$ (1) .Με παραγώγιση κατά μέλη της (1) έχουμε $f'(x+2) = -f'(4-x)$.

Για $x = 1$ προκύπτει $f'(3) = 0$. Άρα το $x = 3$ είναι ρίζα της $f'(x) = 0$. Αν υπάρχει και άλλη λύση ρ με $(\rho < 3)$ ή $(\rho > 3)$, τότε από θεώρημα Rolle για την f' στο $[\rho,3]$ ή $[3,\rho]$ υπάρχει $\xi \in (\rho,3) : f''(\xi) = 0$ που είναι άτοπο. Άρα

$x=3$ μοναδική λύση της $f'(x)=0$.

β) Αφού f'' συνεχής και $f''(x)\neq 0$ τότε η f'' θα διατηρεί πρόσημο στο $[1,4]$.

Αν $f''(x)<0$ τότε $f'\searrow$. Για κάθε $1<x<3 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(3)=0\Rightarrow f\nearrow[1,3]$.

Τότε $1<2\Rightarrow f(1)<f(2)$ που είναι άτοπο. Άρα $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow[1,4]$.Για

κάθε $3<x<4 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(3)=0\Rightarrow f\nearrow[3,4]$ και για κάθε

$1<x<3 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(3)=0\Rightarrow f\searrow[1,3]$.

Η f έχει ελάχιστο το $f(3)$ και τοπικά μέγιστα τα $f(1), f(4)$.

90. Επειδή η f δεν είναι $1-1$ υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ τέτοια, ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$. Από το Θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$. Είναι $f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow[\alpha,\beta]$. Για κάθε $\alpha<x<\xi \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(\xi)=0\Rightarrow f\nearrow[\alpha,\xi]$

Για κάθε $\xi<x<\beta \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(\xi)=0\Rightarrow f\searrow[\xi,\beta]$. Η f έχει μέγιστο στο $x=\xi$.

91. Είναι $\left[f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right]'=f'\left(f\left(f(x)\right)\right)f'\left(f(x)\right)f'(x)$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι: $f'(0)<f'(2)<f'(3)\Leftrightarrow f'(0)<0<f'(3)$. Επειδή η $f\circ f\circ f$ έχει ακρότατο στο $x_0=3$, είναι $(f\circ f\circ f)'(3)=0\Leftrightarrow$

$f'\left(f\left(f(3)\right)\right)f'\left(f(3)\right)f'(3)=0\Leftrightarrow f'\left(f(0)\right)f'(0)f'(3)=0\Leftrightarrow\left(f'\left(f(0)\right)=0\right)$ ή $\left(f'(0)=0\right.$ που είναι αδύνατο) ή ($f'(3)=0$ που είναι επίσης άτοπο).

Επειδή $f'\nearrow$ είναι και $1-1$, οπότε: $f'\left(f(0)\right)=0=f'(2)\overset{f'1-1}{\Leftrightarrow} f(0)=2$.

92.Είναι $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$.

α) $f''(x_0)>0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0$ άρα $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0$ για κάθε x κοντά στο x_0

Για κάθε x κοντά στο x_0 με $x<x_0$ είναι $f'(x)<0$ άρα υπάρχει $\delta_1>0$ τέτοιο ώστε $f\searrow[\delta_1,x_0]$ και για κάθε x κοντά στο x_0 με $x>x_0$ είναι $f'(x)>0$ άρα

υπάρχει $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε $f\nearrow[x_0, \delta_2]$ οπότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

β) $f''(x_0) < 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_0} < 0$ άρα $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} < 0$ για κάθε x κοντά στο x_0

Για κάθε x κοντά στο x_0 με $x < x_0$ είναι $f'(x) > 0$ άρα υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε $f\nearrow[\delta_1, x_0]$ και για κάθε x κοντά στο x_0 με $x > x_0$ είναι $f'(x) < 0$ άρα υπάρχει $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε $f\searrow[x_0, \delta_2]$ άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

93.α) $f''(x) < 0 \Rightarrow f'\searrow\mathbb{R}$. Έστω ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε επειδή η f' είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα η f είναι γνησίως μονότονη. Έστω $f\nearrow\mathbb{R}$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right) = (-\infty, -\infty)$ που είναι αδύνατο. Όμοια αν η f είναι $\searrow$. Άρα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ και επειδή $f' \searrow$, είναι μοναδικό.

β) Για κάθε $x < x_0 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f\nearrow(-\infty, x_0]$ και για $x > x_0 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f\searrow[x_0, +\infty)$, άρα η f έχει μέγιστο στο x_0.

94.α) Για $x = 3$ είναι $2f(3) \geq f(3) + f(4) \Leftrightarrow f(3) \geq f(4)$ (1) και για $x = 4$ είναι $2f(4) \geq f(3) + f(4) \Leftrightarrow f(4) \geq f(3)$ (2). Από τις (1),(2), είναι $f(3) = f(4)$.

β) Είναι $2f(x) \geq f(3) + f(4) \Leftrightarrow 2f(x) \geq 2f(3) \Leftrightarrow f(x) \geq f(3)$ και $f(x) \geq f(4)$.

Δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στα $x_1 = 3$ και $x_2 = 4$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, από το θ.Fermat ισχύει ότι $f'(3) = 0$ και $f'(4) = 0$. Επειδή $f(3) = f(4)$, από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (3,4)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Επειδή $f'(3) = f'(\xi) = f'(4)$, από το θ.Rolle για την f', υπάρχει $\xi_1 \in (3, \xi)$ και $\xi_2 \in (\xi, 4)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1) = 0$ και $f''(\xi_2) = 0$. Επειδή $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$ από το θεώρημα Rolle για την f'', υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$.

95.α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[-2\alpha,2\alpha]$ και $f(-\alpha)=\frac{\alpha}{2}$, $f(\alpha)=\frac{\alpha}{3}$ η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα $-\alpha$, α του διαστήματος $[-\alpha,\alpha]$, όποτε θα υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-\alpha,\alpha)$ τέτοια, ώστε $f(\xi_1)=m$ και $f(\xi_2)=M$. Τότε από το θ.Fermat είναι $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.
β) Από το θ.Rolle για την f' υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(-\alpha,\alpha)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

96.Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ θα έχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο διάστημα αυτό. Επειδή το σύνολο τιμών είναι το $[1,5]$, $f(1)=2$, $f(2)=3$, η f δεν έχει ακρότατα στα άκρα 1, 2 του διαστήματος ,οπότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,2)$, τέτοια, ώστε $f(x_1)=m$ και $f(x_2)=M$. Τότε από το θ.Fermat είναι $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$. Έστω $x_1<x_2$. Από το θ.Rolle για την f' υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=0$.

97.α) Αν η f είχε ακρότατο στο $x_1\in(0,1)$, τότε από το θ.Fermat θα ήταν $f'(x_1)=0$ που είναι άτοπο. Άρα η f δεν έχει ακρότατα στο διάστημα $(0,1)$.
β) Από το Θ.ΜΤ για την f, υπάρχουν $\xi_1\in(0,1)$ και $\xi_2\in(1,2)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=f(1)-f(0)=3>0$ και $f'(\xi_2)=f(2)-f(1)=-3<0$.Επειδή το $x_0=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$ είναι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,2)$, οπότε η f' διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,2)$. Επειδή $f'(\xi_1)>0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,1]$ και επειδή $f'(\xi_2)<0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[1,2]$. Είναι $f([0,1])=[f(0),f(1)]=[1,4]$ και $f([1,2])=[f(2),f(1)]=[1,4]$, άρα $f(A)=[1,4]$.

98.Από τη σχέση $f(0)<f(2)<f(1)$ η f δεν παρουσιάζει μέγιστο στα 0,2. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,2]$, υπάρχει $x_0\in(0,2)$ στο οποίο η f να παρουσιάζει μέγιστο. Τότε από Θ.Fermat είναι $f'(x_0)=0$.

99.α) Επειδή τα $f(0), f(8)$ είναι ενδιάμεσες τιμές, η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στις θέσεις $x=0$ και $x=8$. Η f είναι συνεχής στο $[0,8]$, άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,8)$ στα οποία η f να παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο αντίστοιχα. Τότε από το θεώρημα Fermat είναι $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$. Επομένως η f έχει τουλάχιστον δύο κρίσιμα σημεία.

β) Από το ΘΜΤ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0,2],[2,6],[6,8]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (0,2)$: $f'(\xi_1)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}>0$, $\xi_2 \in (2,6)$: $f'(\xi_2)=\dfrac{f(6)-f(2)}{4}<0$ και $\xi_3 \in (6,8)$: $f'(\xi_3)=\dfrac{f(8)-f(6)}{2}>0$. Είναι $f'(\xi_1)f'(\xi_2)<0$, $f'(\xi_2)f'(\xi_3)<0$ και η f' είναι συνεχής στα $[\xi_1,\xi_2],[\xi_2,\xi_3]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχουν $x_1 \in (\xi_1,\xi_2)$ και $x_2 \in (\xi_2,\xi_3)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$. Επομένως η f έχει τουλάχιστον δύο κρίσιμα σημεία.

100. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,4]$ θα έχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο διάστημα αυτό. Επειδή $f(2)<f(1)<f(4)<f(3)$ η f δεν έχει ακρότατα στα άκρα 1 και 4 του διαστήματος, άρα θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,4)$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=m$ και $f(x_2)=M$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη από το θ.Fermat,ισχύει ότι: $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$.Έστω $x_1<x_2$. Από το θ.Rolle για την f' η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_1,x_2), οπότε η f' έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο.

101. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα έχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο διάστημα αυτό. Επειδή δεν έχει ακρότατα στα άκρα α, β του διαστήματος, θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$, τέτοια, ώστε $f(x_1)=m$ και $f(x_2)=M$. Τότε από το θ.Fermat είναι $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$. Έστω $x_1<x_2$. Από το θ.Rolle για την f' υπάρχει $x_0 \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=0$.

102. Θεώρημα Rolle: Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=0$.

Απόδειξη: Αφού f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε από το ΘΜΕΤ η f θα έχει μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m στο $[\alpha,\beta]$. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε κάποιο εσωτερικό σημείο x_1 του $[\alpha,\beta]$ τότε από το θεώρημα Fermat θα είναι $f'(x_1)=0$. Ομοίως αν υποθέσουμε ότι παίρνει την ελάχιστη τιμή σε εσωτερικό σημείο . Τέλος, υποθέτουμε ότι η μέγιστη και ελάχιστη τιμή παίρνονται και οι δύο στα άκρα, τότε $f(\alpha)=f(\beta)\Leftrightarrow M=m$ άρα ταυτίζονται το μέγιστο με το ελάχιστο άρα η f είναι σταθερή συνάρτηση. Άρα για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ είναι $f'(x)=0$.

103. Έστω ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 2 .Τότε $f(x)\geq f(2)$ για κάθε $x\in[1,2]$.Είναι $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}>0$. Όμως $x<2\Leftrightarrow x-2<0$ και $f(x)-f(2)\geq 0$, άρα

$\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\leq 0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\leq 0$ που είναι άτοπο.

104. Αν η f είχε μέγιστο στο 1, τότε $f(x)\leq f(1)\Leftrightarrow f(x)-f(1)\leq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$.Για $x\in(0,1)$ είναι $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\geq 0$, άρα

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\geq 0\Leftrightarrow f'(1)\geq 0$ που είναι άτοπο.

105. α) Επειδή ηf παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=\alpha$ ισχύει ότι $f(x)\geq f(\alpha)$ για κάθε $x\in(\alpha,\alpha+\delta)$ όπου $\delta>0$ και $\alpha+\delta<\beta$. Τότε

$f(x)-f(\alpha)\geq 0$, $x-\alpha>0$ οπότε $\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\geq 0$

$\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\geq 0\Leftrightarrow f'(\alpha)\geq 0$.

β) Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=\alpha$, ισχύει ότι $f(x)\leq f(\alpha)$ για κάθε $x\in(\alpha,\alpha+\delta)$ όπου $\delta>0$ και $\alpha+\delta<\beta$. Τότε $f(x)-f(\alpha)\leq 0$, $x-\alpha>0$ οπότε $\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\leq 0$ άρα $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\leq 0\Leftrightarrow f'(\alpha)\leq 0$

γ) Επειδή η παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=\beta$,ισχύει ότι $f(x)\geq f(\beta)$ για

κάθε $x \in (\beta-\delta,\beta)$, όπου δ>0 και $\alpha < \beta - \delta$. Τότε $f(x)-f(\beta) \geq 0$, $x-\beta < 0$ οπότε $\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \leq 0$ άρα $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \leq 0 \Leftrightarrow f'(\beta) \leq 0$,

δ) Επειδή η παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=\beta$,ισχύει ότι $f(x) \leq f(\beta)$ για κάθε $x \in (\beta-\delta,\beta)$, όπου δ>0 και $\alpha < \beta - \delta$. Τότε $f(x)-f(\beta) \leq 0$, $x-\beta < 0$ οπότε $\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \geq 0$ άρα $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \geq 0 \Leftrightarrow f'(\beta) \geq 0$.

106. Είναι $f(-1)=f(1)=0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό.

- Αν η f παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα $-1, 1$ του πεδίου ορισμού της, τότε επειδή $f(-1)=f(1)=0$, το μέγιστο και το ελάχιστο της f είναι το μηδέν, οπότε η f είναι η μηδενική συνάρτηση.
- Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατα σε εσωτερικά σημεία του $[-1,1]$. Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-1,1)$, τέτοια, ώστε $f(x_1)=m$ και $f(x_2)=M$. Τότε από το θ.Fermat είναι $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$. Όμως $f(x_1)=(x_1^2-1)\cancel{f'(x_1)}^{0}=0$ και $f(x_2)=(x_2^2-1)\cancel{f'(x_2)}^{0}=0$, άρα η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f είναι μηδέν οπότε η f είναι η μηδενική συνάρτηση.
- Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατα σε ένα από τα άκρα και σε ένα εσωτερικό σημείο x_3 του $[-1,1]$. Τότε από το θ.Fermat είναι $f'(x_3)=0$. Όμως $f(x_3)=(x_3^2-1)\cancel{f'(x_3)}^{0}=0$, άρα η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f είναι μηδέν οπότε η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

107. Είναι $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Αρκεί να δείξουμε ότι η f'' διατηρεί πρόσημο στο Δ. Έστω ότι η f'' δεν διατηρεί πρόσημο στο Δ, τότε υπάρχουν $\alpha,\beta \in \Delta$ τέτοια ώστε $f''(\alpha)<0$ και $f''(\beta)>0$. Η f' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη άρα από το ΘΜΕΤ θα παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο στο $[\alpha,\beta] \subseteq \Delta$.

Αν $\alpha < \beta$ τότε είναι $f''(\alpha)<0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)-f'(\alpha)}{x-\alpha} < 0$ άρα για κάθε x κοντά στο α με $x \in (\alpha,\beta) \subseteq \Delta$ είναι $\dfrac{f'(x)-f'(\alpha)}{x-\alpha} < 0 \overset{x>\alpha}{\Leftrightarrow}$

$f'(x)-f'(\alpha)<0 \Leftrightarrow f'(x)<f'(\alpha)$ άρα η f δεν παρουσιάζει μέγιστο στο α.

Αντίστοιχα είναι $f''(\beta)>0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\beta}\dfrac{f'(x)-f'(\beta)}{x-\beta}>0$ άρα για κάθε x κοντά στο β με $x\in(\alpha,\beta)\subseteq\Delta$ είναι $\dfrac{f'(x)-f'(\beta)}{x-\beta}>0 \overset{x<\beta}{\Leftrightarrow} f'(x)-f'(\beta)<0 \Leftrightarrow f'(x)<f'(\beta)$

άρα η f δεν παρουσιάζει μέγιστο στο β. Άρα η f' παρουσιάζει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ οπότε σύμφωνα με το Θ.Fermat είναι $f''(x_0)=0$, πράγμα άτοπο.

Ομοίως αν $\alpha>\beta$ δείχνουμε ότι δεν παρουσιάζει ελάχιστο στα α και β, άρα παρουσιάζει ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο οπότε από το Θ.Fermat καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα η f'' διατηρεί πρόσημο στο Δ, άρα είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

108. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Άρα υπάρχουν $x_\varepsilon, x_\mu\in[\alpha,\beta]: f(x_\varepsilon)\le f(x)\le f(x_\mu)$.

Αν x_ε είναι άκρο τότε αφού $f(\alpha)=f(\beta)=0$, είναι $f(x_\varepsilon)=0$. Αν x_ε εσωτερικό, από θ.Fermat είναι $f'(x_\varepsilon)=0$. Όμως $f^5(x_\varepsilon)=f'(x_\varepsilon)=0\Rightarrow f(x_\varepsilon)=0$. Όμοια και για $f(x_\mu)$, οπότε $0\le f(x)\le 0\Leftrightarrow f(x)=0$.

Σύνθετες ασκήσεις

109. α) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Για κάθε $x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα $(-\infty,2]$ και $[3,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα αυτά. Για κάθε $x\in(2,3)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[2,3]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(2)=\dfrac{11}{3}$ και τοπικό ελάχιστο το $f(3)=\dfrac{7}{2}$.

β) Είναι $f(0)=-1$ και $f'(0)=6$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ευθεία ε: $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=6x-1$.

Για να εφάπτεται η ε της C_g πρέπει αρχικά να υπάρχει $x_1>0$ τέτοιο, ώστε $g'(x_1)=\lambda_\varepsilon=6$. Είναι $g'(x)=\dfrac{6}{x}$, οπότε $g'(x_1)=6\Leftrightarrow\dfrac{6}{x_1}=6\Leftrightarrow x_1=1$. Η

εφαπτομένη της C_g στο $x_1 = 1$ έχει εξίσωση:

$y - g(1) = g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 5 = 6x - 6 \Leftrightarrow y = 6x - 1$, δηλαδή είναι η ε.

γ) Στο διάστημα $[2,3]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε είναι 1-1 στο διάστημα αυτό και η εξίσωση γίνεται: $f(x) = f(3) \Leftrightarrow x = 3$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{3} = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{3} = +\infty$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 2)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\right) = \left(-\infty, \dfrac{11}{3}\right)$.

Επειδή $f(3) = \dfrac{7}{2} < \dfrac{11}{3}$ αφού $\dfrac{21}{6} < \dfrac{22}{6}$, το $f(3)$ περιέχεται στο $f(\Delta_1)$, επομένως υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = f(3)$.

Για κάθε $x > 3$ είναι $f(x) > f(3)$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(3, +\infty)$.

Τελικά η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες.

δ) 1ος τρόπος

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\eta\mu(f(x)-f(3))}{x-x_0} \overset{\text{DLH}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{\sigma\upsilon\nu(f(x)-f(3))\cdot f'(x)}{1} =$$

$$\sigma\upsilon\nu f((x_0)-f(3))\cdot f'(x_0) = \sigma\upsilon\nu 0 \cdot f'(x_0) = f'(x_0)$$

2ος τρόπος

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\eta\mu(f(x)-f(3))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\eta\mu(f(x)-f(3))}{f(x)-f(3)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 1\cdot f'(x_0) = f'(x_0)$$

γιατί $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\eta\mu(f(x)-f(3))}{f(x)-f(3)} \underset{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(3))=0}{\overset{f(x)-f(3)=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\eta\mu u}{u} = 1$ και

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(3)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

110. α) Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το Α, ισχύει ότι:

$f(1) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha} = 2 \Leftrightarrow 1+\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 3$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \dfrac{(x^2+3)'}{2\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

Είναι $f'(1)=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$ και $f(1)=\sqrt{4}=2$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ έχει εξίσωση $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-2=\frac{1}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

γ) Επειδή $\sqrt{x^2+3}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $f(0)=\sqrt{3}$.

2ος τρόπος: $x^2+3\geq 3\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3}\geq\sqrt{3}\Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $f(0)=\sqrt{3}$.

δ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{2}$.

111. α) Επειδή το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της f, ισχύει ότι $f(-2)=0\Leftrightarrow -8\alpha+4\beta-4=0\Leftrightarrow 4\beta=8\alpha+4\Leftrightarrow\beta=2\alpha+1$ (1)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x$.

Επειδή η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα x΄x στο σημείο $A(-2,0)$, ισχύει ότι $f'(-2)=0\Leftrightarrow 12\alpha-4\beta=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}12\alpha-8\alpha-4=0\Leftrightarrow 4\alpha=4\Leftrightarrow\alpha=1$ οπότε $\beta=3$.

β) Είναι $f(x)=x^3+3x^2-4$ και $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$.

Είναι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 3x(x+2)\geq 0\Leftrightarrow x\leq -2$ ή $x\geq 0$

Για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα $(-\infty,-2]$ και $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα αυτά. Για κάθε $x\in(-2,0)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-2,0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=0$ και τοπικό ελάχιστο το $f(0)=-4$.

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο $M(x,f(x))$ είναι $\lambda=f'(x)$.Η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο Μ είναι το $f''(x)=6x+6$.Για κάθε $x<-1$ είναι $f''(x)<0$ και για κάθε $x>-1$ είναι $f''(x)>0$. Επειδή η f΄ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και

γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$. Η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο M γίνεται ελάχιστη για $x=-1$. Είναι $f(-1)=-1+3-4=-2$, οπότε $M(-1,-2)$.

δ) Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αρκεί να βρούμε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$. Μια εύκολη λύση είναι να βρούμε τις ρίζες της f.

Επειδή $f(-2)=0$, ρίζα της f είναι το -2, οπότε από το σχήμα Horner προκύπτει ότι $f(x)=(x+2)(x^2+x-2)$

1	3	0	-4	-2
	-2	-2	4	
1	1	-2	0	

$f(x)=0\Leftrightarrow x=-2$ ή

$(x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2)$

Επειδή $f(-2)=f(1)=0$, εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[-2,1]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(-2,1)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=0\Leftrightarrow 3\xi(\xi+2)=0\Leftrightarrow \xi=0$ δεκτό ή $\xi=-2$ απορρίπτεται

112. α) Είναι $A_{\varphi\circ h}=\{x\in A_h / h(x)\in A_\varphi\}=\{x\in\mathbb{R}/e^x>0\}=\mathbb{R}$,

$(\varphi\circ h)(x)=\varphi(h(x))=e^x\ln e^x+3=xe^x+3,\ x\in\mathbb{R}$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$.

$\alpha f'(x)=\beta(f(x)-3)+e^x\Leftrightarrow \alpha(x+1)e^x=\beta(xe^x+3-3)+e^x\Leftrightarrow$

$\alpha(x+1)e^x=\beta xe^x+e^x\Leftrightarrow(\alpha x+\alpha)e^x=(\beta x+1)e^x\Leftrightarrow \alpha x+\alpha=\beta x+1$

Η τελευταία ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν και μόνο αν $\begin{cases}\alpha=\beta\\ \alpha=1\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=\beta=1$

γ) Αρκεί η εξίσωση $f(x)=h(x)\Leftrightarrow xe^x+3-e^x=0\Leftrightarrow(x-1)e^x+3=0$ να είναι αδύνατη. Έστω $\Phi(x)=(x-1)e^x+3,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι

$\Phi'(x)=e^x+(x-1)e^x=e^x(1+x-1)=xe^x$.

Για κάθε $x<0$ είναι $\Phi'(x)<0$ και για κάθε $x>0$ είναι $\Phi'(x)>0$.

Επειδή η Φ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Η Φ έχει ελάχιστο το $\Phi(0)=2$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\Phi(x)\geq 2>0$, οπότε η εξίσωση $\Phi(x)=0\Leftrightarrow f(x)=h(x)$ είναι αδύνατη, επομένως οι γραφικές παραστάσεις των h, f δεν έχουν κοινά σημεία.

δ) $\varphi(x)\leq x^2-x+3\Leftrightarrow x\ln x+3\leq x^2-x+3\Leftrightarrow x\ln x\leq x(x-1)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x\leq x-1$ που ισχύει.

ε) $\ln\frac{1}{x}<\frac{3}{x}\Leftrightarrow -\ln x<\frac{3}{x}\Leftrightarrow -x\ln x<3\Leftrightarrow 0<x\ln x+3\Leftrightarrow \varphi(x)>0$.

Είναι $\varphi'(x)=\ln x+1$ και $\varphi'(x)\geq 0\Leftrightarrow \ln x+1\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq -1\Leftrightarrow x\geq e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ είναι $\varphi'(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ είναι $\varphi'(x)>0$

.

Επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$. Η φ έχει ελάχιστο το

$\varphi\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}+3=-\frac{1}{e}+3>0$, άρα $\varphi(x)>0$ για κάθε $x>0$.

113. α) $\left(f^3(x)+f(x)\right)'=\left(8x^3-12x^2+8x-3\right)'\Leftrightarrow$

$3f^2(x)f'(x)+f'(x)=24x^2-24x+8\Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)+1\right)=8\left(3x^2-3x+1\right)$.

Επειδή $3x^2-3x+1>0$ $(\Delta<0)$ και $3f^2(x)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι

$f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ 1−1

β) Για $x=0$ είναι $f^3(0)+f(0)=-3\Leftrightarrow f(0)\left(\underbrace{f^2(0)+1}_{>0}\right)=-3\Rightarrow f(0)<0$ και

για $x=1$ είναι $f^3(1)+f(1)=1\Leftrightarrow f(1)\left(\underbrace{f^2(1)+1}_{>0}\right)=1\Rightarrow f(1)>0$, δηλαδή

$f(0)f(1)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

Για $x=\frac{1}{2}$ είναι $f^3\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=-1\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)\left(f^2\left(\frac{1}{2}\right)+1\right)=-1\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

άρα $f\left(\frac{1}{2}\right)f(1)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$, $[0,1]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον

μία ρίζα στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$. Όμως η f έχει μόνο μια ρίζα, οπότε αυτή είναι πιο κοντά στο 1.

γ) $f\left(g(x)-3x\right)=f\left(x^2+2\right) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} g(x)-3x=x^2+2 \Leftrightarrow g(x)=x^2+3x+2$,

$x\in\mathbb{R}$. $g'(x)=2x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{3}{2}$. Για κάθε $x<-\frac{3}{2}$ είναι

$g'(x)<0 \Rightarrow g\searrow\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$ και για κάθε $x>-\frac{3}{2}$

είναι $g'(x)>0 \Rightarrow g\nearrow\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$. Η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=-\frac{3}{2}$.

114. α) Αν η f είχε ακρότατο στο $x_0\in(0,\alpha)$,στο οποίο είναι παραγωγίσιμη τότε από το θ.Fermat θα ήταν $f'(x_0)=0$ που είναι άτοπο, αφού το μηδέν είναι η μοναδική ρίζα της $f'(x)=0$.Άρα δεν έχει ακρότατα στο $(0,\alpha)$.

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Επειδή επιπλέον η f δεν έχει ακρότατα στο $(0,\alpha)$, θα έχει ακρότατα τα $f(0)=2\alpha$ και $f(\alpha)=\alpha$. Επειδή $\alpha<2\alpha$, είναι $f\left([0,\alpha]\right)=[\alpha,2\alpha]$. Όμοια η f δεν έχει ακρότατα στο $(-\alpha,0)$, οπότε τα ακρότατα του είναι το $f(-\alpha)=\alpha$ και $f(0)=2\alpha$.

γ) Από το Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχουν $\xi_1\in(-\alpha,0)$ και $\xi_2\in(0,\alpha)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1)=\frac{f(0)-f(-\alpha)}{0-(-\alpha)}=1$ και $f'(\xi_2)=\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=-1$, οπότε

$f'(\xi_1)f'(\xi_2)=-1$.

δ) Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[\alpha,2\alpha]$, ισχύει ότι $\alpha\leq f(x)\leq 2\alpha$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$. Άρα $\alpha\leq f\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\leq 2\alpha$, $\alpha\leq f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\leq 2\alpha$, οπότε

$2\alpha\leq f\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\leq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha\leq \frac{f\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+f\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}\leq 2\alpha$.Επειδή ο αριθμός

$\frac{f\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+f\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}$, ανήκει στο σύνολο τιμών της f, υπάρχει $x_1\in[-\alpha,\alpha]$ τέτοιο,

ώστε $f(x_1)=\dfrac{f\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+f\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} \Leftrightarrow 2f(x_1)=f\left(\frac{\alpha}{2}\right)+f\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$.

115. α) Από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,5)$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1)=-1$ ελάχιστο της f, $f(x_2)=6$ μέγιστη τιμή της f. Από
το θεώρημα Fermat είναι $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

β) Επειδή $f'(x_1)=f'(x_2)=0$ και η f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2), ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2) \subseteq (1,5)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

γ) Έστω $h(x)=f(x)f'(x)+f^4(x)-x$, $x \in [x_1,x_2] \subseteq (1,5)$

$h(x_1)=f(x_1)f'(x_1)+f^4(x_1)-x_1=1-x_1<0$,

$h(x_2)=f^4(x_2)-x_2=6^4-x_2>0$ και επειδή η h είναι συνεχής, από το Θ.Β υπάρχει $x_0 \in (x_1,x_2) \subseteq (1,5)$: $h(x_0)=0$

δ) Έστω $g(x)=f(x)-(-x+6)=f(x)+x-6$, $x \in [1,5]$. Είναι

$g(1)=f(1)+1-6=3+1-6=-2<0$, $g(5)=f(5)+5-6=4+5-6=3>0$ και επειδή η g είναι συνεχής, από το Θ.Β υπάρχει $\rho \in (1,5): g(\rho)=0 \Leftrightarrow$

$f(\rho)=6-\rho$.

116. α) $\ln f'(x)=f(x)-\ln x \Rightarrow f'(x)=e^{f(x)-\ln x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{e^{f(x)}}{x} \Leftrightarrow$

$f'(x)e^{-f(x)}=\dfrac{1}{x} \Rightarrow \left(-e^{-f(x)}\right)'=(\ln x)' \Leftrightarrow -e^{-f(x)}=\ln x+c$.Είναι $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\ln 2$,

οπότε $-e^{\ln 2}=-1+c \Leftrightarrow c=-1$. Άρα

$-e^{-f(x)}=\ln x-1 \Leftrightarrow -f(x)=\ln(1-\ln x) \Leftrightarrow f(x)=-\ln(1-\ln x)$ (

$0<x<e \Leftrightarrow \ln x<\ln e \Leftrightarrow 1-\ln x>0$)

β) i. $f'(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}>0 \Rightarrow f \nearrow (0,e)$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\ln x)=+\infty$, άρα

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[-\ln(1-\ln x)\right] \overset{1-\ln x=u}{=} \lim\limits_{u\to+\infty}(-\ln u)=-\infty$.Επίσης

$\lim\limits_{x\to e^-}(1-\ln x)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to e^-}f(x)=\lim\limits_{x\to e^-}\left[-\ln(1-\ln x)\right]\overset{1-\ln x=u}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}(-\ln u)=+\infty$

οπότε $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),\lim\limits_{x\to e^-}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

ii. $f''(x)=...=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$. Για κάθε $x\in(1,e)$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow[1,e)$ και για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow(0,1]$. Άρα ο ρυθμός μεταβολής γίνεται ελάχιστος για $x=1$.

iii. Είναι $1-\ln x=\dfrac{1}{e^\lambda}\Leftrightarrow\ln(1-\ln x)=-\lambda\Leftrightarrow-\ln(1-\ln x)=\lambda\Leftrightarrow f(x)=\lambda$.

Άρα

η εξίσωση είναι $f(x)=\lambda$, η οποία έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ αφού $f\nearrow$ και το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

117. α) $D_f=(-1,+\infty)$, $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$, $f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ άρα

$f'\nearrow(-1,+\infty)$.Για κάθε $-1<x<0\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(0)\Leftrightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-1,0]$,

για κάθε $x>0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$.

β) Αν $\alpha=\beta$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha<\beta$, τότε από το Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right],\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και

$\xi_2\in\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$ και

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$.

Είναι $\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\dfrac{\beta-\alpha}{2}} < \dfrac{f(\beta)-f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\dfrac{\beta-\alpha}{2}} \Leftrightarrow$

$f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha) < f(\beta)-f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow 2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha)+f(\beta)$

γ) Για κάθε $-1 < x < 0 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) = 0$ και για κάθε

$x > 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$.

Επειδή $f(0) = 0$ η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

δ) $e^{3\kappa+2\lambda-13} - \ln(3\kappa+2\lambda-12) - 1 + e^{2\kappa+\lambda-8} - \ln(2\kappa+\lambda-7) - 1 \le 0 \Leftrightarrow$

$f(3\kappa+2\lambda-13) + f(2\kappa+\lambda+8) \le 0$ (1). Η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 0$, άρα

$f(x) \ge 0$ για κάθε $x > -1$. Άρα $f(3\kappa+2\lambda-13) \ge 0$ και $f(2\kappa+\lambda-8) \ge 0$ με

$3\kappa+2\lambda-13 > -1$ και $2\kappa+\lambda-8 > -1$. Άρα $\left.\begin{matrix} f(3\kappa+2\lambda-13)=0 \\ f(2\kappa+\lambda-8)=0 \end{matrix}\right| \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} 3\kappa+2\lambda-13=0 \\ 2\kappa+\lambda-8=0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} \kappa=3 \\ \lambda=2 \end{matrix}$ που ικανοποιούν τους περιορισμούς.

118. α) $f'(0) = 2f(0)(0-\eta\mu 0) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-e^2}{x} = 0$

.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)-e^2 f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\left(f(x)-e^2\right)}{x} = f(0)f'(0) = 0$

β) Για κάθε $x \ne 0$ ισχύει ότι $|\eta\mu x| < |x|$.

Αν $x > 0$, τότε $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x \Rightarrow x - \eta\mu x > 0$, $f(x) > 0$, οπότε από τη σχέση $f'(x) = 2f(x)(x-\eta\mu x)$ προκύπτει ότι $f'(x) > 0$.Η f είναι συνεχής, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.Αν $x < 0$, τότε $|\eta\mu x| < -x \Leftrightarrow x < \eta\mu x < -x \Rightarrow x - \eta\mu x < 0$, $f(x) > 0$, οπότε από τη σχέση $f'(x) = 2f(x)(x-\eta\mu x)$ προκύπτει ότι $f'(x) < 0$.Η f είναι συνεχής, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

γ) $f'(x)=2f(x)(x-\eta\mu x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2x-2\eta\mu x\Leftrightarrow$

$\left[\ln(f(x))\right]'=\left(x^2+2\sigma\upsilon\nu x\right)'\Leftrightarrow\ln(f(x))=x^2+2\sigma\upsilon\nu x+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ είναι $\ln(f(0))=2+c\Leftrightarrow 2=2+c\Leftrightarrow c=0$, άρα

$\ln(f(x))=x^2+2\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2+2\sigma\upsilon\nu x}$

δ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, έχει ελάχιστο στο $x=0$, οπότε

$f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow e^{x^2+2\sigma\upsilon\nu x}\geq e^2\Leftrightarrow x^2+2\sigma\upsilon\nu x\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Έστω

$g(x)=f(x)f'(x)+x^2-1-ef'(x)=f'(x)(f(x)-e)+x^2-1,\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Είναι $g(0)=\cancel{f'(0)}^{0}(f(0)-e)-1=-1<0$ και

$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-e\right)+\dfrac{\pi^2}{4}-1=2f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(\dfrac{\pi}{2}-\eta\mu\dfrac{\pi}{2}\right)\left(f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-e\right)+\dfrac{\pi^2}{4}-1\Leftrightarrow$

$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2e^{\frac{\pi^2}{4}}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\left(e^{\frac{\pi^2}{4}}-e\right)+\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)>0$ γιατί

$\dfrac{\pi}{2}>1\Leftrightarrow\dfrac{\pi^2}{4}>1\Leftrightarrow e^{\frac{\pi^2}{4}}>e$. Επομένως $g(0)g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, από το Θ.Bolzano, η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

119. α) $f(1)=4\cdot 1-2\Leftrightarrow\alpha+1=2\Leftrightarrow\alpha=1$

β) Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=x^3+x-x^4-\beta x+2\beta+6$. Είναι $h(x)\leq h(2)$ οπότε η h έχει μέγιστο στο $2\in\mathbb{R}$. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=3x^2+1-4x^3-\beta$, ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Fermat οπότε $h'(2)=0\Leftrightarrow\beta=-19$.

γ) $f'(x)=3x^2+1>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f\ 1-1$ άρα αντιστρέφεται.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$, οπότε $f(A)=\mathbb{R}=D_{f^{-1}}$.

Για κάθε $x>2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(2)=10\ (1)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ για τα οποία $f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2)$ τότε $f\left(f^{-1}(x_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(x_2)\right) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$ άτοπο. Άρα $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$ για κάθε x_1, x_2 με $x_1<x_2$ οπότε $f^{-1}\nearrow \mathbb{R}$. Για κάθε $x>2 \overset{f^{-1}\nearrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x)>f^{-1}(2)=1\ (2)$, γιατί $f(1)=2 \Leftrightarrow f^{-1}(2)=1$.

Από (1)+(2) $\Rightarrow f(x)+f^{-1}(x)>11$.

δ) Αρχικά για $x=1$ ισχύει η ισότητα. Ισχύουν οι υποθέσεις του του Θ.Μ.Τ στο $[1,x], x>1$ οπότε υπάρχει $\xi \in (1,x): g'(\xi)=\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\dfrac{g(x)-14}{x-1}$

Είναι $g'(x)=4x^3-19,\ g''(x)=12x^2>0$ για κάθε $x>1$ άρα $g'\nearrow[1,+\infty)$.

$1<\xi<x \overset{g'\nearrow}{\Rightarrow} g(\xi)<g'(x) \Leftrightarrow \dfrac{g(x)-14}{x-1}<g'(x) \Leftrightarrow g(x)-14<g'(x)(x-1)$.

120. α) i. Για $x=0$ είναι $1 \leq f(0) \leq 1 \Leftrightarrow f(0)=1$.

ii. Είναι $\alpha x^2+(\alpha+1)x+1 \leq f(x) \Leftrightarrow \alpha x^2+(\alpha+1)x+1-f(x) \leq 0\ (1)$

Έστω $g(x)=\alpha x^2+(\alpha+1)x+1-f(x),\ x \in \mathbb{R}$. . $(1) \Rightarrow g(x) \leq g(0)$, δηλαδή η g έχει μέγιστο στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $x=0$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=2\alpha x+(\alpha+1)-f'(x)$, ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Fermat οπότε $g'(0)=0 \Leftrightarrow f'(0)=\alpha+1$.

Είναι $f(x) \leq \alpha x^2+\beta x+1 \Leftrightarrow f(x)-\alpha x^2-\beta x-1 \leq 0\ (2)$

Έστω $h(x)=f(x)-\alpha x^2-\beta x-1,\ x \in \mathbb{R}$.

$(2) \Rightarrow h(x) \leq h(0)$, δηλαδή η h έχει μέγιστο στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $x=0$.Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=f'(x)-2\alpha x-\beta$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Fermat οπότε $h'(0)=0 \Leftrightarrow f'(0)=\beta$. Άρα $f'(0)=\beta=\alpha+1$

β) Για $x>0$ είναι $\alpha+\dfrac{\alpha+1}{x}+\dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{f(x)}{x^2} \leq \alpha+\dfrac{\beta}{x}+\dfrac{1}{x^2}$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha+\dfrac{\alpha+1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha+\dfrac{\beta}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$ οπότε από το Κ.Π. είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=\alpha\Leftrightarrow\alpha=1$ και $\beta=1+1=2$. Τότε

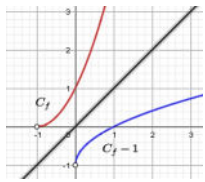
$x^2+2x+1\le f(x)\le x^2+2x+1\Leftrightarrow f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$

γ) Έστω $-1<x_1<x_2$ τότε $0<x_1+1<x_2+1\Leftrightarrow$

$(x_1+1)^2<(x_2+1)^2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow(-1,+\infty)$ οπότε f $1-1$.

$f(x)=y\Leftrightarrow(x+1)^2=y,\ y>0\Leftrightarrow x+1=\sqrt{y}\Leftrightarrow x=\sqrt{y}-1$,

άρα $f^{-1}(y)=\sqrt{y}-1,\ y>0$, οπότε $f^{-1}(x)=\sqrt{x}-1,\ x>0$



δ) Είναι $f(x)-x=x^2+x+1>0$ για κάθε $x>-1$, άρα $f(x)>x$ και επειδή οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$, είναι $f^{-1}(x)<x$, άρα $f(x)>f^{-1}(x)$.

ε) $f(x)=x^4-x^3-2x^2+6x\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^4-x^3-2x^2+6x\Leftrightarrow$

$x^4-x^3-3x^2+4x-1=0\Leftrightarrow(x-1)(x^3-3x+1)=0\Leftrightarrow(x=1)$ ή $(x^3-3x+1=0)$

Έστω $\varphi(x)=x^3-3x+1,\ x\ge-1$. Είναι $\varphi'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$. Για κάθε $x\in(-1,1)$ είναι $\varphi'(x)<0\Rightarrow\varphi\searrow[-1,1]$, για κάθε $x>1$ είναι $\varphi'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$. Είναι $\varphi(-1)=3,\ \varphi(0)=1,\ \varphi(1)=-1,$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$. Στο διάστημα $A_1=[-1,0]$ είναι $\varphi(A_1)=[1,3]$.

Επειδή $0\notin\varphi(A_1)$ η $\varphi(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο A_1. Στο διάστημα $A_2=(0,1)$ είναι $\varphi(A_2)=(-1,1)$. Επειδή $0\in\varphi(A_2)$ η $\varphi(x)=0$ έχει μία θετική ρίζα στο A_2. Στο διάστημα $A_3=(1,+\infty)$ είναι $\varphi(A_3)=(-1,+\infty)$. Επειδή $0\in\varphi(A_3)$ η $\varphi(x)=0$ έχει μία θετική ρίζα στο A_3. Τελικά η δοθείσα εξίσωση έχει τρείς θετικές ρίζες.

121. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f'(x)=1-\ln x+x\left(-\dfrac{1}{x}\right)=1-\ln x-1=-\ln x$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $\ln x<0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(0,1]$, για κάθε $x>1$ είναι $\ln x>0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[1,+\infty)$ οπότε παρουσιάζει μέγιστο στο 1 ,το $f(1)=1$.

Είναι $g(x)=x^x(2-x)^{2-x}=e^{\ln x^x(2-x)^{2-x}}=e^{\ln x^x+\ln(2-x)^{2-x}}=e^{x\ln x+(2-x)\ln(2-x)}$ και

$g'(x)=e^{x\ln x+(2-x)\ln(2-x)}\left(\ln x+1-\ln(2-x)-1\right)=e^{x\ln x+(2-x)\ln(2-x)}\ln\dfrac{x}{2-x}$,

$g'(x)\geq 0\Leftrightarrow e^{x\ln x+(2-x)\ln(2-x)}\ln\dfrac{x}{2-x}\geq 0\Leftrightarrow \ln\dfrac{x}{2-x}\geq 0\Leftrightarrow$

$\dfrac{x}{2-x}\geq 1\Leftrightarrow x\geq 2-x\Leftrightarrow 2x\geq 2\Leftrightarrow x\geq 1$. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι

$g'(x)<0\Rightarrow g\searrow(0,1]$ και για κάθε $x\in(1,2)$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow[1,2)$.

Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$,το $g(1)=1$.

β) Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x=1$ οπότε

$f(x)\leq f(1)\Leftrightarrow x(1-\ln x)\leq 1\Leftrightarrow x-x\ln x\leq 1$ για κάθε $x>0$.

γ) Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ οπότε $g(x)\geq g(1)=1$ για

κάθε $x\in(0,2)$, οπότε και $g(\alpha)\geq 1\Leftrightarrow \alpha^{\alpha}(2-\alpha)^{2-\alpha}\geq 1\overset{\substack{\alpha+\beta=2\Leftrightarrow\\ \beta=2-\alpha}}{\Leftrightarrow}\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\geq 1$

δ) Έστω $\varphi(x)=3x^2-2x^2\ln x-4x+1,\ x\geq e$. Είναι

$\varphi'(x)=6x-4x\ln x-2x^{\not 2}\cdot\dfrac{1}{\not x}=4x-4x\ln x=4x(1-\ln x)=4f(x)$

Για κάθε $x\in(e,+\infty)$ είναι $f(x)<f(e)=0$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα

οπότε $\varphi'(x)<0$ στο $(e,+\infty)$ και επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως

φθίνουσα στο $(e,+\infty)$. Για κάθε $x\geq e\overset{\varphi\searrow}{\Leftrightarrow}\varphi(x)\leq\varphi(e)$. Όμως

$\varphi(e)=e^2-4e+1=e^2-3e+1-e=e(e-3)+1-e<0$, άρα

$3x^2-2x^2\ln x-4x+1\leq e^2-4e+1<0\Leftrightarrow 3x^2-2x^2\ln x<4x-1$.

ε) Για κάθε $0<x<1$ είναι $f(x)<f(1)=0$ και $g(x)>g(1)=0$ άρα

$f(x)<g(x)$. Για κάθε $1<x<2$ είναι $f(x)<f(1)=0$ και $g(x)>g(1)=0$

άρα $f(x)<g(x)$. Επειδή $f(1)=g(1)=0$,η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της

εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

στ) Επειδή $f'(x)=-\ln x$ η f' έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Είναι $g''(x)=e^{x\ln x+(2-x)\ln(2-x)}\left(\ln\dfrac{x}{2-x}\right)^2+e^{x\ln x+(2-x)\ln(2-x)}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}\right)>0\Rightarrow$

$g'\nearrow(0,2)$.Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$, είναι

$\lim\limits_{x\to 0^+}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x\ln x+(2-x)\ln(2-x)}\left(\ln x-\ln(2-x)\right)=e^{0+2\ln 2}(-\infty-\ln 2)=-\infty$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-}(2-x)\ln(2-x) \overset{2-x=u}{=} \lim\limits_{u\to 0^+} u\ln u = 0$, είναι

$\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x+(2-x)\ln(2-x)}\left(\ln x - \ln(2-x)\right) = e^{2\ln 2+0}\left(\ln 2-(-\infty)\right) = +\infty$

Επειδή η g' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=(0,2)$ έχει σύνολο τιμών το $g'(A)=\mathbb{R}$.

Για κάθε $k\in\mathbb{R}$ υπάρχει $x_1>0$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=k$ και υπάρχει $x_2\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_2)=k$ Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f,g δέχονται άπειρες παράλληλες εφαπτόμενες.

ζ) Έστω $a(x)=h(x)-f(x),\ x>0$. Είναι

$h(x)\ge f(x)\Leftrightarrow h(x)-f(x)\ge 0\Leftrightarrow a(x)\ge a(1)$, δηλαδή η συνάρτηση a παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η a είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$a'(x)=h'(x)-f'(x)$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι

$a'(1)=0\Leftrightarrow h'(1)-f'(1)=0\Leftrightarrow h'(1)=0$.

Άρα η γραφική παράσταση της h δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

122. α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Είναι $f(2-x)+2f(x-2)>x^2+2x+4\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 2}\left(f(2-x)+2f(x-2)\right)\ge\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)=12$ (1).

Όμως $\lim\limits_{x\to 2} f(2-x) \underset{\substack{x\to 2\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{2-x=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0} f(u)=f(0)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x-2) \underset{\substack{x\to 2\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{x-2=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0} f(u)=f(0)$,

οπότε η (1) γίνεται $f(0)+2f(0)\ge 12\Leftrightarrow 3f(0)\ge 12\Leftrightarrow f(0)\ge 4$.

β) i) Επειδή για κάθε $x\ne 2$ είναι $f(2-x)+2f(x-2)>x^2+2x+4$ και $f(0)=4$, ισχύει ότι $f(2-x)+2f(x-2)\ge x^2+2x+4\Leftrightarrow$

$f(2-x)+2f(x-2)-x^2-2x-4\ge 0$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έστω $g(x)=f(2-x)+2f(x-2)-x^2-2x-4,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g(2)=f(0)+2f(0)-12=3f(0)-12=0$ οπότε η (1) γίνεται $g(x)\ge g(2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η g έχει ελάχιστο στο $x=2$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=-f'(2-x)+2f'(x-2)-2x-2$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι

$g'(2)=0\Leftrightarrow -f'(0)+2f'(0)-4-2=0\Leftrightarrow f'(0)=6$.

ii) Έχουμε: $f(2-x)+2f(x-2)>x^2+2x+4 \Leftrightarrow$

$f(x-2)+2f(x-2)>x^2+2x+4 \Leftrightarrow 3f(x-2)>x^2+2x+4 \Leftrightarrow$

$f(x-2)>\dfrac{x^2+2x+4}{3}$. Όμως $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+2x+4}{3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{3}=+\infty$ άρα

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x-2)=+\infty$. Αν θέσουμε $u=x-2$, για $x\to\pm\infty, u\to\pm\infty$ οπότε

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x-2)=\lim\limits_{u\to\pm\infty}f(u)=+\infty$.Άρα $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$.

iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-1821$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-1821)=+\infty$,άρα $g(x)>0$ κοντά στο $-\infty$ άρα

υπάρχει πολύ μικρός αριθμός γ τέτοιος ώστε $g(\gamma)>0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-1821)=+\infty$,άρα $g(x)>0$ κοντά στο $+\infty$ άρα υπάρχει

πολύ μεγάλος αριθμός δ τέτοιος ώστε $g(\delta)>0$. Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν

διαφορά συνεχών συναρτήσεων άρα και στα διαστήματα $[\gamma,0],[0,\delta]$. Ισχύει :

$g(0)g(\gamma)<0,\ g(0)g(\delta)<0$, άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano ,οπότε

υπάρχουν $x_1\in(\gamma,0),\ x_2\in(0,\delta)$ τέτοια ώστε

$g(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)=1821,\ \ g(x_2)=0\Leftrightarrow f(x_2)=1821$.

123. α) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει ότι

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}\Leftrightarrow x^2f(x)-\ln x=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$a(x)=x^2f(x)-\ln x,\ x>0$. Η a είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $a'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-\dfrac{1}{x}$.Η a' είναι

παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$a''(x)=2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x)+x^2f''(x)+\dfrac{1}{x^2}=$

$2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)+\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow$

$a''(x)=\dfrac{2x^2f(x)+4x^3f'(x)+x^4f''(x)+1}{x^2}=\dfrac{-1+1}{x^2}=0\Leftrightarrow a'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$.

Είναι $a'(1)=2f(1)+f'(1)-1=0$ άρα $c=0$ οπότε

$a'(x)=0\Leftrightarrow a(x)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$. Είναι $a(1)=f(1)-\ln1=0\Leftrightarrow c_1=0$ άρα για

κάθε $x>0$ ισχύει ότι $x^2 f(x)-\ln x=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

β) Είναι $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}\geq 0 \Leftrightarrow 1-2\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x\leq e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.Για κάθε $0<x<\sqrt{e}$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow\left(0,\sqrt{e}\right]$ και για κάθε $x>\sqrt{e}$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow\left[\sqrt{e},+\infty\right)$.

Η f έχει μέγιστο το $f\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{e}\right)^2}=\dfrac{1}{2e}$, οπότε για κάθε $x>0$ ισχύει ότι:

$f(x)\leq \dfrac{1}{2e} \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x^2}\leq \dfrac{1}{2e} \Leftrightarrow 2e\ln x\leq x^2 \Leftrightarrow \ln x^{2e}\leq \ln e^{x^2} \Leftrightarrow x^{2e}\leq e^{x^2}$.

γ) $x^{2e}\leq \lambda^{x^2} \Leftrightarrow \ln x^{2e}\leq \ln \lambda^{x^2} \Leftrightarrow 2e\ln x\leq x^2\ln\lambda \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x^2}\leq \dfrac{\ln\lambda}{2e} \Leftrightarrow f(x)\leq \dfrac{\ln\lambda}{2e}$

Για $x=\sqrt{e}$ είναι $\dfrac{1}{2e}\leq \dfrac{\ln\lambda}{2e} \Leftrightarrow \ln\lambda\geq 1 \Leftrightarrow \lambda\geq e$.

δ) Είναι $g(x)\geq 0$ και επειδή $g(1)=0$, τελικά για κάθε $x>0$ είναι $g(x)\geq g(1)$, οπότε η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη, σύμφωνα με το Θ.Fermat, είναι $g'(1)=0$

ε) Είναι $g(x)=\left|\alpha x-\alpha-x^3 f(x)\right|=\left|\alpha x-\alpha-\cancel{x^3}\dfrac{\ln x}{\cancel{x^2}}\right|=\left|\alpha x-\alpha-x\ln x\right|$ και

$g'(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{g(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)}{x-1}=0$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\left|\alpha x-\alpha-x\ln x\right|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\left|\alpha x-\alpha-x\ln x\right|}{|x-1|}\lim\limits_{x\to 1^+}\left|\dfrac{\alpha x-\alpha-x\ln x}{x-1}\right|=|\alpha-1|$

άρα $\alpha-1=0\Leftrightarrow\alpha=1$ γιατί $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\alpha x-\alpha-x\ln x}{x-1}\overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\alpha-\ln x-1}{1}=\alpha-1$.

στ) Είναι $g(x)=\left|x-1-x\ln x\right|$, $x>0$.

Έστω $b(x)=x-1-x\ln x$, $x>0$. Είναι $b'(x)=1-1-\ln x=-\ln x$.

Αν $0<x<1$ είναι $b'(x)>0 \Rightarrow b\nearrow(0,1]$ και αν $x>1$ είναι $b'(x)<0 \Rightarrow b\searrow[1,+\infty)$. Η b έχει μέγιστο το $b(1)=0$ άρα $b(x)\leq 0 \Leftrightarrow x-1-x\ln x\leq 0$ για κάθε $x>0$ οπότε $g(x)=x\ln x-x+1$

ζ) $x^4 f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^{\not 4^2} \dfrac{\ln x}{x^{\not 2}} = x\ln x - x + 1 \Leftrightarrow x^2 \ln x - x\ln x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x\ln x(x-1) + (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x=1)$ ή $(x\ln x + 1 = 0)$

Έστω $h(x) = x\ln x + 1,\ x > 0$. Είναι $h'(x) = \ln x + 1$.

$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

Για κάθε $0 < x < \dfrac{1}{e}$ είναι $h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow \left(0, \dfrac{1}{e}\right]$ και για κάθε $x > \dfrac{1}{e}$ είναι

$h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow \left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$.

Η h έχει ελάχιστο το $h\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e}\ln\dfrac{1}{e} + 1 = -\dfrac{1}{e} + 1 > 0$, άρα για κάθε $x > 0$ είναι

$h(x) \geq h\left(\dfrac{1}{e}\right) > 0$, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow x\ln x + 1 = 0$ είναι αδύνατη.

124. α) $f^2(x) = 2xf(x) + 9 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow$

$(f(x) - x)^2 = x^2 + 9$ (1). Επειδή $x^2 + 9 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$g(x) = f(x) - x \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $g(0) = f(0) = 3 > 0$, είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η (1)

γίνεται: $f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9},\ x \in \mathbb{R}$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{\sqrt{x^2+9} + x}{\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+9}}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 < x^2 + 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow$

$-\sqrt{x^2+9} < x < \sqrt{x^2+9} \Rightarrow x + \sqrt{x^2+9} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ άρα $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

γ) $\sqrt{x^2+9} = \lambda - x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9} + x = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda$. Είναι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x + \sqrt{x^2+9}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x^2 - 9}{x - \sqrt{x^2+9}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-9}{x + x\sqrt{1 + \dfrac{9}{x^2}}} =$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-9}{x}\dfrac{1}{1+\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=+\infty+\infty=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$.

- Αν $\lambda\le 0$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda>0$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

δ) $x+\sqrt{x^2+9}+\sqrt{\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)^2+9}<9\Leftrightarrow f(x)+\sqrt{f^2(x)+9}<9\Leftrightarrow$

$f(f(x))<f(4)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<4\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+9}<4\Leftrightarrow\sqrt{x^2+9}<4-x$ (2)

Αν $4-x<0\Leftrightarrow x>4$ τότε η (2) είναι αδύνατη.

Αν $4-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 4$ η (2) γίνεται:

$\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2<(4-x)^2\Leftrightarrow x^2+9<16-8x+x^2\Leftrightarrow 8x<7\Leftrightarrow x<\dfrac{7}{8}$. Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι $\left(-\infty,\dfrac{7}{8}\right)$.

ε) Είναι $M(x(t),y(t))$, όπου $y(t)=x(t)+\sqrt{x^2(t)+9}$. Είναι $x'(t)=1$ και $y'(t)=x'(t)+\dfrac{x(t)x'(t)}{\sqrt{x^2(t)+9}}$.

Είναι $(OM)=d(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$, οπότε $d'(t)=\dfrac{2x'(t)x(t)+2y(t)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$.

Τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $x(t_0)=4$, $y(t_0)=9$ είναι:

$$d'(t_0)=\frac{x'(t_0)x(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=\frac{1\cdot 4+9\left(1+\dfrac{4\cdot 1}{\sqrt{16+9}}\right)}{\sqrt{16+81}}=\frac{101}{5\sqrt{97}}\,\text{cm/sec}$$

στ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+9}=y\Leftrightarrow\sqrt{x^2+9}=y-x$ (3)

Είναι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}>x\Leftrightarrow y-x>0$ οπότε η (3) γίνεται:

$x^2+9=(y-x)^2\Leftrightarrow x^2+9=y^2-2xy+x^2\Leftrightarrow 2xy=y^2-9\Leftrightarrow x=\dfrac{y^2-9}{2y}$, άρα

$f^{-1}(y)=\dfrac{y^2-9}{2y},\ y\in(0,+\infty)$ οπότε $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-9}{2x},\ x\in(0,+\infty)$.

ζ) $m(x)=(AB)=\sqrt{\left(x-f^{-1}(x)\right)^2+\left(f^{-1}(x)-x\right)^2}\Leftrightarrow$

$m(x)=\sqrt{2\left(x-f^{-1}(x)\right)^2}=\sqrt{2}\left|x-f^{-1}(x)\right|$.

Επειδή $f(x)>x$ η C_f βρίσκεται πάνω από την $y=x$ και λόγω συμμετρίας η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $y=x$. Άρα $m(x)=2\left(x-f^{-1}(x)\right)=$

$$\sqrt{2}\left(x-\frac{x^2-9}{2x}\right)=\sqrt{2}\frac{2x^2-x^2+9}{2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x^2+9}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{9}{x}\right),x>0$$

Είναι $m'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\dfrac{9}{x^2}\right)=\dfrac{x^2-9}{\sqrt{2}x^2}$. Για κάθε $x\in(0,3)$ είναι $m'(x)<0\Rightarrow m\searrow(0,3]$ και για κάθε $x>3$ είναι $m'(x)>0\Rightarrow m\nearrow[3,+\infty)$. Η απόσταση AB γίνεται ελάχιστη για $x=3$ με ελάχιστη απόσταση την

$$(AB)=\frac{3+\frac{9}{3}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}.$$

η) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x^2)\overset{x^2=y}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}f(y)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f^2(x)-\eta\mu^2f(x)\right)\overset{u=f(x)}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\left(u^2-\eta\mu^2u\right)=0$ και επειδή

$|\eta\mu f(x)|<|f(x)|\Leftrightarrow\eta\mu^2f(x)<f^2(x)\Leftrightarrow f^2(x)-\eta\mu^2f(x)>0$, είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x^2)}{f^2(x)-\eta\mu^2f(x)}=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x^2)\cdot\frac{1}{f^2(x)-\eta\mu^2f(x)}\right]=+\infty(+\infty)=+\infty.$$

125. α) Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Στο $x_0=0$ είναι:

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\overset{\text{DLH}}{\underset{x\to0}{=}}\lim\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}\overset{\text{DLH}}{\underset{x\to0}{=}}\lim\frac{\eta\mu x}{6x}=\frac{1}{6}=f(0)$$

, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και επομένως είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x|\le|x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, άρα για $x>0$ είναι $|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow-x<\eta\mu x<x\Rightarrow x-\eta\mu x>0$ άρα $f(x)=\dfrac{x-\eta\mu x}{x^3}>0$, ενώ για $x<0$ είναι

$|\eta\mu x| < -x \Leftrightarrow x < \eta\mu x < -x \Rightarrow x - \eta\mu x < 0$ και $f(x) = \dfrac{x - \eta\mu x}{x^3} > 0$.Επειδή $f(0) = \dfrac{1}{6} > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με

$$f'(x) = \frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)x^3 - (x - \eta\mu x)3x^2}{x^6} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x - x\sigma\upsilon\nu x - 3x + 3\eta\mu x)}{x^4} = \frac{3\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x - 2x}{x^4} .$$

Έστω $\varphi(x) = 3\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x - 2x,\ x \in [0,\pi]$. Η φ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με

$\varphi'(x) = 3\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x - 2 = 2\sigma\upsilon\nu x - 2 + x\eta\mu x$,

$\varphi''(x) = -2\eta\mu x + \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$ και

$\varphi^{(3)}(x) = \cancel{\sigma\upsilon\nu x} - x\eta\mu x - \cancel{\sigma\upsilon\nu x} = -x\eta\mu x < 0$ και επειδή η φ'' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Για κάθε $0 < x < \pi \overset{\varphi''\searrow}{\Rightarrow} \varphi''(x) < \varphi''(0) = 0$ και επειδή η φ' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Για κάθε $0 < x < \pi \overset{\varphi'\searrow}{\Rightarrow} \varphi'(x) < \varphi'(0) = 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Για κάθε $0 < x < \pi \overset{\varphi\searrow}{\Rightarrow} \varphi(x) < \varphi(0) = 0$ οπότε $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής , είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$.

δ) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $\ln x \le x - 1$, οπότε $\ln x - x \le -1$. Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$, άρα $f(x) > \ln x - x$ για κάθε $x > 0$.

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x - \eta\mu x}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\eta\mu x}{x^3}\right) = 0$ γιατί για $x < 0$ είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x^3}\right| = \dfrac{|\eta\mu x|}{-x^3} \le -\dfrac{1}{x^3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^3} \le \dfrac{\eta\mu x}{x^3} \le -\dfrac{1}{x^3}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x^3}\right)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x^3} = 0$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

ζ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, υπάρχει κάποιος πολύ μικρός αρνητικός αριθμός α για τον οποίο ισχύει ότι $0 < f(x) < f(\alpha)$ (1) για κάθε $x < \alpha$.Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,

υπάρχει κάποιος πολύ μεγάλος θετικός αριθμός β για τον οποίο ισχύει ότι $0 < f(x) < f(\beta)$ (2) για κάθε $x > \beta$.

Στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ η f είναι συνεχής, οπότε λόγω του θεωρήματος μέγιστης-ελάχιστης τιμής, θα παρουσιάζει μέγιστο Μ στο διάστημα αυτό. Δηλαδή θα υπάρχει $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x) \le f(x_0) = M$ (3) για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι $f(x) \le M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f έχει μέγιστο το Μ για $x = x_0$.

126. α) Αρχικά παρατηρούμε ότι και οι δύο συναρτήσεις $g(x) = e^{x-1} - 1$ και $h(x) = \ln x + x - 1$ έχουν προφανή ρίζα την x = 1. Για την g, έχουμε:

$g(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ και

$g(x) < 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{x-1} < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x) = \dfrac{1}{x} + 1$. Για κάθε x > 0 είναι $h'(x) > 0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $h(x) < h(1) = 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $h(x) > h(1) = 0$. Άρα για κάθε $0 < x < 1$ είναι $g(x) < 0$ και $h(x) < 0$, οπότε $g(x)h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ και για κάθε x > 1 είναι $g(x) > 0$ και $h(x) > 0$, οπότε $g(x)h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$. Τελικά $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

β) 1ος τρόπος: Είναι $g'(x) = e^{x-1} > 0 \Rightarrow g \nearrow (0,+\infty)$.

- Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,1]$ με $x_1 < x_2$ είναι $g(x_1) < g(x_2) < 0 \Leftrightarrow -g(x_1) > -g(x_2) > 0$ (1) και $h(x_1) < h(x_2) < 0 \Leftrightarrow -h(x_1) > -h(x_2) > 0$ (2). Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1), (2) έχουμε: $-g(x_1)(-h(x_1)) > -g(x_2)(-h(x_2)) \Leftrightarrow g(x_1)h(x_1) > g(x_2)h(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow (0,1]$.
- Για κάθε $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι $0 < g(x_1) < g(x_2)$ (3) και $0 < h(x_1) < h(x_2)$ (4). Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (3), (4) έχουμε: $g(x_1)h(x_1) < g(x_2)h(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow [1,+\infty)$.

2ος τρόπος: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\underset{+}{e^{x-1}}(\ln x+x-1)+(e^{x-1}-1)\left(\underset{+}{\frac{1}{x}+1}\right).$$

Παρατηρούμε ότι οι παραστάσεις e^{x-1} και $\frac{1}{x}+1$ είναι θετικές για κάθε $x>0$, οπότε το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο των $\ln x+x-1=h(x)$ και $e^{x-1}-1=g(x)$. Για κάθε $0<x<1$ είναι $g(x)<0$ και $h(x)<0$, άρα $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$. Για κάθε $x>1$ είναι $g(x)>0$ και $h(x)>0$, οπότε $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

γ) Είναι $f(1)=0$ και $f'(1)=0$, οπότε η C_f εφάπτεται στον άξονα x΄x στο σημείο A(1,0).

δ) $(e^{x-1}-1)(\ln x+x-1)=f(\pi)\Leftrightarrow f(x)=f(\pi)\ (5)$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ η εξίσωση $f(x)=f(\pi)$ έχει μοναδική λύση την $x=\pi$ στο διάστημα αυτό.

(Επειδή $\pi>1$, είναι $f(\pi)>f(1)=0$)

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^{x-1}-1)(\ln x+x-1)=\left(\frac{1}{e}-1\right)(-\infty)=+\infty$.

Στο διάστημα $\Delta=(0,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta)=(0,+\infty)$. Επειδή το $f(\pi)$ περιέχεται στο $f(\Delta)$, υπάρχει, μοναδικό λόγω μονοτονίας, $x_1\in\Delta$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=f(\pi)$. Τελικά η (5) έχει ακριβώς δύο λύσεις.

ε) Έστω $\varphi(x)=ex-e^x$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $\varphi'(x)=e-e^x$.

$\varphi'(x)\geq 0\Leftrightarrow e-e^x\geq 0\Leftrightarrow e^x\leq e\Leftrightarrow x\leq 1$.

Για κάθε $x<1$ είναι $\varphi'(x)>0$, για κάθε $x>1$ είναι $\varphi'(x)<0$, επειδή η φ είναι συνεχής στο $x=1$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, άρα η φ έχει μέγιστο το $\varphi(1)=0$. Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\varphi(x)\leq\varphi(1)=0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=1$.

Επειδή για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\geq 0=f(1)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Άρα η εξίσωση $f(x)=\varphi(x)$ έχει μοναδική λύση την $x=1$.

127. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με

$$f'(x)=2\varepsilon\varphi x\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\eta\mu x=2\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\eta\mu x=\frac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}-\eta\mu x=\eta\mu x\frac{2-\sigma\upsilon\nu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}$$

Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $0<\sigma\upsilon\nu x\le 1\Rightarrow 2-\sigma\upsilon\nu^3 x>0\Rightarrow\frac{2-\sigma\upsilon\nu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}>0$.

Είναι $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow\eta\mu x\frac{2-\sigma\upsilon\nu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}\ge 0\Leftrightarrow\eta\mu x\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=0$.

β) $1-\sigma\upsilon\nu x=x^2\Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu x-x^2=0\Leftrightarrow g(x)=0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $g'(x)=\eta\mu x-2x$ και $g''(x)=\sigma\upsilon\nu x-2$. Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $g''(x)<0\Rightarrow g'\searrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Παρατηρούμε ότι $g'(0)=0$, οπότε για κάθε $-\frac{\pi}{2}<x<0$ είναι $g'(x)>g'(0)=0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $g'(x)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η g έχει μέγιστο το $g(0)=0$. Επομένως $g(x)\le g(0)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$, η οποία είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x)=0$.

γ) $\varepsilon\varphi^2 x+2\sigma\upsilon\nu x+x^2-2>0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi^2 x+\sigma\upsilon\nu x-1>1-x^2-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow f(x)>g(x)$.

Επειδή η f έχει ελάχιστο το $f(0)=0$ ισχύει ότι $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0. Επίσης $g(x)\le 0$ για κάθε

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 0. Άρα για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι $f(x) \geq 0 \geq g(x)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0.

Επομένως $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} g'(x) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \pi$ και

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g'(x) = \eta\mu\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{2} = 1 - \pi$.

Επειδή η g' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, έχει σύνολο τιμών το $g'(\Delta) = (1-\pi, \pi - 1)$, Επειδή το 3 δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της g', ισχύει ότι $g'(x) \neq 3$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Έστω $\varphi(x) = g(x) - 3x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Έστω ότι η φ έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\rho_1 < \rho_2$. Η φ είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $\varphi'(x) = g'(x) - 3$. Επειδή $\varphi(\rho_1) = \varphi(\rho_2) = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, η εξίσωση $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 3$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) που είναι άτοπο. Άρα η εξίσωση $g(x) = 3x$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

128. α) Έστω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 2, τότε $f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow f(x) - f(2) \leq 0$. Για κάθε $x \in (2,4)$ είναι $x - 2 > 0$, άρα $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \leq 0$, οπότε $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \leq 0$ (1).

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 2, ισχύει ότι

$f'(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \Leftrightarrow f'(2) \leq 0$ άτοπο. Άρα η f δεν έχει μέγιστο στο 2.

β) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)-f(2-h)+f(2)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}-\dfrac{f(2-h)-f(2)}{h}\right)$. Θέτουμε $-h=u$ οπότε

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(2+u)-f(2)}{-u}=-\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(2+u)-f(2)}{u}=-f'(2)$,

οπότε: $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}-\dfrac{f(2-h)-f(2)}{h}\right)=f'(2)-(-f'(2))=2f'(2)>0$

γ) Επειδή $f(2)<7<f(4)$ και η f είναι συνεχής στο $[2,4]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε υπάρχει $x_1\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=7$.

δ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[2,x_1]$ και $[x_1,4]$, οπότε υπάρχουν $x_1,x_2\in(2,4)$ τέτοια, ώστε:

$f'(x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(2)}{x_1-2}=\dfrac{2}{x_1-2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{f'(x_2)}=\dfrac{x_1-2}{2}$ και

$f'(x_3)=\dfrac{f(4)-f(x_1)}{4-x_1}=\dfrac{9-7}{4-x_1}=\dfrac{2}{4-x_1}\Leftrightarrow\dfrac{1}{f'(x_3)}=\dfrac{4-x_1}{2}$

$\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}=\dfrac{x_1-2}{2}+\dfrac{4-x_1}{2}=\dfrac{\cancel{x_1}-2+4-\cancel{x_1}}{2}=1\Leftrightarrow$

$\dfrac{f'(x_3)+f'(x_2)}{f'(x_2)f'(x_3)}=1\Leftrightarrow f'(x_3)+f'(x_2)=f'(x_2)f'(x_3)$

ε) $f'(x)=4-\dfrac{f(x)-1}{x}\Leftrightarrow xf'(x)=4x-f(x)+1\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)-4x-1=0$

Έστω $g(x)=xf(x)-2x^2-x,\ x\in[2,4]$. Η g είναι συνεχής στο $[2,4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(2,4)$ με

$g'(x)=xf'(x)+f(x)-4x-1$. Επιπλέον $g(2)=2f(2)-8-2=10-10=0$,

$g(4)=4f(4)-32-4=36-36=0$,

δηλαδή $g(2)=g(4)$, άρα λόγω του θεωρήματος Rolle, η εξίσωση $g'(x)=0\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)-4x-1=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2,4)$.

στ) i) Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(2,4)$ και η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,4]$. Για κάθε

$2 < x < 4 \overset{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(2) < f'(x) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [2,4]$.

Επειδή $f(2) = 5$ και $f(4) = 9$, η f έχει σύνολο τιμών το $[5,9]$.

ii) $\dfrac{f(x)}{x-3} + \dfrac{f(x-1)}{x-4} = 0 \Leftrightarrow f(x)(x-4) + f(x-1)(x-3) = 0$.

Έστω $h(x) = f(x)(x-4) + f(x-1)(x-3)$, $x \in [3,4]$.

Είναι $h(3) = f(3)(3-4) + f(3-1)(3-3) = -f(3) < 0$,

$h(4) = f(4)(4-4) + f(4-1)(4-3) = f(3) > 0$,

δηλαδή $h(3)h(4) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το Θ.Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow$

$f(x)(x-4) + f(x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x-3} + \dfrac{f(x-1)}{x-4} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(3,4)$.

ζ) Έστω $x \in (2,4)$. Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[2,x]$ και $[x,4]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (2,x)$ και $\xi_2 \in (x,4)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{f(x)-5}{x-2}$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(4)-f(x)}{4-x} = \dfrac{9-f(x)}{4-x}$. Είναι

$f'(\xi_1) \le 2 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-5}{x-2} \le 2 \Leftrightarrow f(x) \le 2x+1$ (1) και

$f'(\xi_2) \le 2 \Leftrightarrow \dfrac{9-f(x)}{4-x} \le 2 \Leftrightarrow 9-f(x) \le 8-2x \Leftrightarrow f(x) \ge 2x+1$ (2)

Από τις (1),(2) είναι $f(x) = 2x+1$ για κάθε $x \in (2,4)$. Επειδή $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ και $f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$, είναι $f(x) = 2x+1$ για κάθε $x \in [2,4]$

129. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \lambda + \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

$f''(x) \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} \ge 0 \Leftrightarrow 2-2x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.

Για κάθε $x<-1$ ή $x>1$ είναι $f''(x)<0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,-1],[1,+\infty)$,είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από αυτά.

Για κάθε $-1<x<1$ είναι $f''(x)>0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $[-1,1]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Η f' έχει τοπικό ελάχιστο το $f'(-1)=\lambda-1$ και τοπικό μέγιστο το $f'(1)=\lambda+1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\not{x}}{\not{x}^2}=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lambda$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\not{x}}{\not{x}^2}=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\lambda$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1)=[\lambda-1,\lambda)$. Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[-1,1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2)=[\lambda-1,\lambda+1]$. Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_3=[1,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_3)=(\lambda,\lambda+1]$.

Η f' έχει σύνολο τιμών το $f'(A)=f'(\Delta_1)\cup f'(\Delta_2)\cup f'(\Delta_3)=[\lambda-1,\lambda+1]$.

Όμως $f'(A)=[0,2]$, άρα $\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$ και $\lambda+1=2\Leftrightarrow\lambda=1$. Άρα $\lambda=1$.

β) Επειδή $f'(A)=[0,2]$, είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\neq-1$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\ln\left(x^2+1\right)\right)=+\infty+(+\infty)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\ln\left(x^2+1\right)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln e^x+\ln\left(x^2+1\right)\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{e^x}{x^2+1}\underset{u\to0^+}{\overset{\frac{e^x}{x^2+1}=u}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty\Rightarrow u\to0^+}\ln u=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\dfrac{1}{x^2+1}\right)=0\cdot0=0$.

Επειδή το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f ισχύει ότι

$A_{f^{-1}}=f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R}$.

δ) $f(x)\geq x+x^2\Leftrightarrow x+\ln\left(x^2+1\right)\geq x+x^2\Leftrightarrow\ln\left(x^2+1\right)\geq x^2$ (1)

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $\ln x\leq x-1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, οπότε αντικαθιστώντας όπου x το x^2+1 προκύπτει

$\ln\left(x^2+1\right)\leq x^2+1-1\Leftrightarrow\ln\left(x^2+1\right)\leq x^2$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\ln\left(x^2+1\right)=x^2\Leftrightarrow x^2+1=1\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

ε) Αρκεί η εξίσωση $f(x)=2x \Leftrightarrow x+\ln\left(x^2+1\right)-2x=0 \Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right)-x=0$ να έχει ακριβώς μια ρίζα. Έστω $\varphi(x)=\ln\left(x^2+1\right)-x,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $\varphi'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}-1=\dfrac{2x-x^2-1}{x^2+1}=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$. Για κάθε $x\neq 1$ είναι $\varphi'(x)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $\varphi(0)=0$ και επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα, το x = 0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=2x$

130. α) Μας δίνεται η σχέση : $\left|f(x)-x^5-5x-f(y)-y^5+5y\right|\le|x-y|^4$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x^3-5x+6$. Από τη σχέση (1) έχουμε

για $y=x_0$: $\left|f(x)-x^5-5x-f(x_0)-x_0^5+5x_0\right|\le|x-x_0|^4 \overset{x\neq x_0}{\Leftrightarrow}$

$$\left|\frac{f(x)-x^5-5x-f(x_0)-x_0^5+5x_0}{x-x_0}\right|\le|x-x_0|^3 \Leftrightarrow$$

$$-|x-x_0|^3\le\frac{f(x)-x^5-5x+6-f(x_0)-x_0^5+5x_0-6}{x-x_0}\le|x-x_0|^3 \Leftrightarrow$$

$-|x-x_0|^3\le\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\le|x-x_0|^3$. Όμως

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(-|x-x_0|^3\right)=0=\lim\limits_{x\to x_0}\left(|x-x_0|^3\right)$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=0$.

Για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=0$ οπότε $h'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η h είναι σταθερή . Έστω $h(x)=c, c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)-x^5-5x+6=c$.

Για $x=1$ έχουμε : $f(1)-1-5+6=c \Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)-x^5-5x+6=0 \Leftrightarrow f(x)=x^5+5x-6$

β) Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-2\sqrt{x+h}-h-g(x)+2\sqrt{x}}{h}=0$ (2).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=g(x)-2\sqrt{x}-x+3$. Από τη σχέση (2) έχουμε :

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-2\sqrt{x+h}-x-h+3-g(x)+2\sqrt{x}+x-3}{h}=0\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k(x+h)-k(x)}{h}=0\Leftrightarrow k'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η κ είναι σταθερή

έστω $k(x)=c_1, c_1\in\mathbb{R}\Leftrightarrow g(x)-2\sqrt{x}-x+3=c_1$.

Για $x=1$ έχουμε : $g(1)-2-1+3=c\Leftrightarrow c_1=0$ οπότε

$g(x)-2\sqrt{x}-x+3=0\Leftrightarrow g(x)=2\sqrt{x}+x-3, x\geq 0$.

γ) Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες με παραγώγους αντίστοιχα:

$f'(x)=5x^4+5>0$, $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1>0$ άρα είναι γνησίως αύξουσες.

δ) Οι συναρτήσεις f,g είναι γνησίως αύξουσες οπότε έχουν σύνολα τιμών αντίστοιχα: $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$,

$g([0,+\infty))=\left[g(0),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=[-3,+\infty)$, αφού

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5+5x-6)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5+5x-6)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^5=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x}+x-3\right)=+\infty+\infty-3=+\infty$.

i) Το $2021\in f(\mathbb{R})$ οπότε υπάρχει μοναδικός, λόγω της μονοτονίας της f, $\eta\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(\eta)=2021$.

ii) Για $x\neq 1$ έχουμε:

$\dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}+1=\dfrac{2}{x-1}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+x-1=2\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+x-3=0\Leftrightarrow g(x)=0$

Όμως η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$ οπότε η εξίσωση

$\dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}+1=\dfrac{2}{x-1}$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ε) i) $l(x)=f(x)-g(x)=x^3+5x-6-2\sqrt{x}-x+3\Leftrightarrow l(x)=x^3+4x-2\sqrt{x}-3$.

Η συνάρτηση l είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $l'(x)=3x^2+4-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ και δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο $l''(x)=6x+\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}>0$ άρα η l' είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως η l' έχει σύνολο τιμών το

$l'((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}l'(x),\lim\limits_{x\to+\infty}l'(x)\right)=(0+4-\infty,+\infty+4-0)=(-\infty,+\infty)$.

Το $0 \in l'\left((0,+\infty)\right)$ οπότε υπάρχει μοναδικός, λόγω της μονοτονίας της l', $\alpha \geq 0$ τέτοιος ώστε $l'(\alpha)=0$. Έχουμε : $l'(x) \geq 0 \Leftrightarrow l'(x) \geq l'(\alpha) \Leftrightarrow x \geq \alpha$.

Η l είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, $l'(x)>0$ στο $(\alpha,+\infty)$, $l'(x)<0$ στο $(0,\alpha)$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $[0,\alpha)$, οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο α το $l(\alpha)=\beta$.

ii) Έχουμε $\alpha > 0 \overset{l\searrow[0,\alpha)}{\Leftrightarrow} l(\alpha) < l(0) \Leftrightarrow \beta < -3 < 0$

Έστω $A_1=[0,\alpha), A_2=[\alpha,+\infty)$. Η l έχει σύνολα τιμών στα αντίστοιχα διαστήματα λόγω της μονοτονίας της :

$l(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to\alpha} l(x), l(0)\right]=\left(l(\alpha),-3\right]=(\beta,-3]$ και

$l(A_1)=\left[l(\alpha), \lim\limits_{x\to+\infty} l(x)\right)=\left[\beta, \lim\limits_{x\to+\infty} l(x)\right)$.

Επομένως η l είναι αρνητική στο A_1. Παρατηρούμε ότι $l(1)=0$ οπότε $1 \in A_2$.

Για $\alpha < x < 1 \overset{l\nearrow[\alpha,+\infty)}{\Leftrightarrow} l(\alpha) < l(x) < l(1) \Leftrightarrow \beta < l(x) < 0$ και για

$x > 1 \overset{l\nearrow[\alpha,+\infty)}{\Leftrightarrow} l(x) > l(1) \Leftrightarrow l(x) > 0$.

Άρα $l(x)<0$ στο $(-\infty,1)$ και $l(x)>0$ στο $(1,+\infty)$.

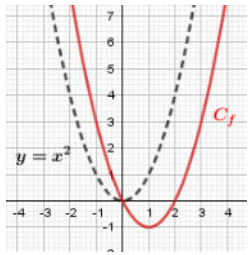
Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

23197.α) Είναι $f(0)=0$ και $f(2)=0$ άρα $f(0)=f(2)$.

Επειδή $f(0)=f(2)$ η f δεν είναι 1-1 οπότε δεν αντιστρέφεται.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x-2$. Για κάθε $x<1$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=-1$.

γ) Είναι $f(x)=x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1$. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=x^2$ κατά 1 μονάδα δεξιά και 1 μονάδα προς τα κάτω.



25761.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x-1+\not{x}\cdot\frac{1}{\not{x}}=\ln x$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε x > 1 είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=1\cdot(-1)+1=0$.

β) $x\ln x+1=x\Leftrightarrow x\ln x-x+1=0\Leftrightarrow x(\ln x-1)+1=0\Leftrightarrow$

$f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(1)\Leftrightarrow x=1$ γιατί για κάθε

$x\in(0,1)$ είναι $f(x)>f(1)=0$ και για κάθε x > 1 είναι $f(x)>f(1)=0$.

26707.α) Η γραφική παράσταση της f΄τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο (3, 0), άρα για κάθε $x\in[0,5]$ είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow x=3$.

β) Για κάθε $x\in(0,3)$ είναι $f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής στο [0, 3], οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(3,5)$ είναι $f'(x)>0$ και η f είναι συνεχής στο [3, 5], οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

γ) Η f έχει ελάχιστο στο $x_o=3$, αφού είναι γνησίως φθίνουσα στο [0, 3] και γνησίως αύξουσα στο [3, 5].

32390.α) Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία του [0, 2] στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη και οι ρίζες της f΄.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f'(x)=4x^3-4$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-4=0\Leftrightarrow 4x^3=4\Leftrightarrow x^3=1\Leftrightarrow x=1$. Το 1 είναι κρίσιμο σημείο της f.

β) Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής στο [0, 1], άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(1,2)$ είναι $f'(x)>0$ και η f είναι συνεχής στο [1, 2], άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Στο διάστημα $\Delta_1=[0,1]$ η f έχει σύνολο τιμών το

$f(\Delta_1)=[f(1),f(0)]=[-1,2]$ και στο διάστημα $\Delta_2=[1,2]$ η f έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=[f(1),f(2)]=[-1,10]$. Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-1,10]$, οπότε έχει ελάχιστο το -1 για x = 1 και μέγιστο το 10 για x = 2.

34025.α) i. Για κάθε x > 1 είναι $f'(x)=-\frac{1}{(\ln x)^2}(\ln x)'=-\frac{1}{x\ln^2 x}<0$.

ii. $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow(1,+\infty)$. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\ln x}=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x=0$ και $\ln x>0$ για $x>1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{\ln x=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}=0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(1,+\infty)$, οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to 1^{=}} f(x)\right)=(0,+\infty)$.

β) i.Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

ii.Για κάθε $x>1$ και $y>0$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{1}{\ln x}=y\Leftrightarrow\ln x=\dfrac{1}{y}\Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{y}}$,

άρα $f^{-1}(y)=e^{\frac{1}{y}}$, $y>0$, οπότε $f^{-1}(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $x>0$.

23210.α) Για κάθε $x<\alpha$ ή $x>\beta$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα $(-\infty,\alpha],[\beta,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα αυτά. Για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ είναι $f'(x)>0$ και η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει τοπικό ελάχιστο για $x=\alpha$ το $f(\alpha)$ και τοπικό μέγιστο για $x=\beta$ το $f(\beta)$.

β) Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,\alpha]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=[f(\alpha),+\infty)$. Επειδή $f(\alpha)<0$, το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(\Delta_1)$, οπότε υπάρχει μοναδικό, λόγω μονοτονίας, x_1 στο εσωτερικό του Δ_1 τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.

Στο διάστημα $\Delta_2=(\alpha,\beta)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x),\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)=(f(\alpha),f(\beta))$.

Επειδή $f(\alpha)<0$, $f(\beta)>0$, το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικό, λόγω μονοτονίας, x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$.Στο διάστημα $\Delta_3=[\beta,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_3)=(-\infty,f(\beta)]$. Επειδή $f(\beta)>0$, το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(\Delta_3)$, οπότε υπάρχει μοναδικό, λόγω μονοτονίας, x_3 στο εσωτερικό του Δ_3 τέτοιο, ώστε $f(x_3)=0$.Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες.

γ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[x, x+1]$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f(x+1)-f(x)$.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f ΄έχει μέγιστο το 2 για $x = x_0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) \le 2$. Επομένως και $f'(\xi) \le 2 \Leftrightarrow f(x+1)-f(x) \le 2$.

24579.α) i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = \dfrac{2}{x} - 1 = \dfrac{2-x}{x}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{x} \ge 0 \Leftrightarrow 2-x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 2$.

Για κάθε $x \in (0,2)$ είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x > 2$ είναι $f'(x) < 0$, η f είναι συνεχής άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2\ln x - x) = -\infty$, $f(2) = 2\ln 2 - 2$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2\ln x - x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(2\frac{\ln x}{x} - 1\right)\right] = -\infty$$ γιατί

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$. Στο διάστημα $\Delta_1 = (0,2]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (-\infty, 2\ln 2 - 2]$. Στο διάστημα $\Delta_1 = [2,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (-\infty, 2\ln 2 - 2]$.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f((0,+\infty)) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, 2\ln 2 - 2]$

iii. Από το σύνολο τιμών της f, προκύπτει ότι παρουσιάζει μέγιστο το 2ln2-2 για $x = 2$.

β) Αν $\kappa < 2\ln 2 - 2$ τότε υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,2)$ και μοναδικό $x_2 \in (2,+\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2) = \kappa$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στη περίπτωση αυτή.

Αν $\kappa = 2\ln 2 - 2$ τότε επειδή για κάθε $x \in (0,2) \cup (2,+\infty)$ είναι $f(x) < 2\ln 2 - 2$, η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς μία λύση τη $x = 2$.

Τέλος αν $\kappa > 2\ln 2 - 2$, τότε το κ δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της f οπότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ είναι αδύνατη.

28337.α) Η ημιευθεία ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{A\Gamma} = \frac{2+2}{-1-0} = -4$ και εξίσωση $y+2 = -4x \Leftrightarrow y = -4x-2$.

Η ημιευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB} = \frac{2+2}{1-0} = 4$ και εξίσωση $y+2 = 4x \Leftrightarrow y = 4x-2$, οπότε $f'(x) = \begin{cases} -4x-2, & x < 0 \\ 4x-2, & x \geq 0 \end{cases}$.

Για $x < 0$ είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x-2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ και για $x > 0$ είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x-2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Η C τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ και $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

β) Για κάθε $x < -\frac{1}{2}$ ή $x > \frac{1}{2}$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

γ) Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ και τοπικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

δ) Η ευθεία ΑΔ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{A\Delta} = \frac{0+2}{1-0} = 2$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της f στο Δ είναι το $f'(1) = 4 \cdot 1 - 2 = 2$. Επειδή $f'(1) = \lambda_{A\Delta}$, η ΑΔ εφάπτεται της C_f στο Δ.

28338.α) i. Επειδή η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 2$ που βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(2) = 0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_1 = 2$ έχει εξίσωση $y = f(2) \Leftrightarrow y = -32$.

ii. Επειδή η γραφική παράσταση της f ΄διέρχεται από το Α, είναι $f'(-2) = 0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_2 = -2$ έχει εξίσωση $y = f(-2) \Leftrightarrow y = 0$.

β)i. Επειδή η f ΄είναι πολυωνυμική συνάρτηση $2^{ου}$ βαθμού θα είναι της μορφής $f'(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0,\ x \in \mathbb{R}$. Επειδή η f΄ διέρχεται από το σημείο Β, είναι $f'(0) = -12 \Leftrightarrow \gamma = -12$.

Είναι $f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 2\beta - 12 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 6 = \beta$ (1)

Είναι $f'(2)=0 \Leftrightarrow 4\alpha+2\beta-12=0 \Leftrightarrow \beta=-2\alpha+6$ (2)
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $2\alpha-6=-2\alpha+6 \Leftrightarrow 4\alpha=12 \Leftrightarrow \alpha=3$, τότε από την (1) προκύπτει ότι $\beta=0$. Άρα $f'(x)=3x^2-12$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=3x^2-12 \Leftrightarrow f'(x)=\left(x^3-12x\right)' \Leftrightarrow$
$f(x)=x^3-12x+c,\ c\in\mathbb{R}$. Είναι $f(2)=-32 \Leftrightarrow 8-24+c=-32 \Leftrightarrow c=-16$,
άρα $f(x)=x^3-12x-16$, $x\in\mathbb{R}$

iii. $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 3x^2-12\geq 0 \Leftrightarrow 3x^2\geq 12 \Leftrightarrow x^2\geq 4 \Leftrightarrow |x|\geq 2 \Leftrightarrow x\leq -2$ ή $x\geq 2$
.
Για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x\in(-2,2)$ είναι $f'(x)<0$, η f είναι συνεχής οπότε είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2],[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-2,2]$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$, $f(2)=-32$ και $f(-2)=0$.
Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,-2]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=(-\infty,0]$. Επειδή το – 20 περιέχεται στο $f(\Delta_1)$, η εξίσωση $f(x)=-20$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1. Στο διάστημα $\Delta_2=(-2,2)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=(-32,0)$. Επειδή το – 20 περιέχεται στο $f(\Delta_2)$, η εξίσωση $f(x)=-20$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_2. Στο διάστημα $\Delta_3=[2,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_3)=[-32,+\infty)$. Επειδή το – 20 περιέχεται στο $f(\Delta_3)$, η εξίσωση $f(x)=-20$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_3. Τελικά η εξίσωση $f(x)=-20$ έχει τρείς διαφορετικές λύσεις.

23215.α) 1ος τρόπος: Επειδή η f ΄είναι συνεχής και διάφορη του μηδέν, διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα η f είναι γνησίως μονότονη οπότε είναι 1-1.
2ος τρόπος: Αν η f δεν ήταν 1-1 θα υπήρχαν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε όμως θα εφαρμόζονταν το θεώρημα Rolle για την f στο $[x_1,x_2]$ ή $[x_2,x_1]$, οπότε θα υπήρχε $\xi\in(x_1,x_2)$ ή (x_2,x_1) τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$ που είναι άτοπο. Άρα η f είναι 1-1.

β) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f στο [0,2], υπάρχει $\xi_1 \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{1+1}{2} = 2$, άρα υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$.

γ) i. Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε $0 < 2 \Leftrightarrow f(0) > f(2) \Leftrightarrow -1 > 1$ άτοπο. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι $f(0)f(2) < 0$ και η f είναι συνεχής στο [0,2], οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_o \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι η μοναδική της ρίζα.

δ) Για κάθε $x < x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x_0) = 0 \Leftrightarrow -f(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty, x_0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x > x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0) = 0 \Leftrightarrow -f(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[x_0, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_o.

29644.α) i. Η g είναι συνεχής στο [- 3, 2] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

ii. Έστω $A(\alpha,0), B(\beta,0), \alpha < 0, \beta > 0$. Είναι $g(\alpha) = f(\alpha) + \alpha = \alpha < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) + \beta = \beta > 0$, άρα $g(\alpha)g(\beta) < 0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο [α, β], σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(\alpha,\beta) \subseteq (-2,3)$.

β) Επειδή η f παρουσιάζει μέγιστο στο x = 0 το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του (-1, 2) και είναι παραγωγίσιμη, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(0) = 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο (-1, 2) ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = f'(x) + 1$. Είναι $g(0) = f(0) = 3$ και $g'(0) = f'(0) + 1 = 1$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$y - g(0) = g'(0)x \Leftrightarrow y - 3 = x \Leftrightarrow y = x + 3$.

29927.α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot \dfrac{1}{\ln x}\right) = 0 \cdot 0 = 0$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x \cdot \dfrac{1}{\ln x}\right) = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x = 0$ και $\ln x < 0$ για $x \in (0,1)$. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x \cdot \dfrac{1}{\ln x}\right) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = 0$ και

$\ln x > 0$ για $x \in (1,+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

β) i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ με $f'(x) = \dfrac{\ln x - x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e$.

Για κάθε $x \in (0,1)\cup(1,e)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > e$ είναι $f'(x) > 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$, $(1,e]$ και γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το

$f(e) = \dfrac{e}{\ln e} = e$.

ii. Στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x\to1^-} f(x), \lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right) = (-\infty, 0)$.

Στο διάστημα $\Delta_2 = (1,e]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = \left[f(e), \lim\limits_{x\to1^+} f(x)\right) = [e,+\infty)$

Στο διάστημα $\Delta_3 = (e,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_3) = \left(f(e), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (e,+\infty)$.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A) = f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3) = (-\infty,0)\cup[e,+\infty)$.

γ) $e^x = x^\alpha \Leftrightarrow \ln e^x = \ln x^\alpha \Leftrightarrow x = \alpha \ln x$..

Αν $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ τότε 1=0 άτοπο.

Αν $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ τότε $\dfrac{x}{\ln x} = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$

Αν $\alpha < 0$ τότε το α περιέχεται μόνο στο $f(\Delta_1)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Αν $\alpha \in [0,e)$ τότε το α δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της f, οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη στη περίπτωση αυτή.

Αν $\alpha = e$ τότε το α περιέχεται μόνο στο $f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα. Αν $\alpha > e$ τότε το α περιέχεται στα $f(\Delta_2), f(\Delta_3)$, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από τα Δ_1, Δ_2, οπότε έχει ακριβώς 2 ρίζες στη περίπτωση αυτή.

33642.α) i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = f'(x) - 2x = f(x) - x^2 = g(x)$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$g'(x) = g(x) \Leftrightarrow g(x) = ce^x \Leftrightarrow f(x) - x^2 = ce^x \Leftrightarrow f(x) = ce^x + x^2,\ c \in \mathbb{R}$.

Είναι $f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$, άρα $f(x) = e^x + x^2,\ x \in \mathbb{R}$.

β) i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = e^x + 2x$, $f''(x) = e^x + 2 > 0$ άρα η f ΄είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $f'(-1) = e^{-1} - 2 < 0,\ f'(0) = 1 > 0$, δηλαδή $f'(-1)f'(0) < 0$ και επειδή η f ΄ είναι συνεχής στο $[-1, 0]$,σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$, δηλαδή υπάρχει σημείο $M(x_o, f(x_o))$, $x_o \in (-1, 0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια. Το Μ είναι μοναδικό αφού η f ΄είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Η f ΄είναι γνησίως αύξουσα οπότε :

- για κάθε $x < x_0$ είναι $f'(x) < f'(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, x_0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.
- για κάθε $x > x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το m= $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2$.

Είναι $-1 < x_0 < 0 \Leftrightarrow 0 < x_0^2 < 1\ (1)$ και $e^{-1} < e^{x_0} < 1\ (2)$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι $e^{-1} < m < 2$.

27092.α) Για κάθε $x < 0$ ή $x > 3$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (0, 3)$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική, είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0], [3, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, 3]$.

β) Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = -1$ και τοπικό μέγιστο το $f(3) = 2$.

γ) Αφού η f είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού, η f ΄είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού. Έστω $f'(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$. Στο σχήμα βλέπουμε ότι:

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$, $f'(3) = 0 \Leftrightarrow 9\alpha + 3\beta = 0 \Leftrightarrow 3\beta = -9\alpha \Leftrightarrow \beta = -3\alpha$.Άρα η f ΄ είναι της μορφής $f'(x) = \alpha x^2 - 3\alpha x,\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{\alpha x^3}{3} - \frac{3\alpha x^2}{2} \right)' \Leftrightarrow$

$f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} - \frac{3\alpha x^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$. Είναι $f(0) = -1 \Leftrightarrow c = -1$ και

$f(3)=2 \Leftrightarrow \frac{\alpha\cdot 3^3}{3}-\frac{3\alpha\cdot 3^2}{2}-1=2 \Leftrightarrow 9\alpha-\frac{27\alpha}{2}=3 \Leftrightarrow 18\alpha-27\alpha=6 \Leftrightarrow$

$-9\alpha=6 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{2}{3}$. Τότε

$f(x)=\frac{-\frac{2}{3}x^3}{3}-\frac{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^2}{2}-1=-\frac{2x^3}{9}+x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=-1$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)=2$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta=(0,3)$, έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta)=(-1,2)$.

Αν $\alpha\in(-1,2)$, τότε υπάρχει, λόγω μονοτονίας μοναδικό $x_0\in(0,3)$ τέτοιο, ώστε

$f(x_0)=\alpha$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση στη περίπτωση αυτή.

Αν $\alpha\in(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$ τότε το α δεν περιέχεται στο $f(\Delta)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ είναι αδύνατη στο (0, 3).

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Είναι $\alpha^x+\beta^x\geq\gamma x+2 \Leftrightarrow \alpha^x+\beta^x-\gamma x-2\geq 0$ (2). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha^x+\beta^x-\gamma x-2$ για την οποία είναι $f(0)=0$, οπότε από τη (2) θα είναι $f(x)\geq f(0)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha+\beta^x\ln\beta-\gamma$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0\in\mathbb{R}$, συνεπώς από το Θ. Fermat είναι $f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln\alpha+\ln\beta-\gamma=0 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta)=\gamma \Leftrightarrow \alpha\beta=e^\gamma$. **Σωστή απάντηση Β.**

2. Είναι $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ και $f'(x)>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1-x>0 \Leftrightarrow 0<x<1$,

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x>1$ οπότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_1=1$ το $f(1)=0$

,συνεπώς $A(1,0)$. Επίσης $g'(x)=-x^2+\lambda x=x(\lambda-x)$ και

$g'(x)>0 \Leftrightarrow 0<x<\lambda$,

ενώ $g'(x)<0 \Leftrightarrow (x<0)$ ή $(x>\lambda)$. Η g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο $x_2=\lambda$ το $g(\lambda)=\lambda^3$ Άρα $B(\lambda,\lambda^3)$. Οπότε

$(AOB)=\frac{1}{2}(OA)\cdot\upsilon=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot y_B=\frac{1}{2}\lambda^3=4 \Leftrightarrow \lambda^3=8 \Leftrightarrow \lambda=2$.

Σωστή απάντηση Β.

3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=4x^3+3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$, $f''(x)=12x^2+6\alpha x+2\beta$

Είναι $f''(x)>0$ αφού $\Delta=12\left(3\alpha^2-8\beta\right)<0$ και $\alpha=12>0$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα και $f'(1)=4+3\alpha+2\beta+\gamma=0$

Για $x<1\Leftrightarrow f'(x)<f'(1)=0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$, ενώ για $x>1\Leftrightarrow f'(x)>f'(1)=0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,

Η f έχει ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=1+3\alpha+2\beta+\gamma+3=0$

Σωστή απάντηση Α.

4. Η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2+2\alpha x+\beta$. Αφού η f παρουσιάζει δυο ακρότατα τότε η $f'(x)$ έχει δυο ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.Αφού $\alpha=3>0$ τότε $f'(x)>0$ για $x<\rho_1$ ή $x>\rho_2$, ενώ $f'(x)<0$ για $\rho_1<x<\rho_2$.Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,\rho_1]$ με $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(\rho_1)\right]=\left(-\infty,f(\rho_1)\right]$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2=[\rho_1,\rho_2]$ με $f(A_2)=\left[f(\rho_2),f(\rho_1)\right]$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_3=[\rho_2,+\infty)$ με $f(A_3)=\left[f(\rho_2),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[f(\rho_2),+\infty\right)$

Η f έχει τοπικό μέγιστο για $x=\rho_1$ οπότε $f(\rho_1)=10$ και τοπικό ελάχιστο $x=\rho_2$ οπότε $f(\rho_2)=2$. Επειδή $\alpha\in f(A_1),\alpha\in f(A_2)$ και $\alpha\in f(A_3)$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες. **Σωστή απάντηση Δ.**

5. Η συνάρτηση $f(x)=x^3-\alpha x^2+3x+4\alpha$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2-2\alpha x+3$ η οποία είναι τριώνυμο ως προς x με $\Delta=4\alpha^2-36=4\left(\alpha^2-9\right)$

- Αν $\Delta>0\Leftrightarrow 4\left(\alpha^2-9\right)>0\Leftrightarrow\alpha<-3$ ή $\alpha>3$ τότε η $f'(x)$ έχει δυο ρίζες $\rho_1,\rho_2\,(\rho_1<\rho_2)$ και είναι $f'(x)>0\Leftrightarrow x<\rho_1$ ή $x>\rho_2$ και $f'(x)<0\Leftrightarrow\rho_1<x<\rho_2$ (αφού $\alpha=3>0$). Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=\rho_1$ και τοπικό ελάχιστό για $x=\rho_2$.
- Αν $\Delta=0\Leftrightarrow 4\left(\alpha^2-9\right)=0\Leftrightarrow\alpha=-3$ ή $\alpha=3$ τότε η $f'(x)$ έχει μια διπλή

ρίζα ρ και είναι $f'(x) \geq 0$ (αφού $\alpha = 3 > 0$) και μηδενίζεται μόνο για $x = \rho$ στο οποίο είναι συνεχής οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4(\alpha^2 - 9) < 0 \Leftrightarrow -3 < \alpha < 3$ τότε είναι $f'(x) > 0$

(αφού $\alpha = 3 > 0$), οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα. Συνεπώς , η f δεν παρουσιάζει ακρότατα όταν $\alpha \in [-3,3]$.

Σωστή απάντηση Β.

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Λ	**2.** Λ	**3.** Λ	**4.** Λ	**5.** Λ	**6.** Λ	**7.** Λ	**8.** Λ	**9.** Σ
10. Λ	**11.** Λ	**12.** Λ	**13.** Λ	**14.** Σ	**15.** Σ	**16.** Λ	**17.** Σ	**18.** Λ
19. Λ	**20.** Σ	**21.** Σ	**22.** Σ	**23.** Σ	**24.** Σ	**25.** Λ	**26.** Λ	**27.** Λ
28. Σ	**29.** Λ	**30.** Λ	**31.** Σ					

29. Προβλήματα ακροτάτων

Προβλήματα οικονομίας

5. α) Έστω f η συνάρτηση κέρδους. Τότε
$f(x)=x(5000-2x)-1000x-100=-2x^2+4000x-100,\ x\geq 0$.
$f'(x)=-4x+4000\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1000$.
Για κάθε $x\in(0,1000)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,1000]$ και για κάθε $x>1000$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[1000,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο για $x=1000$ προϊόντα.
β) $f(1000)=-2.000.000+4.000.000-100=1.999.900$ ευρώ.
γ) Είναι $F(x)=-2x^2+4000x-100-400x=-2x^2+3600x-100,\ x>0$
$F'(x)=-4x+3600\geq 0\Leftrightarrow x\leq 900$. Είναι $F\nearrow[0,900]$ και $\searrow[900,+\infty)$, έχει μέγιστο για $x=900$.

6. α) Έστω ότι πωλούνται x βιβλία μετά από τα 200 πρώτα. Τότε οι συνολικές πωλήσεις θα είναι $200+x$ και η τιμή πώλησης κάθε αντιτύπου θα είναι $y=15-\frac{x}{20}$ ευρώ και το κέρδος από τη πώληση του θα είναι $y-3$ ευρώ.
β) Το συνολικό κέρδος του βιβλιοπωλείου από τη πώληση των $200+x$ αντιτύπων είναι $f(x)=(200+x)\left(12-\frac{x}{20}\right)=-\frac{x^2}{20}+2x+2400$.
$f'(x)=-\frac{x}{10}+2\geq 0\Leftrightarrow x\leq 20$. Είναι $f\nearrow[0,20]$ και $\searrow[20,+\infty)$. Το κέρδος γίνεται μέγιστο για $x=20$, δηλαδή από τη πώληση 220 αντιτύπων.

7. α) Η $f(t)=\frac{e^{t-1}}{e^{t-1}-t+1}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με παράγωγο $f'(t)=\frac{e^{t-1}\left(e^{t-1}-t+1\right)-e^{t-1}\left(e^{t-1}-1\right)}{\left(e^{t-1}-t+1\right)^2}=$
$=\frac{\cancel{e^{2(t-1)}}-(t-1)e^{t-1}-\cancel{e^{2(t-1)}}+e^{t-1}}{\left(e^{t-1}-t+1\right)^2}=\frac{e^{t-1}(1-t+1)}{\left(e^{t-1}-t+1\right)^2}=\frac{e^{t-1}(2-t)}{\left(e^{t-1}-t+1\right)^2}$
Επειδή $e^{t-1}>0$ και $\left(e^{t-1}-t+1\right)^2>0$ τότε το πρόσημο τη παραγώγου εξαρτάται από το $2-t$. Είναι $f'(t)>0$ για κάθε $t\in(1,2)$ και $f'(t)<0$ για κάθε $t\in(2,3)$, άρα $f\nearrow[1,2]$ και $f\searrow[2,3]$. Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $t=2$ το

$f(2)=\frac{e}{e-1}$. Επίσης παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $t=1$ και $t=3$ τα

$f(1)=1$ και $f(3)=\frac{e^2}{e^2-2}$.

β) Για να μπορεί να αγοράσει ανά πάσα χρονική στιγμή πρέπει να διαθέτει κεφάλαιο ίσο με το μέγιστο της f δηλαδή όσο και η μέγιστη τιμή της μετοχής.

Δηλαδή $\frac{e}{e-1}$ εκατομμύρια ευρώ.

γ) Θα πρέπει να αγοράσει όταν η μετοχή θα έχει την μικρότερη αξία. Επειδή $\frac{e}{e-1}>1$ τότε $f(2)>f(1)$ άρα η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(0)=1$. Δηλαδή πρέπει να αγοράσει την $t=1$, επομένως όταν ξεκινάει η μεταβολή. Τότε θα έχει κεφάλαιο ίσο με 1 εκατομμύριο ευρώ.

Προβλήματα αριθμητικής

8. Έστω x, y οι δύο θετικοί αριθμοί. Τότε $xy=16\Leftrightarrow y=\frac{16}{x}$. Έστω $f(x)=x+y=x+\frac{16}{x}$, $x>0$. Είναι $f'(x)=1-\frac{16}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow \frac{16}{x^2}\leq 1\Leftrightarrow$ $x^2\geq 16\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\geq 4$. Είναι $f\searrow(0,4]$, $\nearrow[4,+\infty)$ και η f έχει ελάχιστο για $x=4$. Οι δύο αριθμοί είναι το 4 και το $y=\frac{16}{4}=4$.

9. Έστω x, y οι δύο αριθμοί με $x+y=20\Leftrightarrow y=20-x$. Έστω $f(x)=xy=x(20-x)=20x-x^2$, $x\in\mathbb{R}$. $f'(x)=20-2x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 10$. Για κάθε $x<10$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,10]$ και για κάθε $x>10$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[10,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο για $x=10$. Οι δύο αριθμοί είναι το 10 και το $y=20-10=10$.

10. Έστω x, y οι δύο θετικοί αριθμοί με $x+y=20\Leftrightarrow y=20-x$. Είναι $y>0\Leftrightarrow 20-x>0\Leftrightarrow x<20$.

Τότε $x^2+y^2=x^2+(20-x)^2=x^2+400-40x+x^2=2x^2-40x+400$.

Έστω $f(x)=2x^2-40x+400$, $x\in(0,20)$. Είναι $f'(x)=4x-40\geq 0\Leftrightarrow x\geq 10$.

Για κάθε $x\in(0,10)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(0,10]$ και για κάθε $x\in(10,20)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[10,20)$. Η f έχει ελάχιστο για $x=10$ και $y=20-10=10$.

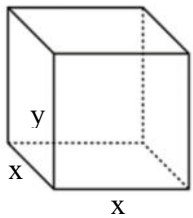
Προβλήματα Γεωμετρίας

11. Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου με $xy = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$. Η περίμετρός του είναι: $2x + 2y = 2x + \frac{200}{x}$. Έστω $f(x) = 2x + \frac{200}{x}$, $x > 0$. Είναι

$f'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 200 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 100 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x \geq 10$

.Για κάθε $x \in (0,10)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0,10]$ και για κάθε $x > 10$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [10, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο για $x = 10\,\text{m}$ και $y = \frac{100}{10} = 10\,\text{m}$.

12. Έστω x dm η πλευρά της βάσης και y dm το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Είναι $V = x^2 y = 64 \Leftrightarrow y = \frac{64}{x^2}$.



Οι 4 παράπλευρες επιφάνειες είναι ορθογώνια με εμβαδό xy η κάθε μία, ενώ κάθε βάση του είναι τετράγωνο με εμβαδό x^2, οπότε το εμβαδόν του είναι $E(x) = 4xy + 2x^2 = 4x\frac{64}{x^2} + 2x^2 = \frac{256}{x} + 2x^2$, $x > 0$.

Είναι $E'(x) = -\frac{256}{x^2} + 4x = \frac{-256 + 4x^3}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$.Για κάθε $x \in (0,4)$ είναι $E'(x) < 0 \Rightarrow E \searrow (0,4]$ και για κάθε $x > 4$ είναι $E'(x) > 0 \Rightarrow E \nearrow [4, +\infty)$.

Η E έχει μέγιστο για $x = 4\text{cm}$ και $y = \frac{64}{4^2} = 4\text{cm}$.

13. Έστω x dm η πλευρά της βάσης και y dm το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Οι 4 παράπλευρες επιφάνειες είναι ορθογώνια με εμβαδό xy η κάθε μία, ενώ η βάση του είναι τετράγωνο με εμβαδό x^2, οπότε το εμβαδόν του είναι $E = 4xy + x^2 = 48 \Leftrightarrow y = \frac{48 - x^2}{4x}$.

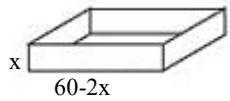
Είναι $y > 0 \Leftrightarrow \frac{48 - x^2}{4x} > 0 \Leftrightarrow 48 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 48 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x < 4\sqrt{3}$

$V(x) = x^2 y = x^{\not 2} \cdot \frac{48 - x^2}{4\not x} = 12x - \frac{1}{4}x^3$, $x \in (0, 4\sqrt{3})$.

Είναι $V'(x) = 12 - \frac{3}{4}x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$. Για $x \in (0,4)$ είναι $V'(x) > 0 \Rightarrow V \nearrow (0,4]$ και για $x \in (4, 4\sqrt{3})$ είναι $V'(x) < 0 \Rightarrow V \searrow [4, 4\sqrt{3})$. Η V έχει μέγιστο για

$x=4\,\text{dm}$ και $y=\dfrac{48-4^2}{4\cdot 4}=2\text{dm}$. Ο μέγιστος όγκος είναι $V(4)=32\text{dm}^3$.

14. Έστω x cm είναι το μήκος της πλευράς των τετραγώνων που θα αποκοπούν, τότε ο όγκος V(x) του δοχείου είναι $V(x)=x(60-2x)^2$ με



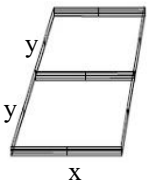
$x>0,\ 60-2x>0\Leftrightarrow x<30$ άρα $x\in(0,30)$.

Είναι $V'(x)=(60-2x)(60-6x)$ και

$V'(x)\geq 0\Leftrightarrow (60-2x)(60-6x)\geq 0 \overset{x\in(0,30)}{\Leftrightarrow} 60-6x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 10$.

Για $x\in(0,10)$ είναι $V'(x)>0\Rightarrow V\nearrow(0,10]$ και για $x\in(10,30)$ είναι $V'(x)<0\Rightarrow V\searrow[10,30)$. Η V γίνεται μέγιστη για $x=10\,\text{cm}$, τότε οι διαστάσεις του είναι 40cm, 40cm και 10 cm.

15. Αν x m το πλάτος και 2y m το μήκος του ορθογωνίου, τότε το ζητούμενο κόστος είναι $(2x+4y)\cdot 9+6x$ €. Είναι



$x\cdot 2y=1600\Leftrightarrow y=\dfrac{800}{x}$. Το κόστος είναι

$K(x)=\left(2x+4\dfrac{800}{x}\right)\cdot 9+6x=24x+\dfrac{28800}{x}$, $x>0$.

Είναι $K'(x)=24-\dfrac{28800}{x^2}=\dfrac{24x^2-28800}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow 24x^2\geq 28800\Leftrightarrow$

$x^2\geq 1200\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\geq 20\sqrt{3}$. Για $x\in\left(0,20\sqrt{3}\right)$ είναι $K'(x)<0\Rightarrow K\searrow\left(0,20\sqrt{3}\right]$ και για $x>20\sqrt{3}$ είναι $K'(x)>0\Rightarrow K\nearrow\left[20\sqrt{3},+\infty\right)$. Το κόστος γίνεται ελάχιστο για $x=20\sqrt{3}\,\text{m}$ και $y=\dfrac{800}{20\sqrt{3}}=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}\text{m}$.

16. Έστω R η ακτίνα του κύκλου και x η πλευρά του τετραγώνου, τότε $2\pi R+4x=\lambda\Leftrightarrow R=\dfrac{\lambda-4x}{2\pi}$ με $R>0\Leftrightarrow\dfrac{\lambda-4x}{2\pi}>0\Leftrightarrow x<\dfrac{\lambda}{4}$. Αν E_1 το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και E_2 το εμβαδόν του τετραγώνου τότε

$E_1=\pi R^2=\pi\left(\dfrac{\lambda-4x}{2\pi}\right)^2=\cancel{\pi}\cdot\dfrac{(\lambda-4x)^2}{4\pi^{\cancel{2}}}=\dfrac{(\lambda-4x)^2}{4\pi}$ και $E_2=x^2$. Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι $E(x)=E_1+E_2=\dfrac{(\lambda-4x)^2}{4\pi}+x^2$,

$x \in \left(0, \frac{\lambda}{4}\right)$. $E'(x) = \frac{2(\lambda - 4x)(-4)}{4\pi} + 2x = \frac{2x(\pi+4) - 2\lambda}{\pi}$

$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x(\pi+4) - 2\lambda}{4\pi} \geq 0 \Leftrightarrow 2x(\pi+4) - 2\lambda \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{\lambda}{\pi+4}$.

Όταν $0 < x < \frac{\lambda}{\pi+4}$ είναι $E'(x) < 0 \Rightarrow E \searrow \left(0, \frac{\lambda}{\pi+4}\right]$ και όταν $x \in \left(\frac{\lambda}{\pi+4}, \frac{\lambda}{4}\right)$

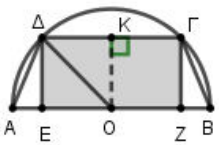
τότε $E'(x) > 0 \Rightarrow E \nearrow \left[\frac{\lambda}{\pi+4}, \frac{\lambda}{4}\right)$. Η Ε παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{\lambda}{4+\pi}$.

Τότε $R = \frac{\lambda - 4\frac{\lambda}{\pi+4}}{2\pi} = \frac{\frac{\pi\lambda + 4\lambda - 4\lambda}{\pi+4}}{2\pi} = \frac{\lambda}{2(\pi+4)} = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow 2R = x$.

Αυξημένης δυσκολίας

17. Έστω ότι $(EZ) = (\Gamma\Delta) = 2x$ και ΟΚ το απόστημα της χορδής ΓΔ. Τότε ΚΔ=ΚΓ, οπότε και ΕΟ=ΟΖ, άρα ΕΟ=ΟΖ= x .
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΟ έχουμε:

$\Delta E^2 = O\Delta^2 - OE^2 = \rho^2 - x^2 \Leftrightarrow \Delta E = \sqrt{\rho^2 - x^2}$



Είναι $E(x) = (\Gamma\Delta EZ) = 2x\sqrt{\rho^2 - x^2}$, $x \in (0, \rho)$.

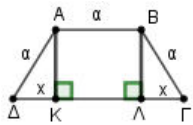
$E'(x) = \frac{\rho^2 - 2x^2}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{\rho^2}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{\rho\sqrt{2}}{2}$.

Η Ε είναι $\nearrow$ στο $\left(0, \frac{\rho\sqrt{2}}{2}\right]$ και $\searrow$ στο $\left[\frac{\rho\sqrt{2}}{2}, \rho\right)$. Έχει μέγιστο για $x = \frac{\rho\sqrt{2}}{2}$,

τότε $(DE) = \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\rho\sqrt{2}}{2}$. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι: $\frac{\rho\sqrt{2}}{2}$,

$\rho\sqrt{2}$.

18. Έστω ΑΚ, ΒΛ ύψη του τραπεζίου και έστω
$\Delta K = \Gamma\Lambda = x$. Είναι $AK^2 = \alpha^2 - x^2 \Leftrightarrow AK = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$.



Είναι $(AB\Gamma\Delta) = E(x) = \frac{(\alpha + \alpha + 2x)\sqrt{\alpha^2 - x^2}}{2} =$

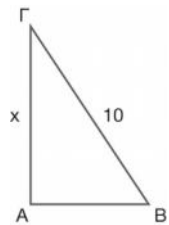
$(x + \alpha)\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, $x > 0$

$E'(x) = \frac{\alpha^2 - 2x^2 - \alpha x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + \alpha x - \alpha^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2(x + \alpha)\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{\alpha}{2}$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\alpha}{2}\right)$ είναι $E'(x) < 0 \Rightarrow E \searrow \left(0, \frac{\alpha}{2}\right]$ και για κάθε $x > \frac{\alpha}{2}$ είναι $E'(x) > 0 \Rightarrow E \nearrow \left[\frac{\alpha}{2}, +\infty\right)$. Το εμβαδόν του ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο για $x = \frac{\alpha}{2}$.

Τότε $\Gamma\Delta = 2\alpha$ και $AK = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

19.α) Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Gamma = 10$, $A\Gamma = x$.



Τότε $AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{100 - x^2}$

$(AB\Gamma) = E(x) = \frac{1}{2} x\sqrt{100 - x^2}$, $x \in (0,10)$. Είναι

$$E'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{100 - x^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{100 - x^2}}\right) = \frac{100 - 2x^2}{2\sqrt{100 - x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$x^2 \leq 50 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x \leq 5\sqrt{2}$. Για κάθε $x < 5\sqrt{2}$ είναι $E'(x) > 0 \Rightarrow E \nearrow \left(0, 5\sqrt{2}\right]$ και για κάθε $x \in \left(5\sqrt{2}, 10\right)$ είναι $E'(x) < 0 \Rightarrow E \searrow \left[5\sqrt{2}, 10\right)$. Το εμβαδό γίνεται μέγιστο όταν $A\Gamma = 5\sqrt{2}$, και $AB = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2}$.

β) Έστω $P(x) = x + \sqrt{100 - x^2} + 10$, $x \in (0,10)$ η περίμετρος του τριγώνου. Είναι

$$P'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{\sqrt{100 - x^2} - x}{\sqrt{100 - x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{100 - x^2} \geq x \Leftrightarrow 100 - x^2 \geq x^2 \Leftrightarrow$$

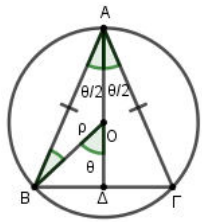
$2x^2 \leq 100 \Leftrightarrow x^2 \leq 50 \Leftrightarrow 0 < x \leq 5\sqrt{2}$. Για κάθε $x \in \left(0, 5\sqrt{2}\right)$ είναι

$P'(x) > 0 \Rightarrow P \nearrow \left(0, 5\sqrt{2}\right]$ και για κάθε $x \in \left(5\sqrt{2}, 10\right)$ είναι

$P'(x) < 0 \Rightarrow P \searrow \left[5\sqrt{2}, 10\right)$. Μέγιστο για $A\Gamma = x = 5\sqrt{2}$, τότε

$AB = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2}$.

20. Έστω ότι $AB = A\Gamma$, $A = \theta$ και $A\Delta$ το ύψος του τριγώνου. Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές, το Δ είναι μέσο της ΒΓ. Το τρίγωνο ΟΑΒ έχει ΟΑ=ΟΒ=ρ, οπότε είναι ισοσκελές, άρα $O\hat{A}B = O\hat{B}A = \frac{\theta}{2}$. Η γωνία $B\hat{O}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΟΒ, οπότε $B\hat{O}\Delta = O\hat{A}B + O\hat{B}A = \theta$. Στο τρίγωνο ΒΟΔ είναι



$\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{O\Delta}{OB}=\dfrac{O\Delta}{\rho}\Leftrightarrow O\Delta=\rho\sigma\upsilon\nu\theta$ και $\eta\mu\theta=\dfrac{B\Delta}{OB}=\dfrac{B\Delta}{\rho}\Leftrightarrow B\Delta=\rho\eta\mu\theta$.

Τότε $A\Delta=OA+O\Delta=\rho+\rho\sigma\upsilon\nu\theta=\rho\left(1+\sigma\upsilon\nu\theta\right)$ και $B\Gamma=2B\Delta=2\rho\eta\mu\theta$

Για το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει:

$E=\dfrac{1}{2}B\Gamma\cdot A\Delta=\dfrac{1}{2}2\rho\eta\mu\theta\cdot\rho\left(1+\sigma\upsilon\nu\theta\right)=\rho^2\eta\mu\theta\left(1+\sigma\upsilon\nu\theta\right),\ \theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Έστω $E\left(\theta\right)=\rho^2\eta\mu\theta\left(\sigma\upsilon\nu\theta+1\right),\ \theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Τότε, $E'\left(\theta\right)=\rho^2\left(2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1\right)=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=-1$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{1}{2}$. Τότε

$E'\left(\theta\right)=2\rho^2\left(\sigma\upsilon\nu\theta+1\right)\left(\sigma\upsilon\nu\theta-\dfrac{1}{2}\right)$.Είναι

$E'\left(\theta\right)\geq0\Leftrightarrow2\rho^2\left(\sigma\upsilon\nu\theta+1\right)\left(\sigma\upsilon\nu\theta-\dfrac{1}{2}\right)\geq0\overset{\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu\theta-\dfrac{1}{2}\geq0\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\theta\geq\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow\theta\leq\dfrac{\pi}{3}$

θ	0		π/3		π/2
E′		+		−	
E		↗		↘	

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $\theta=\dfrac{\pi}{3}$, τότε:

$AB=A\Gamma=2\rho\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}=2\rho\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\rho\sqrt{3}$ και τότε το

τρίγωνο είναι ισόπλευρο, οπότε και $B\Gamma=\rho\sqrt{3}$.

Προβλήματα καμπυλών

21.Έστω $M\left(x,y\right)$ με $y=2x-5$, δηλαδή $M\left(x,2x-5\right)$. Είναι

$\left(OM\right)=\sqrt{x^2+\left(2x-5\right)^2}=\sqrt{5x^2-20x+25}$. Έστω

$d\left(x\right)=\sqrt{5x^2-20x+25},\ x\in\mathbb{R}$,

Είναι $d'\left(x\right)=\dfrac{10x-20}{2\sqrt{5x^2-20x+25}}\geq0\Leftrightarrow x\geq2$. Για κάθε $x<2$ είναι

$d'\left(x\right)<0\Rightarrow d\searrow\left(-\infty,2\right]$ και για κάθε $x>2$ είναι $d'\left(x\right)>0\Rightarrow d\nearrow\left[2,+\infty\right)$.

Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη για $x=2$, τότε $M\left(2,-2\right)$.

22.Έστω $M\left(x,y\right)\equiv\left(x,e^x+1\right)$ σημείο της C_f.Είναι

$(AM)=\sqrt{(x-1)^2+(e^x+1-1)^2}=\sqrt{x^2-2x+1+e^{2x}}$.Έστω

$g(x)=\sqrt{x^2-2x+1+e^{2x}}$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=\dfrac{x-1+e^{2x}}{\sqrt{x^2-2x+1+e^{2x}}}$.Για κάθε

$x>0$ είναι $2x>0\Leftrightarrow e^{2x}>1\Leftrightarrow e^{2x}-1>0$, άρα $x+e^{2x}-1>0\Rightarrow$

$g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow[0,+\infty)$ και για κάθε $x<0$ είναι $x+e^{2x}-1<0\Rightarrow$

$g'(x)<0\Rightarrow g\searrow(-\infty,0]$. Η g έχει ελάχιστο για $x=0$, τότε $M(0,2)$.

23.Η κατακόρυφη απόσταση των C_f, C_g είναι

$h(x)=f(x)-g(x)=x^3-2x^2+x+5-(x^3-3x^2+9x-15)=x^2-8x+20$,

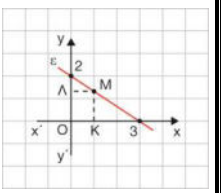
$x\in\mathbb{R}$.Είναι $h'(x)=2x-8\geq 0\Leftrightarrow x\geq 4$. Η h είναι $\searrow$ στο $(-\infty,4]$ και $\nearrow$ στο $[4,+\infty)$. Έχει ελάχιστο το $h(4)=4$.

24. $E(x)=(OK\Lambda M)=xy=x\dfrac{6-2x}{3}=\dfrac{6x-2x^2}{3}$, $x\in(0,3)$.

$E'(x)=\dfrac{6-4x}{3}\geq 0\Leftrightarrow x\leq\dfrac{3}{2}$. Η E είναι $\nearrow$ στο $\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$ και

$\searrow\left[\dfrac{3}{2},3\right)$, έχει μέγιστο για $x=\dfrac{3}{2}$. Τότε

$2\dfrac{3}{2}+3y=6\Leftrightarrow y=1$ και $M\left(\dfrac{3}{2},1\right)$.

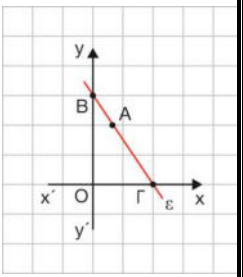


25.Έστω λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. Επειδή η ε τέμνει τους θετικούς ημιάξονες, θα σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον x΄x, άρα $\lambda<0$.Τότε

ε: $y-4=\lambda(x-2)\Leftrightarrow y=\lambda x-2\lambda+4$.

Για $x=0$ είναι $B(0,-2\lambda+4)$ και για $y=0$ είναι

$\Gamma\left(\dfrac{2\lambda-4}{\lambda},0\right)$.



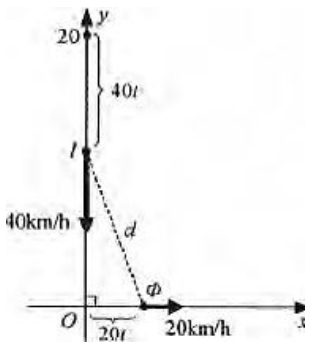
$E(\lambda)=\dfrac{1}{2}(OB)(O\Gamma)=-\dfrac{(4-2\lambda)^2}{2\lambda}$, $\lambda<0$. Είναι

$E'(\lambda)=-\dfrac{-4(4-2\lambda)2\lambda-2(4-2\lambda)^2}{4\lambda^2}=\dfrac{(4-2\lambda)(4+2\lambda)}{2\lambda^2}\geq 0\overset{\lambda<0}{\Leftrightarrow}4+2\lambda\geq 0\Leftrightarrow$

$\lambda \geq -2$.Για κάθε $\lambda \in (-2,0)$ είναι $E'(\lambda) > 0 \Rightarrow E \nearrow [-2,0)$ και για κάθε $\lambda < -2$ είναι $E'(\lambda) < 0 \Rightarrow E \searrow (-\infty,-2]$. Το εμβαδόν του ΟΒΓ γίνεται ελάχιστο για $\lambda = -2$, τότε ε: $y = -2x + 8$.

26. $x'(t) = \dfrac{3-6t^3}{(1+t^3)^2} \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Είναι $x \nearrow \left[0, \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$ και $\searrow \left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right)$. Έχει μέγιστο το $x\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \dfrac{\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}}{1+\dfrac{1}{2}} = \sqrt[3]{4}$, άρα $x(t) \leq \sqrt[3]{4}$ και όμοια $y(t) \leq \sqrt[3]{4}$.

27. Έστω Ι και Φ οι θέσεις των δύο πλοίων μετά από t ώρες, τότε $OI = 20 - 40t$ και $O\Phi = 20t$.Η μεταξύ τους απόσταση είναι:



$d(t) = \sqrt{OI^2 + O\Phi^2} = \sqrt{(20-40t)^2 + 400t^2} \Leftrightarrow$

$d(t) = \sqrt{2000t^2 - 1600t + 400},\ t \geq 0$.

Είναι $d'(t) = \dfrac{4000t - 1600}{2\sqrt{2000t^2 - 1600t + 400}}$ και

$d'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 4000t - 1600 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \dfrac{2}{5}$.

Για $t \in \left(0, \dfrac{2}{5}\right)$ είναι $d'(t) < 0 \Rightarrow d \searrow \left[0, \dfrac{2}{5}\right]$ και για $t > \dfrac{2}{5}$ είναι $d'(t) > 0 \Rightarrow d \nearrow \left[\dfrac{2}{5}, +\infty\right)$. Η απόσταση d των δύο πλοίων γίνεται ελάχιστη τη χρονική στιγμή $t = \dfrac{2}{5}h$, τότε η απόστασή τους είναι

$d\left(\dfrac{2}{5}\right) = \sqrt{\left(20 - 40 \cdot \dfrac{2}{5}\right)^2 + 400\left(\dfrac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{80} < 10$, οπότε θα έχουν οι άνθρωποι των δύο πλοίων οπτική επαφή σε κάποια στιγμή.

Αυξημένης δυσκολίας

28.α) Έστω $M(\xi, f(\xi))$ τότε η απόσταση του Ο από την C_f δίνεται από την συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=\dfrac{x+f(x)f'(x)}{\sqrt{x^2+f^2(x)}}$. Επειδή η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο ξ τότε $g'(\xi)=0\Leftrightarrow \xi+f(\xi)f'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)f'(\xi)=-\xi$.

Η (ΟΜ) έχει κλίση $\lambda_{OM}=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$ και η ε έχει κλίση $\lambda_{\varepsilon}=f'(\xi)$

Άρα $\lambda_{OM}\lambda_{\varepsilon}=\dfrac{f(\xi)f'(\xi)}{\xi}=\dfrac{-\xi}{\xi}=-1\Leftrightarrow OM\perp\varepsilon$.

β) Είναι $M(1,1)$ άρα $\lambda_{OM}=1$ επομένως $\lambda_{\varepsilon}=-1\Leftrightarrow f'(1)=-1$.

Έστω σημείο $A(x_0,y_0)$ τότε η απόσταση του Α από την C_f δίνεται από την συνάρτηση $h(x)=\sqrt{(x-x_0)^2+(f(x)-y_0)^2}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=\dfrac{x-x_0+(f(x)-y_0)f'(x)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(f(x)-y_0)^2}}$.

Επειδή η h παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 είναι $h'(1)=0\Leftrightarrow$

$\dfrac{1-x_0+(f(1)-y_0)f'(1)}{\sqrt{(1-x_0)^2+(f(1)-y_0)^2}}=0\Leftrightarrow 1-x_0+(f(1)-y_0)f'(1)=0\Leftrightarrow$

$1-x_0-(1-y_0)=0\Leftrightarrow 1-x_0-1+y_0=0\Leftrightarrow x_0=y_0$.

Άρα $A(x_0,x_0)$ και ο γεωμετρικός τόπος του είναι η $y=x$.

29.α) Είναι $(AM)=\sqrt{x^2+\alpha^2}$ και $(MB)=\sqrt{(x-2)^2+\beta^2}$

Είναι $συνω=\dfrac{(OM)}{(AM)}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}$ και $συνφ=\dfrac{(MB')}{(MB)}=\dfrac{2-x}{\sqrt{(x-2)^2+\beta^2}}$ όπου Β΄ είναι η προβολή του Β στον άξονα x΄x δηλαδή Β(2,0).

Άρα το συνολικό μήκος είναι $d(x)=\sqrt{x^2+\alpha^2}+\sqrt{(x-2)^2+\beta^2}$, $x>0$

Η d είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$d'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}+\dfrac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+\beta^2}}$ και έχει ελάχιστο στο $\kappa>0$ άρα από το θεώρημα Fermat είναι: $d'(\kappa)=0\Leftrightarrow \dfrac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\alpha^2}}=-\dfrac{\kappa-2}{\sqrt{(\kappa-2)^2+\beta^2}}\Leftrightarrow$

$συνω=συνφ\Leftrightarrow \omega=\varphi$

β) Έστω $M(\kappa,0)$. Η ΒΜ έχει κλίση ίση με εφφ ενώ η ΑΜ έχει κλίση ίση με $\varepsilon\varphi(180-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega=-\varepsilon\varphi\varphi$ άρα έχουν αντίθετες κλίσεις.

Έστω $\lambda=\varepsilon\varphi\varphi>0$ τότε (ΒΜ): $y-0=\lambda(x-\kappa)\Leftrightarrow y=\lambda(x-\kappa)$ και (ΑΜ): $y-0=-\lambda(x-\kappa)\Leftrightarrow y=-\lambda(x-\kappa)$. Άρα παριστάνουν την συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}-\lambda(x-\kappa)\,,\ x<\kappa\\ \lambda(x-\kappa)\,,\ x\geq\kappa\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=\lambda|x-\kappa|\,,\ x\in\mathbb{R}$$

Σύνθετες ασκήσεις

30.α) Είναι $E=\frac{1}{2}x\cdot(A\Gamma)\Leftrightarrow\frac{1}{2}x\cdot(A\Gamma)=3\Leftrightarrow(A\Gamma)=\frac{6}{x}$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2=x^2+\left(\frac{6}{x}\right)^2\Leftrightarrow B\Gamma=\sqrt{x^2+\frac{36}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^4+36}{x^2}}\Leftrightarrow$$

$B\Gamma=\frac{\sqrt{x^4+36}}{x}$. Η περίμετρος είναι:

$$P(x)=AB+A\Gamma+B\Gamma=x+\frac{6}{x}+\frac{\sqrt{x^4+36}}{x}=x+\frac{6+\sqrt{x^4+36}}{x},\ x>0$$

β) Η συνάρτηση Ρ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$P'(x)=1+\frac{\frac{\cancel{4}^{2}x^3}{\cancel{2}\sqrt{x^4+36}}\cdot x-\left(6+\sqrt{x^4+36}\right)}{x^2}=\frac{x^2+\frac{2x^4}{\sqrt{x^4+36}}-6-\sqrt{x^4+36}}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$P'(x)=\frac{\frac{x^2\sqrt{x^4+36}+2x^4-6\sqrt{x^4+36}-\left(\sqrt{x^4+36}\right)^2}{\sqrt{x^4+36}}}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$P'(x)=\frac{x^2\sqrt{x^4+36}+2x^4-6\sqrt{x^4+36}-x^4-36}{x^2\sqrt{x^4+36}}\Leftrightarrow$$

$$P'(x)=\frac{x^2\sqrt{x^4+36}+x^4-6\sqrt{x^4+36}-36}{x^2\sqrt{x^4+36}}\Leftrightarrow$$

$$P'(x)=\frac{\sqrt{x^4+36}\left(x^2-6\right)+\left(x^2-6\right)\left(x^2+6\right)}{x^2\sqrt{x^4+36}}=\frac{\left(x^2-6\right)\left(\sqrt{x^4+36}+x^2+6\right)}{x^2\sqrt{x^4+36}}$$

$$P'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x^2-6\right)\left(\sqrt{x^4+36}+x^2+6\right)}{x^2\sqrt{x^4+36}}\geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2-6\geq 0 \Leftrightarrow x^2\geq 6 \Leftrightarrow x\geq \sqrt{6}\,.$$

Για κάθε $x\in\left(0,\sqrt{6}\right)$ είναι $P'(x)<0$ και επειδή η P είναι συνεχής στο $\left(0,\sqrt{6}\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in\left(\sqrt{6},+\infty\right)$ είναι $P'(x)>0$ και επειδή η P είναι συνεχής στο $\left[\sqrt{6},+\infty\right)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η περίμετρος P γίνεται ελάχιστη για $x=\sqrt{6}\text{cm}$. Τότε

$$A\Gamma=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\text{cm} \text{ και } B\Gamma=\sqrt{6+6}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\text{cm}\,.$$

γ) i. Είναι $x'(t)=0,5\Leftrightarrow x(t)=0,5t+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Την χρονική στιγμή t=0 είναι $x(0)=1\Leftrightarrow c=1$, οπότε $x(t)=0,5t+1,\ t\geq 0$.

Την χρονική στιγμή t_0 που AB=3cm, ισχύει ότι

$x(t_0)=3\Leftrightarrow 0,5t_0+1=3\Leftrightarrow 0,5t_0=2\Leftrightarrow t_0=4$, άρα $t_0=4\sec$.

Είναι $\varepsilon\varphi B=\frac{A\Gamma}{AB}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{\frac{6}{x(t)}}{x(t)}=\frac{6}{x^2(t)}$ και

$$\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)'=\left(\frac{6}{x^2(t)}\right)'\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=-\frac{12}{x^3(t)}x'(t)\Leftrightarrow .$$

$\theta'(t)=-\frac{12}{x^3(t)}x'(t)\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)$. Είναι $\theta'(4)=-\frac{12}{x^3(4)}x'(4)\sigma\upsilon\nu^2\theta(4)$.

Την χρονική στιγμή t=4 είναι $B\Gamma=\frac{\sqrt{x^4(4)+36}}{x(4)}=\frac{\sqrt{3^4+36}}{3}=\frac{\sqrt{117}}{3}$ και

$\sigma\upsilon\nu\theta(4)=\frac{x(4)}{B\Gamma(4)}=\frac{3}{\frac{\sqrt{117}}{3}}=\frac{9}{\sqrt{117}}$, άρα

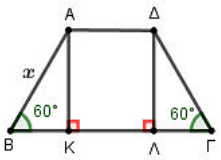
$$\theta'(4)=-\frac{12}{3^3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{9}{\sqrt{117}}\right)^2=-\frac{2}{13}\text{rad}/\sec$$

ii. Είναι $A\Gamma(t)=\frac{6}{x(t)}$ και $A\Gamma'(t)=-\frac{6}{x^2(t)}x'(t)$, οπότε

$$A\Gamma'(4)=-\frac{6}{x^2(4)}x'(4)=-\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\text{cm}/\sec\,.$$

Επειδή $A\Gamma'(4)<0$, η πλευρά ΑΓ ελαττώνεται με ρυθμό 1/3 cm/sec.

31.α) Κατασκευάζουμε τα ύψη ΑΚ και ΔΛ του τραπεζίου. Είναι $συν60^\circ=\frac{BK}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{BK}{x}\Leftrightarrow BK=\frac{x}{2}$.



Όμοια και $\Gamma\Lambda=\frac{x}{2}$. Επειδή η περίμετρος του τραπεζίου είναι 20cm, ισχύει ότι

$$A\Delta+AB+B\Gamma+\Gamma\Delta=20\Leftrightarrow A\Delta+x+\left(\frac{x}{2}+A\Delta+\frac{x}{2}\right)+x=20\Leftrightarrow$$

$$2A\Delta+3x=20\Leftrightarrow 2A\Delta=20-3x\Leftrightarrow A\Delta=\frac{20-3x}{2}\text{ cm}$$

β) Είναι $ημ60^\circ=\frac{AK}{x}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{AK}{x}\Leftrightarrow AK=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ cm.Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:

$$E(x)=\frac{(B\Gamma+A\Delta)AK}{2}=\frac{\left(A\Delta+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+A\Delta\right)\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}=\frac{\left(\cancel{2}\,\frac{20-3x}{\cancel{2}}+x\right)\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}\Leftrightarrow$$

$$E(x)=\frac{(20-2x)\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}=\frac{\cancel{2}\,(10-x)\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(10x-x^2)$$

γ) 1ος τρόπος

Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,6)$ με $E'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(10-2x)$.

$$E'(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}(10-2x)\geq 0\Leftrightarrow 10-2x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 5$$

Για κάθε $x\in(0,5)$ είναι $E'(x)>0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $(0,5]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(5,6)$ είναι $E'(x)<0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $[5,6)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η Ε παρουσιάζει μέγιστο για $x=5$cm .Επειδή στις 12 το μεσημέρι η ΑΔ είχε αρχικό μήκος 1cm, και μέγιστο εμβαδό έχει το τραπέζιο όταν $x=5$, μετέβαλε το μήκος της κατά 4cm. Επειδή κάθε ώρα αυξάνει το μήκος της κατά 0,4 cm, θα χρειαστεί $t=\frac{4}{0,4}=\frac{4}{\frac{4}{10}}=10$ ώρες για αυτή τη μεταβολή, οπότε στις 10 το βράδυ της ίδιας ημέρας το τραπέζιο θα έχει το μέγιστο εμβαδό.

2ος τρόπος

Επειδή το χαυξάνεται με ρυθμό 0,4cm/h, είναι
$x'(t)=0,4 \Leftrightarrow x(t)=0,4t+c,\ c\in\mathbb{R}$

Είναι $x(12)=1 \Leftrightarrow 1=4,8+c \Leftrightarrow c=-3,8$, οπότε $x(t)=0,4t-3,8$.

Επειδή $x(t)\in(0,6)$ είναι $0<0,4t-3,8<6 \Leftrightarrow 9,5<t<24,5$. Όμως η ΑΔ αρχίζει να αυξάνει στις 12 το μεσημέρι, οπότε $t\in[12\ ,\ 24,5)$ Τότε

$$E(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}x(t)\big(10-x(t)\big)=\frac{\sqrt{3}}{2}(0,4t-3,8)(10-0,4t+3,8)\Leftrightarrow$$

$E(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(0,4t-3,8)(13,8-0,4t)$, $t\in[12\ ,\ 24,5)$. Είναι

$$E'(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\big[0,4(13,8-0,4t)-0,4(0,4t-3,8)\big]\Leftrightarrow$$

$$E'(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0,4(13,8-0,4t-0,4t+3,8)=0,2\cdot\sqrt{3}(17,6-0,8t)$$

Είναι $E'(t)\geq 0 \Leftrightarrow 17,6-0,8t\geq 0 \Leftrightarrow t\leq 22$.

Όταν $t\in(12\ ,\ 22)$ είναι $E'(t)>0 \Rightarrow E\nearrow[12\ ,\ 22]$ και για $t\in(22\ ,\ 24,5)$ είναι $E'(t)<0 \Rightarrow E\searrow[22\ ,\ 24,5)$. Το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο τη χρονική στιγμή $t=22$, δηλαδή στις 10 το βράδυ της ίδιας ημέρας.

δ) Αρκεί να υπάρχει μοναδικό $t_0\in[12\ ,\ 24,5)$ τέτοιο ώστε $E(t_0)=8$.

Είναι $E(12)=\frac{9\sqrt{3}}{2}$, $E(22)=\frac{25\sqrt{3}}{2}$ και $\lim\limits_{t\to 24,5}E(t)=12\sqrt{3}$.

Στο διάστημα $\Delta_1=[12,22]$ η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_1)=\left[\frac{9\sqrt{3}}{2},\frac{25\sqrt{3}}{2}\right]$.

Στο διάστημα $\Delta_2=(22,\ 24,5)$ η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_2)=\left(12\sqrt{3},\ \frac{25\sqrt{3}}{2}\right)$.

Τώρα θα εξετάσουμε το 8 σε ποιο από τα $E(\Delta_1)$, $E(\Delta_2)$ ανήκει.

Για να ανήκει στο $E(\Delta_1)$ πρέπει

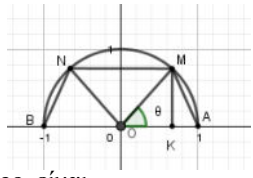
$$\frac{9\sqrt{3}}{2}\leq 8\leq\frac{25\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{81\cdot 3}{4}\leq 64\leq\frac{625\cdot 3}{4}\Leftrightarrow 243\leq 256\leq 1875$$ ισχύει.

Για να ανήκει στο $E(\Delta_2)$ πρέπει $12\sqrt{3}\leq 8\leq\frac{25\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 144\cdot 3\leq 64\leq\frac{635\cdot 3}{4}$

αδύνατο. Επειδή το 8 περιέχεται στο $E(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδική χρονική στιγμή

$t_0 \in (12,22)$ τέτοιο ώστε $E(t_0) = 8$.

32.α) Έστω $M(x(t), y(t))$. Έστω επίσης Κ η προβολή του Μ στον άξονα x΄x και θ η γωνία ΜΟΚ.



Στο τρίγωνο ΜΟΚ είναι $\eta\mu\theta = \frac{MK}{OM} \Leftrightarrow \eta\mu\theta(t) = y(t)$

και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OK}{OM} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta(t) = x(t)$.

Επειδή η τετμημένη του Μ ελαττώνεται με ρυθμό 0,1cm/sec, είναι

$x'(t) = -0{,}1\,\text{cm/sec}$. Όμως $x'(t) = (\sigma\upsilon\nu\theta(t))' = -\eta\mu\theta(t)\cdot\theta'(t)$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το τρίγωνο ΟΜΑ γίνεται ισόπλευρο, τότε

$\theta(t_0) = 60^\circ$, οπότε $x'(t_0) = -\eta\mu 60^\circ \cdot \theta'(t_0) \Leftrightarrow -\frac{1}{10} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\theta'(t_0) \Leftrightarrow$

$\theta'(t_0) = \frac{1}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{15}\,\text{rad/sec}$. Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ είναι το

$y'(t) = (\eta\mu\theta(t))' = \sigma\upsilon\nu\theta(t)\cdot\theta'(t)$ και τη χρονική στιγμή t_0 :

$y'(t_0) = \sigma\upsilon\nu\theta(t_0)\cdot\theta'(t_0) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{15} = \frac{\sqrt{3}}{30}\,\text{cm/sec}$

2ος τρόπος

Το Μ κινείται στο ημικύκλιο του κύκλου με εξίσωση : $x^2 + y^2 = 1$ οπότε

$x^2(t) + y^2(t) = 1$. Με παραγώγιση κατά μέλη έχουμε :

$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$. Την χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε :

$y(t_0) = \text{ύψος ισοπλεύρου} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και

$x^2(t_0) + y^2(t_0) = 1 \Leftrightarrow x^2(t_0) + \frac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{4} \overset{x(t_0)>0}{\Leftrightarrow} x(t_0) = \frac{1}{2}$.

Επίσης $2x(t_0)x'(t_0) + 2y(t_0)y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\not 2}\cdot(-0{,}1) + \frac{\sqrt{3}}{\not 2}y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}y'(t_0) = \frac{1}{10} \Leftrightarrow y'(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{30}\,\text{cm/sec}$.

β) Το τρίγωνο ΟΜΑ έχει εμβαδόν

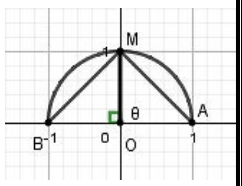
$E = \frac{1}{2}(OA)(MK) \Leftrightarrow E(t) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot y(t) = \frac{1}{2}\eta\mu\theta(t)$ Είναι $E'(t) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\theta(t)\cdot\theta'(t)$

και τη χρονική στιγμή t_0 : $E'(t_0) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 60^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{15} = \frac{\sqrt{3}}{60}\,\text{cm}^2/\text{sec}$

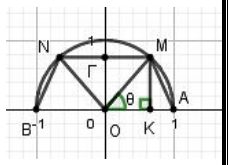
γ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΑ σε συνάρτηση της γωνίας θ είναι $E(\theta)=\frac{1}{2}\eta\mu\theta$, $\theta\in(0,\pi)$. Είναι $E'(\theta)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\theta$.

Αν $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\sigma\upsilon\nu\theta>0\Rightarrow E'(\theta)>0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Αν $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ τότε $\sigma\upsilon\nu\theta<0\Rightarrow E'(\theta)<0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο για $\theta=\frac{\pi}{2}$, δηλαδή όταν το Μ έχει συντεταγμένες (0,1).



δ) Επειδή το Ν είναι το συμμετρικό του Μ ως προς τον άξονα y΄y έχει συντεταγμένες $N(-x(t),y(t))$, $x(t)>0$.



Το τρίγωνο ΜΟΝ έχει εμβαδόν $E_1=\frac{1}{2}(MN)(O\Gamma)\Rightarrow$

$E_1(t)=\frac{1}{2}\cdot 2x(t)y(t)=\eta\mu\theta(t)\sigma\upsilon\nu\theta(t)$.

Είναι $E_1'(t)=\sigma\upsilon\nu\theta(t)\cdot\theta'(t)\sigma\upsilon\nu\theta(t)+\eta\mu\theta(t)(-\eta\mu\theta(t))\theta'(t)\Leftrightarrow$

$E_1'(t)=(\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)-\eta\mu^2\theta(t))\theta'(t)$. Όταν το τρίγωνο ΜΟΝ είναι ισόπλευρο τότε $MON=60^\circ$. Όμως $NOB=MOK=\theta$, άρα $2\theta(t_0)+60^\circ=180^\circ\Leftrightarrow\theta(t_0)=60^\circ$.

Επομένως $E_1'(t_0)=(\sigma\upsilon\nu^2 60^\circ-\eta\mu^2 60^\circ)\cdot\frac{\sqrt{3}}{15}=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)\frac{\sqrt{3}}{15}=-\frac{\sqrt{3}}{30}$ cm^2/sec

Όμοια αν $x(t)<0$.

ε) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΜΝΒ είναι $E_2=\frac{((AB)+(MN))O\Gamma}{2}$

Το E_2 σε συνάρτηση του θ είναι

$E_2(\theta)=\frac{(2+2\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta}{2}=(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta,\ \theta\in(0,\pi)$

Είναι $E_2'(\theta)=-\eta\mu\theta\cdot\eta\mu\theta+(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=-\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow$

$E_2'(\theta)=-1+\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta=2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1\Leftrightarrow$

$E_2'(\theta)=2(\sigma\upsilon\nu\theta+1)\left(\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{2}\right)$

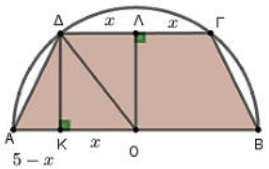
$E_2'(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow 2(\sigma\upsilon\nu\theta+1)\left(\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \ \sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\theta \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$. Για κάθε $\theta \in \left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ είναι $E_2'(\theta) > 0 \Rightarrow E_2 \nearrow \left(0,\frac{\pi}{3}\right]$, για κάθε $\theta \in \left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ είναι $E_2'(\theta) < 0 \Rightarrow E_2 \searrow \left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

Το εμβαδόν E_2 έχει μέγιστο το $E_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Τότε $M\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3},\eta\mu\frac{\pi}{3}\right) \equiv M\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και $N\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3},\eta\mu\frac{\pi}{3}\right) \equiv N\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

33.α) Έστω ΟΛ κάθετη στην ΓΔ. Τότε επειδή το ΟΛ είναι απόστημα της χορδής ΓΔ, το Λ είναι το μέσο της, άρα ΛΔ=ΛΓ=x cm.
Τότε το τετράπλευρο ΛΔΚΟ είναι ορθογώνιο και ΛΔ=ΟΚ=x cm.
Επειδή ΓΔ<ΑΒ, είναι $0 < 2x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 5$.
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΚΟ έχουμε:



$\Delta K^2 = \Delta O^2 - OK^2 = 25 - x^2 \Leftrightarrow \Delta K = \sqrt{25-x^2}$

β) Είναι $E(x) = \frac{(AB+\Gamma\Delta)\Delta K}{2} = \frac{(10+2x)\sqrt{25-x^2}}{2} = \frac{\not{2}(5+x)\sqrt{25-x^2}}{\not{2}} \Leftrightarrow$

$E(x) = (5+x)\sqrt{25-x^2}$, $x \in (0,5)$

γ) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΔ έχουμε:

$A\Delta^2 = AK^2 + K\Delta^2 = (5-x)^2 + \left(\sqrt{25-x^2}\right)^2 = 25 - 10x + \not{x^2} + 25 - \not{x^2} \Leftrightarrow$

$A\Delta^2 = 50 - 10x \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{50-10x}$.

Είναι $P = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + A\Delta = 10 + 2\sqrt{50-10x} + 2x$, $x \in (0,5)$

δ) Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,5)$ με

$E'(x) = \sqrt{25-x^2} + (5+x)\frac{-\not{2}x}{\not{2}\sqrt{25-x^2}} = \frac{25-x^2-5x-x^2}{\sqrt{25-x^2}} = -\frac{2x^2+5x-25}{\sqrt{25-x^2}}$

$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2x^2+5x-25}{\sqrt{25-x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2+5x-25 \leq 0 \Leftrightarrow$

$2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+5) \leq 0 \overset{x\in(0,5)}{\Leftrightarrow} x - \frac{5}{2} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$. Για κάθε $x \in \left(0,\frac{5}{2}\right)$ είναι

$E'(x)>0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{5}{2}\right]$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in\left(\frac{5}{2},5\right)$ είναι $E'(x)<0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $\left[\frac{5}{2},5\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο για $x=\frac{5}{2}\text{cm}$, τότε $\Gamma\Delta=2x=5\text{cm}$, οπότε ΑΒ=2ΓΔ.

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}E(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(5+x)\sqrt{25-x^2}=25$ και

$\lim\limits_{x\to5^-}E(x)=\lim\limits_{x\to5^-}(5+x)\sqrt{25-x^2}=0$, $E\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{75\sqrt{3}}{4}$.

Η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=\left(0,\frac{5}{2}\right)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_1)=\left(25,\frac{75\sqrt{3}}{4}\right)$. Η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=\left(\frac{5}{2},5\right)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_2)=\left(0,\frac{75\sqrt{3}}{4}\right)$.

$30<\frac{75\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow2\cdot\cancel{15}<\frac{\cancel{15}\cdot5\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow8<5\sqrt{3}\Leftrightarrow8^2<\left(5\sqrt{3}\right)^2\Leftrightarrow64<75$ ισχύει.

Το 30 ανήκει στο $E(\Delta_1)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο, ώστε $E(x_1)=30$. Το 30 ανήκει στο $E(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_2\in\Delta_2$ τέτοιο, ώστε $E(x_2)=30$. Τελικά υπάρχουν ακριβώς δύο τιμές του x για τις οποίες το εμβαδόν του τραπεζίου είναι ίσο με 30 cm^2.

στ) $E(x)=P(x)\Leftrightarrow(5+x)\sqrt{25-x^2}=10+2\sqrt{50-10x}+2x\Leftrightarrow$

$(5+x)\sqrt{25-x^2}-10-2\sqrt{50-10x}-2x=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$\varphi(x)=(5+x)\sqrt{25-x^2}-10-2\sqrt{50-10x}-2x,\ x\in[0,5]$.

Είναι $\varphi(0)=15-10\sqrt{2}=5\left(3-2\sqrt{2}\right)>0$, $\varphi(5)=-20<0$, δηλαδή $\varphi(0)\varphi(5)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[0,5]$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $\varphi(x)=0\Leftrightarrow E(x)=P(x)$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0,5)$.

34.α) $f^2(x)=\ln^2 x \Leftrightarrow |f(x)|=|\ln x|$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow |\ln x|=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι $f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

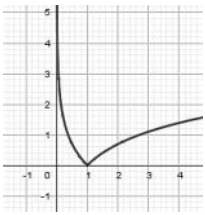
Αν $x\in(0,1)$, τότε $|f(x)|=-\ln x \Leftrightarrow f(x)=\pm\ln x$ και αν $x\in(1,+\infty)$, τότε

$|f(x)|=\ln x \Leftrightarrow f(x)=\pm\ln x$. Άρα $f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1\\ 0\ , & x=1\\ -\ln x, & x>1\end{cases}=-\ln x,\ x>0$ ή

$$f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1\\ 0\ , & x=1\\ \ln x, & x>1\end{cases}=|\ln x|,\ x>0 \text{ ή}$$

$$f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x<1\\ 0\ , & x=1\\ -\ln x, & x>1\end{cases}=-|\ln x|,\ x>0 \text{ ή } f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x<1\\ 0\ , & x=1\\ \ln x, & x>1\end{cases}=\ln x,\ x>0$$

β) Είναι $f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1\\ 0\ , & x=1\\ \ln x, & x>1\end{cases}=|\ln x|,\ x>0$, οπότε η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το τμήμα της $y=-\ln x$ στο διάστημα $(0,1)$ και από το τμήμα της $y=\ln x$ στο διάστημα $(1,+\infty)$.



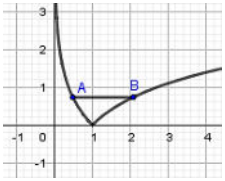
γ) Για $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)=-\dfrac{1}{x}<0$ και για $x>1$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x}>0$.

Αρκεί να βρούμε σημεία $\Gamma(x_1,f(x_1))$, $\Delta(x_2,f(x_2))$ με $f'(x_1)f'(x_2)=-1$.

Αν $x_1,x_2\in(0,1)$ ή $x_1,x_2\in 1(0,+\infty)$ τότε $f'(x_1)f'(x_2)>0$, οπότε για να είναι $f'(x_1)f'(x_2)=-1$ πρέπει $x_1\in(0,1)$ και $x_2>1$. Τότε

$$f'(x_1)f'(x_2)=-1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=-1 \Leftrightarrow x_1x_2=1 \Leftrightarrow x_1=\frac{1}{x_2}.$$

Αν $x_2=2$ τότε $x_1=\dfrac{1}{2}$, οπότε δύο τέτοια σημεία είναι τα $\Gamma\left(\dfrac{1}{2},\ln 2\right)$, $\Delta(2,\ln 2)$.



δ) Επειδή AB//x΄x είναι $f(\alpha)=f(\beta) \Leftrightarrow -\ln\alpha=\ln\beta \Leftrightarrow$

$0=\ln\alpha+\ln\beta\Leftrightarrow\ln(\alpha\beta)=0\Leftrightarrow\alpha\beta=1\Leftrightarrow\beta=\dfrac{1}{\alpha}$.

Το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι $d=x_B-x_A=\dfrac{1}{\alpha}-\alpha$, $\alpha\in(0,1)$. Είναι

$d(t)=\dfrac{1}{\alpha(t)}-\alpha(t)$, $t\geq 0$. Επειδή το τμήμα ΑΒ αυξάνει το μήκος του με ρυθμό 1cm/sec, είναι $d'(t)=1\text{cm}/\sec$. Η απόσταση των σημείων Α, Β από τον άξονα x΄x είναι $y=-\ln\alpha$. Αν t_0 η χρονική στιγμή που τα σημεία Α, Β απέχουν 1 cm από τον άξονα x΄x, τότε $-\ln\alpha(t_0)=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha(t_0)}=e\Leftrightarrow\alpha(t_0)=\dfrac{1}{e}$.

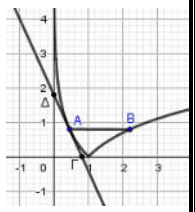
Είναι $d'(t)=\left(\dfrac{1}{\alpha(t)}-\alpha(t)\right)'=-\dfrac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)}-\alpha'(t)$ και τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$d'(t_0)=-\dfrac{\alpha'(t_0)}{\alpha^2(t_0)}-\alpha'(t_0)\Leftrightarrow 1=\dfrac{\alpha'(t_0)}{\dfrac{1}{e^2}}-\alpha'(t_0)\Leftrightarrow 1=e^2\alpha'(t_0)-\alpha'(t_0)\Leftrightarrow$

$\alpha'(t_0)(e^2-1)=1\Leftrightarrow\alpha'(t_0)=\dfrac{1}{e^2-1}$. Είναι $y(t)=-\ln\alpha(t)$, $y'(t)=-\dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ και

τη χρονική στιγμή t_0 είναι $y'(t_0)=-\dfrac{\alpha'(t_0)}{\alpha(t_0)}=-\dfrac{\dfrac{1}{e^2-1}}{\dfrac{1}{e}}=-\dfrac{e}{e^2-1}\text{cm}/\sec$

ε) Επειδή $\alpha\in(0,1)$ θα θεωρήσουμε την εφαπτομένη ε της C_f στο Α. Είναι



ε: $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y+\ln\alpha=-\dfrac{1}{\alpha}(x-\alpha)\Leftrightarrow$

$y=-\dfrac{1}{\alpha}x+1-\ln\alpha$. Για $y=0$ είναι $x=\alpha(1-\ln\alpha)$ και για $x=0$ είναι $y=1-\ln\alpha$, δηλαδή η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $\Gamma(\alpha(1-\ln\alpha),0)$ και $\Delta(0,1-\ln\alpha)$. Το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΟΓΔ είναι

$E=\dfrac{1}{2}(O\Gamma)(O\Delta)=\dfrac{1}{2}\alpha(1-\ln\alpha)(1-\ln\alpha)=\dfrac{1}{2}\alpha(1-\ln\alpha)^2$.

Έστω $E(\alpha)=\dfrac{1}{2}\alpha(1-\ln\alpha)^2$, $\alpha\in(0,1)$. Είναι

$E'(\alpha)=\dfrac{1}{2}\left[(1-\ln\alpha)^2+2\alpha(1-\ln\alpha)\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)\right]\Leftrightarrow E'(\alpha)=\dfrac{1}{2}(1-\ln\alpha)(-1-\ln\alpha)$

$E'(\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-\ln\alpha)(-1-\ln\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow -1-\ln\alpha\geq 0 \Leftrightarrow \ln\alpha\leq -1 \Leftrightarrow \alpha\leq \frac{1}{e}$.

Για κάθε $\alpha\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ είναι $E'(\alpha)>0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $\alpha\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ είναι $E'(\alpha)>0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο για $\alpha=\frac{1}{e}$, τότε $A\left(\frac{1}{e},1\right)$.

35.α) Όταν το παιδί κινείται προς τα θετικά τότε η ταχύτητα είναι θετική και όταν το παιδί κινείται προς τα αρνητικά τότε η ταχύτητα είναι αρνητική. Οι πιθανές χρονικές στιγμές στις οποίες το παιδί αλλάζει φορά κίνησης είναι χρονικές στιγμές που μηδενίζεται η ταχύτητα. Άρα οι πιθανές χρονικές στιγμές στις οποίες το παιδί αλλάζει φορά κίνησης είναι οι ρίζες της f. Είναι :

$f(t)=0\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{t}\right)(\ln t-1)=0\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{t}=0\Leftrightarrow t=1\ \text{sec}\right)$ ή

$(\ln t-1=0\Leftrightarrow t=e\ \text{sec})$

β) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$f'(t)=\frac{\ln t-1}{t^2}+\left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t}=\frac{\ln t-1+t-1}{t^2}=\frac{\ln t+t-2}{t^2}, t>0$

Έχουμε επίσης ότι $f'(t)=0\Leftrightarrow \ln t+t-2=0$.

Έστω η συνάρτηση $g(t)=\ln t+t-2, t>0$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$g'(t)=\frac{1}{t}+1>0$ για κάθε $t>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επειδή η g συνεχής έχουμε $g((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{t\to 0^+}g(t),\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Το $0\in g((0,+\infty))$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικό $\xi>0$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=0$.

Επίσης για $0<t<\xi\Leftrightarrow g(t)<g(\xi)=0$ και για $t>\xi\Leftrightarrow g(t)>g(\xi)=0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο ξ έχουμε ότι f γνησίως φθίνουσα στο $(0,\xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi,+\infty)$, άρα η f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο

στο $t=\xi$ το: $A\left(\xi,f\left(\xi\right)\right)\equiv A\left(\xi,\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\left(\ln\xi-1\right)\right)$.

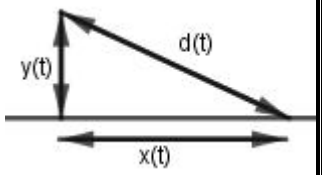
Είναι $g\left(1\right)=-1<0$, $g\left(e\right)=e-1>0$, δηλαδή $g\left(1\right)g\left(e\right)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g\left(x\right)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (1, e). Όμως το ξ είναι η μοναδική ρίζα της g, άρα $\xi\in\left(1,e\right)$.Η μέγιστη ταχύτητα με την οποία κινείται προς τα αριστερά είναι το ελάχιστο της δηλαδή η τιμή: $f\left(\xi\right)=\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\left(\ln\xi-1\right)$ m/sec και προφανώς το $\xi\in\left(1,e\right)$.

γ) Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στην f' στα $\left[1,t\right]$ και $\left[t,\xi\right]$ προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1\in\left(1,t\right)$ και $\xi_2\in\left(t,\xi\right)$, $t\in\left(1,\xi\right)$, τέτοια ώστε:

$f''\left(\xi_1\right)=\frac{f'\left(t\right)-f'\left(1\right)}{t-1}=\frac{f'\left(t\right)+1}{t-1}$ και $f''\left(\xi_2\right)=\frac{f'\left(\xi\right)-f'\left(t\right)}{\xi-t}=-\frac{f'\left(t\right)}{\xi-t}$. Έχουμε:

$\xi_1<\xi_2\overset{f''\searrow}{\Leftrightarrow}f''\left(\xi_1\right)>f''\left(\xi_2\right)\Leftrightarrow\frac{f'\left(t\right)+1}{t-1}>-\frac{f'\left(t\right)}{\xi-t}\Leftrightarrow\left(\xi-t\right)\left(f'\left(t\right)+1\right)>-\left(t-1\right)f'\left(t\right)$

δ) Επειδή το μπαλόνι ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα 1 m/sec τότε έχουμε ότι 1 sec αργότερα θα ισχύει $y\left(1\right)=1$ m και αντίστοιχα για το παιδί που κινείται με σταθερή ταχύτητα 2 m/sec έχουμε $x\left(1\right)=2$ m. Με βάση το παραπάνω σχήμα έχουμε: $x^2\left(t\right)+\left(y\left(t\right)+h\right)^2=d^2\left(t\right)$ (1)



1 sec αργότερα η (1) γίνεται:

$x^2\left(1\right)+\left(y\left(1\right)+h\right)^2=d^2\left(1\right)\Leftrightarrow$

$4+h^2+2h+1=d^2\left(1\right)\Leftrightarrow d\left(1\right)=\sqrt{h^2+2h+5}$ (2).Παραγωγίζοντας την σχέση (1) έχουμε: $2x'\left(t\right)x\left(t\right)+2y'\left(t\right)\left(y\left(t\right)+h\right)=2d'\left(t\right)d\left(t\right)\Leftrightarrow$

$x'\left(t\right)x\left(t\right)+y'\left(t\right)\left(y\left(t\right)+h\right)=d'\left(t\right)d\left(t\right)\Leftrightarrow 2x\left(t\right)+y\left(t\right)+h=d'\left(t\right)d\left(t\right)$ (3).

1 sec αργότερα η (3) γίνεται: $2x\left(1\right)+y\left(1\right)+h=d'\left(1\right)d\left(1\right)\Leftrightarrow$

$4+1+h=\frac{3\sqrt{2}}{2}\,d\left(1\right)\Leftrightarrow d\left(1\right)=\frac{10+2h}{3\sqrt{2}}$ (4).

Από τις (2) και (4) έχουμε: $\sqrt{h^2+2h+5}=\frac{10+2h}{3\sqrt{2}}\Leftrightarrow$

$h^2+2h+5=\dfrac{4h^2+40h+100}{18} \Leftrightarrow 18h^2+36h+90=4h^2+40h+100 \Leftrightarrow$

$14h^2-4h-10=0 \Leftrightarrow 7h^2-2h-5=0$, $\Delta=4+140=144$ και έχουμε

$h=\dfrac{2+12}{14}=1$ m Δεκτή ή $h=\dfrac{2-12}{14}=-\dfrac{10}{14}$ Απορρίπτεται

36.α) Έστω t_1 ο χρόνος που χρειάζεται ο κολυμβητής για να κολυμπήσει από το Κ στο Μ και t_2 ο χρόνος που χρειάζεται για να κολυμπήσει από το Μ στο Σ.

Έχουμε: $t_1=\dfrac{KM}{u_1}=\dfrac{\sqrt{x^2+100^2}}{3}$ και $t_2=\dfrac{M\Sigma}{u_2}=\dfrac{\nu-x}{5}$.

Επομένως ο συνολικός χρόνος είναι: $T(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+100^2}}{3}+\dfrac{\nu-x}{5}, x\in(0,\nu]$.

β) Η συνάρτηση Τ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα και σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο: $T'(x)=\dfrac{x}{3\sqrt{x^2+100^2}}-\dfrac{1}{5}, x\in(0,\nu]$

και έχουμε:

$T'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{3\sqrt{x^2+100^2}}-\dfrac{1}{5}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{3\sqrt{x^2+100^2}}\geq\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow 5x\geq 3\sqrt{x^2+100^2} \Leftrightarrow$

$25x^2\geq 9(x^2+100^2) \Leftrightarrow 25x^2\geq 9x^2+9\cdot 100^2 \Leftrightarrow 16x^2\geq 9\cdot 100^2 \Leftrightarrow$

$4|x|\geq 300 \Leftrightarrow |x|\geq 75 \overset{x\in(0,\nu)}{\Leftrightarrow} x\geq 75$. Η f είναι συνεχής στο 75 άρα ισχύει ότι:

Άρα για $x\in(0,75): f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow(0,75]$ και για $x\in(75,\nu]$:

$f'(x)>0 \Leftrightarrow f\nearrow[75,\nu)$. Άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=75$ οπότε για $x=75$ ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο χρόνο για να φτάσει σπίτι του.

γ) $E(x)=\dfrac{1}{2}x\cdot 100=50x, x\in(0,300]$ και

$\Pi(x)=100+x+\sqrt{x^2+100^2}, x\in(0,300]$. Οι συναρτήσεις Ε και Π είναι παραγωγίσιμες με παραγώγους: $E'(x)=50>0\Rightarrow E\nearrow(0,300]$,

$\Pi'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+100^2}}>0\Rightarrow \Pi\nearrow(0,300]$

Άρα για $x=300$ έχει και μέγιστο εμβαδόν και μέγιστη περίμετρο.

δ) Η συνάρτηση T' είναι συνεχής άρα από ΘΜΕΤ έχει μία μέγιστη τιμή Μ και μία ελάχιστη τιμή m στο διάστημα $[20,200]$ και από ΘΕΤ ισχύει ότι:

$T'([20,200])=[m,M]$. Έχουμε ότι

$m \le T'(20) \le M \Leftrightarrow 5m \le 5T'(20) \le 5M$

$m \le T'(150) \le M \Leftrightarrow 2m \le 2T'(150) \le 2M$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$m \le T'(75) \le M$

$8m \le 5T'(20)+2T'(150)+T'(75) \le 8M \Leftrightarrow$

$m \le \dfrac{5T'(20)+2T'(150)+T'(75)}{8} \le M \Leftrightarrow m \le \dfrac{5T'(20)+2T'(150)+0}{8} \le M$

Άρα υπάρχει $\xi \in [20,200] : T'(\xi)=\dfrac{5T'(20)+2T'(150)}{8}$. Η συνάρτηση T' είναι

παραγωγίσιμη με παράγωγο: $T''(x)=\dfrac{3\sqrt{x^2+100^2}-x\left(\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+100^2}}\right)}{9\left(x^2+100^2\right)}=$

$\dfrac{3\left(x^2+100^2\right)-3x^2}{9\left(x^2+100^2\right)\sqrt{x^2+100^2}}=\dfrac{100^2}{9\left(x^2+100^2\right)\sqrt{x^2+100^2}}, x \in (0,\nu]$

Έχουμε ότι $T''(x)>0 \Rightarrow T' \nearrow [20,200]$ άρα προφανώς το ξ είναι μοναδικό.

37.α) Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΓΒ έχουμε:

$\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{(OE)}{(OA)}=\dfrac{1}{(OA)} \Rightarrow (OA)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ και

$\eta\mu\theta=\dfrac{(O\Gamma)}{(OB)}=\dfrac{1}{(OB)} \Rightarrow (OB)=\dfrac{1}{\eta\mu\theta}$

Είναι $f(\theta)=(AB)=(OA)+(OB)=\dfrac{1}{\eta\mu\theta}+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \theta \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$f'(\theta)=\dfrac{-\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^2\theta}+\dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\dfrac{\eta\mu^3\theta-\sigma\upsilon\nu^3\theta}{\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta}, \theta \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Τα μοναδικά πιθανά κρίσιμα σημεία της f είναι οι ρίζες της παραγώγου της.

$f'(\theta)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu^3\theta-\sigma\upsilon\nu^3\theta}{\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta}=0 \Leftrightarrow \eta\mu^3\theta-\sigma\upsilon\nu^3\theta=0 \Leftrightarrow \eta\mu^3\theta=\sigma\upsilon\nu^3\theta \Leftrightarrow$

$\eta\mu\theta=\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta=1 \overset{\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \theta=\dfrac{\pi}{4}$.

Άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι το $K\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=K\left(\frac{\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$.

γ) Έστω η συνάρτηση $\nu(\theta)=\eta\mu^3\theta-\sigma\upsilon\nu^3\theta,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, η οποία είναι συνεχής και από το προηγούμενο ερώτημα έχει μοναδική ρίζα την $\theta=\frac{\pi}{4}$, οπότε σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ η ν διατηρεί πρόσημο.

$\nu\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}^3}{8}=\frac{1-\sqrt{3}^3}{8}<0$ άρα στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ έχουμε $\nu(\theta)<0$, $\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{3}^3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{\sqrt{3}^3-1}{8}>0$ άρα στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $\nu(\theta)>0$. Επίσης ισχύει ότι $\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta>0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, άρα αφού $f'(\theta)=\frac{\nu(\theta)}{\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta},\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ είναι $f'(\theta)<0$ και στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(\theta)>0$. Άρα αφού η f είναι συνεχής στο $\theta=\frac{\pi}{4}$ τότε $f\searrow\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ και $f\nearrow\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ οπότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\theta=\frac{\pi}{4}$ το $K\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=K\left(\frac{\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$.

Επομένως το ελάχιστο μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι $2\sqrt{2}$ m, άρα το μέγιστο μήκος της σκάλας ώστε να μπορεί να περάσει είναι $2\sqrt{2}$ m.

δ) $g(\theta)=\frac{f\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}}{1-\theta^2-\sigma\upsilon\nu^2\theta},\theta\in A$. Για το πεδίο ορισμού της g πρέπει:

$$\begin{cases}\theta+\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ \text{και}\\ 1-\theta^2-\sigma\upsilon\nu^2\theta\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\\ \text{και}\\ 1-\theta^2-\sigma\upsilon\nu^2\theta\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\\ \text{και}\\ \eta\mu^2\theta\neq\theta^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\\ \text{και}\\ |\eta\mu\theta|\neq|\theta|\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\begin{cases} \theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{και} \\ \theta \neq 0 \end{cases}$. (Ισχύει $|\eta\mu\theta| \leq |\theta|$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\theta = 0$). Άρα $A = \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Από το προηγούμενο ερώτημα αφού η f έχει ολικό ελάχιστο το $2\sqrt{2}$ οπότε $f(\theta) \geq 2\sqrt{2}$ για κάθε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Το $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα $f\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) > 2\sqrt{2}$ οπότε $f\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow g(\theta) \neq 0$ άρα η γραφική της παράσταση δεν τέμνει τον άξονα x΄x.

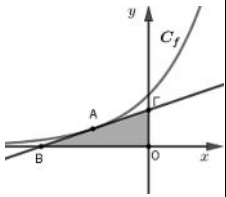
38.α) Επειδή το Α είναι οποιοδήποτε σημείο της C_f, θα βρούμε την εφαπτομένη της C_f στο Α με $x_0 \leq 0$. Η εφαπτομένη ε λοιπόν στο Α έχει εξίσωση

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow y = xe^{x_0} + e^{x_0}(1 - x_0)$

Για $y = 0$ είναι $xe^{x_0} + e^{x_0}(1 - x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$x\cancel{e^{x_0}} = -\cancel{e^{x_0}}(1 - x_0) \Leftrightarrow x = x_0 - 1$ και

για $x = 0$ είναι $y = e^{x_0}(1 - x_0)$, οπότε η C_f τέμνει τους άξονες στα σημεία $B(x_0 - 1, 0)$ και $\Gamma\left(0, e^{x_0}(1 - x_0)\right)$. Το τρίγωνο που σχηματίζει η ε με τους άξονες είναι το ΟΒΓ και έχει εμβαδό:



$E = \frac{1}{2}(OB)(O\Gamma) = \frac{1}{2}|x_0 - 1|\left|e^{x_0}(1 - x_0)\right| = \frac{1}{2}e^{x_0}(1 - x_0)^2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}e^x(1 - x)^2$, $x \leq 0$. Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

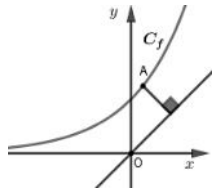
$E'(x) = \frac{1}{2}e^x(1 - x)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2e^x(1 - x) = \frac{1}{2}e^x(1 - x)(1 - x - 2) = -\frac{1}{2}e^x(1 - x)(x + 1)$

$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^x x(x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$.

Για κάθε $x < -1$ είναι $E'(x) > 0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $(-\infty, -1]$,

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (-1,0)$ είναι $E'(x) < 0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $[-1,0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η Ε παρουσιάζει μέγιστο στο $x = -1$ το $E(-1) = \frac{2}{e}$, οπότε $A\left(-1, \frac{1}{e}\right)$.

β) Είναι δ: $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$

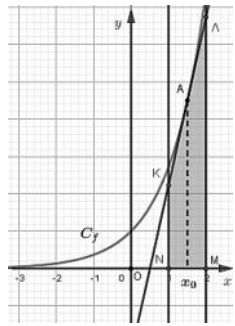


Είναι $d(C_f, \delta) = d(A, \delta) = \frac{|x_0 - e^{x_0}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{e^{x_0} - x_0}{\sqrt{2}}$

Έστω $d(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$. Η d είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $d'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^x - 1)$.

Είναι $d'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(e^x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $d'(x) < 0$ και επειδή η d είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 0$ είναι $d'(x) > 0$ και επειδή η d είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η d έχει ελάχιστο για x = 0, οπότε το ζητούμενο σημείο της C_f είναι το (0,1).



γ) Επειδή τα σημεία Α,Β είναι συμμετρικά ως προς τη δ, η απόσταση (ΑΒ) γίνεται ελάχιστη όταν η απόσταση του Α από τη δ γίνει ελάχιστη, άρα Α(0,1) και Β(1,0).

δ) Για x = 1 η ε γίνεται $y = e^{x_0} + e^{x_0}(1 - x_0) = e^{x_0}(2 - x_0)$, άρα η ε τέμνει την x = 1 στο σημείο $K\left(1, e^{x_0}(2 - x_0)\right)$.

Για x = 2 η ε γίνεται $y = 2e^{x_0} + e^{x_0}(1 - x_0) = e^{x_0}(3 - x_0)$, άρα η ε τέμνει την x = 2 στο σημείο $\Lambda\left(2, e^{x_0}(3 - x_0)\right)$.

Το τραπέζιο ΚΛΜΝ έχει εμβαδό $(KΛMN) = \frac{(KN + MΛ)MN}{2} =$

$$\frac{\left[e^{x_0}(2 - x_0) + e^{x_0}(3 - x_0)\right] \cdot 1}{2} = \frac{e^{x_0}(5 - 2x_0)}{2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x) = \frac{1}{2}e^x(5 - 2x)$, $x \in (1,2)$.

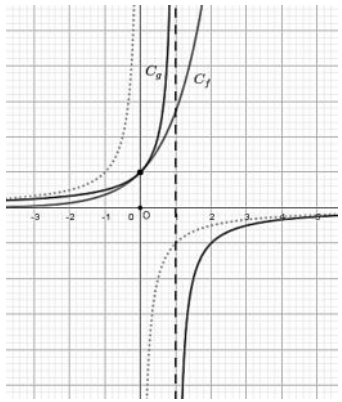
Η α είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$\alpha'(x)=\frac{1}{2}e^x(5-2x)-e^x=e^x\left(\frac{5-2x}{2}-1\right)=e^x\frac{3-2x}{2}$.

Είναι $\alpha'(x)\geq 0\Leftrightarrow e^x\frac{3-2x}{2}\geq 0\Leftrightarrow 3-2x\geq 0\Leftrightarrow x\leq\frac{3}{2}$.

Για κάθε $x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ είναι $\alpha'(x)>0$ και επειδή η α είναι συνεχής στο $\left(1,\frac{3}{2}\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in\left(\frac{3}{2},2\right)$ είναι $\alpha'(x)<0$ και επειδή η α είναι συνεχής στο $\left[\frac{3}{2},2\right)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η α έχει μέγιστο για $x=\frac{3}{2}$, οπότε το εμβαδόν του τραπεζίου ΚΛΜΝ γίνεται μέγιστο στο $A\left(\frac{3}{2},e^{\frac{3}{2}}\right)$.

ε) Οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $e^x=\frac{1}{1-x}\Leftrightarrow(1-x)e^x-1=0,\ x\neq 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\beta(x)=(1-x)e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Η β είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\beta'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$. Για κάθε $x<0$ είναι $\beta'(x)>0$ και επειδή η β είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty,0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>0$ είναι $\beta'(x)<0$ και επειδή η β είναι συνεχής στο διάστημα $[0,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η β έχει μέγιστο το β(0) =0 άρα $\beta(x)\leq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ίσον ισχύει μόνο για x = 0, οπότε μοναδική ρίζα της εξίσωσης το x = 0 και το κοινό σημείο C_f με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι το $(0,1)$. Είναι $g(x)=\frac{1}{1-x}=-\frac{1}{x-1}$. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=-\frac{1}{x}$ κατά 1 μονάδα δεξιά.



στ) Έστω $k(x)=f(\lambda x)=e^{\lambda x}$ και $P(x_1,k(x_1))$ σημείο της.

1ος τρόπος: Η εφαπτομένη της k στο P έχει εξίσωση:

$y-k(x_1)=k'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y=\lambda e^{\lambda x_1}x+e^{\lambda x_1}-\lambda e^{\lambda x_1}x_1$ (1)

Για να είναι η $y = x + 1$ εφαπτομένη της k πρέπει να ταυτίζεται με την (1), άρα

$$\begin{cases}\lambda e^{\lambda x_1}=1\\ e^{\lambda x_1}-\lambda e^{\lambda x_1}x_1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{\lambda x_1}=\frac{1}{\lambda}\\ \frac{1}{\lambda}-x_1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{\lambda x_1}=\frac{1}{\lambda}\\ \frac{1}{\lambda}-1=x_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{\lambda\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)}=\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow\lambda e^{1-\lambda}-1=0\ (2)\\ \frac{1}{\lambda}-1=x_1\end{cases}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\delta(x)=xe^{1-x}-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Η δ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\delta'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=e^{1-x}(1-x)$.

Είναι $\delta'(x)\geq 0\Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)\geq 0\Leftrightarrow 1-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$.

Για κάθε $x < 1$ είναι $\delta'(x)>0$ και επειδή η δ είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 1$ είναι $\delta'(x)<0$ και επειδή η δ είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η δ έχει μέγιστο για $x = 1$ το $\delta(1) = 0$, άρα $\delta(x)\leq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα η $\lambda = 1$ είναι η μοναδική λύση της (2).

2ος τρόπος: Είναι $k'(x)=\lambda e^{\lambda x}$, $k''(x)=\lambda^2e^{\lambda x}>0$ άρα η k είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους.

Δηλαδή $k(x)\geq x+1\Leftrightarrow e^{\lambda x}-x-1\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$\zeta(x)=e^{\lambda x}-x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\zeta(x)\geq\zeta(0)$, δηλαδή η ζ έχει ελάχιστο για $x = 0$. Η ζ είναι παραγωγίσιμη με $\zeta'(x)=\lambda e^{\lambda x}-1$.

Από το θεώρημα Fermat είναι $\zeta'(0)=0\Leftrightarrow\lambda=1$

ζ) Είναι $h(x)=\frac{x+1}{e^{\lambda x}},\ x\in\mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$h'(x)=\frac{(x+1)'e^{\lambda x}-\left(e^{\lambda x}\right)'(x+1)}{\left(e^{\lambda x}\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$h'(x)=\frac{e^{\lambda x}-\lambda e^{\lambda x}(x+1)}{\left(e^{\lambda x}\right)^2}=\frac{e^{\lambda x}(1-\lambda x-\lambda)}{\left(e^{\lambda x}\right)^2}=\frac{1-\lambda x-\lambda}{e^{\lambda x}}.$$

Είναι $h'(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{1-\lambda x-\lambda}{e^{\lambda x}}\geq 0\Leftrightarrow 1-\lambda x-\lambda\geq 0\Leftrightarrow x\leq\frac{1-\lambda}{\lambda}$.

Για κάθε $x<\frac{1-\lambda}{\lambda}$ είναι $h'(x)>0$ άρα $h\nearrow\left(-\infty,\frac{1-\lambda}{\lambda}\right]$.

Για κάθε $x > \frac{1-\lambda}{\lambda}$ είναι $h'(x) < 0$ άρα $h \searrow \left[\frac{1-\lambda}{\lambda}, +\infty\right)$.

Η h έχει μέγιστο το $h\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) = \frac{\frac{1-\lambda}{\lambda}+1}{e^{\lambda\frac{1-\lambda}{\lambda}}} = \frac{\frac{1-\lambda+\lambda}{\lambda}}{e^{1-\lambda}} = \frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}$.

Έστω $b(\lambda) = \frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}$ με $\lambda > 0$ η συνάρτηση των μεγίστων της h.

Τότε $b'(\lambda) = \frac{e^{\lambda-1}\lambda - e^{\lambda-1}}{\lambda^2} = \frac{e^{\lambda-1}(\lambda-1)}{\lambda^2}$ και $b'(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 1$.

Για κάθε $\lambda < 1$ είναι $b'(\lambda) < 0$ άρα η b είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και για κάθε $\lambda > 1$ είναι $b'(\lambda) > 0$, άρα η b είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η b έχει ελάχιστο για $\lambda = 1$. Τότε όμως με βάση το προηγούμενο σκέλος η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(\lambda x)$.

39.α) Η συνάρτηση θ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,24]$ με

$\theta'(t) = 1 - \frac{4}{2\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}}$. Είναι $\theta'(t) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{t}-2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} \geq 2 \Leftrightarrow t \geq 4$.

Για κάθε $t \in (0,4)$ είναι $\theta'(t) < 0$ και για κάθε $t \in (4,24]$ είναι $\theta'(t) > 0$.

Επειδή η θ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,4]$ και γνησίως αύξουσα στο $[4,24]$. Επομένως για $t \in (0,4]$ η θερμοκρασία μειώνεται και για $t \in (4,24]$ η θερμοκρασία αυξάνεται.

Η συνάρτηση θ έχει ελάχιστο το $\theta(4) = 4 - 4\sqrt{4} + \alpha = -4 + \alpha$.

λ	0	1	+∞
b′		– 0	+
b	↘		↗

Επειδή η ελάχιστη θερμοκρασία της περιοχής εντός του 24ώρου είναι 0^oC ισχύει ότι $-4 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4$.

β) Για το πεδίο ορισμού της $\theta \circ \theta$ έχουμε:

$A_{\theta\circ\theta} = \{t \in A_\theta / \theta(t) \in A_\theta\} = \{t \in (0,24] / (t - 4\sqrt{t} + 4) \in (0,24]\} =$

$\{t \in (0,24] / (\sqrt{t}-2)^2 \in (0,24]\}$. Για κάθε $t \in (0,24]$ είναι $(\sqrt{t}-2)^2 \geq 0$.

$(\sqrt{t}-2)^2 \leq 24 \Leftrightarrow |\sqrt{t}-2| \leq \sqrt{24} \Leftrightarrow -2\sqrt{6} \leq \sqrt{t}-2 \leq 2\sqrt{6} \Leftrightarrow$

$2-2\sqrt{6} \le \sqrt{t} \le 2+2\sqrt{6}$

Όμως $t \ge 0$, οπότε $0 \le \sqrt{t} \le 2+2\sqrt{6} \Leftrightarrow 0 \le t \le \left(2+2\sqrt{6}\right)^2 \Leftrightarrow$

$0 \le t \le 4+24+8\sqrt{6} \Leftrightarrow 0 \le t \le 28+8\sqrt{6}$

Όμως $t \in (0,24]$, οπότε με συναλήθευση προκύπτει ότι $A_{\theta\circ\theta} = (0,24]$.

$$(\theta\circ\theta)(t) = \theta(\theta(t)) = \left(\sqrt{\left(\sqrt{t}-2\right)^2}-2\right)^2 = \left(\left|\sqrt{t}-2\right|-2\right)^2.$$

Όταν $t \in (0,4]$ είναι $\sqrt{t} \le 2$, οπότε $(\theta\circ\theta)(t) = \left(-\sqrt{t}+2-2\right)^2 = t$.

γ) Για κάθε $t \in [4,24]$ είναι $f(t) = \sqrt{\theta(t)} = \sqrt{\left(\sqrt{t}-2\right)^2} = \left|\sqrt{t}-2\right| = \sqrt{t}-2$.

Για κάθε $t_1, t_2 \in [4,24]$ με $t_1 < t_2$ είναι

$\sqrt{t_1} < \sqrt{t_2} \Leftrightarrow \sqrt{t_1}-2 < \sqrt{t_2}-2 \Leftrightarrow f(t_1) < f(t_2) \Leftrightarrow f \nearrow [4,24] \Rightarrow f$ 1−1, οπότε η f αντιστρέφεται. Για κάθε $4 \le t \le 24$ είναι

$f(4) \le f(t) \le f(24) \Leftrightarrow 0 \le f(t) \le \sqrt{24}-2 \Leftrightarrow 0 \le f(t) \le 2\sqrt{6}-2$, οπότε η f έχει σύνολο τιμών το $\left[0, 2\sqrt{6}-2\right]$, άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $\left[0, 2\sqrt{6}-2\right]$. Για κάθε $t \in [4,24]$ και $y \in \left[0, 2\sqrt{6}-2\right]$, είναι

$f(t) = y \Leftrightarrow \sqrt{t}-2 = y \Leftrightarrow \sqrt{t} = y+2 \Leftrightarrow t = (y+2)^2$.Άρα

$f^{-1}(y) = (y+2)^2$, $y \in \left[0, 2\sqrt{6}-2\right]$, οπότε $f^{-1}(t) = (t+2)^2$, $t \in \left[0, 2\sqrt{6}-2\right]$.

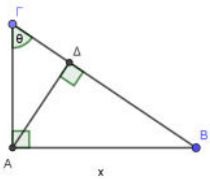
δ) Επειδή γνωρίζουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y= t (αφού αντί για x έχουμε άγνωστο το t) , θα βρούμε τη σχετική θέση της f με την ευθεία αυτή.

$f(t) > t \Leftrightarrow t > \sqrt{t}-2 \Leftrightarrow t-\sqrt{t}+2 > 0$ (1)

Θέτουμε $\sqrt{t} = \omega$ και η (1) γίνεται $\omega^2 - \omega + 2 > 0$ που ισχύει αφού είναι τριώνυμο με $\Delta < 0$. Άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία y = t, οπότε λόγω συμμετρίας η γραφική παράσταση της f^{-1} βρίσκεται κάτω από την y = t, επομένως $f(t) > f^{-1}(t)$

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

23311.α) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ στο οποίο ΑΒ = x, ΑΓ = y με $x+y=1 \Leftrightarrow y = 1-x$.



Είναι $E(x) = (AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} x(1-x) = \frac{1}{2}\left(x - x^2\right)$

. Είναι $x > 0$, $y > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$, άρα $x \in (0,1)$. Η Ε είναι παραγωγίσιμη

στο $(0,1)$ με $E'(x)=\frac{1}{2}(1-2x)$.

$E'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-2x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-2x\geq 0 \Leftrightarrow 1\geq 2x \Leftrightarrow x\leq \frac{1}{2}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $E'(x)>0$ και για κάθε $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι $E'(x)<0$.

Επειδή η Ε είναι συνεχής στο $(0,1)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},1\right)$. Η Ε έχει μέγιστο για $x=\frac{1}{2}$ το $E\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$.

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2=x^2+(1-x)^2=x^2+1-2x+x^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2=2x^2-2x+1 \Leftrightarrow$ $B\Gamma=\sqrt{2x^2-2x+1}$. Έστω $B\Gamma(x)=\sqrt{2x^2-2x+1},\ x\in(0,1)$. Η συνάρτηση ΒΓ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$B\Gamma'(x)=\frac{\left(2x^2-2x+1\right)'}{2\sqrt{2x^2-2x+1}}=\frac{4x-2}{2\sqrt{2x^2-2x+1}}=\frac{\not{2}(2x-1)}{\not{2}\sqrt{2x^2-2x+1}}.$$

Είναι $B\Gamma'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\not{2}(2x-1)}{\not{2}\sqrt{2x^2-2x+1}}\geq 0 \Leftrightarrow 2x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $B\Gamma'(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι $B\Gamma'(x)>0$.

Επειδή η ΒΓ είναι συνεχής στο $(0,1)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},1\right)$. Η υποτείνουσα ΒΓ γίνεται ελάχιστη για $x=\frac{1}{2}$ με τιμή $B\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) Έστω ΑΔ= υ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου. Τότε $E=\frac{1}{2}B\Gamma\cdot\upsilon \Leftrightarrow \upsilon=\frac{2E}{B\Gamma}$. Επειδή η Ε έχει μέγιστο το $E\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$ ισχύει ότι $2E(x)\leq\frac{1}{4}$ (1) και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\frac{1}{2}$.

Επειδή η ΒΓ έχει ελάχιστο το $\text{ΒΓ}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ισχύει ότι

$$\text{ΒΓ}(x)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\text{ΒΓ}(x)}\leq\frac{2}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{1}{\text{ΒΓ}(x)}\leq\sqrt{2}\ (2)$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\frac{1}{2}$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{2E(x)}{\text{ΒΓ}(x)}\leq\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\upsilon\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$. Οπότε η μέγιστη τιμή του ύψους υ είναι $\frac{\sqrt{2}}{4}$ για $x=\frac{1}{2}$.

δ) Είναι $\Gamma=\theta$ και $\varepsilon\varphi\theta=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$, άρα $\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{x(t)}{1-x(t)}$. Είναι

$$\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)'=\left(\frac{x(t)}{1-x(t)}\right)'\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{x'(t)\left(1-x(t)\right)-x(t)\left(-x'(t)\right)}{\left(1-x(t)\right)^2}$$ και

τη χρονική στιγμή $t=t_0$ είναι

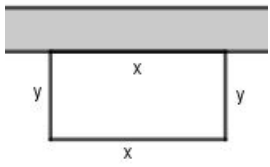
$$\theta'(t_0)=\frac{x'(t_0)\left(1-x(t_0)\right)-x(t_0)\left(-x'(t_0)\right)}{\left(1-x(t_0)\right)^2}\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)\Leftrightarrow$$

$$\theta'(t_0)=\frac{0{,}1\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(-0{,}1)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{\text{ΑΓ}(t_0)}{\text{ΒΓ}(t_0)}\right)^2=\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{\text{ΑΓ}(t_0)}{\text{ΒΓ}(t_0)}\right)^2=$$

$$\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1}{5}\ \text{rad/sec}$$

26633.α) Έστω y η άλλη διάσταση της ορθογώνιας περιοχής που έχουμε περιφράξει, τότε $x>0$, $y>0$ και

$$x+2y=400\Leftrightarrow 2y=400-x\Leftrightarrow y=\frac{400-x}{2}.$$



Είναι $y>\ \Leftrightarrow\frac{400-x}{2}>0\Leftrightarrow 400-x>0\Leftrightarrow$

$x<400$, άρα $0<x<400$.

Το εμβαδό της ορθογώνιας περιοχής είναι:

$E = x \cdot y = x\dfrac{400-x}{2} = x\left(200 - \dfrac{1}{2}x\right) = 200x - \dfrac{1}{2}x^2$, άρα $E(x) = 200x - \dfrac{1}{2}x^2$ με $0 < x < 400$.

β) Για κάθε $x \in (0,400)$ είναι $E'(x) = 200 - x$.

$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 200 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 200$. Για κάθε $x \in (0,200)$ είναι $E'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (200,400)$ είναι $E'(x) < 0$, επειδή η Ε είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,200]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[200,400)$. Η Ε έχει μέγιστο για $x = 200\text{m}$.

γ) $E(200) = 200 \cdot 200 - \dfrac{1}{2}200^2 = \dfrac{1}{2}200^2 = 20.000\text{m}^2$

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(200x - \dfrac{1}{2}x^2\right) = 0$. Επειδή η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,200)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$E((0,200)) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} E(x), \lim\limits_{x\to 200^-} E(x)\right) = (0,20.000)$.

Επειδή το 300π περιέχεται στο $(0,20.000)$ και η Ε είναι γνησίως αύξουσα στο (0,200), υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,200)$ τέτοιο, ώστε $E(x_0) = 300\pi$, επομένως ο ισχυρισμός του Ιάσωνα είναι αληθής.

27650.α)i. Έστω $M_0(x_0, \ln x_0)$, $x_0 > 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο M_0 είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ όταν $f'(x_0) = \lambda_{AB} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{3-1}{1-0} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{x_0} = 2 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{2}$. Τότε $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$ και $M\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$.

ii. Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η ευθεία ε:

$y - f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y + \ln 2 = 2x - 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1 - \ln 2$.

β) Έστω $M(x,y)$ με $y = \ln x$, $x > 0$. Είναι $\overrightarrow{AB} = (1-0, 3-1) = (1,2)$,

$\overrightarrow{AM} = (x, \ln x - 1)$, $\det(\dot{AB}, \dot{AM}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & \ln x - 1 \end{vmatrix} = \ln x - 1 - 2x$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $(ABM) = E(x) = \dfrac{1}{2}|\ln x - 1 - 2x|$, $x > 0$.

Επειδή η f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x > 0$ είναι

$f(x) \le 2x-1-\ln 2 < 2x+1 \Rightarrow \ln x < 2x+1 \Leftrightarrow \ln x - 2x - 1 < 0$, οπότε

$E(x) = \frac{1}{2}(2x+1-\ln x),\ x>0$.

γ) Το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ορθογώνιο στο Α όταν $\lambda_{AM}\lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow$

$\frac{\ln x - 1}{x} \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow 2\ln x - 2 = -x \Leftrightarrow 2\ln x + x - 2 = 0$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $2\ln x_1 + x_1 - 2 = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2\ln x + x - 2,\ x \in [1,2]$.

Είναι $h(1) = -1,\ h(2) = 2\ln 2$, δηλαδή $h(1)h(2) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο [1,2] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x_1 + x_1 - 2 = 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $h'(x) = \frac{2}{x} + 1 > 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο [1,2], είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, οπότε το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $2\ln x + x - 2 = 0$ στο διάστημα $(1,2)$.

24587.α) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $\ln x < x \Leftrightarrow \ln x - x < 0$, άρα $d(M,\varepsilon) = \sqrt{2}\,|x_0 - \ln x_0| = \sqrt{2}(\ln x_0 - x_0)$.

β) i. Έστω $d(x) = \sqrt{2}(x - \ln x),\ x > 0$.

Η d είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $d'(x) = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{x-1}{x}$.

Είναι $d'(x) \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \frac{x-1}{x} \ge 0 \Leftrightarrow x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $d'(x) < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $d'(x) > 0$, επειδή η d είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη για x = 1. Τότε $M(1,-1)$.

ii. Η ελάχιστη απόσταση είναι $d(1) = \sqrt{2}(1 - \ln 1) = \sqrt{2}$.

γ) Αρκεί να βρούμε $x_1 > 0$ για το οποίο ισχύει ότι $f'(x_1) = \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow$

$\frac{2}{x_1} - 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x_1} = 2 \Leftrightarrow x_1 = 1$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y + 1 = x - 1 \Leftrightarrow y = x - 2$.

28532.α) Η γωνία $P\hat{A}B$ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο. Στο

ορθογώνιο τρίγωνο PAB είναι $\text{συν}\theta = \frac{(\text{AP})}{(\text{AB})} \Leftrightarrow \text{συν}\theta = \frac{(\text{AP})}{2} \Leftrightarrow (\text{AP}) = 2\text{συν}\theta$.

Έστω t_1 ο χρόνος που θα κάνει ο άνδρας την απόσταση AP, τότε

$(\text{AP}) = 3t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{2\text{συν}\theta}{3}$. Επειδή η γωνία $\text{P}\hat{\text{A}}\text{B}$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο PB , το τόξο αυτό είναι 2θ rad και έχει μήκος $\ell_{\text{PB}} = 2\theta \cdot 1 = 2\theta$. Όμως κινείται κατά μήκος του τόξου PB με ταχύτητα $6\ \text{Km/h}$ και έστω t_2 ο χρόνος που κάνει ο άνδρας να διανύσει αυτό το τόξο. Είναι $\ell_{\text{PB}} = 6t_2 \Leftrightarrow t_2 = \frac{2\theta}{6} = \frac{\theta}{3}$.

Ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται ο άνδρας είναι

$f(\theta) = t_1 + t_2 = \frac{2\text{συν}\theta}{3} + \frac{\theta}{3} = \frac{1}{3}(2\text{συν}\theta + \theta)$ με $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(\theta) = \frac{1}{3}(-2\eta\mu\theta + 1)$.

Είναι $f'(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(-2\eta\mu\theta + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -2\eta\mu\theta + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -2\eta\mu\theta \geq -1 \Leftrightarrow$

$\eta\mu\theta \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\theta \leq \eta\mu\frac{\pi}{6} \overset{\eta\mu\theta \uparrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} 0 < \theta \leq \frac{\pi}{6}$. Για κάθε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ είναι $f'(\theta) > 0$

και για κάθε $\theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(\theta) < 0$,επειδή η f είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Η f έχει μέγιστο για $\theta = \frac{\pi}{6}$.

γ) Είναι $\lim\limits_{\theta \to 0^+} f(\theta) = \lim\limits_{\theta \to 0^+} \frac{1}{3}(2\text{συν}\theta + \theta) = \frac{2}{3}$,

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}\left(2\text{συν}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{18}$ και

$\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} f(\theta) = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{3}(2\text{συν}\theta + \theta) = \frac{1}{3}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{\pi}{6}\right]$, οπότε έχει

αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{18}\right]$. Η f είναι συνεχής και

γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$. Η f έχει σύνολο τιμών το $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$.

28534.α) Η περίμετρος του ημικυκλίου είναι πx και η συνολική περίμετρος είναι: $B\Gamma + \Gamma\Delta + A\Delta + \pi x = 2y + 2x + \pi x$, άρα $2y + 2x + \pi x = 4 \Leftrightarrow$ $2y = 4 - (\pi+2)x \Leftrightarrow y = -\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2$. Το εμβαδό του ορθογωνίου μέρους είναι $(AB\Gamma\Delta) = y \cdot 2x = \left(-\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2\right)2x = 4x - (\pi+2)x^2$ και το εμβαδό του ημικυκλικού χωρίου είναι $\frac{\pi x^2}{2}$, οπότε το συνολικό εμβαδό είναι $E(x) = 4x - (\pi+2)x^2 + \frac{\pi x^2}{2} = 4x - \left(\pi + 2 - \frac{\pi}{2}\right)x^2 = -\frac{\pi+4}{2} \cdot x^2 + 4x$.

Είναι $x > 0$ και $y > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi+2}{2} \cdot x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{4}{\pi+2}$, άρα $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$.

β) Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$ με $E'(x) = -(\pi+4)x + 4$.Είναι $E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -(\pi+4)x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{\pi+4}$. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+4}\right)$ είναι $E'(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{4}{\pi+4}, \frac{4}{\pi+2}\right)$ είναι $E'(x) < 0$, επειδή η Ε είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{4}{\pi+4}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{4}{\pi+4}, \frac{4}{\pi+2}\right)$. Η Ε παρουσιάζει μέγιστο για $x = \frac{4}{\pi+4}$ το $E\left(\frac{4}{\pi+4}\right) = -\frac{\pi+4}{2} \cdot \left(\frac{4}{\pi+4}\right)^2 + 4 \cdot \frac{4}{\pi+4} = \frac{8}{\pi+4}$.

γ) Επειδή η Ε έχει μέγιστο για $x = x_0$ ισχύει ότι $E(x) \le E(x_0)$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_0 = \frac{4}{\pi+4}$. Επομένως $E(x) < E(x_0) \Leftrightarrow E(x) - E(x_0) < 0$ για τιμές του x κοντά στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{E(x) - E(x_0)} = -\infty$. Ακόμη $E(x_0) = \frac{4}{\pi+4} > 1 \Leftrightarrow \ln E(x_0) > \ln 1 = 0$, οπότε $\lim\limits_{x \to x_0} \ln(E(x)) = \ln(E(x_0)) > 0$ και

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\ln(E(x))}{E(x) - E(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \left[\ln(E(x)) \frac{1}{E(x) - E(x_0)} \right] = -\infty .$$

31680.α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$$AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 = 1,5^2 + x^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{x^2 + 2,25}$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2 = (1,7 - x)^2 + \alpha^2 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{(1,7-x)^2 + \alpha^2} .$$

Είναι $L = L(x) = AB + B\Gamma = \sqrt{x^2 + 2,25} + \sqrt{(1,7-x)^2 + \alpha^2}$, $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$.

β) i. Επειδή η συνάρτηση L παρουσιάζει ελάχιστο στο x = 1,02 που βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι

$$L'(1,02) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1,02^2}{1,02^2 + 2,25}} - \sqrt{\frac{0,68^2}{0,68^2 + \alpha^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1,02^2}{1,02^2 + 2,25}} = \sqrt{\frac{0,68^2}{0,68^2 + \alpha^2}} \Leftrightarrow \frac{1,02^2}{1,02^2 + 2,25} = \frac{0,68^2}{0,68^2 + \alpha^2} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{1,02^2 \cdot 0,68^2} + 1,02^2 \alpha^2 = \cancel{1,02^2 \cdot 0,68^2} + 2,25 \cdot 0,68^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1,02^2 \alpha^2} = \sqrt{2,25 \cdot 0,68^2} \Leftrightarrow 1,02\alpha = 1,5 \cdot 0,68 \Leftrightarrow \alpha = 1 .$$

ii. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$ είναι $L''(x) > 0$, άρα η L' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $1,02 < x < 1,7$ είναι $L'(x) > L'(1,02) = 0$, οπότε $\lim\limits_{x \to 1,02^+} \frac{1}{L'(x)} = +\infty$. Για κάθε $0 < x < 1,02$ είναι $L'(x) < L'(1,02) = 0$, οπότε $\lim\limits_{x \to 1,02^-} \frac{1}{L'(x)} = -\infty$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 1,02} \frac{1}{L'(x)}$.

28342.α) i. Το σημείο Β έχει τεταγμένη $y_B = e^{\alpha}$. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, είναι ΒΓ//ΑΔ, άρα $y_\Gamma = y_B \Leftrightarrow e^{\alpha} = \dfrac{e}{x_\Gamma} \Leftrightarrow x_\Gamma = \dfrac{e}{e^{\alpha}} = e^{1-\alpha}$.

Επειδή $x_\Gamma = x_\Delta$, είναι $x_\Delta = e^{1-\alpha}$.

ii. Είναι $(A\Delta) = x_\Delta - x_A = e^{1-\alpha} - \alpha$ και $(AB) = y_B = e^{\alpha}$.

Είναι $E(\alpha) = (A\Delta)(AB) = \left(e^{1-\alpha} - \alpha\right)e^{\alpha} = e - \alpha e^{\alpha}$, $\alpha < 1$.

β) Η συνάρτηση Ε(α) είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ με

$E'(\alpha) = -e^{\alpha} - \alpha e^{\alpha} = -e^{\alpha}(\alpha + 1)$.

$E'(\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow -e^{\alpha}(\alpha+1) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq -1$. Για κάθε $\alpha \in (-\infty, -1)$ είναι $E'(\alpha) > 0$ και για κάθε $\alpha \in (-1, 1)$ είναι $E'(\alpha) < 0$, επειδή η Ε είναι συνεχής στο -1, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1)$.

Η Ε έχει μέγιστο το $E(-1) = e + e^{-1} = e + \dfrac{1}{e}$.

γ) Είναι $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} E(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to -\infty} \left(e - \alpha e^{\alpha}\right) = e$ γιατί $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \alpha e^{\alpha} = \lim\limits_{\alpha \to -\infty} \dfrac{\alpha}{e^{-\alpha}} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{\alpha \to -\infty} \dfrac{1}{-e^{-\alpha}} = 0$

και $\lim\limits_{\alpha \to 1^-} E(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to 1^-} \left(e - \alpha e^{\alpha}\right) = 0$. Η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -1]$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_1) = \left(e, e + \dfrac{1}{e}\right]$. Το 1 δεν ανήκει στο $E(\Delta_1)$, οπότε δεν υπάρχει $\alpha \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε Ε(α) = 1.Η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = (-1, 1)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_2) = \left(0, e + \dfrac{1}{e}\right)$. Το 1 περιέχεται στο $E(\Delta_2)$ και η Ε είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2, οπότε υπάρχει μοναδικός $\alpha \in \Delta_2$ τέτοιος ώστε Ε(α) = 1. Επομένως υπάρχει ακριβώς μία τιμή του α για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται ίσο με 1.

29149.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-96, 96)$ με

$g'(x) = \dfrac{1}{96}e^{\frac{x}{96}} - \dfrac{1}{96}e^{-\frac{x}{96}} = \dfrac{1}{96}\left(e^{\frac{x}{96}} - e^{-\frac{x}{96}}\right)$.

Είναι $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{96}\left(e^{\frac{x}{96}} - e^{-\frac{x}{96}}\right) \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{96}} - e^{-\frac{x}{96}} \geq 0 \Leftrightarrow$

$e^{\frac{x}{96}} \geq e^{-\frac{x}{96}} \Leftrightarrow \frac{x}{96} \geq -\frac{x}{96} \Leftrightarrow 2\frac{x}{96} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Για κάθε $x \in (-96,0)$ είναι $g'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (0,96)$ είναι $g'(x) > 0$, επειδή η g είναι συνεχής στο $[-96,96]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-96,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,96]$. Η g έχει ελάχιστο το $g(0) = 2$, τοπικό μέγιστο το $g(-96) = e^{-1} + e$, τοπικό μέγιστο το $g(96) = e + e^{-1}$, οπότε έχει μέγιστο το $e + e^{-1}$.

β) i. Επειδή η g έχει μέγιστο για x = 96, είναι $g(x) \leq g(96) \Leftrightarrow g(96) - g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [-96,96]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 96 και x = - 96. Επειδή $\alpha > 0$ είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (-96,96)$.

ii. Για κάθε $x \in (-96,96)$, είναι $f'(x) = -2\alpha g'(x)$. Για κάθε $x \in (-96,0)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (0,96)$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $[-96,96]$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[-96,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,96]$. Η f έχει μέγιστο το $f(0) = 2\alpha\left[g(96) - g(0)\right] = 2\alpha\left(e + e^{-1} - 2\right)$. Επειδή $x \in [-96,96]$, το πλάτος της αψίδας του Σεντ Λούις είναι ίσο με $96 - (-96) = 192$. Επειδή έχει την ιδιότητα το πλάτος της να ισούται με το ύψος της, είναι $2\alpha\left(e + e^{-1} - 2\right) = 192 \Leftrightarrow \alpha = \frac{96}{e + e^{-1} - 2}$.

33596.α) $(AK) = d(x) = \sqrt{x^2 + (\ln x - 2)^2} = \sqrt{x^2 + \ln^2 x - 4\ln x + 4}$

β) Το $x_o > 0$ είναι η τιμή του x > 0 για την οποία η συνάρτηση d(x) παίρνει ελάχιστη τιμή. Για κάθε x > 0 είναι

$$d'(x) = \frac{\left(x^2 + \ln^2 x - 4\ln x + 4\right)'}{2\sqrt{x^2 + \ln^2 x - 4\ln x + 4}} = \frac{2x + \frac{2\ln x}{x} - \frac{4}{x}}{2\sqrt{x^2 + \ln^2 x - 4\ln x + 4}} \Leftrightarrow$$

$$d'(x) = \frac{2x^2 + 2\ln x - 4}{2x\sqrt{x^2 + \ln^2 x - 4\ln x + 4}} = \frac{\cancel{2}\left(x^2 + \ln x - 2\right)}{\cancel{2}x\sqrt{x^2 + \ln^2 x - 4\ln x + 4}} \Leftrightarrow$$

$d'(x) = \frac{x^2 + \ln x - 2}{x\sqrt{x^2 + \ln^2 x - 4\ln x + 4}}$. Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι

$$d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_o^2 + \ln x_o - 2}{x_0\sqrt{x_o^2 + \ln^2 x_0 - 4\ln x_0 + 4}} = 0 \Leftrightarrow x_o^2 + \ln x_o - 2 = 0$$

γ) i. Η ευθεία ΑΜ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AM} = \frac{\ln x_0 - 2}{x_0}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$.

Είναι $\lambda_{AM}f'(x_0)=\frac{\ln x_0-2}{x_0}\cdot\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0-2}{x_o^2}$. Όμως

$x_o^2+\ln x_o-2=0\Leftrightarrow \ln x_o-2=-x_o^2$, άρα $\lambda_{AM}f'(x_0)=\frac{\ln x_0-2}{x_0}\cdot\frac{1}{x_0}=\frac{-x_o^2}{x_o^2}=-1$,

οπότε η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι κάθετη στην ΑΜ.

ii. Η εφαπτομένη στο Μ έχει εξίσωση ε: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow$

$y=\frac{1}{x_0}x-1+\ln x_0$. Η ε τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο της με y=0, άρα

$\frac{1}{x_0}x-1+\ln x_0=0\Leftrightarrow\frac{1}{x_0}x=1-\ln x_0\Leftrightarrow x=x_0(1-\ln x_0)$.

Όμως $x_o^2+\ln x_o-2=0\Leftrightarrow\ln x_o=2-x_o^2$, άρα $x=x_0(1-2+x_o^2)=x_o^3-x_o$,

επομένως η ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(x_o^3-x_o,0)$.

34440.α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $E=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}xy$ (1).

Στο σχήμα βλέπουμε ότι y > 1 και x > 1. Επειδή τα σημεία Α, Μ, Β είναι

συνευθειακά, ισχύει ότι $\lambda_{AM}=\lambda_{MB}\Leftrightarrow\frac{1-0}{1-x}=\frac{y-1}{0-1}\Leftrightarrow -1=(1-x)(y-1)\Leftrightarrow$

$-1=y-1-xy+x\Leftrightarrow xy-y=x\Leftrightarrow y(x-1)=x\Leftrightarrow y=\frac{x}{x-1}$(2).

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $E=\frac{1}{2}x\cdot\frac{x}{x-1}$ ή $E(x)=\frac{x^2}{2(x-1)}$.

β) Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$E'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}$.

$E'(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}\geq 0\overset{x>1}{\Leftrightarrow}x-2>0\Leftrightarrow x>2$. Για κάθε $x\in(1,2)$ είναι

$E'(x)<0$ και για κάθε $x\in(2,+\infty)$ είναι $E'(x)>0$, επειδή η Ε είναι συνεχής,

είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

Η Ε έχει ελάχιστο για x = 2 το $E(2)=\frac{2^2}{2(2-1)}=2$.

γ) Είναι $E(3)=\frac{3^2}{2(3-1)}=\frac{9}{4}$ και $E'(3)=\frac{3(3-2)}{2(3-1)^2}=\frac{3}{8}$.

Η (ζ) έχει εξίσωση: $y-E(3)=E'(3)(x-3)\Leftrightarrow y-\frac{9}{4}=\frac{3}{8}(x-3)\Leftrightarrow y=\frac{3}{8}x+\frac{9}{8}$.

Για $y=0$ είναι $0=\frac{3}{8}x+\frac{9}{8}\Leftrightarrow 3x+9=0\Leftrightarrow x=-3$ και για $x=0$ είναι $y=\frac{9}{8}$,

οπότε $\Gamma(-3,0)$ και $\Delta\left(0,\frac{9}{8}\right)$.

δ) Επειδή το Κ κινείται πάνω στη (ζ) έχει συντεταγμένες $K(x(t),y(t))$ με

$y(t)=\frac{3}{8}x(t)+\frac{9}{8}$ και $y'(t)=3\mu/\sec$. Είναι

$y'(t)=\left(\frac{3}{8}x(t)+\frac{9}{8}\right)'\Leftrightarrow \cancel{3}=\frac{\cancel{3}}{8}x'(t)\Leftrightarrow x'(t)=8\mu/\sec$.

34441.α) Επειδή κάθε ράφτης ράβει 6 παντελόνια την ώρα , οι x ράφτες σε μία ώρα θα έχουν ράψει 6x παντελόνια, οπότε για τα 600 παντελόνια θα χρειαστούν $\frac{600}{6x}=\frac{100}{x}$ ώρες. Για τους x ράφτες το κόστος ανά ημέρα είναι

$12\cdot\frac{100}{x}\cdot x=1200$ ευρώ και το κόστος των ασφαλιστικών εισφορών τους είναι 20x, οπότε το συνολικό κόστος για τους ράφτες είναι $1200+20x$ ευρώ την ημέρα. Επειδή η επιστάτρια πληρώνεται με 20 ευρώ την ώρα, το κόστος της είναι $20\cdot\frac{100}{x}=\frac{2000}{x}$, οπότε το συνολικό της κόστος μαζί με τις ασφαλιστικές εισφορές της είναι $\frac{2000}{x}+20$ ευρώ. Επομένως το συνολικό κόστος είναι:

$K(x)=1200+20x+\frac{2000}{x}+20=20x+\frac{2000}{x}+1220$, $x>0$.

β) Για κάθε $x>0$ είναι $K'(x)=20-\frac{2000}{x^2}=\frac{20x^2-2000}{x^2}$.

Είναι $K'(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{20x^2-2000}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow 20x^2-2000\geq 0\Leftrightarrow 20x^2\geq 2000\Leftrightarrow$

$x^2\geq 100\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x\geq 10$. Για κάθε $x\in(0,10)$ είναι $K'(x)<0$ και για κάθε $x\in(10,+\infty)$ είναι $K'(x)>0$, επειδή η Κ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,10]$ και γνησίως αύξουσα στο $[10,+\infty)$. Επειδή το κόστος Κ γίνεται

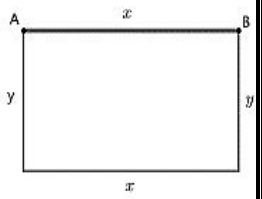
ελάχιστο για x = 10, οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας αν απασχολήσουν 10 ράφτες (άνδρες και γυναίκες), θα πετύχουν το ελάχιστο κόστος.

γ) Το ελάχιστο κόστος είναι το $K(10) = 200 + \frac{2000}{10} + 1220 = 1620$ ευρώ.

δ) Ο χρόνος που θα απαιτηθεί για τους 10 ράφτες για να φέρουν σε πέρας την παραγγελία, σε μία ημέρα είναι $\frac{100}{10} = 10$ ώρες. Επομένως οι 10 ράφτες εκτός του οκταώρου θα χρειαστεί να δουλέψουν υπερωρία για 2 ακόμη ώρες.

36814.α) Επειδή το ορθογώνιο έχει εμβαδόν $800\ m^2$, είναι

$x \cdot y = 800 \Leftrightarrow y = \frac{800}{x}$.



Η πέτρινη πλευρά έχει κόστος 6x ευρώ και ο συρμάτινος φράχτης μήκους $x + 2y$ έχει κόστος

$2(x + 2y) = 2x + 4 \cdot \frac{800}{x} = 2x + \frac{3200}{x}$ ευρώ,

οπότε το συνολικό κόστος είναι $K(x) = 6x + 2x + \frac{3200}{x}$, $x > 0 \Leftrightarrow$

$K(x) = 8x + \frac{3200}{x}$, $x > 0$.

β) Για $x > 0$ είναι $K'(x) = 8 - \frac{3200}{x^2} = \frac{8x^2 - 3200}{x^2}$.

$K'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8x^2 - 3200}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 8x^2 - 3200 \geq 0 \Leftrightarrow$

$8x^2 \geq 3200 \Leftrightarrow x^2 \geq 400 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x \geq 20$. Για κάθε $x \in (0,20)$ είναι $K'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (20,+\infty)$ είναι $K'(x) > 0$, επειδή η K είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,20]$ και γνησίως αύξουσα στο $[20,+\infty)$. Το κόστος γίνεται ελάχιστο για x = 20 m, τότε $y = \frac{800}{20} = 40m$.

Το ελάχιστο κόστος είναι το $K(20) = 8 \cdot 20 + \frac{3200}{20} = 160 + 160 = 320$ ευρώ.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους είναι το $K'(x) = 8 - \frac{3200}{x^2}$, $x > 0$.

Είναι $K''(x) = \frac{6400}{x^3} > 0$, άρα η K΄ είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής του κόστους αυξάνεται για κάθε x > 0.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Έστω $\Delta K = \Lambda\Gamma = x$ οπότε $E = \dfrac{(AB+\Gamma\Delta)\upsilon}{2} = \dfrac{(2+2x+2)\sqrt{4-x^2}}{2}$

Οπότε $E(x) = (x+2)\sqrt{4-x^2}, x \in (0,2)$.

Η $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με

$$E'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x(x+2)}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2-2x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-2(x^2+x-2)}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Είναι $E'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2+x-2 < 0 \Leftrightarrow x \in (1,2)$.

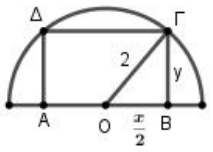
Η $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,2)$, οπότε παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$ την τιμή $E(1) = 3\sqrt{3}$. **Σωστή απάντηση Δ.**

2. Έστω $A(x, f(x)) = \left(x, \sqrt{x-1}\right)$ σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f τότε $(AM) = d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\sqrt{x-1}\right)^2} = \sqrt{x^2-3x+3}$.

Η συνάρτηση $d(x) = \sqrt{x^2-3x+3}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $d'(x) = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}}$ και $d'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x-3 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$.

Η συνάρτηση d είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$, παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \dfrac{3}{2}$. Το ζητούμενο σημείο είναι το $A\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **Σωστή απάντηση Γ.**

3. Έστω ΑΒΓΔ το ορθογώνιο που είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο κέντρου Ο, τότε αν ΑΒ=x και ΒΓ=y θα είναι



$OB = \dfrac{x}{2}$, οπότε από πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΓ έχουμε

$OB^2 + B\Gamma^2 = O\Gamma^2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \sqrt{4 - \dfrac{x^2}{4}}$ (1). Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = xy \Rightarrow E(x) = x\sqrt{4 - \dfrac{x^2}{4}}, x \in (0,4)$ και

$$E'(x)=\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}-\frac{x^2}{\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}}=\frac{4-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}}{\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}}=\frac{16-2x^2}{4\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}}.$$

Είναι $E'(x)>0\Leftrightarrow 16-2x^2>0\Leftrightarrow x^2<8\Leftrightarrow |x|<2\sqrt{2}\Leftrightarrow 0<x<2\sqrt{2}$

Η Ε είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,2\sqrt{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[2\sqrt{2},4\right)$,

παρουσιάζει μέγιστο για $x=2\sqrt{2}$, συνεπώς από (1) $y=\sqrt{2}$

Η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδό του ορθογωνίου είναι

$E=xy=2\sqrt{2}\sqrt{2}=4$. **Σωστή απάντηση Β.**

4. Είναι $K(t)=\frac{A}{4}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{7}}e^{-\frac{t}{7}}+c=-\frac{7A}{4}e^{-\frac{t}{7}}+c$ και $K(0)=0$ άρα $c=\frac{7A}{4}$.

Επομένως $K(t)=-\frac{7A}{4}e^{-\frac{t}{7}}+\frac{7A}{4}$. Το συνολικό κέρδος $P(t)$ είναι

$P(t)=K(t)+f(t)$ δηλαδή $P(t)=-\frac{7A}{4}e^{-\frac{t}{7}}+\frac{7A}{4}+\frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}$ με

$P'(t)=-\frac{7A}{4}e^{-\frac{t}{7}}\left(-\frac{1}{7}\right)+\frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}\left(-\frac{1}{14}\right)=\frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}-\frac{A}{4}e^{-\frac{t+28}{14}}$ και

$P'(t)>0\Leftrightarrow\frac{A}{4}\left(e^{-\frac{t}{7}}-e^{-\frac{t+28}{14}}\right)>0\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}}>e^{-\frac{t+28}{14}}$

$\Leftrightarrow -\frac{t}{7}>-\frac{t+28}{14}\Leftrightarrow 2t<t+28\Leftrightarrow t<28$. Η $P(t)$ είναι γνησίως αύξουσα όταν

$t\in[0,28]$ και γνησίως φθίνουσα όταν $t>28$. Άρα το συνολικό κέρδος γίνεται

μέγιστο για $t=28$ έτη. **Σωστή απάντηση Δ.**

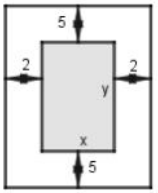
5. Έστω x,y οι διαστάσεις του κειμένου τότε $xy=360\Leftrightarrow y=\frac{360}{x}$ (1). Το

εμβαδό της σελίδας είναι $E=(x+4)(y+10)\overset{(1)}{\Rightarrow}E(x)=(x+4)\left(\frac{360}{x}+10\right),x>0$.

Με $E'(x)=\frac{360}{x}+10+(x+4)\left(-\frac{360}{x^2}\right)=\frac{360}{x}+10-\frac{360}{x}-\frac{1440}{x^2}=\frac{10x^2-1440}{x^2}$

Είναι $E'(x)>0\Leftrightarrow\frac{10x^2-1440}{x^2}>0\Leftrightarrow 10x^2>1440\Leftrightarrow$

$x^2 > 144 \Leftrightarrow |x| > 12 \overset{x>0}{\Rightarrow} x > 12$.



Η $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,12]$ και γνησίως αύξουσα στο $[12,+\infty)$,παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 12$ οπότε $y = \frac{360}{12} = 30$. Συνεπώς το πλάτος της σελίδας θα είναι $12+4 = 16\text{cm}$ και το ύψος $30+10 = 40\text{cm}$. **Σωστή απάντηση Α.**

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Λ	**2.** Σ	**3.** Λ	**4.** Σ	**5.** Σ

1ο Διαγώνισμα με ύλη έως και τα ακρότατα συνάρτησης

Α1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

• Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

• Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1). Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

• Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι. $f(x_1) = f(x_2)$.Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Α3. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + 1$ και

$(g \circ f)(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Είναι φανερό ότι $f \circ g \neq g \circ f$.

Α4. Β **Α5.** α) Λ β) Σ γ) Λ

Θέμα Β

Β1. Θέτω $\ln x = u,\ u \in \mathbb{R}$ και η σχέση $f(\ln x) = \ln x |\ln x|$ γίνεται $f(u) = u|u|,\ u \in \mathbb{R}$, οπότε $f(x) = x|x|,\ x \in \mathbb{R}$.

Β2. Είναι $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = 2x > 0$ και για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = -2x > 0$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Για $x \geq 0$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \geq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ και για $x < 0$ είναι

$-x^2 = y < 0 \Leftrightarrow x^2 = -y \Leftrightarrow x = -\sqrt{-y}$.

Άρα $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & y \geq 0 \\ -\sqrt{-y}, & y < 0 \end{cases}$, οπότε $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$.

Β3. Για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) > f^{-1}(x) \Leftrightarrow x^2 > \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 > x \Leftrightarrow x^4 - x > 0 \Leftrightarrow$

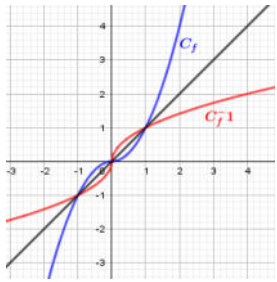
$x(x^3 - 1) > 0 \Leftrightarrow x^3 > 1 \Leftrightarrow x > 1$

Για κάθε x< 0 είναι

$f(x) > f^{-1}(x) \Leftrightarrow -x^2 > -\sqrt{-x} \Leftrightarrow x^2 < \sqrt{-x} \Leftrightarrow x^4 < -x \Leftrightarrow$

$x^4 + x < 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) < 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^3 > -1 \Leftrightarrow x > -1$.

Άρα $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.



Β4. $f^2(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow$

$x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$h(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1,\ x \in [0,1]$. Είναι h(1) =0, οπότε από το σχήμα Horner η h γράφεται

$h(x) = (x-1)(x^3 + x - 1)$.

Έστω $\pi(x) = x^3 + x - 1,\ x \in [0,1]$. Είναι π(0)= -1, π(1) = 1, δηλαδή π(0)π(1) < 0 και επειδή η π είναι συνεχής ως πολυωνυμική, λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\pi(x_1) = 0$.

Η π είναι παραγωγίσιμη με $\pi'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \pi \nearrow \mathbb{R}$, οπότε το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης π(x) =0.

$h(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\pi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $(\pi(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1)$, άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0, 1).

Β5. $f^2(\eta\mu x) \geq f^2(x) + x^{2020} \Leftrightarrow \eta\mu^4 x \geq x^4 + x^{2020} \Leftrightarrow \eta\mu^4 x - x^4 \geq x^{2020}$ (1)

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x= 0, άρα $\eta\mu^4 x \leq x^4 \Leftrightarrow \eta\mu^4 x - x^4 \leq 0$. Όμως $x^{2020} \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x=0 , άρα η (1) ισχύει μόνο για x=0 .

Θέμα Γ

Γ1. Έστω (1) η σχέση $h^3(x) + h(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$. Με παραγώγιση της

έχουμε $3h^2(x)h'(x) + h'(x) = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow h'(x)\left(\underbrace{3h^2(x) + 1}_{>0}\right) = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow$

$h'(x)=\dfrac{x^2+x+1}{3h^2(x)+1}>0$ αφού $x^2+x+1>0$ ($(\Delta=-3<0)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα .

Γ2. Από τη σχέση (1) έχουμε :

$$h^3(x)+h(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x \Leftrightarrow h(x)\left(h^2(x)+1\right)=\frac{2x^3+3x^2+6x}{6} \Leftrightarrow$$

$$h(x)\left(\underbrace{h^2(x)+1}_{>0}\right)=\frac{x\left(2x^2-3x+6\right)}{6} \Leftrightarrow h(x)=\frac{x\left(2x^2-3x+6\right)}{6\left(h^2(x)+1\right)}>0 \text{ αφού } x>0$$

και $2x^2-3x+6>0$ ($\Delta=-39<0$). Όμως

$$h(x)=\lim_{u\to 0}\frac{g(x+u)-g(x-u)}{2u}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{g(x+u)-g(x)}{u}-\frac{g(x-u)-g(x)}{u}\right)=$$

$\dfrac{1}{2}\left(g'(x)+g'(x)\right)=g'(x)$.Άρα $g'(x)>0$ για $x\neq 0$, η g συνεχής στο $[0,+\infty)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Γ3.α) $g(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}[2\ln x-\ln(x^2+2020)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x-\sqrt{x}}]=0$ γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln x^2-\ln(x^2+2020)]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x^2}{x^2+2020}=\lim_{\omega\to 1}\ln\omega=0 \text{ όπου}$$

$\omega=\dfrac{x^2}{x^2+2020}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+2020}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$.Ακόμη

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-(x+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+(x+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^2+x+1})^2-(x+\sqrt{x})^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x+\sqrt{x}}{x^2+x+1-(x^2+2x\sqrt{x}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x+\sqrt{x}}{1-2x\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{\sqrt{x}})}{\cancel{x}\sqrt{x}(\frac{1}{x\sqrt{x}}-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}-2}=0$$

β) Η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g''(x)=h'(x)>0$ άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$f'(x)=e^{\frac{g(x)}{x}}\cdot\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x)=xg'(x)-g(x), x\geq 0$. Η συνάρτηση α είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $\alpha'(x)=\cancel{g'(x)}+xg''(x)-\cancel{g'(x)}=xg''(x)>0$ άρα η α είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για $x>0\overset{\alpha\nearrow}{\Leftrightarrow}\alpha(x)>\alpha(0)\Leftrightarrow\alpha(x)>0\Leftrightarrow f'(x)>0$, η f συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Γ4.α) Το $\frac{1}{2}\in(g(0),g(1))$, η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ οπότε από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=\frac{1}{2}$.

β) Ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στα $\left[0,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},1\right]$ άρα υπάρχουν

$\xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοια ώστε $g'(\xi_1)=\frac{g\left(\frac{1}{2}\right)-g(0)}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow g'(\xi_1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$,

$g'(\xi_2)=\frac{g(1)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow g'(\xi_2)=2\left(1-g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Επομένως

$g'(\xi_1)+g'(\xi_2)=2\left(1-g\left(\frac{1}{2}\right)\right)+2g\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(1-g\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)\right)=2$.

γ) Ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στα $[0,\xi],[\xi,1]$ άρα υπάρχουν $\theta_1\in(0,\xi),\theta_2\in(\xi,1)$ τέτοια ώστε

$g'(\theta_1)=\frac{g(\xi)-g(0)}{\xi}\Leftrightarrow g'(\theta_1)=\frac{\frac{1}{2}}{\xi}\Leftrightarrow\frac{1}{g'(\theta_1)}=\frac{\xi}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\frac{1}{g'(\theta_1)}=2\xi$,

$g'(\theta_2)=\frac{g(1)-g(\xi)}{1-\xi}\Leftrightarrow g'(\theta_2)=\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\xi}\Leftrightarrow\frac{1}{g'(\theta_2)}=\frac{1-\xi}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\frac{1}{g'(\theta_2)}=2-2\xi$.

Επομένως $\frac{1}{g'(\theta_1)}+\frac{1}{g'(\theta_2)}=2\xi+2-2\xi=2$.

Θέμα Δ

Δ1. $e^{\alpha x}-3(x+1)^2+2\le f(x)\le e^{\beta x}-3(x+1)^2+2\Leftrightarrow$

$e^{\alpha x}-3(x+1)^2+2\le f(x)\Leftrightarrow e^{\alpha x}-3(x+1)^2+2-f(x)\le 0$ (1) και

$f(x)\le e^{\beta x}-3(x+1)^2+2\Leftrightarrow f(x)-e^{\beta x}+3(x+1)^2-2\le 0$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Έστω $\varphi(x)=e^{\alpha x}-3(x+1)^2+2-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι

$\varphi(0)=1-3+2-f(0)=0$, οπότε η σχέση (1) γράφεται: $\varphi(x)\le\varphi(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, συνεπώς η φ έχει μέγιστο στο $x=0$. Επειδή η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x)=\alpha e^{\alpha x}-6(x+1)-f'(x)$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι $\varphi'(0)=0\Leftrightarrow\alpha-6-f'(0)=0\Leftrightarrow\alpha-6+5=0\Leftrightarrow\alpha=1$.

Έστω $h(x)=f(x)-e^{\beta x}+3(x+1)^2-2$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $h(0)=f(0)-1+3-2=0$, οπότε η σχέση (2) γίνεται: $h(x)\le h(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, συνεπώς η h έχει μέγιστο στο $x=0$. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=f'(x)-\beta e^{\beta x}+6(x+1)$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι $h'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)-\beta+6=0\Leftrightarrow -5-\beta+6=0\Leftrightarrow\beta=1$.

Τότε $e^{\alpha x}-3(x+1)^2+2\le f(x)\le e^{\beta x}-3(x+1)^2+2\Leftrightarrow$

$e^x-3(x+1)^2+2\le f(x)\le e^x-3(x+1)^2+2\Leftrightarrow f(x)=e^x-3(x+1)^2+2$, $x\in\mathbb{R}$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x-6(x+1)$ και $f''(x)=e^x-6$.

Είναι

x	$-\infty$	ρ_1	ln6	ρ_2	$+\infty$
f″	−		+		
f′	+	−		−	+
f	↗	↘	-6ln6 ↘		↗

$f''(x)\ge 0\Leftrightarrow e^x-6\ge 0\Leftrightarrow e^x\ge 6\Leftrightarrow x\ge\ln 6$. Για κάθε $x<\ln 6$ είναι

$f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow(-\infty,\ln 6]$ και για κάθε x > ln6 είναι

$f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow[\ln 6,+\infty)$.

Είναι $f'(\ln 6)=-6\ln 6$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-6(x+1)\right)=+\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,\ln 6)$ η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1)=(-6\ln 6,+\infty)$. Επειδή $0\in f'(\Delta_1)$, υπάρχει μοναδικό $\rho_1\in\Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho_1)=0$.

Είναι $f'(4)=e^4-30=24,5>0$, οπότε $f'(\ln 6)f'(4)<0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, υπάρχει $\rho_2\in(\ln 6,4)\subseteq[\ln 6,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho_2)=0$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 6,+\infty)$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο διάστημα αυτό. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο ρίζες, η f έχει δύο κρίσιμα σημεία.

Δ3.Για κάθε $x<\rho_1 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\rho_1)=0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,\rho_1]$, για κάθε

$\rho_1<x<\ln 6 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(\rho_1)=0\Rightarrow f\searrow[\rho_1,\ln 6]$, για κάθε

$\ln 6<x<\rho_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(\rho_2)=0\Rightarrow f\searrow[\ln 6,\rho_2]$ και τέλος για κάθε

$x>\rho_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\rho_2)=0\Rightarrow f\nearrow[\rho_2,+\infty)$. Είναι $f'(0)=-5<0$, οπότε $\rho_1<0$ γιατί $0\in f'((-\infty,\ln 6))$.

Είναι $\rho_1<0 \overset{f\searrow[\rho_1,\ln 6]}{\Leftrightarrow} f(\rho_1)>f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, οπότε στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,\rho_1)$ η f έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=(-\infty,f(\rho_1))$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f(\Delta_1)$, η f έχει ακριβώς μία ρίζα $x_1\in\Delta_1$. Είναι

$\rho_2>0 \overset{f\searrow[\rho_1,\rho_2]}{\Leftrightarrow} f(\rho_2)<f(0)=0$.

Επειδή $f(0)=0$, $0\in(\rho_1,\rho_2)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, το 0 είναι η μοναδική ρίζα της f στο διάστημα αυτό. Είναι $f(5)=e^5-76=312-76=236>0$, οπότε $f(\rho_2)f(5)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής, λόγω του Θ.Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $x_2\in(\rho_2,5)\subseteq(\rho_2,+\infty)$.Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\rho_2,+\infty)$, η ρίζα είναι μοναδική στο διάστημα αυτό. Τελικά η f έχει τρείς ρίζες, τις $x_1,x_2,0$.

Δ4. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ για την f υπάρχει $\xi_1\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1)=\frac{e^{x_2}-3(x_2+1)^2+\cancel{2}-e^{x_1}+3(x_1+1)^2-\cancel{2}}{x_2-x_1}\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1)=\frac{e^{x_2}-e^{x_1}-3x_2^{\,2}-6x_2-\cancel{3}+3x_1^{\,2}+6x_1+\cancel{3}}{x_2-x_1}\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1)=\frac{e^{x_2}-e^{x_1}-3(x_2-x_1)(x_2+x_1)-6(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}-3(x_2+x_1)-6\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1)=\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}-3x_2-3x_1-6\ (3)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x)=e^x$, $x\in[x_1,x_2]$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την t, υπάρχει $\xi_2\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $t'(\xi_2)=\frac{t(x_2)-t(x_1)}{x_2-x_1}\Leftrightarrow$

$e^{\xi_2}=\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$. Τότε η σχέση (3) γίνεται: $f'(\xi_1)=e^{\xi_2}-3x_2-3x_1-6$.

2ο Διαγώνισμα με ύλη έως και τα ακρότατα συνάρτησης

Θέμα Α

Α1. Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Α2. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Α3. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x)=\frac{1}{x^2}$ και $g(x)=-\frac{1}{x^4}$. Είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0}g(x)=-\infty$

όμως $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x^4}=-\infty$

Α4.α) Η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα έχει εξίσωση της μορφής $y=\alpha x$.Όμως $\alpha=f'(3)=\varepsilon\varphi 45^{\circ}=1$, το σημείο Α ανήκει σ' αυτή οπότε $f(3)=3$.

β) $(f\circ f)'(3)=f'\left(f(3)\right)f'(3)=f'(3)f'(3)=1$ $g\left(f(3)\right)=g(3)=9-3=6$,

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=2x+\dfrac{9}{x^2}$.

$(g\circ f)'(3)=g'\left(f(3)\right)f'(3)=g'(3)=6+\dfrac{9}{9}=7$

γ) $(g+f)'(3)=g'(3)+f'(3)=7+1=8$,

$(g\cdot f)'(3)=g'(3)f(3)+g(3)f'(3)=7\cdot 3+6\cdot 1=27$

Θέμα Β

Β1. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$\Delta\Gamma^2=A\Gamma^2-A\Delta^2=32-x^2\Leftrightarrow\Delta\Gamma=\sqrt{32-x^2}$ και

$E(x)=\dfrac{1}{2}\Delta\Gamma\cdot A\Delta=\dfrac{1}{2}x\sqrt{32-x^2}$

Β2. 1ος τρόπος: Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,3\sqrt{2}\right)$ με:

$E'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{32-x^2}+\dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{32-x^2}}=\dfrac{32-x^2-x^2}{2\sqrt{32-x^2}}=\dfrac{32-2x^2}{2\sqrt{32-x^2}}$

$E'(x)\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{32-2x^2}{2\sqrt{32-x^2}}\geq 0\Leftrightarrow 32-2x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq 16\Leftrightarrow x\leq 4$.

Για κάθε $x\in(0,4)$ είναι $E'(x)>0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο διάστημα $(0,4]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x\in\left(4,3\sqrt{2}\right)$ είναι $E'(x)<0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο διάστημα $\left[4,3\sqrt{2}\right)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Η Ε έχει μέγιστο για $x=4\text{cm}$. Επειδή τη χρονική στιγμή $t=0$ που ξεκινήσαμε να ανασηκώνουμε το σημείο Α ήταν $x=0$, αν t η χρονική στιγμή που $x=4$

τότε $\upsilon=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\Leftrightarrow 0,2=\dfrac{4}{t}\Leftrightarrow\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{t}\Leftrightarrow t=20\,\text{sec}$, δηλαδή μετά από 20 δευτερόλεπτα το τρίγωνο ΑΔΓ έχει μέγιστο εμβαδό.

2ος τρόπος: Είναι $x'(t)=0,2\Leftrightarrow x(t)=0,2t+c,\ c\in\mathbb{R}$. Είναι

$x(0)=0 \Leftrightarrow c=0$ άρα $x(t)=0,2t$.

$E(t)=\frac{1}{2}x(t)\sqrt{32-x^2(t)}=\frac{1}{2}\cdot 0,2t\sqrt{32-0,04t^2}=0,1t\sqrt{32-0,04t^2}$

Επειδή $x(t)\in\left[0,3\sqrt{2}\right)$ είναι $0\le 0,2t<3\sqrt{2}\Leftrightarrow 0\le t<15\sqrt{2}$. Είναι

$$E'(t)=0,1\sqrt{32-0,04t^2}+0,1t\frac{-0,08^{0,04}t}{2\sqrt{32-0,04t^2}}=0,1\frac{32-0,04t^2-0,04t^2}{\sqrt{32-0,04t^2}}=$$

$$0,1\frac{32-0,08t^2}{\sqrt{32-0,04t^2}}.$$

$$E'(t)\ge 0\Leftrightarrow 0,1\frac{32-0,08t^2}{\sqrt{32-0,04t^2}}\ge 0\Leftrightarrow 32-0,08t^2\ge 0\Leftrightarrow t^2\le 400\Leftrightarrow t\le 20$$

Όταν $t\in(0,20)$ είναι $E'(t)>0\Rightarrow E\nearrow[0,20]$ και για $t\in\left(20,15\sqrt{2}\right)$ είναι

$E'(t)<0\Rightarrow E\searrow\left[20,15\sqrt{2}\right)$.

Το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο τη χρονική στιγμή $t=20\sec$.

Β3. Είναι $\eta\mu A\hat{B}\Delta=\frac{A\Delta}{AB}\Leftrightarrow \eta\mu\theta(t)=\frac{x(t)}{3\sqrt{2}}$ και

$$\left[\eta\mu\theta(t)\right]'=\left[\frac{x(t)}{3\sqrt{2}}\right]'\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta(t)\cdot\theta'(t)=\frac{x'(t)}{3\sqrt{2}}=\frac{0,2}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{30}$$

Τη χρονική στιγμή $t=20$ είναι

$\sigma\upsilon\nu\theta(20)\cdot\theta'(20)=\frac{\sqrt{2}}{30}\Leftrightarrow\theta'(20)=\frac{\sqrt{2}}{30\cdot\sigma\upsilon\nu\theta(20)}$. Είναι

$x(20)=0,2\cdot 20=4\text{cm}$ και $B\Delta^2=AB^2-A\Delta^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-4^2=2\Leftrightarrow B\Delta=\sqrt{2}$,

οπότε $\sigma\upsilon\nu\theta(20)=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$ και $\theta'(20)=\frac{\sqrt{2}}{30\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{10}\text{rad/sec}$

Β4. Είναι $E(0)=0$, $E(20)=0,1\cdot 20\sqrt{32-0,04\cdot 20^2}=8$ και

$$E\left(15\sqrt{2}\right)=0,1\cdot 15\sqrt{2}\sqrt{32-0,04\cdot\left(15\sqrt{2}\right)^2}=\frac{15}{10}\sqrt{2}\cdot\sqrt{32-\frac{4}{10\cancel{0}}\cdot 45\cancel{0}}\Leftrightarrow$$

$$E\left(15\sqrt{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{14}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\sqrt{7}=3\sqrt{7}$$

Στο διάστημα $\Delta_1=[0,20]$ η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει

αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_1)=[0,8]$. Στο διάστημα $\Delta_2=\left(20,15\sqrt{2}\right)$ η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_2)=\left(3\sqrt{7},8\right)$.Είναι $5<3\sqrt{7}$ γιατί $5^2<\left(3\sqrt{7}\right)^2\Leftrightarrow 25<63$, οπότε το 5 περιέχεται στο $E(\Delta_1)$ και δεν περιέχεται στο $E(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδική χρονική στιγμή $t\in(0,20)$ έτσι ώστε $E(t)=5\text{cm}^2$.

Θέμα Γ

Γ1. 1ος τρόπος

$$f'(x)\eta\mu x-f(x)\sigma\upsilon\nu x=f(x)\eta\mu x \overset{\eta\mu x\neq 0 \text{ στο } (0,\pi)}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)\eta\mu x-f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}=\frac{f(x)}{\eta\mu x}\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)'=\frac{f(x)}{\eta\mu x}\Leftrightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x}=ce^x, c\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)=ce^x\cdot\eta\mu x$$. Για $x=\frac{\pi}{2}$ έχουμε

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=ce^{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{2}}=ce^{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow c=1$$ οπότε $f(x)=e^x\cdot\eta\mu x, x\in(0,\pi)$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$ και

$\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)=f(\pi)\Leftrightarrow f(\pi)=0$. Άρα $f(x)=e^x\cdot\eta\mu x, x\in[0,\pi]$.

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{\eta\mu x}-e^x, x\in(0,\pi)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$g'(x)=\frac{\eta\mu x\cdot f'(x)-\sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)}{\eta\mu^2 x}-e^x=\frac{f(x)\cancel{\eta\mu x}}{\eta\mu\cancel{^2}x}-e^x=g(x)$$ οπότε

$g(x)=ce^x, c\in\mathbb{R}$. Για $x=\frac{\pi}{2}$ έχουμε $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=ce^{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}=ce^{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow c=0$

οπότε $g(x)=0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{\eta\mu x}-e^x=0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{\eta\mu x}=e^x\Leftrightarrow f(x)=e^x\cdot\eta\mu x, x\in(0,\pi)$

Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$ και

$\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)=f(\pi)\Leftrightarrow f(\pi)=0$. Άρα $f(x)=e^x\cdot\eta\mu x, x\in[0,\pi]$.

Γ2. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f'(x)=e^x\cdot(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$. Για το πρόσημο της παραγώγου έχουμε :

$$f'(x)=0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=-1\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}$$ αφού

$x\in[0,\pi]$. Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}>0$ και για $x=\pi$ είναι $f'(\pi)=e^{\pi}\cdot(\eta\mu\pi+\sigma\upsilon\nu\pi)=-e^{\pi}<0$. Επομένως $f'(x)>0$ στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και $f'(x)<0$ στο $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ άρα η f ↗ στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$, η f ↘ στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$,

Η f έχει ολικό μέγιστο το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}$,ολικό ελάχιστο στα σημεία 0,π το $f(0)=f(\pi)=0$.

β) Θεωρούμε τα διαστήματα $A_1=\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ και $A_2=\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$. Λόγω της μονοτονίας στα παραπάνω διαστήματα έχουμε :

$$f(A_1)=\left[f(0),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}\right] \text{ και}$$

$$f(A_2)=\left[f(\pi),\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^{+}}f(x)\right)=\left[0,f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\left[0,\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}\right)$$

Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=\left[0,\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}\right]$.

γ) Αν $\alpha<0$ ή $\alpha>\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}$ η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $\alpha\notin f(A)$. Αν $\alpha=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}$ έχει μοναδική ρίζα την $x_0=\frac{3\pi}{4}$. Αν $\alpha\in\left[0,\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}\right)$ έχει δύο ακριβώς ρίζες αφού $\alpha\in f(A_1)$ και $\alpha\in f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1,x_2\in A_1,A_2$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)=0$. Οι ρίζες είναι μοναδικές αφού η f είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα A_1,A_2.

Γ3. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=e^{\frac{\pi}{2}}$. Αν $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της με την γραφική παράσταση της f τότε

$f'(x_0)=e^{\frac{\pi}{2}}$.Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με

$f''(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)+e^x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x$.Για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f''(x)>0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ είναι $f''(x)<0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Άρα η f' παρουσιάζει μέγιστο στο $\frac{\pi}{2}$ το $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ και $f'(x_0)\le f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ με το ίσον να ισχύει μόνο $x=\frac{\pi}{2}$. Άρα υπάρχει μοναδική εφαπτομένη με εξίσωση

$$y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y-e^{\frac{\pi}{2}}=e^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y=e^{\frac{\pi}{2}}\cdot x+e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Γ4. Για την f ισχύει το ΘΜΤ στα διαστήματα $\left[0,\frac{2\pi}{5}\right]$ και $\left[\frac{2\pi}{5},\pi\right]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in\left(0,\frac{2\pi}{5}\right),\xi_2\in\left(\frac{2\pi}{5},\pi\right)$ τέτοιοι ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{2}{5}\right)-f(0)}{\frac{2}{5}-0}=\frac{f\left(\frac{2}{5}\right)}{\frac{2}{5}}=\frac{5f\left(\frac{2}{5}\right)}{2}\ \text{και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\pi)-f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\pi-\frac{2\pi}{5}}=-\frac{f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\frac{3\pi}{5}}=-\frac{5f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{3\pi}.\ \text{Επομένως}$$

$$2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)=\cancel{2}\,\frac{5f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\cancel{2}\pi}-\cancel{3}\,\frac{5f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\cancel{3}\pi}=\frac{5f\left(\frac{2\pi}{5}\right)-5f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\pi}=0.$$

Θέμα Δ

Δ1. Έστω ότι η πολυωνυμική έχει βαθμό ν. Τότε η f' θα είναι ν-1 βαθμού και το άθροισμα $f+f'$ θα είναι ν βαθμού. Όμως το άθροισμα $f+f'$ είναι 4ου βαθμού, άρα $\nu=4$.Έστω $f(x)=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon,\ \alpha\neq 0$. Είναι $f'(x)=4\alpha x^3+3\beta x^2+2\gamma x+\delta$ και

$f(x)+f'(x)=5x^4+20x^3-30x^2-40x+25 \Leftrightarrow$

$\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon+4\alpha x^3+3\beta x^2+2\gamma x+\delta=5x^4+20x^3-30x^2-40x+25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha x^4+(\beta+4\alpha)x^3+(\gamma+3\beta)x^2+(\delta+2\gamma)x+\varepsilon+\delta=5x^4+20x^3-30x^2-40x+25$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν και μόνο αν:

$$\begin{cases}\alpha=5\\ \beta+4\alpha=20\\ \gamma+3\beta=-30\\ \delta+2\gamma=-40\\ \varepsilon+\delta=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=5\\ \beta=0\\ \gamma=-30\\ \delta=20\\ \varepsilon=5\end{cases}$$

. Άρα $f(x)=5x^4-30x^2+20x+5$.

Δ2. Είναι $f'(x)=20x^3-60x+20=20\left(x^3-3x+1\right)$ και

$f''(x)=20\left(3x^2-3\right)=60\left(x^2-1\right)$.

Για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ είναι $f''(x)>0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$. Για κάθε $x\in(-1,1)$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow[-1,1]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(20x^3-60x+20\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}20x^3=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}20x^3=+\infty$, $f'(-1)=60$ και $f'(1)=-20$. Τα παραπάνω παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f'	$-\infty$	↗	TM	↘	TE	↗	$+\infty$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1)=(-\infty,60]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό x_1 στο εσωτερικό του Δ_1 τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=0$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[-1,1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2)=[-20,60]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο, ώστε $f'(x_2)=0$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3=[-1,+\infty)$, οπότε έχει

αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_3)=[-20,+\infty)$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_3)$ υπάρχει μοναδικό x_3 στο εσωτερικό του Δ_3 τέτοιο, ώστε $f'(x_3)=0$.

Για κάθε $x<x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_1)=0 \Rightarrow f\searrow(-\infty,x_1]$. Για κάθε $x_1<x<-1 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_1)=0 \Rightarrow \Rightarrow f\nearrow[x_1,-1]$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(x_1)$. Για κάθε $-1<x<x_2 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_2)=0 \Rightarrow f\nearrow[-1,x_2]$.Για κάθε $x_2<x<1 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_2)=0 \Rightarrow \Rightarrow f\searrow[x_2,1]$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(x_2)$.

Για κάθε $1<x<x_3 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_3)=0 \Rightarrow f\searrow[1,x_3]$ και για κάθε $x>x_3 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_3)=0 \Rightarrow \Rightarrow f\nearrow[x_3,+\infty)$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(x_3)$.Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	TE	↗	TM	↘	TE	↗	$+\infty$

Δ3.

$x^4+4x+1=6x^2 \Leftrightarrow x^4-6x^2+4x+1=0 \overset{\cdot 5}{\Leftrightarrow} 5x^4-30x^2+20x+5=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^4=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$.

Είναι $x_1<-1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(-1)=-40<0$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1=(-\infty,x_1)$,έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1)=(f(x_1),+\infty)$. Επειδή $0\in f(A_1)$ υπάρχει μοναδικό $\rho_1\in A_1$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1)=0$.

Είναι $x_2<1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x_2)>f(1)=0>0$.Η f είναι συνεχής στο -1, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2=[x_1,x_2]$ και έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f(A_2)=\left[f(x_1),f(x_2)\right]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(A_2)$, υπάρχει μοναδικό ρ_2 στο εσωτερικό του A_2 τέτοιο, ώστε $f(\rho_2)=0$.

Επειδή $f(1)=0$, η εξίσωση έχει ρίζα το 1.Η f είναι συνεχής στο $x=1$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_3=\left[x_2,x_3\right]$ και η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f στο διάστημα αυτό.

Είναι $x_3>1 \overset{f\searrow[1,x_3]}{\Leftrightarrow} f(x_3)<f(1)=0$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_4=\left[x_3,+\infty\right)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_4)=\left[f(x_3),+\infty\right)$. Επειδή $0\in f(A_4)$, η f έχει ρίζα ρ_3 στο A_4. Τελικά η f έχει τέσσερις ρίζες.

Ακέραια ρίζα της f είναι το 1. Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 1, δηλαδή ±1 .Είναι $f(-1)=-40\neq0$ άρα το -1 δεν είναι ρίζα.

Δ4. Τα κοινά σημεία των C_h, C_g είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ άρα τα $\{\rho_1,\rho_2,1,\rho_3\}$. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x=\rho_1$ πρέπει $h'(\rho_1)=g'(\rho_1)\Leftrightarrow h'(\rho_1)-g'(\rho_1)=0\Leftrightarrow f'(\rho_1)=0$, που είναι άτοπο. Όμοια για τις $x=\rho_2$, $x=1$ και $x=\rho_3$.Άρα δεν έχουν κοινή εφαπτομένη στα κοινά τους σημεία.

Δ5.Έχουμε: $f(x)=g(x)-6\Leftrightarrow f(x)-g(x)+6=0$

$\Leftrightarrow 5x^4-30x^2+20x+5-x^4-4x-1+6=0\Leftrightarrow$

$4x^4-30x^2+16x+10=0\Leftrightarrow$

4	0	-30	16	10	ρ=1
↓	4	4	-26	-10	
4	4	-26	-10	0	

$(x-1)\left(4x^3+4x^2-26x-10\right)=0\Leftrightarrow$

$4x^3+4x^2-26x-10=0$

Έστω $t(x)=4x^3+4x^2-26x-10,\ x\in[1,3]$.Είναι

$t(1)=-28<0,\ t(3)=108+36-78-10=56>0$,δηλαδή $t(1)t(3)<0$ και επειδή η t είναι συνεχής στο $[1,3]$ ως πολυωνυμική, λόγω του Θ.Bolzano, η εξίσωση $t(x)=0\Leftrightarrow 4x^3+4x^2-26x-10=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,3)$.

30 Κυρτότητα – Σημεία Καμπής

19.

x	-3		-2		-1		1		3		5		7
f'		+		+		–		–		+		+	
f'		↗		↘		↘		↗		↗		↘	
f		⤴		⤵		⤵		⤷		⤴		⤵	

Τοπικά ελάχιστα τα $f(-3), f(3)$. Τοπικά μέγιστα τα $f(-1), f(7)$ και σημεία καμπής τα $(-2, f(-2)), (1, f(1)), (5, f(5))$.

20. α) Ο μαθητής κάνει λάθος καθώς το ότι η C_f βρίσκεται κάτω από μία εφαπτομένη της δεν σημαίνει ότι η f είναι κοίλη.
β) Αν ήταν κοίλη στο πεδίο ορισμού της τότε η C_f θα ήταν κάτω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση τα σημεία στα οποία εφάπτεται. Η ε_2 όπως φαίνεται τέμνει σε δύο σημεία την C_f και μόνο στο ένα εφάπτεται. Επομένως δεν είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

21. α) $f'(x) = 4x^3 - 12x + 7,\ f''(x) = 12x^2 - 12 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 1$.
Η f είναι κυρτή στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$, κοίλη στο $[-1, 1]$ και έχει σημεία καμπής τα $(-1, f(-1)) \equiv (-1, -14)$ και $(1, f(1)) \equiv (1, 0)$.
β) $f'(x) = 4x^3,\ f''(x) = 12x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει σημεία καμπής.
γ) $f'(x) = \dfrac{2e^x(e^x - 2) - (2e^x + 1)e^x}{(e^x - 2)^2} = \dfrac{-5e^x}{(e^x - 2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{5e^{2x} + 10e^x}{(e^x - 2)^3}$, $x \neq \ln 2$.
Η f είναι κυρτή στο $(\ln 2, +\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty, \ln 2)$.

22. α) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x = 0$.
Για $x < 0$ είναι $f'(x) = -4x - 3x^2$ και για $x > 0$ είναι $f'(x) = 8x - 3x^2$.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x^2 - x^3}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^{\not 2}(-2 - x)}{\not x} = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{4x^2 - x^3}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\not 2}(4 - x)}{\not x} = 0, \text{ άρα } f'(0) = 0. \text{ Για κάθε}$$

$x<0$ είναι $f''(x)=-4-6x\geq 0\Leftrightarrow x\leq -\frac{2}{3}$. Η f είναι κυρτή στο $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]$ και κοίλη στο $\left[-\frac{2}{3},0\right]$. Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)=8-6x\geq 0\Leftrightarrow x\leq \frac{4}{3}$. Η f είναι κυρτή στο $\left[0,\frac{4}{3}\right]$ και κοίλη στο $\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$. Σημεία καμπής τα $\left(-\frac{2}{3},-\frac{16}{27}\right),(0,0),\left(\frac{2}{3},\frac{128}{27}\right)$.

β) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=6=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-4$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-4$, άρα $f'(0)=-4$. Είναι $f'(x)=\begin{cases}2x-4, & x\leq 0\\ 3x^2-12x-4, & x>0\end{cases}$. Είναι $f''(x)=\begin{cases}2, & x<0\\ 6x-12, & x>0\end{cases}$. Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και στο $[2,+\infty)$ και κοίλη στο $[0,2]$. Έχει σημεία καμπής τα $(0,6),(2,-18)$

23. $f'(x)=\ln(x-1)+1-\ln x-1=\ln(x-1)-\ln x$. Είναι $f''(x)=\frac{1}{x(x-1)}>0$ οπότε η f είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

24. α) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow x\leq e$.

Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x\in(e,+\infty)$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$. Έχει μέγιστο το $f(e)=\frac{1}{e}$.

β) $f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}\geq 0\Leftrightarrow x\geq e\sqrt{e}$. Για κάθε $x\in\left(0,e\sqrt{e}\right)$ είναι $f''(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(e\sqrt{e},+\infty\right)$ είναι $f''(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $\left(0,e\sqrt{e}\right]$ και κυρτή στο $\left[e\sqrt{e},+\infty\right)$. Έχει σημείο καμπής το $\left(e\sqrt{e},\frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\frac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$. Στο $\Delta_1=(0,e)$

είναι $f(\Delta_1)=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$ και στο $\Delta_2=[e,+\infty)$ είναι $f(\Delta_2)=\left(0,\frac{1}{e}\right]$ άρα $f(A)=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)\cup\left(0,\frac{1}{e}\right]=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$.

25. $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$, $g''(x)=\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}>0\Rightarrow g\cup[\alpha,\beta]$

26. α) $f'(x)=2\lambda x-2\ln x-2$, $f''(x)=2\lambda-\frac{2}{x}=\frac{2\lambda x-2}{x}\geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\lambda x-2\geq 0\Leftrightarrow$ $x\geq\frac{1}{\lambda}$. Για κάθε $x<\frac{1}{\lambda}$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow$ f κοίλη στο $\left(-\infty,\frac{1}{\lambda}\right]$ και για κάθε $x>\frac{1}{\lambda}$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow$ f κυρτή στο $\left[\frac{1}{\lambda},+\infty\right)$.

β) ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\lambda=(2\lambda-2)(x-1)\Leftrightarrow y=(2\lambda-2)x+2-\lambda$.
Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, πρέπει
$0=(2-\lambda)\cdot 0+2-\lambda\Leftrightarrow\lambda=2$

Αυξημένης δυσκολίας

27. α) Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο Α τότε η f'' έχει πεδίο ορισμού το Α και επομένως οι $\frac{1}{f''}$ και $\sqrt{f''}$ ορίζονται σε υποσύνολο του Α.

Έστω ότι $C_f\equiv C_2$ τότε η $\frac{1}{f''}$ θα παριστάνεται από την C_3, η οποία ορίζεται σε υποσύνολο του $A=\mathbb{R}-\{1\}$. Τότε και η $\sqrt{f''}$ θα πρέπει να ορίζεται σε υποσύνολο του Α πράγμα που δεν συμβαίνει ούτε στην C_1 ούτε στην C_4. Άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Έστω ότι $C_f\equiv C_3$ τότε η $\frac{1}{f''}$ θα παριστάνεται από την C_2, η οποία ορίζεται σε υποσύνολο του $A=\mathbb{R}-\{1\}$. Τότε ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο γιατί η $\sqrt{f''}$ θα πρέπει να ορίζεται σε υποσύνολο του Α πράγμα που δεν συμβαίνει.
Έστω ότι $C_f\equiv C_4$ τότε καταλήγουμε σε άτοπο αφού οι υπόλοιπες γραφικές δεν ορίζονται σε υποσύνολο του $A=[1,+\infty)$. Επομένως είναι $C_f\equiv C_1$.

β) Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0=1$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό άρα $f''(1)=0\Leftrightarrow\sqrt{f''(1)}=0$. Επομένως η $\sqrt{f''}$ μπορεί να παριστάνεται μόνον από την C_4.

γ) Έστω ότι η $\frac{1}{f''}$ παριστάνεται από την C_3 τότε $\frac{1}{f''(x)} > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$ για κάθε $x \neq 1$ και f' συνεχής στο $x_0 = 1$ ως παραγωγίσιμη άρα $f' \nearrow \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x \neq 1$ η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) πράγμα άτοπο. Άρα τελικά η $\frac{1}{f''}$ παριστάνεται από την C_2.

28. α) $f'(x) = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$, $f''(x) = 2e^x\sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f''(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι $f''(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο [0, π], είναι κυρτή στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και κοίλη στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Η f έχει σημείο καμπής το $\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$.

β) Είναι $f'(x) = 2e^x\sigma\upsilon\nu x$ και $f''(x) = 2e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{4}$.

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ είναι $f''(x) \neq 0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$.

Είναι $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) > 0$, άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό.

Είναι $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} < 0$, άρα $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

Η f έχει σημείο καμπής το $\left(\frac{\pi}{4}, e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\right)$.

γ) Είναι $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4^x}{\ln^2 4} - \frac{4^{-x}}{\ln^2 4} + 2\eta\mu x$.

$f'(x) = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{4^{-x}}{\ln 4} + 2\sigma\upsilon\nu x$, $f''(x) = \frac{4^x \ln 4}{\ln 4} - \frac{4^{-x}\ln 4}{\ln 4} - 2\eta\mu x = 4^x - 4^{-x} - 2\eta\mu x$

$f^{(3)}(x)=4^x\ln 4+4^{-x}\ln 4-2\sigma\upsilon\nu x=\ln 4\left(4^x+\frac{1}{4^x}\right)-2\sigma\upsilon\nu x$ όμως

$-2\le 2\sigma\upsilon\nu x\le 2$

οπότε $\ln 4\left(4^x+\frac{1}{4^x}\right)-2\le \ln 4\left(4^x+\frac{1}{4^x}\right)-2\sigma\upsilon\nu x\le \ln 4\left(4^x+\frac{1}{4^x}\right)+2$

Δηλαδή $f^{(3)}(x)\ge \ln 4\left(4^x+\frac{1}{4^x}\right)-2>1\left(4^x+\frac{1}{4^x}\right)-2=\left(2^x-\frac{1}{2^x}\right)^2\ge 0\Rightarrow f''\nearrow\mathbb{R}$.

Για κάθε $x<0\overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x)<f''(0)=0\Rightarrow$ f κοίλη στο $(-\infty,0]$ και για κάθε

$x>0\overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x)>f''(0)=0\Rightarrow$ f κυρτή στο $[0,+\infty)$.Σημείο καμπής το (0,0).

29. Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$f''(x)=\frac{\ln x-\frac{x-1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{\ln x-1+\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$. Είναι $\ln^2 x>0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Γνωρίζουμε ότι $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$, άρα για x το $\frac{1}{x}$ είναι $\ln\frac{1}{x}\le\frac{1}{x}-1\Leftrightarrow-\ln x\le\frac{1}{x}-1\Leftrightarrow\ln x-1+\frac{1}{x}\ge 0$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow x=1$. Άρα είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Από εδώ και πέρα θα εργαστούμε με δύο διαφορετικούς τρόπους:

1ος τρόπος: (Χρήση ορισμού κυρτότητας)

Είναι $\lim\limits_{x\to1}f'(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1=f'(1)$ άρα η f' είναι συνεχής στο

$x_0=1$, άρα $f'\nearrow(0,+\infty)$. Επομένως η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

2ος τρόπος: (Χρήση του θεωρήματος)

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{x-1}{\ln x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{x\ln x-\ln x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$ άρα $f''(1)=\frac{1}{2}>0$.

Δηλαδή είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

30. Είναι $\left(f(x-1)\right)' = \left(f(3-x)\right)' \Leftrightarrow f'(x-1) = -f'(3-x)$ και για $x=2$:
$f'(1) = -f'(1) \Leftrightarrow 2f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$. $f \cap \mathbb{R} \Leftrightarrow f' \searrow \mathbb{R}$, οπότε για κάθε
$x < 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) = 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 1]$ και για
$x > 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) = 0 \Rightarrow f \searrow [1, +\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(1)$.

31. Είναι $\ln x \le x - 1 < x \Leftrightarrow x - \ln x > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα $D_f = (0, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x - \ln x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x^2 - x\ln x}, \quad f''(x) = \frac{-x^2 - \ln x + 3x - 1}{\left(x^2 - x\ln x\right)^2}$$

Έστω $g(x) = -x^2 - \ln x + 3x - 1,\ x > 0.$ Είναι $g'(x) = \dfrac{(x-1)(-2x+1)}{x}$,

$g \searrow \left(0, \frac{1}{2}\right], \nearrow \left[\frac{1}{2}, 1\right], \searrow [1, +\infty)$. $g\left(\left(0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[\frac{1}{4} + \ln 2, +\infty\right)$, άρα $g(x) > 0 \Rightarrow$

$f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$. $g\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[\frac{1}{4} + \ln 2, 1\right]$, άρα $g(x) > 0 \Rightarrow$

$f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[x^2\left(-1 - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\right] = -\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$, άρα $g\left((1, +\infty)\right) = (-\infty, 1)$.

$0 \in g\left((1, +\infty)\right)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 > 1 : g(x_1) = 0$. Για κάθε

$1 < x < x_1 \overset{g \searrow}{\Rightarrow} g(x) > g(x_1) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup [1, x_1]$ και για κάθε

$x > x_1 \overset{g \searrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x_1) = 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f \cap [x_1, +\infty)$. Η f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $\left(x_1, f(x_1)\right)$.

32. α) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2^x + 3^x}{2}\right) = \ln\left(2^x + 3^x\right) - \ln 2$, Είναι $f'(x) = \dfrac{2^x \ln 2 + 3^x \ln 3}{2^x + 3^x}$

και $f''(x) = \dfrac{2^x \cdot 3^x\left[\left(\ln 2 - \ln 3\right)^2 + \ln 2 \cdot \ln 3\right]}{\left(2^x + 3^x\right)^2} > 0 \Rightarrow f$ κυρτή.

β) Έστω $g(x) = f(x) - \lambda x,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι $f(x) \ge \lambda x \Leftrightarrow f(x) - \lambda x \ge 0 \Leftrightarrow$
$g(x) \ge g(0)$, άρα η g έχει ελάχιστο στο $x = 0$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη

στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)-\lambda=\dfrac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{2^x+3^x}-\lambda$, από το θ.Fermat ισχύει ότι:

$g'(0)=0\Leftrightarrow\dfrac{\ln 2+\ln 3}{2}-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{\ln 6}{2}$.

33.α) Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\pi,0)$ με $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x-1$ και $f''(x)=\eta\mu x<0$ για κάθε $x\in(-\pi,0)$ άρα η f είναι κοίλη στο $(-\pi,0)$. Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x+1$ και δεύτερη παράγωγο $f'(x)=-\eta\mu x<0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ άρα η g είναι κοίλη στο $(0,\pi)$.

β) Είναι $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\dfrac{\pi}{2}$ και $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. Η C_f έχει εφαπτομένη στο $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ την

(ε): $y-1-\dfrac{\pi}{2}=x-\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow y=x+1$.

Για $x\in(-\pi,0)$: $f(x)=x+1\Leftrightarrow-\eta\mu x-x=x+1\Leftrightarrow\eta\mu x+2x+1=0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $k(x)=\eta\mu x+2x+1$, $-\pi\le x\le 0$

Η k είναι συνεχής στο $[-\pi,0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-\pi,0)$ με παράγωγο $k'(x)=\sigma\upsilon\nu x+2>0$ για κάθε $x\in(-\pi,0)$, άρα η k είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\pi,0]$. Είναι $k(-\pi)=-2\pi+1<0$, $k(0)=1>0$ άρα από θεώρημα Bolzano και αφού k γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_1\in(-\pi,0)$ τέτοιο ώστε $k(x_1)=0$. Για $x\in(0,\pi)$ αφού η f είναι κοίλη και h είναι εφαπτομένη της C_f στο $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ τότε ισχύει $f(x)\le x+1$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=\dfrac{\pi}{2}$. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και της (ε) έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.

γ) Έστω ότι η (ε) εφάπτεται στην C_f και σε άλλο σημείο $x_1\ne\dfrac{\pi}{2}$. Τότε με βάση το προηγούμενο ερώτημα αυτό θα συμβαίνει στο σημείο $x_1\in(-\pi,0)$.

Θα είναι λοιπόν $f'(x_1)=\dfrac{1}{2}$ πράγμα αδύνατο γιατί $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x-1<0$ αφού στο διάστημα αυτό είναι $\sigma\upsilon\nu x>0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

δ) 1ος τρόπος: Αν η f ήταν κοίλη στο πεδίο ορισμού της τότε για κάθε x του

πεδίου ορισμού θα πρέπει να ισχύει $f(x) \le x+1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \frac{\pi}{2}$, που είναι το σημείο στο οποίο εφάπτεται, πράγμα άτοπο καθώς έχουν κι άλλο κοινό σημείο.

2ος τρόπος: Για $x_1 \in (-\pi, 0)$ είναι $f'(x_1) = -\sigma\upsilon\nu x_1 - 1 < 0$ γιατί $\sigma\upsilon\nu x_1 > 0$ και για $x_2 \in (0, \pi)$ είναι $f'(x_2) = \sigma\upsilon\nu x + 1 > 0$ γιατί $\sigma\upsilon\nu x_2 > 0$. Άρα $g'(x_1) < g'(x_2)$, οπότε η g΄ δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της άρα δεν είναι κοίλη σε αυτό.

34. Έστω ότι η g έχει σημείο καμπής στο $x = x_0$, τότε επειδή η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, ισχύει ότι $g''(x_0) = 0$. Είναι $\left(g(x)g'(x)\right)' = (2)' \Leftrightarrow$ $\left(g'(x)\right)^2 + g(x)g''(x) = 0$ και για $x = x_0$ είναι $\left(g'(x_0)\right)^2 + g(x_0)g''(x_0) = 0 \Leftrightarrow$ $g'(x_0) = 0$. Αντικαθιστώντας $x = x_0$ στην αρχική έχουμε:

$g(x_0)\,\cancel{g'(x_0)}^{\,0} = 2 \Leftrightarrow 0 = 2$ που είναι άτοπο.

35. Έστω ότι η g έχει σημείο καμπής στο $x = x_0$, τότε επειδή η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, ισχύει ότι $g''(x_0) = 0$. Παραγωγίζοντας προκύπτει

$2g(x)g'(x) + g(x) + xg'(x) + 2x = 0$ και

$2\left(g'(x)\right)^2 + 2g(x)g''(x) + 2g'(x) + xg''(x) + 2 = 0$. Για $x = x_0$ έχουμε

$2\left(g'(x_0)\right)^2 + 2g(x_0)g''(x_0) + 2g'(x_0) + x_0 g''(x_0) + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\left(g'(x_0)\right)^2 + g'(x_0) + 1 = 0$ που είναι αδύνατη ($\Delta < 0$).

36. Είναι $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $f''(x) = -\frac{xe^{f(x)}}{x^2 + x + 1}$. Για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f \cap [0, +\infty)$.

Σημείο καμπής το $(0, f(0))$.

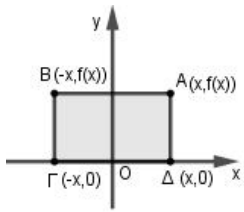
x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f''		+		−		+	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

37. α) $f'(x) = -4xe^{-x^2}$. Για $x < 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 0]$ και για $x > 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [0, +\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(0) = 2$.

β) $f''(x)=4xe^{-x^2}\left(2x^2-1\right)$

Η f έχει ΣΚ τα $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ και $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

γ) Για να είναι ορθογώνιο πρέπει οι άλλες δύο κορυφές να έχουν της ίδια τεταγμένη. Επειδή $f(-x)=f(x)$ (f άρτια) οι άλλες δύο κορυφές έχουν αντίθετες τετμημένες. Έστω $A(x,f(x))$, $x>0$ και $B(-x,f(x))$.



Τότε $E=(AB)\cdot(A\Delta)=2x\cdot 2e^{-x^2}=4xe^{-x^2}$. Έστω $E(x)=4xe^{-x^2}$, $x>0$. Είναι $E'(x)=4\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$. Για κάθε $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι $E'(x)>0\Rightarrow E\nearrow\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και για $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι $E'(x)<0\Rightarrow E\searrow\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$. Μέγιστο για $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, τότε τα Α και Α΄ είναι τα σημεία καμπής.

38. Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο $(0,0)$, είναι $f(0)=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=9f\left(\frac{2}{3}x\right)-8f\left(\frac{3}{4}x\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=9f'\left(\frac{2}{3}x\right)\frac{2}{3}-8f'\left(\frac{3}{4}x\right)\frac{3}{4}=6\left[f'\left(\frac{2}{3}x\right)-f'\left(\frac{3}{4}x\right)\right]$.

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x<0$ είναι $\frac{2}{3}x>\frac{3}{4}x\Leftrightarrow f'\left(\frac{2}{3}x\right)>f'\left(\frac{3}{4}x\right)\Leftrightarrow f'\left(\frac{2}{3}x\right)-f'\left(\frac{3}{4}x\right)>0\Leftrightarrow h'(x)>0\Rightarrow h\nearrow(-\infty,0]$. Για κάθε $x>0$ είναι $\frac{2}{3}x<\frac{3}{4}x\Leftrightarrow f'\left(\frac{2}{3}x\right)<f'\left(\frac{3}{4}x\right)\Leftrightarrow f'\left(\frac{2}{3}x\right)-f'\left(\frac{3}{4}x\right)<0\Leftrightarrow h'(x)<0\Rightarrow h\searrow[0,+\infty)$. Η h έχει μέγιστο το $h(0)=0$ άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h(x)\le 0\Leftrightarrow 9f\left(\frac{2}{3}x\right)-8f\left(\frac{3}{4}x\right)\le 0\Leftrightarrow 9f\left(\frac{2}{3}x\right)\le 8f\left(\frac{3}{4}x\right)$.

39. α) Επειδή $3f^2(x)-6f(x)+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $\Delta=-24<0$ είναι

$f'(x)>0$. Από το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$:

$f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{2f(\alpha)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και αφού $f'(\xi)>0$ τότε $\dfrac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}>0$

άρα $f(\alpha)>0$.

β) i. Αφού η f παραγωγίσιμη τότε $3f^2(x)-6f(x)+5$ παραγωγίσιμη άρα και f' παραγωγίσιμη με $f''(x)=6f(x)f'(x)-6f'(x)=6f'(x)\big(f(x)-1\big)$. Αφού $f'(x)>0$ τότε $f\nearrow$ για $x\geq\alpha$, $f(x)\geq f(\alpha)>1$ άρα $f(x)-1>0$ οπότε $f''(x)>0$ άρα f κυρτή.

ii. Έστω ότι υπάρχει $A\big(x_1,f(x_1)\big)$, $B\big(x_2,f(x_2)\big)$, $\Gamma\big(x_3,f(x_3)\big)$ συνευθειακά τότε:

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. Από Θ.Μ.Τ. στα $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$ προκύπτει $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ και από το θ.Rolle για f' στο $[\xi_1,\xi_2]$ προκύπτει $f''(\xi)=0$ που είναι άτοπο.

Εύρεση παραμέτρων μέσω κυρτότητας και σημείων

40. $f'(x)=4(\alpha-3)x^3-12x^2-12x$, $f''(x)=12(\alpha-3)x^2-24x-12=$ $12\big((\alpha-3)x^2-2x-1\big)$,

Αν $\alpha=3$ τότε $f''(x)=12(-2x-1)$, $f\cup\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$, $f\cap\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ απορρίπτεται

Αν $\alpha\neq3$, $\Delta=4+4(\alpha-3)=4(\alpha-2)$.

Αν $\alpha\in(2,3)\cup(3,+\infty)$ τότε $\Delta>0$, η f'' έχει δύο ρίζες και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν τους, άρα η f δεν είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$. Αν $\alpha=2$ τότε $f''(x)=12\big(-x^2-2x-1\big)=-12(x+1)^2<0$ για κάθε $x\neq1$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$. Αν $\alpha<2$ τότε $\Delta<0$, $f''(x)<0\Rightarrow f\cap\mathbb{R}$.

Τελικά $\alpha\leq2$.

41. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{\alpha}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ και

$f'(x)=-\dfrac{\alpha}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2-\alpha x}{x^3}$. $f''(x)\geq0\Leftrightarrow\dfrac{2-\alpha x}{x^3}\geq0\Leftrightarrow2-\alpha x\geq0\Leftrightarrow x\leq\dfrac{2}{\alpha}$.

$f''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{2}{\alpha}\right)$ άρα η f είναι κυρτή στο $\left(0,\dfrac{2}{\alpha}\right]$ και $f''(x)<0$

για κάθε $x \in \left(\frac{2}{\alpha}, +\infty\right)$ άρα η f είναι κοίλη στο $\left[\frac{2}{\alpha}, +\infty\right)$. Η f έχει σημείο καμπής το $A\left(\frac{2}{\alpha}, f\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)$ ή $A\left(\frac{2}{\alpha}, \alpha \ln\frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ευθεία ε: $y - f\left(\frac{2}{\alpha}\right) = f'\left(\frac{2}{\alpha}\right)\left(x - \frac{2}{\alpha}\right) \Leftrightarrow$

$y - \left(\alpha \ln\frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha^2}{4}\left(x - \frac{2}{\alpha}\right) \Leftrightarrow y = \frac{\alpha^2}{4}x + \alpha \ln\frac{2}{\alpha}$. Για να διέρχεται η ε από το σημείο Μ πρέπει $0 = \frac{\alpha^2}{4} \cdot \frac{4}{\alpha} + \alpha \ln\frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow 0 = \alpha + \alpha \ln\frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\left(\ln\frac{2}{\alpha} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ που είναι αδύνατο ή $\ln\frac{2}{\alpha} + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{2}{\alpha} = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha} = e^{-1} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha = 2e$.

42. Πρέπει $f(1) = 2 \Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta - 1 + 2 = 2 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$ (1)

Είναι $f'(x) = 4x^3 + 3\alpha x^2 + 2\beta x - 1$, $f''(x) = 12x^2 + 6\alpha x + 2\beta$.

Πρέπει $f''(1) = 0 \Leftrightarrow 12 + 6\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + \beta = -6$ (2). Από τις (1),(2) προκύπτει ότι: $\alpha = -3$ και $\beta = 3$. Τότε $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + 2$,

$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$, $f''(x) = 12x^2 - 18x + 6 = 12(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$

$x \leq \frac{1}{2}$ ή $x \geq 1$. Η f είναι κυρτή σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, $[1, +\infty)$ και κοίλη στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Έχει σημεία καμπής στα $x = 0$ και $x = 1$.

43. $f'(x) = 3x^2 - 4\alpha x$, $f''(x) = 6x - 4\alpha \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2\alpha}{3}$.

Για κάθε $x < \frac{2\alpha}{3}$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow$ f κοίλη στο $\left(-\infty, \frac{2\alpha}{3}\right]$ και για κάθε $x > \frac{2\alpha}{3}$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow$ f κυρτή στο $\left[\frac{2\alpha}{3}, +\infty\right)$. Σημείο καμπής το $\left(\frac{2\alpha}{3}, f\left(\frac{2\alpha}{3}\right)\right)$. Επειδή το $A(x_0, y_0)$ είναι σημείο καμπής της C_f, ισχύει ότι $x_0 = \frac{2\alpha}{3}$. Είναι $g'(x) = 2x - (\alpha + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{\alpha+1}{2}$. Για κάθε $x < \frac{\alpha+1}{2}$ είναι

$g'(x)<0 \Rightarrow g\searrow\left(-\infty,\dfrac{\alpha+1}{2}\right]$ και για κάθε $x>\dfrac{\alpha+1}{2}$ είναι

$g'(x)>0 \Rightarrow g\nearrow\left[\dfrac{\alpha+1}{2},+\infty\right)$. Ελάχιστο για $x=\dfrac{\alpha+1}{2}$. Πρέπει

$\dfrac{\alpha+1}{2}=\dfrac{2\alpha}{3}\Leftrightarrow 3\alpha+3=4\alpha\Leftrightarrow\alpha=3$ και $g(2)=-13\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\beta=2$.

44. $f'(x)=4\alpha x^3+3\beta x^2+2\gamma x+\delta,\ f''(x)=12\alpha x^2+6\beta x+2\gamma$. Η f'' είναι τριώνυμο και έχει διακρίνουσα $\Delta=36\beta^2-96\alpha\gamma=12\left(3\beta^2-8\alpha\gamma\right)$. Επειδή η C_f έχει δύο σημεία καμπής, η f'' έχει 2 ρίζες, άρα

$\Delta>0\Leftrightarrow 12\left(3\beta^2-8\alpha\gamma\right)>0\Leftrightarrow 3\beta^2-8\alpha\gamma>0\Leftrightarrow\beta^2>\dfrac{8}{3}\alpha\gamma$.

Γεωμετρικός τόπος σημείου καμπής

45. $f'(x)=3x^2+6x\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha,\ f''(x)=6x+6\sigma\upsilon\nu 2\alpha\geq 0\Leftrightarrow x\geq-\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

Για κάθε $x<-\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $\left(-\infty,-\sigma\upsilon\nu 2\alpha\right]$ και για κάθε $x>-\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f$ κυρτή στο $\left[-\sigma\upsilon\nu 2\alpha,+\infty\right)$. Σημείο καμπής το $A\left(-\sigma\upsilon\nu 2\alpha,f\left(-\sigma\upsilon\nu 2\alpha\right)\right)\equiv\left(-\sigma\upsilon\nu 2\alpha,7\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-1\right)$. Επειδή $y_A=-7x_A^2-1$, το Α ανήκει στη παραβολή $y=-7x^2-1$.

46. $f'(x)=6x-6e^{x-\alpha},\ f''(x)=6-6e^{x-\alpha}\geq 0\Leftrightarrow e^{x-\alpha}\leq 1\Leftrightarrow x-\alpha\leq 0\Leftrightarrow x\leq\alpha$.

Για κάθε $x<\alpha$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f$ κυρτή στο $\left(-\infty,\alpha\right]$ και για κάθε $x>\alpha$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $\left[\alpha,+\infty\right)$.

Σημείο καμπής το $M\left(\alpha,f(\alpha)\right)\equiv\left(\alpha,3\alpha^2-6\right)$.

Είναι $x_M=\alpha$, $y_M=3\alpha^2-6=3x_M^2-6$, άρα ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι η παραβολή $y=3x^2-6$.

47. $f'(x)=2\lambda e^x-2x,\ f''(x)=2\lambda e^x-2\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq\dfrac{1}{\lambda}\Leftrightarrow x\geq-\ln\lambda$. Για κάθε $x<-\ln\lambda$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $\left(-\infty,-\ln\lambda\right]$ και για κάθε $x>-\ln\lambda$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f$ κυρτή στο $\left[-\ln\lambda,+\infty\right)$. Σημείο καμπής το $M\left(-\ln\lambda,f\left(-\ln\lambda\right)\right)\equiv\left(-\ln\lambda,2-\ln^2\lambda\right)$.

Είναι $x_M=-\ln\lambda\Leftrightarrow\ln\lambda=-x_M$ και $y_M=2-\ln^2\lambda=2-x_M^2$, άρα ο γ. τόπος του Μ είναι η παραβολή $y=2-x^2$.

Κυρτότητα και Θ.Μ.Τ.

48. α) $f'(x)=4xe^x+2x^2e^x$, $f''(x)=2\left(x^2+4x+2\right)e^x$. Για κάθε $x<-2-\sqrt{2}$ ή $x>-2+\sqrt{2}$ είναι $f''(x)>0$ άρα η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty,-2-\sqrt{2}\right]$, $\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ και για κάθε $x\in\left(-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right)$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f\cap\left[-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right]$.

β) Για $x>0$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow(0,+\infty)$. Από το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,x+1]$ υπάρχει $\xi\in(x,x+1):f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$

$x<\xi<x+1\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(\xi)<f'(x+1)$, άρα $f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

49. α) Είναι $f'(x)=\ln x+1$ και $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β) Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ και παραγωγίσιμη στα $\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$. Λόγω του θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\ln\alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$ και

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\beta\ln\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{2}}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$. Είναι $\xi_1<\xi_2$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα (f κυρτή) άρα $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow$

$$\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\ln\alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\frac{\beta\ln\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{2}}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\ln\alpha<\beta\ln\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\Leftrightarrow$$

$2\dfrac{\alpha+\beta}{2}\ln\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\beta\ln\beta+\alpha\ln\alpha\Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)\ln\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\ln\beta^{\beta}+\ln\alpha^{\alpha}\Leftrightarrow\ln\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta}<\ln\beta^{\beta}\alpha^{\alpha}\Leftrightarrow\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta}<\beta^{\beta}\alpha^{\alpha}$.

50. α) Για να ορίζεται η f πρέπει $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$, άρα $A_f=(1,+\infty)$.

Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{\ln x}(\ln x)'=\dfrac{1}{x\ln x}>0$ για κάθε $x>1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$. Είναι $f''(x)=-\dfrac{1}{(x\ln x)^2}(x\ln x)'=-\dfrac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}<0$ για κάθε $x>1$, άρα η f είναι κοίλη στο $(1,+\infty)$.

β) Αν $\alpha<\beta$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ και παραγωγίσιμη στα $\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$και $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$, λόγω του θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$

τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\dfrac{\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\ln(\ln\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$ και

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{\ln(\ln\beta)-\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$.

Είναι $1<\alpha<\xi_1<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\xi_2<\beta$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, άρα:

$f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow\dfrac{\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\ln(\ln\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}>\dfrac{\ln(\ln\beta)-\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\Leftrightarrow$

$\ln\left(\ln\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)-\ln(\ln\alpha)>\ln(\ln\beta)-\ln\left(\ln\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow$

$2\ln\left(\ln\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)>\ln(\ln\alpha)+\ln(\ln\beta)\Leftrightarrow\ln\left(\ln\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2>\ln(\ln\alpha\ln\beta)\Leftrightarrow$

$\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 > \ln\alpha\ln\beta \Leftrightarrow .\ln\frac{\alpha+\beta}{2} > \sqrt{\ln\alpha\ln\beta}$

Όμοια αν $\alpha > \beta$, προκύπτει ότι $\ln\frac{\alpha+\beta}{2} > \sqrt{\ln\alpha\ln\beta}$.

Τέλος αν $\alpha = \beta$, τότε $\ln\frac{2\alpha}{2} \geq \sqrt{\ln\alpha\cdot\ln\alpha} \Leftrightarrow \ln\alpha \geq \sqrt{\ln^2\alpha}$ που ισχύει

51. α) $f'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$

β) $f''(x) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} < 0 \Rightarrow f \cap$.

γ) Έστω $g(x) = xf'(x) - f(x) - \ln 2,\ x \geq 0$

$g'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [0,+\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) < g(0) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) - \ln 2 < 0$

δ) Από το Θ.Μ.Τ. για την f, υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$.

$x < \xi < x+1 \overset{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi) > f'(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x+1}+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{1}{e^x+1}$

52. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$. Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) < 0$, άρα $f \searrow (0,1]$. Για $x \in (1,+\infty)$ είναι $f'(x) > 0$, άρα $f \nearrow [1,+\infty)$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x) = 2\frac{1-\ln x}{x^2}$.

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$. Όταν $x \in (0,e)$ είναι $f''(x) > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0,e]$. Όταν $x \in (e,+\infty)$ είναι $f''(x) < 0$, άρα η f είναι κοίλη στο $[e,+\infty)$.

β) $x(\ln^2 x - 1) - 2(x-e)\ln x > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x - 1}{x-e} > \frac{2\ln x}{x}$. Η f είναι συνεχής στο $[e,x]$, $x > e$ και παραγωγίσιμη στο (e,x) με $f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$. Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $x_0 \in (e,x)$ τέτοιο, ώστε

$f'(x_0) = \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = \frac{\ln^2 x - 1}{x-e}$. Είναι $e < x_0 < x$ και η f' είναι γνησίως

φθίνουσα στο $[e,+\infty)$, άρα $f'(x_0)>f'(x)\Leftrightarrow \dfrac{\ln^2 x-1}{x-e}>\dfrac{2\ln x}{x}$.

53. α) $f'(x)=2x-\dfrac{32}{x}=\dfrac{2x^2-32}{x}\geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2x^2-32\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 16\Leftrightarrow x\geq 4$.

Η f είναι $\searrow$ στο $(0,4]$ και $\nearrow[4,+\infty)$. Είναι $f''(x)=2+\dfrac{32}{x^2}>0\Rightarrow f'\nearrow(0+\infty)$.

β) Από το Θ.Μ.Τ για την f, υπάρχουν $\xi_1\in(4,5)$ και $\xi_2\in(5,6)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1)=f(5)-f(4)$ και $f'(\xi_2)=f(6)-f(5)$.

$\xi_1<\xi_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow f(5)-f(4)<f(6)-f(5)\Leftrightarrow 2f(5)<f(4)+f(6)$.

54. Επειδή η f στρέφει κοίλα άνω στο $[\alpha,\beta]$, η f' είναι $\nearrow$ στο διάστημα αυτό. Από το Θ.Μ.Τ. για την f, υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\gamma)$ και $\xi_2\in(\gamma,\beta)$ τέτοια, ώστε

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=-\dfrac{f(\alpha)}{\gamma-\alpha}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}=\dfrac{f(\beta)}{\beta-\gamma}$.

$\xi_1<\xi_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow -\dfrac{f(\alpha)}{\gamma-\alpha}<\dfrac{f(\beta)}{\beta-\gamma}\Leftrightarrow -f(\alpha)(\beta-\gamma)<f(\beta)(\gamma-\alpha)\Leftrightarrow$

$f(\beta)(\gamma-\alpha)+f(\alpha)(\beta-\gamma)>0$.

55. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,5]$, η f' είναι $\searrow$ στο διάστημα αυτό. Από το Θ.Μ.Τ για την f, υπάρχουν $\xi_1\in(0,2)$ και $\xi_2\in(2,5)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}=-\dfrac{f(0)}{2}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(5)-f(2)}{3}=\dfrac{f(5)}{3}$.

$\xi_1<\xi_2 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow -\dfrac{f(0)}{2}>\dfrac{f(5)}{3}\Leftrightarrow -3f(0)>2f(5)\Leftrightarrow$

$2f(5)+3f(0)<0$.

56. Είναι $f'\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$ και $f'\cup\Rightarrow f''\nearrow[\alpha,\beta]$.Λόγω Θ.Μ.Τ., για την f'

υπάρχει $\xi_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right): f''(\xi_1)=\dfrac{f'\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)-f'(\alpha)}{\dfrac{\beta-\alpha}{2}}=-\dfrac{2f'(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και όμοια

υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right): f''(\xi_2) = \frac{2f'(\beta)}{\beta-\alpha}$. Είναι $\xi_1 < \xi_2 \overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$f''(\xi_1) < f''(\xi_2) \Leftrightarrow -\frac{2f'(\alpha)}{\beta-\alpha} < \frac{2f'(\beta)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f'(\alpha)+f'(\beta) > 0$.

57. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Από το Θ.Μ.Τ. για την f, υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = f(x+1)-f(x)$. Είναι

$x < \xi < x+1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x) < f(x+1)-f(x) < f'(x+1)$.

58. 1ος τρόπος: Έστω $g(x) = f(x)-x, x \in [-\alpha,\alpha]$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f, υπάρχει $\xi \in (-\alpha,\alpha)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\alpha)-f(-\alpha)}{\alpha-(-\alpha)} = \frac{2\alpha}{2\alpha} = 1$.

Είναι $g'(x) = f'(x)-1 = f'(x)-f'(\xi)$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f΄είναι γνησίως αύξουσα οπότε για κάθε $-\alpha < x < \xi$ είναι

$f'(x) < f'(\xi) = 1 \Leftrightarrow g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο [- α, ξ], είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε ξ< x< α είναι

$f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο [ξ, α], είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η g έχει τοπικά μέγιστα τα $g(-\alpha) = g(\alpha) = 0$, οπότε έχει μέγιστο το και ισχύει ότι

$g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)-x < 0 \Leftrightarrow f(x) < x$ για κάθε $x \in (-\alpha,\alpha)$.

2ος τρόπος: Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (-\alpha,\alpha)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) \geq x_0$. Από το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi_1 \in (-\alpha, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0,\alpha)$ τέτοια, ώστε

$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0)-f(-\alpha)}{x_0+\alpha} = \frac{f(x_0)+\alpha}{x_0+\alpha}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(\alpha)-f(x_0)}{\alpha-x_0} = \frac{\alpha-f(x_0)}{\alpha-x_0}$.

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι $\nearrow$ στο $[-\alpha,\alpha]$, οπότε:

$\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x_0)+\alpha}{x_0+\alpha} < \frac{\alpha-f(x_0)}{\alpha-x_0} \Leftrightarrow$

$(\alpha-x_0)f(x_0)+\cancel{\alpha^2}-\alpha x_0 < \cancel{\alpha^2}+\alpha x_0-(x_0+\alpha)f(x_0) \Leftrightarrow$

$(\alpha-x_0)f(x_0)+(x_0+\alpha)f(x_0) < 2\alpha x_0 \Leftrightarrow (\alpha-\cancel{x_0}+\cancel{x_0}+\alpha)f(x_0) < 2\alpha x_0 \Leftrightarrow$

$2\alpha f(x_0) < 2\alpha x_0 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} f(x_0) < x_0$ που είναι άτοπο.

59. α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $\mathbb{R}$ η f' είναι γνησίως

φθίνουσα. Ακόμη επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο Ο(0,0) ισχύει ότι $f(0)=0$ και $f'(0)=0$. Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[1,x]$,$x>1$ οπότε υπάρχει $\xi_1\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow f(x)=(x-1)f'(\xi_1)+f(1)$. Είναι

$0<1<\xi_1<x \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(0)>f'(1)>f'(\xi_1)>f'(x)\Leftrightarrow f'(x)<f'(\xi)<f'(1)<0$

$f(x)=(x-1)f'(\xi_1)+f(1)<(x-1)f'(1)+f(1)$

Επειδή η f είναι κοίλη, η f ΄είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε

$0<1\Leftrightarrow f'(0)>f'(1)\Leftrightarrow f'(1)<0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-1)f'(1)+f(1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf'(1)\right)=-\infty$, είναι και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. Όμοια για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x,-1]$, $x<-1$ και υπάρχει $\xi_2\in(x,-1)$ τέτοιο,

ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(-1)-f(x)}{-1-x}\Leftrightarrow f(x)=(x+1)f'(\xi_2)-f(-1)$.

$x<\xi_2<-1<0 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\xi_2)>f'(-1)>f'(0)=0$, άρα

$f(x)=(x+1)f'(\xi_2)-f(-1)<(x+1)f'(\xi_2)-f(-1)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+1)f'(-1)+f(1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xf'(-1)\right)=-\infty$, είναι κα

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

β) Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Παρουσιάζει μέγιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$ άρα $f(x)\le f(0)\Leftrightarrow f(x)\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

60. Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση. Αν $f'(0)>0$, τότε από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi\in(0,x)$:

$f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow f(x)=xf'(\xi)+f(0)>xf'(0)+f(0)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf'(0)+f(0)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf'(0)\right)=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ που είναι άτοπο. Όμοια αν $f'(0)<0$.Αν $f'(0)=0$ τότε από το ΘΜΤ υπάρχει

$\xi\in(1,x):f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow f(x)=(x-1)f'(\xi)+f(1)$

Είναι $0<1<\xi<x \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} 0=f'(0)<f'(1)<f'(\xi)<f'(x)$, άρα
$f(x)=(x-1)f'(\xi)+f(1)>(x-1)f'(1)+f(1)$.
Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-1)f'(1)+f(1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf'(1)\right)=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ που είναι άτοπο.

61. Έστω ότι τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma(x_3,f(x_3))$ της C_f με $x_1<x_2<x_3$ είναι συνευθειακά. Τότε: $AB\,||\,B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow$
$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ (1).Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$ και παραγωγίσιμη στα (x_1,x_2) και (x_2,x_3), οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,x_2)$ και $\xi_2\in(x_2,x_3)$ τέτοια, ώστε:
$f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. Από τη σχέση (1) είναι $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[\alpha,\beta]$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, οπότε είναι και 1-1. Είναι:
$f'(\xi_1)=f'(\xi_2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \xi_1=\xi_2$ που είναι άτοπο.
Οπότε δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά σημεία της C_f που να είναι συνευθειακά.

62. Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $y-f(\alpha)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha) \Leftrightarrow$
$y=\lambda_{AB}x-\alpha\lambda_{AB}+f(\alpha)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x)>\lambda_{AB}x-\alpha\lambda_{AB}+f(\alpha)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Έστω $g(x)=f(x)-\lambda_{AB}x+\alpha\lambda_{AB}-f(\alpha)$, $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι $g'(x)=f'(x)-\lambda_{AB}$. Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[\alpha,\beta]$, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\lambda_{AB}$.

Για κάθε $\alpha<x<\xi \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(\xi)=\lambda_{AB} \Leftrightarrow g'(x)>0 \Rightarrow g\nearrow[\alpha,\xi]$, οπότε για κάθε $\alpha<x\le\xi$ είναι $g(x)>g(\alpha)=0$. Για κάθε
$\xi<x<\beta \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(\xi)=\lambda_{AB} \Leftrightarrow g'(x)<0 \Rightarrow g\searrow[\xi,\beta]$, οπότε για κάθε $\xi\le x<\beta$ είναι $g(x)>g(\beta)=0$. Άρα για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ είναι $g(x)>0 \Leftrightarrow$ $f(x)>\lambda_{AB}x-\alpha\lambda_{AB}+f(\alpha)$.

Κυρτότητα και εφαπτομένη

63. α) $f'(x)=e^x+4(x-1)^3$, $f''(x)=e^x+12(x-1)^2>0\Rightarrow f$ κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $f(0)=2$, $f'(0)=-3$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x=0$ είναι η ευθεία ε: $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=-3x+2$. Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, εκτός βέβαια από το σημείο επαφής, άρα $f(x)\geq -3x+2\Leftrightarrow e^x+(x-1)^4\geq -3x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

64. α) $f'(x)=\dfrac{1}{x}+e^{-x+1}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}-e^{-x+1}<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $(0+\infty)$.

β) Παρατηρούμε ότι $f'(1)=2$ και η εφαπτομένη της C_f στο $x=1$ είναι η ευθεία ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=2x-3$. Επειδή η f είναι κοίλη στο $(0+\infty)$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, άρα $f(x)\leq 2x-3$ για κάθε $x>0$.

Αυξημένης δυσκολίας

65. α) Η f είναι συνεχής στο [-2, 2] και παραγωγίσιμη στο(-2, 2). Επειδή $f(-2)=f(2)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχουν $\xi\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.Επειδή f είναι κυρτή, η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα οπότε το ξ είναι η μοναδική ρίζα της f΄. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, το ξ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της.

β) Είναι $-2<\xi<2\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(-2)<f'(\xi)<f'(2)\Leftrightarrow f'(-2)<0<f'(2)$.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει εξίσωση: $y-f(-2)=f'(-2)(x+2)\Leftrightarrow y=f'(-2)x+2f'(-2)$ και η εφαπτομένη της C_f στο Β έχει εξίσωση $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=f'(2)x-2f'(2)$.

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\geq f'(-2)x+2f'(-2)$ και $f(x)\geq f'(2)x-2f'(2)$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f'(-2)x+2f'(-2)\right)=+\infty$, οπότε από τη σχέση $f(x)\geq f'(-2)x+2f'(-2)$, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f'(2)x-2f'(2)\right)=+\infty$, οπότε από τη σχέση $f(x)\geq f'(2)x-2f'(2)$, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

66. α) Από το Θ.Bolzano στα $[0,1],[1,2]$ άρα η f έχει τουλάχιστον δύο ρίζες. Έστω ότι έχει τρεις ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ τότε από το θ. Rolle υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=0=f'(\xi_2)$. Από το Θ. Rolle για την f' υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2):f''(\xi)=0$ που είναι άτοπο.

β) Θ.Μ.Τ. για f στο $[0,1]:\exists x_1\in(0,1):f'(x_1)=f(1)-f(0)<0$

Θ.Μ.Τ. για f στο $[1,2]:\exists x_2\in(1,2):f'(x_2)=f(2)-f(1)>0$

Θ.Μ.Τ. για f' στο $[x_1,x_2]:\exists\theta\in(x_1,x_2):f''(\theta)=\dfrac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}>0$

Επειδή f'' συνεχής ως πολυωνυμική και δεν μηδενίζεται τότε διατηρεί πρόσημο. Αφού $f''(\theta)>0$ τότε και $f''(x)>0$ άρα f κυρτή.

γ) Εφαπτομένη στο $(0,f(0)):y=f'(0)x+f(0)$, αφού f κυρτή τότε $f(x)\geq y$ δηλαδή $f(x)\geq f'(0)x+f(0)$.

67. α) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f, υπάρχει $\xi\in(0,4)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(4)-f(0)}{4}=2$. Είναι $0<\xi<4\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(\xi)<f'(4)\Leftrightarrow f'(4)>2$.

β) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχουν $\xi_1\in(0,2)$, $\xi_2\in(2,4)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}=\dfrac{f(2)-1}{2}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(4)-f(2)}{2}=\dfrac{9-f(2)}{2}$.

Είναι $\xi_1<\xi_2\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow\dfrac{f(2)-1}{2}<\dfrac{9-f(2)}{2}\Leftrightarrow f(2)<5$.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο Β έχει εξίσωση $y-f(4)=f'(4)(x-4)\Leftrightarrow$ $y=f'(4)x-4f'(4)+9$. Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\geq f'(4)x-4f'(4)+9$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(4)x-4f'(4)+9)=+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

68. Η εφαπτομένη της C_f στο x = 1 είναι η $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow$ $y=f'(1)x-f'(1)+f(1)$. Επειδή η f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\leq f'(1)x-f'(1)+f(1)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(f'(1)x-f'(1)+f(1))=-\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

69. α) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

β) Η f ΄είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$. Επειδή ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο x = 0, η f έχει σημείο καμπής το $(0, f(0))$.

γ) Στο σχήμα βλέπουμε ότι $f'(-1) = f'(1) = 1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x = -1$ έχει εξίσωση:

$y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y = x + 1 + f(-1)$. Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x \leq 0$ είναι $f(x) \leq x + 1 + f(-1)$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1 + f(-1)) = -\infty$ είναι και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 1$ έχει εξίσωση:

$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = x - 1 + f(1)$. Επειδή η f κυρτή στο $[0, +\infty)$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \geq x - 1 + f(1)$. Επειδή

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1 + f(1)) = +\infty$ είναι και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$., οπότε η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

70. α) Έστω $g(x) = \dfrac{f(x) - x^2}{x - 1}$, $x \neq 1$ και $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$. Τότε

$f(x) = g(x)(x-1) + x^2$ και $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left[g(x)(x-1) + x^2 \right] = 1$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής στο $x_0 = 1$, οπότε:

$$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = 1 \,.\, f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{g(x)(x-1) + x^2 - 1}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{g(x)(x-1) + (x-1)(x+1)}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\left(g(x) + x + 1\right)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \left(g(x) + x + 1\right) = 4 .$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι η ευθεία ε:

$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = 4(x-1) \Leftrightarrow y = 4x - 3$.

β) Επειδή η f είναι κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, δηλαδή η C_f βρίσκεται πάνω από την ε, οπότε

$f(x) \geq 4x - 3 \Leftrightarrow f(x) - 4x + 3 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) 1ος τρόπος: Αν $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(1,2)$, τότε η f θα ήταν κοίλη στο διάστημα αυτό, οπότε για κάθε $x\in(1,2)$ θα ήταν $f(x)\le 4x-3$ που είναι άτοπο.

2ος τρόπος: Για $x=2$ είναι $f(2)-4\cdot 2+3\ge 0\Leftrightarrow f(2)\ge 5$. Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, άρα λόγω του θεωρήματος Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi_1\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1)\ge 5-1=4$. Η f' είναι συνεχής στο $[1,\xi_1]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,\xi_1)$, άρα λόγω του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_1)-f'(1)}{\xi_1-1}=\dfrac{f'(\xi_1)-4}{\xi_1-1}\ge 0$.

71. α) Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)-3x}{x-2}$, $x\ne 2\Leftrightarrow f(x)=(x-2)g(x)+3x\ (1)$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο x = 2, οπότε:

$f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0+6=6$. Είναι

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)g(x)+3x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left[g(x)+3\right]=1+3=4$$

οπότε η εφαπτομένη

$\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-6=4(x-2)\Leftrightarrow y=4x-2$

β) Έστω $h(x)=f(x)-(x+3)$, $x\in[2,4]$.

$h(2)=f(2)-5=1>0$, $h(4)=f(4)-7=-1<0$ και h συνεχής, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(2,4): h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0+3$

γ) Επειδή $f(2)=f(4)=6$ από το Θ.Rolle για την f στο $[2,4]$ υπάρχει $\xi\in(2,4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Αφού f κοίλη είναι $f'\searrow$ στο $[2,4]$ οπότε ξ μοναδικό. Για $2<x<\xi$ είναι $f'(x)>f'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[2,\xi]$. Για $\xi<x<4$ είναι $f'(x)<f'(\xi)=0\Rightarrow f\searrow[\xi,4]$. Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0=\xi$.

72. α) Επειδή η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα. Επειδή $f(0)=f(1)$, για την f εφαρμόζεται το Θ.Rolle στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

Για κάθε $x<\xi\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(\xi)=0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,\xi]$ και για

κάθε $x > \xi \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) = 0 \Rightarrow f\searrow[\xi, +\infty)$, οπότε η f έχει μέγιστο στο ξ.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο x = 1 έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = -2x + 4$. Επειδή η f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \le -2x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x+4) = -\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Η εφαπτομένη της C_f στο x = 0 έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = 2x + 2$. Επειδή η f είναι κοίλη ισχύει ότι $f(x) \le 2x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+2) = -\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

γ) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f((-\infty,0)) = (-\infty, 2)$. Επειδή $0 \in f((-\infty,0))$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\infty, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f((1,+\infty)) = (-\infty, 2)$. Επειδή $0 \in f((1,+\infty))$ υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \xi]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\xi, 1]$, οπότε έχει ελάχιστο στα x=0 και x=1, και ισχύει ότι $f(x) \ge f(0) = f(1) = 2$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $[0,1]$.

73. α) Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως αύξουσα.
Επειδή $f(-1) = f(1)$, για την f εφαρμόζεται το Θ.Rolle στο $[-1,1]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Για κάθε $x < \xi \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) = 0 \Rightarrow f\searrow(-\infty, \xi]$ και για κάθε $x > \xi \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi) = 0 \Rightarrow f\nearrow[\xi, +\infty)$, οπότε η f έχει ελάχιστο στο ξ.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο x = -1 έχει εξίσωση $y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y = -x - 2$. Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \ge -x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2) = +\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Η εφαπτομένη της C_f στο x = 1 έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x+1) \Leftrightarrow y = x - 2$. Επειδή η f είναι κυρτή ισχύει ότι $f(x) \ge x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

γ) Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$, οπότε έχει αντίστοιχο

σύνολο τιμών το $f\left((-\infty,-1)\right)=(-1,+\infty)$. Επειδή $0\in f\left((-\infty,-1)\right)$ υπάρχει μοναδικό $x_1\in(-\infty,-1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f\left((1,+\infty)\right)=(-1,+\infty)$. Επειδή $0\in f\left((1,+\infty)\right)$ υπάρχει μοναδικό $x_2\in(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$.Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,\xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi,1]$, οπότε έχει μέγιστο στα x=-1 και x=1, και ισχύει ότι $f(x)\le f(-1)=f(1)=-1$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $[-1,1]$.

Θεωρητικές ασκήσεις

74. Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $\alpha<x<\beta\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(\alpha)>0\Rightarrow f\nearrow[\alpha,\beta]$. Για κάθε $\alpha<x<\beta\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)>f(\alpha)>0$.

75. Επειδή οι f,g είναι κυρτές, οι f',g' είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f'(x_1)<f'(x_2)$ και $g'(x_1)<g'(x_2)$. Τότε όμως είναι και $f'(x_1)+g'(x_1)<f'(x_2)+g'(x_2)\Leftrightarrow(f'+g')(x_1)<(f'+g')(x_2)$, άρα η $f'+g'$ είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$, οπότε η $f+g$ είναι κυρτή.

76. α) Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.Επειδή η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0, είναι $f'(x_0)=0$ και $f(x)\le f(x_0)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x<x_0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0\Rightarrow f\searrow(-\infty,x_0]$ και για κάθε $x>x_0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_0)=0\Rightarrow f\nearrow[x_0,+\infty)$. Άρα η f έχει ελάχιστο στο x_0.

Επειδή το μέγιστο και το ελάχιστο της f ταυτίζονται, είναι σταθερή συνάρτηση.

β) Επειδή η f είναι κοίλη, η f' είναι $\searrow$ στο $\mathbb{R}$. Επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, είναι $f'(x_0)=0$ και $f(x)\ge f(x_0)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Αν $x<x_0\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_0)=0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,x_0]$ και αν $x>x_0\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0\Rightarrow f\searrow[x_0,+\infty)$, άρα η f έχει μέγιστο στο x_0. Επειδή το μέγιστο και το ελάχιστο της f ταυτίζονται, είναι σταθερή συνάρτηση.

77. α) Έστω $f'(3)=0$ τότε $f\cup\mathbb{R}\Leftrightarrow f'\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα και $1-1$. Οπότε είναι $f'(2)=f'(3)=0$ άρα $2=3$ (άτοπο) αφού η f' είναι $1-1$.

β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι η $f\circ f$ παραγωγίσιμη με $(f\circ f)'(x)=f'(f(x))f'(x)$. Αφού η $f\circ f$ έχει τοπ. μέγιστο στο $x_0=3$ τότε $(f\circ f)'(3)=0$ δηλαδή: $f'(f(3))f'(3)=0$ οπότε $f'(f(3))=0\Leftrightarrow$ $f'(f(3))=f'(2)\overset{f'1-1}{\Leftrightarrow} f(3)=2$.

78. α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει το πολύ δύο ρίζες. Έστω $h(x)=f(x)-g(x)$ και έστω ότι η h έχει τρείς ρίζες τις ρ_1,ρ_2,ρ_3 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.Τότε επειδή η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχουν $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ και $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοια, ώστε: $h'(\xi_1)=0$ και $h'(\xi_2)=0$. Δηλαδή η h' έχει τουλάχιστον δύο ρίζες (1). Όμως $h'(x)=f'(x)-g'(x)$. Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ επειδή η g είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Οπότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$$\begin{cases} f'(x_1)<f'(x_2)\\ g'(x_1)>g'(x_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f'(x_1)<f'(x_2)\\ -g'(x_1)<-g'(x_2)\end{cases}$$ άρα και

$f'(x_1)-g'(x_1)<f'(x_2)-g'(x_2)\Leftrightarrow h'(x_1)<h'(x_2)$, άρα η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση $h'(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$ και η σχέση (1) είναι άτοπη. Άρα η h έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω ότι οι C_f,C_g έχουν κοινό σημείο το $M(x_0,y_0)$ τότε: $f(x_0)=g(x_0)=y_0$.Επειδή οι C_f,C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο Μ, ισχύει ότι: $f'(x_0)=g'(x_0)$.Τότε: $h'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)=0$ και επειδή η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το x_0 είναι μοναδικό.

Σύνθετες ασκήσεις

79. α) Επειδή $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) λόγω του θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:
$\alpha<\xi<\beta\Leftrightarrow f'(\alpha)<f'(\xi)<f'(\beta)\Leftrightarrow f'(\alpha)<0<f'(\beta)$, άρα $f'(\alpha)f'(\beta)<0$.
β) Για κάθε $\alpha<x<\xi$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι:
$f'(\alpha)<f'(x)<f'(\xi)\Leftrightarrow f'(\alpha)<f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\xi]$.Για κάθε $\alpha<x\le\xi$,είναι $f(\alpha)>f(x)\ge f(\xi)$, δηλαδή $f(x)<f(\alpha)=0$.
Για κάθε $\xi<x<\beta$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι:
$f'(\xi)<f'(x)<f'(\beta)\Leftrightarrow 0<f'(x)<f'(\beta)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi,\beta]$. Για κάθε $\xi<x<\beta$ είναι $f(\xi)<f(x)<f(\beta)=0$. Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.
Για κάθε $x<\alpha\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(\alpha)=0$ και για κάθε $x>\beta\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(\beta)=0$.
γ) Έστω ότι $f(x)<f'(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Τότε
$f'(x)-f(x)>0\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)>0$, άρα $\left[e^{-x}f(x)\right]'>0$.
Έστω $g(x)=e^{-x}f(x),\ x\in[\alpha,\beta]$. Είναι $g'(x)=\left[e^{-x}f(x)\right]'>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή $\alpha<\beta$, είναι
$g(\alpha)<g(\beta)\Leftrightarrow e^{-\alpha}f(\alpha)<e^{-\beta}f(\beta)\Leftrightarrow 0<0$ που είναι αδύνατο.
Άρα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)\ge f'(x_0)$.
δ) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=\beta$ έχει εξίσωση
$y-f(\beta)=f'(\beta)(x-\beta)\Leftrightarrow y=f'(\beta)x-\beta f'(\beta)$. Επειδή η f είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\ge f'(\beta)x-\beta f'(\beta)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(\beta)x-\beta f'(\beta)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(\beta)x=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

80. α) i. $f'(x)=8x\ln x-8x+8,\ f''(x)=8\ln x$. Για κάθε $x>1$ είναι
$f''(x)>0\Rightarrow$ f κυρτή στο $[1,+\infty)$ και για $x\in(0,1)$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow$ f κοίλη στο $(0,1]$. Σημείο καμπής το $(1,f(1))\equiv(1,3)$.
ii. $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow[1,+\infty)$, οπότε για $x>1\Rightarrow f'(x)>f'(1)=0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$

και $f''(x)<0 \Rightarrow f' \searrow (0,1]$, οπότε για $0<x<1 \Rightarrow f'(x)>f'(1)=0 \Rightarrow f \nearrow (0,1]$.

Επειδή η f είναι συνεχής, είναι $\nearrow$ στο $(0,+\infty)$.

β) i. Είναι $f(1)=0$ και αφού $f \nearrow$ τότε το $x_0=1$ μοναδική ρίζα της f. Για $x<1$ είναι $f(x)<f(1) \Leftrightarrow f(x)<0$ και για $x>1$ είναι $f(x)>f(1) \Leftrightarrow f(x)>0$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[4x^2\ln x+6x^2+8x-2\right]=-2$ γιατί

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = 0 \text{ και}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x^2(2\ln x-3)+8x-2\right]=+\infty$. Άρα $f(A)=(-2,+\infty)$

81. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=(\ln x-1)^2+\cancel{x}\cdot 2(\ln x-1)\cdot\frac{1}{\cancel{x}} = \ln^2 x-\cancel{2\ln x}+1+\cancel{2\ln x}-2=\ln^2 x-1$$

Είναι $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \ln^2 x-1\geq 0 \Leftrightarrow \ln^2 x\geq 1 \Leftrightarrow |\ln x|\geq 1 \Leftrightarrow$

$(\ln x\leq -1 \Leftrightarrow x\leq e^{-1})$ ή $(\ln x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq e)$. Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup(e,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{1}{e}\right]\cup[e,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ και $[e,+\infty)$. Για κάθε $x\in\left(\frac{1}{e},e\right)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},e\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\left(\ln\frac{1}{e}-1\right)^2=\frac{1}{e}(-1-1)^2=\frac{4}{e}$ και τοπικό ελάχιστο το $f(e)=e(1-1)^2=0$.

β) Αρκεί να βρούμε πότε η f' γίνεται ελάχιστη. Είναι $f''(x)=2\frac{\ln x}{x}$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f''(x)<0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $(0,1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι

$f''(x)>0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f' γίνεται ελάχιστη για x = 1, οπότε το ζητούμενο σημείο της C_f είναι το $A(1,f(1))\equiv(1,1)$. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο Α, τότε $\varepsilon\varphi\omega = f'(1) = -1 \Leftrightarrow \omega = 135^{\circ}$.

γ) Έστω $M(x_0,f(x_0))$, $x_0>0$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι η ευθεία ε: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Για να διέρχεται από το Ο(0,0) πρέπει $-f(x_0)=f'(x_0)(-x_0)\Leftrightarrow \cancel{x_0}(\ln x_0-1)^2=\cancel{x_0}(\ln^2 x_0-1)\Leftrightarrow$

$(\ln x_0-1)^2-(\ln x_0-1)(\ln x_0+1)=0\Leftrightarrow(\ln x_0-1)(\cancel{\ln x_0}-1-\cancel{\ln x_0}-1)=0\Leftrightarrow$

$\ln x_0-1=0\Leftrightarrow \ln x_0=1\Leftrightarrow x_0=e$. Είναι $f(e)=0$ και $f'(e)=0$, οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η y = 0, δηλαδή ο άξονας x΄x.

δ) $f(x)=f'(x)\Leftrightarrow x(\ln x-1)^2=\ln^2 x-1\Leftrightarrow$

$x(\ln x-1)^2-(\ln x-1)(\ln x+1)=0\Leftrightarrow(\ln x-1)(x(\ln x-1)-(\ln x+1))=0\Leftrightarrow$

$(\ln x=1\Leftrightarrow x=e$ απορρίπτεται$)$ ή $x\ln x-x-\ln x-1=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x\ln x-x-\ln x-1,\ x\in[1,e]$.

Είναι $g'(x)=\ln x+\cancel{1}-\cancel{1}-\dfrac{1}{x}, g''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$ και επειδή η g' είναι συνεχής στο $[1,e]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $g'(1)=-1<0,\ g'(e)=1-\dfrac{1}{e}>0$, δηλαδή $g'(1)g'(e)<0$ και επειδή η g' είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε $g'(\rho)=0$. Για κάθε $1<x<\rho \overset{g'\nearrow}{\Rightarrow} g'(x)<g'(\rho)=0\Rightarrow g\searrow[1,\rho]$, οπότε $g(1)>g(x)>g(\rho)\Rightarrow g(x)<-2$. Για κάθε

$\rho<x<e\overset{g'\nearrow}{\Rightarrow} g'(x)>g'(\rho)=0\Rightarrow g\nearrow[\rho,e]$, οπότε

$g(\rho)<g(x)<g(e)\Rightarrow g(x)<-2$. Άρα $g(x)<-2$ για κάθε $x\in(1,e)$, οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ είναι αδύνατη στο διάστημα αυτό.

ε) Για κάθε $x>0$ είναι $(\ln x-1)^2\geq 3-\dfrac{2e^2}{x}\Leftrightarrow x(\ln x-1)^2\geq 3x-2e^2\Leftrightarrow$

$f(x)\geq 3x-2e^2$. Αν $x\in(0,1)$, τότε $f(x)>0,\ 3x-2e^2<0$, οπότε

$f(x)>3x-2e^2$. Στο διάστημα $[1,+\infty)$:

Παρατηρούμε ότι η $y=3x-2e^2$ είναι ευθεία οπότε θα εξετάσουμε αν είναι

εφαπτομένη της C_f. Θα αναζητήσουμε $x_1 \geq 1$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = \lambda = 3$.
Είναι
$f'(x_1) = 3 \Leftrightarrow \ln^2 x - 1 = 3 \Leftrightarrow \ln^2 x = 4 \Leftrightarrow \ln x = \pm 2 \Leftrightarrow x = e^2$ ή
$x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} < 1$ απορρίπτεται. Είναι $f(e^2) = e^2(\ln e^2 - 1)^2 = e^2(2-1)^2 = e^2$.
Η εφαπτομένη της C_f στο $x_1 = e^2$ είναι η ευθεία ε $y - f(e^2) = f'(e^2)(x - e^2) \Leftrightarrow$
$y - e^2 = 3(x - e^2) \Leftrightarrow y = 3x - 2e^2$. Επειδή η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα και από την ε, οπότε $f(x) \geq 3x - 2e^2$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

82. α) Είναι $g'(x) = e^{-2x}(f'(x) - 2f(x))$, $g''(x) = e^{2x}(f''(x) - 4f'(x) + 4f(x))$.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g''(x) > 0 \Rightarrow g \cup \mathbb{R}$.
β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ έχει εξίσωση:
$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = f'(1)x + f(1) - f'(1)$. Επειδή όμως η y = x είναι η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$, ισχύει ότι $f'(1) = 1$ και
$f(1) - f'(1) = -9 \Leftrightarrow f(1) = -8$.
Είναι $g(1) = e^{-2} f(1) = -8e^{-2}$ και $g'(1) = e^{-2}(f'(1) - 2f(1)) = 17e^{-2}$.
Η εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 1$ έχει εξίσωση: $y - g(1) = g'(1)(x-1) \Leftrightarrow$
$y + 8e^{-2} = 17e^{-2}(x-1) \Leftrightarrow y = 17e^{-2}x - 25e^{-2}$.
γ) Επειδή η g είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq 17e^{-2}x - 25e^{-2} \Leftrightarrow$
$e^{-2x} f(x) \geq 17e^{-2}x - 25e^{-2} \Leftrightarrow f(x) \geq \dfrac{e^{-2}(17x - 25)}{e^{-2x}} = e^{2x-2}(17x - 25)$.
Για κάθε $x > 2$ είναι $f(x) \geq e^{2x-2}(17x - 25) > 0$ (1).
δ) Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x-2}(17x - 25) = +\infty$ και λόγω της (1) είναι και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

83. α) Είναι $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h)}{h} =$
$\lim\limits_{h \to 0} \left[2 \dfrac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{2h} + \dfrac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \right] =$
$= 2f'(x_0) + f'(x_0) = 3f'(x_0)$
οπότε $3f'(x_0) = -6x_0 e^{f(x_0)}$.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+kh)-f(x_0)}{kh}\overset{\substack{kh=u\\ u\to 0}}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}=f'(x_0)$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=-2xe^{f(x)}\Leftrightarrow -f'(x)e^{-f(x)}=2x$, άρα

$\left(e^{-f(x)}\right)'=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow e^{-f(x)}=x^2+c$

Για $x=0$ είναι $c=1$ άρα $e^{-f(x)}=x^2+1\Leftrightarrow f(x)=-\ln\left(x^2+1\right),\ x\in\mathbb{R}$

β) $f'(x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}\geq 0\Leftrightarrow x\leq 0$. Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[0,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(0)=0$

γ) Είναι $f''(x)=\dfrac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''		$+$	0 $-$	0	$+$
f		$\cup$	$\cap$		$\cup$

Για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ είναι $f''(x)>0$ και για κάθε $x\in(-1,1)$ είναι $f''(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,-1],[1,+\infty)$ και κοίλη στο $[-1,1]$. Έχει σημεία καμπής τα $A(-1,-\ln 2)$ και $B(1,-\ln 2)$

δ) Έστω ότι τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά, τότε

$AB\,||\,B\Gamma\Leftrightarrow\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}\Leftrightarrow\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ (1)

Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi_1\in(x_1,x_2)$ και $\xi_2\in(x_2,x_3)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x>1$, η f' είναι $\nearrow$, άρα και $1-1$. Από την (1), είναι:

$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)\Leftrightarrow\xi_1=\xi_2$ που είναι άτοπο.

84. α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως ρητή με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{2\alpha x\left(x^3+\alpha x\right)-\left(\alpha x^2+\beta\right)\left(3x^2+\alpha\right)}{\left(x^3+\alpha x\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{2\alpha x^4+2\alpha^2x^2-3\alpha x^4-\alpha^2x^2-3\beta x^2-\alpha\beta}{\left(x^3+\alpha x\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{-\alpha x^4+\alpha^2x^2-3\beta x^2-\alpha\beta}{\left(x^3+\alpha x\right)^2}=\frac{-\alpha x^4+x^2\left(\alpha^2-3\beta\right)-\alpha\beta}{\left(x^3+\alpha x\right)^2}=\frac{g(x)}{\left(x^3+\alpha x\right)^2},\ x\in\mathbb{R}^*$$

.

Η g ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.Επομένως η g έχει ολικό μέγιστο στο $x=0$ το $g(0)=-\alpha\beta$ άρα ισχύει ότι $g(x)\le -\alpha\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ δηλαδή $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ και $\alpha\beta>0\Leftrightarrow -\alpha\beta<0$. Άρα ισχύει $-\alpha x^4+x^2(\alpha^2-3\beta)-\alpha\beta<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε έχουμε ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ αφού ισχύει επίσης ότι $(x^3+\alpha x)^2>0$ κάθε $x\in\mathbb{R}^*$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Έστω $A_1=(-\infty,0)$ και $A_2=(0,+\infty)$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα A_1 και A_2 τότε:

$f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to 0^-}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,0)$ καθώς είναι

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\alpha x^2+\beta}{x^3+\alpha x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\alpha x^2+\beta}{x^2+\alpha}\cdot\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\alpha x^2+\beta}{x^3+\alpha x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}\left(\alpha+\dfrac{\beta}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(1+\dfrac{\alpha}{x^2}\right)}=0$. Είναι

$f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=(0,+\infty)$ καθώς είναι

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\alpha x^2+\beta}{x^2+\alpha}\cdot\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2+\beta}{x^3+\alpha x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}\left(\alpha+\dfrac{\beta}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(1+\dfrac{\alpha}{x^2}\right)}=0$.

Άρα αν $x_1<0$ και $x_2>0$ είναι $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της.

β) Για $\alpha=1$ και $\beta=2$ είναι $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^3+x}$, $x\ne 0$ και $f'(x)=\dfrac{-x^4-5x^2-2}{(x^3+x)^2}$.

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως ρητή με παράγωγο:

$$f''(x)=\frac{(-4x^3-10x)(x^3+x)^2-2(-x^4-5x^2-2)(x^3+x)(3x^2+1)}{(x^3+x)^4}=$$

$$=\frac{\cancel{\left(x^3+x\right)}\left[\left(-4x^3-10x\right)\left(x^3+x\right)-2\left(-x^4-5x^2-2\right)\left(3x^2+1\right)\right]}{\left(x^3+x\right)^{\cancel{4}3}}=$$

$$=\frac{-4x^6-4x^4-10x^4-10x^2-2\left(-3x^6-15x^4-6x^2-x^4-5x^2-2\right)}{\left(x^3+x\right)^3}=$$

$$=\frac{-4x^6-4x^4-10x^4-10x^2-2\left(-3x^6-16x^4-11x^2-2\right)}{\left(x^3+x\right)^3}=$$

$$=\frac{-4x^6-4x^4-10x^4-10x^2+6x^6+32x^4+22x^2+4}{\left(x^3+x\right)^3}=$$

$$=\frac{2x^6+18x^4+12x^2+4}{\left(x^3+x\right)^3}=2\frac{x^6+9x^4+6x^2+2}{\left(x^3+x\right)^3}=2\frac{x^2\left(x^4+9x^2+6\right)+2}{\left(x^3+x\right)^3},x\neq 0$$

$x^4+9x^2+6>0$, $x^2\geq 0$ και επίσης έχουμε ότι:

$x^3+x>0\Leftrightarrow x\left(x^2+1\right)>0\Leftrightarrow x>0\Rightarrow\left(x^3+x\right)^3>0\Leftrightarrow x>0$ και ομοίως ισχύει: $x^3+x<0\Leftrightarrow x\left(x^2+1\right)<0\Leftrightarrow x<0\Rightarrow\left(x^3+x\right)^3<0\Leftrightarrow x<0$

Άρα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	+	o	+
x^4+9x^2+6	+		+
$x^2\left(x^4+9x^2+6\right)+2$	+	o	+
$\left(x^3+x\right)^3$	−		+
f″	−		+
f	∩		∪

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ και κυρτή στο $(0,+\infty)$.

γ) Έχουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+2}{x^3+x},x\in\mathbb{R}^*$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Είναι $f\left((-\infty,0)\right)=\left(\lim\limits_{x\to 0^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-\infty,0)$ και $f\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=(0,+\infty)$, άρα $f\left((-\infty,0)\right)\cap f\left((0,+\infty)\right)=\varnothing$ οπότε η f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της και άρα αντιστρέφεται. Είναι $D_{f^{-1}}=f\left(\mathbb{R}^*\right)=\mathbb{R}^*$.

δ) Έστω ότι υπάρχουν $y_1,y_2\in(-\infty,0)$ με $y_1<y_2$ τέτοια, ώστε $f^{-1}(y_1)\leq f^{-1}(y_2)$, τότε επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$,

έχουμε: $f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right) \Leftrightarrow y_1 \geq y_2$ άτοπο. Άρα για κάθε $y_1, y_2 \in (-\infty, 0)$ με $y_1 < y_2$ είναι $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, οπότε η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$. Έστω ότι υπάρχουν $y_1, y_2 \in (0, +\infty)$ με $y_1 < y_2$ τέτοια, ώστε $f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2)$, τότε επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, έχουμε: $f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right) \Leftrightarrow y_1 \geq y_2$ άτοπο. Άρα για κάθε $y_1, y_2 \in (0, +\infty)$ με $y_1 < y_2$ είναι $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, οπότε η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

ε) $f(x^2) - f(\eta\mu^2 x) < f^{-1}(\eta\mu^2 x) - f^{-1}(x^2) \Leftrightarrow$

$f(x^2) + f^{-1}(x^2) < f(\eta\mu^2 x) + f^{-1}(\eta\mu^2 x)$ (1). Πρέπει $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $\eta\mu^2 x \neq 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + f^{-1}(x)$, $x > 0$. Για κάθε $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$ και $f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$. Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι $g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow g \searrow (0, +\infty)$.

Η σχέση (1) γίνεται: $g(x^2) < g(\eta\mu^2 x) \overset{g \searrow (0,+\infty)}{\Leftrightarrow} x^2 > \eta\mu^2 x \Leftrightarrow |\eta\mu x| < |x|$ που ισχύει αφού $x \neq 0$.

85. α) $e^{x^2 - f(x)} - 1 = e^x \Leftrightarrow e^{x^2 - f(x)} = e^x + 1 \Leftrightarrow x^2 - f(x) = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow$

$f(x) = x^2 - \ln(e^x + 1)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 2x - \dfrac{e^x}{e^x + 1}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 2 - \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{2e^{2x} + 3e^x + 2}{(e^x + 1)^2}$

Είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R} \Leftrightarrow f \cup \mathbb{R}$.

β) Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty - 1 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty - 0 = -\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{0}{0 + 1} = 0$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1 + e^{-x}\right)} = 1$. Είναι $f'(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Επειδή το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών της f' υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$. Επειδή f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x_1) = 0$, η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο.

γ) $e^{x^2} = e^x + 1 \Leftrightarrow x^2 = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Για κάθε $x < x_1 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, x_1]$ και για κάθε $x > x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_1) = 0 \Rightarrow f \nearrow [x_1, +\infty)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_1 το $f(x_1)$.Είναι $f'(0) = -\frac{1}{2} < 0,\ f'(1) = 2 - \frac{e}{e+1} > 0$ και η f΄είναι συνεχής στο [0, 1], οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0,1). Όμως το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της f΄, άρα $x_1 \in (0,1)$.Είναι $x_1 < 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(1) < 0$.Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2 - \ln(e^x+1)\right] = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1 - \frac{\ln(e^x+1)}{x^2}\right)\right] = +\infty$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{x^2} \overset{\text{DLH}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x+1}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}(1+e^{-x})\,2x} = 0 \ .$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, x_1)$ άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (f(x_1), +\infty)$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό x_2 στο Δ_1 τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = (x_1, +\infty)$ άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (f(x_1), +\infty)$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό x_3 στο Δ_2 τέτοιο, ώστε $f(x_3) = 0$. Επειδή $x_3 \in \Delta_2$ είναι $x_3 > 0$.

Είναι $f(0) = -\ln 2$ και $f((-\infty, 0)) = (-\ln 2, +\infty)$. Επειδή $0 \in f((-\infty, 0))$ η $f(x) = 0$ έχει μια ρίζα στο $(-\infty, 0)$. Όμως η f έχει μοναδική ρίζα στο $\Delta_1 = (-\infty, x_1)$, άρα η ρίζα αυτή περιορίζεται στο $(-\infty, 0)$ και είναι αρνητική.

δ) Είναι $f(\Delta_1) = (f(x_1), +\infty) = f(\Delta_2)$. Έστω $\alpha \in \Delta_1$ τότε $f(\alpha) \in f(\Delta_1)$ και $f(\alpha) \in f(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $\beta \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(\beta) = f(\alpha)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) εφαρμόζεται γι αυτήν το θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

ε) $e^x + 1 \le 2e^{x^2 + \frac{1}{2}x} \Leftrightarrow e^x + 1 \le e^{\ln 2} e^{x^2 + \frac{1}{2}x} \Leftrightarrow e^x + 1 \le e^{x^2 + \frac{1}{2}x + \ln 2} \Leftrightarrow$

$\ln\left(e^x+1\right)\le x^2+\frac{1}{2}x+\ln 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x-\ln 2\le x^2-\ln\left(e^x+1\right)\Leftrightarrow$

$f(x)\ge -\frac{1}{2}x-\ln 2$

Είναι $f'(x)=2x-\frac{e^x}{e^x+1}$ και $f'(0)=-\frac{1}{2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x=0$

έχει εξίσωση: $y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x-\ln 2$.

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της

εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\ge -\frac{1}{2}x-\ln 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

στ) $f(x)\le \ln\frac{e^{x^2}}{x+2}\Leftrightarrow x^2-\ln\left(e^x+1\right)\le \ln e^{x^2}-\ln(x+2)\Leftrightarrow$

$x^2-\ln\left(e^x+1\right)\le x^2-\ln(x+2)\Leftrightarrow$

$\ln\left(e^x+1\right)\ge \ln(x+2)\Leftrightarrow e^x+1\ge x+2\Leftrightarrow e^x\ge x+1$ ισχύει

86. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν $\Leftrightarrow$ $\mu>\nu$

- Αν $x>0$ έχουμε: $\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt[\nu]{x^\mu}}{x}=\frac{\sqrt[\nu]{x^\mu}}{\sqrt[\nu]{x^\nu}}=\sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}}$.

Αν $\mu=\nu$ τότε $\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt[\nu]{x^\mu}}{x}=\frac{\sqrt[\nu]{x^\nu}}{x}=\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$

Αν $\mu>\nu$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$ και αν $\mu<\nu$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

- Αν $x<0$ τότε η f ορίζεται όταν ο μ είναι άρτιος. Τότε:

$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt[\nu]{x^\mu}}{x}=\frac{\sqrt[\nu]{(-x)^\mu}}{-\sqrt[\nu]{(-x)^\nu}}=-\sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-\nu}}$.

Αν $\mu=\nu$ τότε $\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt[\nu]{x^\mu}}{x}=\frac{\sqrt[\nu]{x^\nu}}{x}=\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$

Αν $\mu>\nu$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=0$, αν $\mu<\nu$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \mu>\nu$.

β) Αν $\mu \neq \nu$ τότε $f(x)=\sqrt[\nu]{x^{\mu}}=\begin{cases}(-x)^{\frac{\mu}{\nu}} & , x<0\\ 0 & , x=0\\ x^{\frac{\mu}{\nu}} & , x>0\end{cases}$ και αν

$\mu=\nu$ τότε $f(x)=\sqrt[\nu]{x^{\mu}}=\sqrt[\nu]{x^{\nu}}=|x|=\begin{cases}-x & , x\leq 0\\ x & , x>0\end{cases}$ γιατί ο μ είναι άρτιος.

Αν $x>0$ και $\mu<\nu$ έχουμε: $f'(x)=\left(\sqrt[\nu]{x^{\mu}}\right)'=\left(x^{\frac{\mu}{\nu}}\right)'=\frac{\mu}{\nu}x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}=\frac{\mu}{\nu}\sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}}$ και ομοίως αν $\mu>\nu$.Αν $x<0$ και $\mu<\nu$ έχουμε:

$f'(x)=\left(\sqrt[\nu]{(-x)^{\mu}}\right)'=\left((-x)^{\frac{\mu}{\nu}}\right)'=-\frac{\mu}{\nu}(-x)^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}=-\frac{\mu}{\nu}\sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-\nu}}$ και ομοίως αν

$\mu>\nu$.Αν $x>0$ και $\mu=\nu$ έχουμε: $f'(x)=(x)'=1$ και αν $x<0$ και $\mu=\nu$ έχουμε: $f'(x)=(-x)'=-1$.

Αν $\mu>\nu$ η f είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν με $f'(0)=0$ ενώ αν $\mu\leq\nu$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν. Επομένως έχουμε:

Αν $\mu<\nu$ τότε $f'(x)=\begin{cases}-\frac{\mu}{\nu}\sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-\nu}} & , x<0\\ \frac{\mu}{\nu}\sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}} & , x>0\end{cases}$, αν $\mu>\nu$ τότε

$f'(x)=\begin{cases}-\frac{\mu}{\nu}\sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-\nu}} & , x<0\\ 0 & , x=0\\ \frac{\mu}{\nu}\sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}} & , x>0\end{cases}$ και αν $\mu=\nu$ τότε $f'(x)=\begin{cases}-1 & , x<0\\ 1 & , x>0\end{cases}$

γ) Αν $\mu<\nu$ τότε: Για

$x<0: f''(x)=\left(-\frac{\mu}{\nu}(-x)^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}\right)'=\frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2}(-x)^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}}=\frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2}\sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-2\nu}}<0$

και επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$.

Για $x>0: f''(x)=\left(\frac{\mu}{\nu}x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}\right)'=\frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2}x^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}}=\frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2}\sqrt[\nu]{x^{\mu-2\nu}}<0$ και

επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$. Αν $\mu>\nu$ τότε:

Για

$$x<0: f''(x)=\left(-\frac{\mu}{\nu}(-x)^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}\right)'=\frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2}(-x)^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}}=\frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2}\sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-2\nu}}>0$$

και επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$.

Για $x>0: f''(x)=\left(\frac{\mu}{\nu}x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}\right)'=\frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2}x^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}}=\frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2}\sqrt[\nu]{x^{\mu-2\nu}}>0$ και

επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$. Αν $\mu=\nu$ τότε:

Για $x<0: f''(x)=0$ άρα δεν είναι ούτε κοίλη ούτε κυρτή.

Για $x>0: f''(x)=0$ άρα δεν είναι ούτε κοίλη ούτε κυρτή.

δ) $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)+x^\mu-2}{x^\mu-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[\nu]{x^\mu}+x^\mu-2}{x^\mu-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[\nu]{x^\mu}+x^\mu-2}{x^\mu-1}$ (M)

Θέτω $\sqrt[\nu]{x^\mu}=u\Leftrightarrow x^\mu=u^\nu$ και όταν $x\to1$ τότε το $u\to1$ άρα το (M) γίνεται:

$$(M)=\lim_{u\to1}\frac{u+u^\nu-2}{u^\nu-1}=\lim_{u\to1}\frac{u-1+u^\nu-1}{u^\nu-1}=\lim_{u\to1}\left(\frac{u-1}{u^\nu-1}+\frac{\cancel{u^\nu-1}}{\cancel{u^\nu-1}}\right)=$$

$$\lim_{u\to1}\left(\frac{\cancel{u-1}}{\cancel{(u-1)}\left(u^{\nu-1}+u^{\nu-2}+\ldots+u+1\right)}+1\right)=\frac{1}{\nu}+1$$

ε) i) Είναι $f(1)=1$ και $f'(1)=\frac{2}{3}$, άρα (ε): $y-1=\frac{2}{3}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

Η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ οπότε η (ε) βρίσκεται πάνω από την C_f με

εξαίρεση το σημείο επαφής τους, δηλαδή είναι $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ για $x=1$ στο

$[0,+\infty)$. Για $x<0: f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^2}=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x^2}=2x+1\Leftrightarrow$

$$27x^2=8x^3+12x^2+6x+1\Leftrightarrow\Leftrightarrow 8x^3-15x^2+6x+1=0\overset{\text{Σχήμα Horner}}{\underset{\text{με }\rho=1}{\Leftrightarrow}}$$

$8(x-1)^2\left(x+\frac{1}{8}\right)=0\Leftrightarrow x=1$ Απορρίπτεται ή $x=-\frac{1}{8}$ δεκτή.

Άρα η (ε) τέμνει την C_f σε ακριβώς δύο σημεία τα $A(1,f(1))\equiv A(1,1)$ και

$B\left(-\frac{1}{8},f\left(-\frac{1}{8}\right)\right)\equiv B\left(-\frac{1}{8},\sqrt[3]{\frac{1}{64}}\right)$.

ii) Επειδή η (ε) τέμνει την C_f σε ακριβώς δύο σημεία, μόνο σε αυτά θα μπορεί να εφάπτεται. Άρα αν εφάπτεται σε διαφορετικό σημείο αυτό θα συμβαίνει στο

$x_1=-\frac{1}{8}$, δηλαδή $f'\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{2}{3}>0$ άτοπο καθώς $f'(x)=-\frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}}<0$ για κάθε $x<0$. Άρα η (ε) εφάπτεται στην C_f μόνον στο $A(1,1)$.

87. α) $f(x)=\frac{x^2}{e^x}\Leftrightarrow f(x)e^x-x^2=0$. Έστω η συνάρτηση $g(x)=e^xf(x)-x^2,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)-2x$ και $g''(x)=e^x\left(f(x)+2f'(x)+f''(x)\right)-2=e^x\cdot 2e^{-x}-2=0\Leftrightarrow g'(x)=c$.

Είναι $g'(1)=0\Leftrightarrow c=0$ άρα $g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=c_1$. Είναι $g(1)=0\Leftrightarrow c_1=0\Leftrightarrow g(x)=0\Leftrightarrow e^xf(x)-x^2=0\Leftrightarrow f(x)=x^2e^{-x}$.

β) $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)$. Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$, για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,2]$ και για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[2,+\infty)$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $f(0)=0$, $f(2)=\frac{4}{e^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$. Στο $A_1=(-\infty,0]$ είναι $f(A_1)=[0,+\infty)$, στο $A_2=(0,2)$ είναι $f(A_2)=\left(0,\frac{4}{e^2}\right)$ και στο $A_3=[2,+\infty)$ είναι $f(A_3)=\left(0,\frac{4}{e^2}\right]$. Είναι $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=[0,+\infty)$.

γ) $x^2=2e^{x-2}\Leftrightarrow\frac{x^2}{e^x}=2e^{-2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{e^2}$. Επειδή $\frac{2}{e^2}\in f(A_1)$, $\frac{2}{e^2}\in f(A_2)$ και $\frac{2}{e^2}\in f(A_3)$ η εξίσωση έχει μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,2)$, $(2,+\infty)$

δ) $f(x)+2e+3ex\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq -3ex-2e$

Είναι $f''(x)=e^{-x}\left(x^2-4x+2\right)>0$ για κάθε $x<0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ οπότε βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους. Είναι $f'(-1)=-3e$ $f(-1)=e$ και η εφαπτομένη της C_f στο $x=-1$ έχει εξίσωση $y=-3ex-2e$, άρα $f(x)+2e+3ex\geq 0$ για κάθε $x\leq 0$.

88. α) Είναι $f'(x)=g(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα. Για κάθε $x<0$ είναι

$f(x)<x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \le \lim\limits_{x\to 0^-} x \Leftrightarrow f(0)\le 0\ (1)$ και

για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \ge \lim\limits_{x\to 0^+} x \Leftrightarrow f(0)\ge 0\ (2)$. Από

$(1),(2)\Rightarrow f(0)=0$. Είναι $g'(0)=f(0)=0$ οπότε για $x<0$ είναι

$f(x)<f(0)\Leftrightarrow g'(x)<0$ και g γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, ενώ για $x>0$ είναι $f(x)>f(0)\Leftrightarrow g'(x)>0$ και g γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 0.

β) Είναι $g''(x)=f'(x)=g(x)>0$, άρα η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Επίσης $f''(x)=g'(x)$ και αν είναι $x<0$ ισχύει $f''(x)=g'(x)<0$, οπότε f κοίλη στο $(-\infty,0]$, ενώ για $x>0$ ισχύει $f''(x)=g'(x)>0$, οπότε f κυρτή στο $[0,+\infty)$.Η f έχει σημείο καμπής το O(0,0).

γ) Έστω $h(x)=f(x)-xg(0), x\in[0,+\infty)$.Είναι

$h'(x)=f'(x)-g(0)=g(x)-g(0)>0$ για $x>0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Για κάθε $x>0$ είναι

$h(x)>h(0)\Leftrightarrow f(x)-xg(0)>0\Leftrightarrow f(x)>xg(0)$.

δ) Είναι $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=f(x)$ και με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$f'(x)-g'(x)=g(x)-f(x)\Leftrightarrow \big(f(x)-g(x)\big)'+\big(f(x)-g(x)\big)=0\Leftrightarrow$$

$$\big(f(x)-g(x)\big)'e^x+\big(f(x)-g(x)\big)e^x=0\Leftrightarrow \Big[\big(f(x)-g(x)\big)e^x\Big]'=0\Leftrightarrow$$

$\big(f(x)-g(x)\big)e^x=c,\ c\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)-g(x)=ce^{-x}$. Για $x=0$ είναι

$f(0)-g(0)=c\Leftrightarrow c=1\Rightarrow f(x)-g(x)=e^{-x}>0\Rightarrow f(x)>g(x)$

89. α) $\varphi'(x)=f''(x)-f'(x)<0$ άρα $\varphi\searrow[0,+\infty)$.

Για $x>0\Rightarrow \varphi(x)<\varphi(0)\Rightarrow f'(x)-f(x)<0\Rightarrow f'(x)<f(x)\ \ (1)$

$$g'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0\Rightarrow g\searrow[0,+\infty)\ .$$

β) i) Έστω $h(x)=f^2(x)$, $h'(x)=2f(x)f'(x)$,

$h''(x)=2\big(f'(x)\big)^2+2f(x)f''(x)$

Για $x>0 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(0) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{e^x}<0 \Rightarrow f(x)<0$ (2). Από $(1),(2)$

$f'(x)<f(x)<0$ και αφού $f''(x)<f'(x)$ τότε $f''(x)<0$. Άρα

$f(x)f''(x)>0$ και $h''(x)>0 \Rightarrow h$ κυρτή.

ii. Η εφαπτομένη της h στο x = 1 έχει εξίσωση:

$y-h(1)=h'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=h'(1)x+h(1)-h'(1)$. Επειδή η h είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x\geq 0$ είναι $h(x)\geq h'(1)x+h(1)-h'(1)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h'(1)x+h(1)-h'(1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}h'(1)x=+\infty$ γιατί $h'(1)>0$, οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f^2(x)=+\infty$.

iii. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την h στα $[0,1]$ και $[1,3]$, υπάρχουν $\xi_1\in(0,1)$ και $\xi_2\in(1,3): h'(\xi_1)=\dfrac{f^2(1)-f^2(0)}{1-0}=f^2(1)$, $h'(\xi_2)=\dfrac{f^2(3)-f^2(1)}{3-1}$

$\xi_1<\xi_2 \overset{h'\nearrow}{\Leftrightarrow} h'(\xi_1)<h'(\xi_2) \Leftrightarrow f^2(1)<\dfrac{f^2(3)-f^2(1)}{2} \Leftrightarrow 3f^2(1)<f^2(3)$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+f(x^2)$, $x\geq 0$.Είναι

$h'(x)=f'(x)+2xf'(x^2)<0 \Rightarrow h\searrow[0,+\infty)$. Είναι

$f(x)+f(x^2)=f(x^5)+f(x^{10}) \Leftrightarrow h(x)=h(x^5) \overset{1-1}{\Leftrightarrow}$

$x=x^5 \Leftrightarrow x-x^5=0 \Leftrightarrow x(1-x^4)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^4=1 \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x=1$.

90. α) i. Αφού η f έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$ είναι $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ άρα και $f(-x)>0$ οπότε από τη σχέση $f'(x)f(-x)=4$ (1) θα είναι $f'(x)>0$ άρα $f\nearrow$.

ii) $f'(x)f(-x)=4 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{4}{f(-x)}$. Επειδή η συνάρτηση $\dfrac{4}{f(-x)}$ είναι παραγωγίσιμη, η f' είναι παραγωγίσιμη με

$f''(x)=-\dfrac{4}{f^2(-x)}f'(-x)(-x)'=\dfrac{4}{f^2(-x)}\cdot\dfrac{4}{f(x)}>0 \Rightarrow f\cup\mathbb{R}$

β) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2 \Leftrightarrow f(-x_1)>f(-x_2)$ άρα $f(-x)$ είναι $\searrow$ στο $\mathbb{R}$.

γ) Στην (1) όπου x το $-x$ έχουμε:

$f'(-x)f(x)=4 \Leftrightarrow -f'(-x)f(x)=-4 \Rightarrow \left[f(-x)\right]' f(x)=-4 \ (3)$

Προσθέτουμε $(1),(3)$ οπότε $f'(x)f(-x)+\left[f'(-x)\right]' f(x)=0 \Rightarrow$

$\left[f(-x)f(x)\right]'=0 \Leftrightarrow f(-x)f(x)=c$ για $x=0$

$f(0)\cdot f(0)=c \Rightarrow 2\cdot 2=4 \Rightarrow c=4$ άρα $f(-x)f(x)=4 \ (4)$. Από $(1),(4)$

$f'(x)f(-x)=f(-x)f(x) \overset{f(-x)>0}{\Rightarrow}$

$f'(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=ce^x$ και για $x=0$ είναι $c=2$. Άρα $f(x)=2e^x$.

91. α) $h'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}+x$, $h''(x)=\dfrac{f''(x)f(x)-\left(f'(x)\right)^2}{f^2(x)}+1$. Όμως $h''(x)>1$

άρα $\dfrac{f''(x)f(x)-\left(f'(x)\right)^2}{f^2(x)}>0 \Leftrightarrow f''(x)f(x)>f^2(x)\geq 0$. Επομένως

$f''(x)f(x)>0 \overset{f(x)>0}{\Rightarrow}$ τότε $f''(x)>0$ άρα f κυρτή.

β) Είναι $\dfrac{f(4)}{f(2)}=e^{-6}$ οπότε $\ln\dfrac{f(4)}{f(2)}=\ln e^{-6} \Leftrightarrow \ln f(4)-\ln f(2)=-6 \Leftrightarrow$

$\ln f(4)+8=\ln f(2)+2 \Leftrightarrow \ln f(4)+\dfrac{1}{2}4^2=\ln f(2)+\dfrac{1}{2}2^2$. Άρα $h(4)=h(2)$

οπότε από Θ. Rolle $\exists x_0\in(2,4): h'(x_0)=0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}+x_0=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=-x_0 f(x_0)$

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο x=2 έχει εξίσωση: $y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow$

$y=f'(2)x-2f'(2)+e^6 f(4)$. Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε x > 0 είναι

$f(x)\geq f'(2)x-2f'(2)+f(4)e^6 \Leftrightarrow f(x)+2f'(2)\geq f'(2)x+f(4)e^6$.

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(\ln x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(\ln x)}{\ln x}\dfrac{\ln x}{x}\right]=2\cdot 0$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(\ln x)}{\ln x}\overset{\ln x=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(\ln u)}{u}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\dfrac{1}{x}$.

92. α) $f^{(3)}(x)>0 \Rightarrow f''\nearrow\mathbb{R}$ άρα για $x<0 \overset{f''\nearrow}{\Rightarrow} f''(x)<f''(0)=0 \Rightarrow f'\searrow(-\infty,0]$

και για $x>0 \overset{f''\nearrow}{\Rightarrow} f''(x)>f''(0)=0 \Rightarrow f'\nearrow[0,+\infty)$.

Για $x<0 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(0)=0 \Rightarrow f\nearrow(-\infty,0]$

$x>0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(0)=0 \Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο x = 0 είναι $f\nearrow\mathbb{R}$. Επειδή για $x<0 \Leftrightarrow f''(x)<0$ και για $x>0 \Leftrightarrow f''(x)>0$ και η f είναι συνεχής στο $x=0$ τότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$. Η f παρουσιάζει καμπή στο μηδέν, δηλαδή έχει σημείο καμπής το (0,f(0)).

β) Για το πεδίο ορισμού της $S=\dfrac{f}{g}$ πρέπει: :

$$\begin{cases} x\in D_f \\ 1-x^2-\sigma\upsilon\nu^2 x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ 1-x^2-\sigma\upsilon\nu^2 x\neq 0 \end{cases}$$

Ισχύει $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.

Άρα έχουμε: $|\eta\mu x|\le|x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x\le x^2 \Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu^2 x\le x^2 \Leftrightarrow 1-x^2-\sigma\upsilon\nu^2 x\le 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα έχουμε ότι $D_S=\mathbb{R}^*$ αφού $1-x^2-\sigma\upsilon\nu^2 x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$. Είναι $S(x)=\dfrac{f(x)}{1-x^2-\sigma\upsilon\nu^2 x}$ για κάθε $x\neq 0$.

γ) Η f ως γνησίως αύξουσα συνάρτηση θα έχει το πολύ μια ρίζα, όμως για κάθε $x\neq 0$ είναι $f(x)\neq 0$, γιατί για να μην τέμνει η γραφική παράσταση της S τον x΄x άξονα πρέπει : $S(x)\neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{1-x^2-\sigma\upsilon\nu^2 x}\neq 0 \Leftrightarrow f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq 0$.Επομένως αφού η f έχει ακριβώς μία ρίζα και είναι διάφορη του μηδενός άρα η ρίζα είναι το μηδέν δηλαδή $f(0)=0$.

δ) $f\left(\ln\left(x^2\right)\right)+\ln x=f\left[(x-1)(x+1)\right] \Leftrightarrow f\left(\ln\left(x^2\right)\right)+\ln x=f\left(x^2-1\right)$ (1)

Ισχύει για κάθε $x>0$ ότι $\ln x\le x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$.Για x το x^2 έχουμε: $\ln\left(x^2\right)\le x^2-1$ για κάθε $x\neq 0$ αφού $x^2>0$ για κάθε $x\neq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Για $x\in(0,1)$ έχουμε ότι: $\ln\left(x^2\right)<x^2-1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(\ln\left(x^2\right)\right)<f\left(x^2-1\right)$ (2)

Επίσης για $x\in(0,1)$ ισχύει ότι $\ln x<0$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2),(3) προκύπτει ότι:

$f\left(\ln\left(x^2\right)\right)+\ln x<f\left(x^2-1\right)$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Για $x=1$ ισχύει ότι $\ln\left(x^2\right)=x^2-1\Rightarrow f\left(\ln\left(x^2\right)\right)=f\left(x^2-1\right)$ και $\ln 1=0$. Άρα η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1]$ την $x=1$.

ε) Η εφαπτομένη της C_f στο $x=\kappa>0$ έχει εξίσωση $y-f(\kappa)=f'(\kappa)(x-\kappa)\Leftrightarrow y=f'(\kappa)x-\kappa f'(\kappa)+f(\kappa)$. Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ ισχύει ότι $f(x)\geq f'(\kappa)x-\kappa f'(\kappa)+f(\kappa)$ για κάθε $x>0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=\kappa$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(\kappa)x-\kappa f'(\kappa)+f(\kappa)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(\kappa)x=+\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x=\lambda<0$ έχει εξίσωση $y-f(\lambda)=f'(\lambda)(x-\lambda)\Leftrightarrow y=f'(\lambda)x-\lambda f'(\lambda)+f(\lambda)$. Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ ισχύει ότι $f(x)\leq f'(\lambda)x-\lambda f'(\lambda)+f(\lambda)$ για κάθε $x<0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=\lambda$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f'(\lambda)x-\lambda f'(\lambda)+f(\lambda)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}f'(\lambda)x=-\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. Επομένως $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

31527.α) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=4x^3+6x$ και $f''(x)=12x^2+6$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f''(x)>0$, οπότε η f είναι κυρτή.

β) i. Είναι $f(1)=1+3-8=-4$ και $f'(1)=4+6=10$.

Η ε έχει εξίσωση: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+4=10x+10\Leftrightarrow y=10x+6$

ii. Επειδή η f είναι κυρτή, η f ΄είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και 1-1, επομένως η εξίσωση $f'(x)=\lambda_\varepsilon=10$ έχει μοναδική λύση την $x=1$.

26736.α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f ΄είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,5]$, οπότε η f είναι κοίλη στο $[-1,2]$ και κυρτή στο $[2,5]$.

β) Επειδή το Α ανήκει στη $C_{f'}$, η κλίση της f στο $x_o=2$ είναι το $f'(2)=-1$.

γ) $3f(2)-1=0\Leftrightarrow f(2)=\frac{1}{3}$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-\frac{1}{3}=-x+2\Leftrightarrow y=-x+\frac{7}{3}$.

32799.α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι όλα τα σημεία της $C_{f'}$ βρίσκονται εντός των

ευθειών y = 1 και y = 2 ή πάνω σε αυτές, οπότε $1 \le f'(x) \le 2$, για κάθε $x \in [-1,1]$.

β) Για κάθε $x \in [-1,1]$ είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f \nearrow [-1,1]$.

γ) Στο διάστημα $[-1,0]$ η f ΄είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η f είναι κυρτή στο διάστημα αυτό και για κάθε $x \in [0,1]$ η f ΄είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η f είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

34438.α) $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$, $f''(x) = 12x - 30$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 30x + 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 4$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 30 = 0 \Leftrightarrow 12x = 30 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

β) Για κάθε $x \in (-\infty,1) \cup (4,+\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (1,4)$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$, $[4,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο [1, 4].

Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(1) = 2 - 15 + 24 = 11$ και τοπικό ελάχιστο το $f(4) = -16$.

γ) Για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ είναι $f''(x) < 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ είναι $f''(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$. Η f έχει σημείο καμπής στο $x = \frac{5}{2}$.

35172.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}$.

$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} \ge 0 \Leftrightarrow 2x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$.

Για κάθε x < 0 είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε x > 0 είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 0$.

β) Η f ΄είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1+x^2-2x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\geq 0 \Leftrightarrow 1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 1 \Leftrightarrow |x|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$.

Για κάθε $x<-1$ ή $x>1$ είναι $f''(x)<0$ και για κάθε $x\in(-1,1)$ είναι $f''(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty,-1],[1,+\infty)$ και κυρτή στο $[-1,1]$.

Η f έχει σημεία καμπής τα $(-1,f(-1))\equiv(-1,\ln 2)$ και $(1,f(1))\equiv(1,\ln 2)$.

23312. α) Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής το $(x_0,f(x_0))$, $x_0\in(-2,2)$, τότε $f''(x_0)=0$. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$, η συνάρτηση $f^2(x)-2f(x)+x^2-3$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε:

$\left(f^2(x)-2f(x)+x^2-3\right)'=0 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x)-2f'(x)+2x=0 \Rightarrow$

$\left(2f(x)f'(x)-2f'(x)+2x\right)'=0 \Leftrightarrow$

$2f'(x)f'(x)+2f(x)f''(x)-2f''(x)+2=0$ και για $x=x_0$ είναι

$2(f'(x_0))^2+2f(x_0)\cancel{f''(x_0)}^{0}-2\cancel{f''(x_0)}^{0}+2=0 \Leftrightarrow 2(f'(x_0))^2=-2$ αδύνατη.

Επομένως η f δεν έχει σημείο καμπής.

β) i. $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0 \Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=4-x^2 \Leftrightarrow$

$(f(x)-1)^2=4-x^2 \Leftrightarrow |f(x)-1|=\sqrt{4-x^2}$ (1). Έστω

$h(x)=f(x)-1,\ x\in[-2,2]$.

Είναι $h(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=0 \Leftrightarrow 4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Για κάθε $x\in(-2,2)$ είναι $h(x)\neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Είναι $h(0)=f(0)-1=2>0$, άρα $h(x)>0$ για κάθε $x\in(-2,2)$, οπότε η (1) γίνεται:

$f(x)-1=\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow f(x)=1+\sqrt{4-x^2},\ x\in(-2,2)$.

Για $x=2$ και $x=-2$ είναι $|f(2)-1|=\sqrt{4-4} \Leftrightarrow f(2)-1=0 \Leftrightarrow f(2)=1$ και

όμοια $f(-2)=1$. Άρα $f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{4-x^2},\ x\in(-2,2)\\ 1,\ x=2 \text{ ή } x=-2\end{cases}=1+\sqrt{4-x^2},\ x\in[-2,2]$.

ii. Είναι $f'(x)=-\dfrac{2x}{2\sqrt{4-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Για κάθε $x \in (-2,0)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (0,2)$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.Η f έχει τοπικά ελάχιστα τα $f(-2) = 1$ και $f(2) = 1$ και τοπικό μέγιστο το $f(0) = 3$.Για κάθε $x \in [-2,0]$ είναι $f(-2) \le f(x) \le f(0) \Leftrightarrow 1 \le f(x) \le 3$ και για κάθε $x \in [0,2]$ είναι $f(2) \le f(x) \le f(0) \Leftrightarrow 1 \le f(x) \le 3$, άρα για κάθε $x \in [-2,2]$ είναι $1 \le f(x) \le 3$, επομένως η f έχει ελάχιστο το 1 για $x = 2$ και $x = -2$ και μέγιστο το 3 για $x = 0$.
Επειδή για κάθε $x \in [-2,2]$ είναι $1 \le f(x) \le 3$ και $-1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1$, η εξίσωση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει λύση μόνο όταν $f(x) = \sigma\upsilon\nu x = 1$, το οποίο είναι αδύνατο αφού η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει λύσεις τις $x = 2$ ή $x = -2$ που δεν επαληθεύουν την $\sigma\upsilon\nu x = 1$.

23531.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ και $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(e^x - \frac{1}{x} \right) = -\infty$ και $f'(1) = e - 1$.
Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Επειδή η f΄ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'((0,1)) = \left(\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x), \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) \right) = (-\infty, e-1)$. Επειδή το μηδέν περιέχεται στο $f'((0,1))$, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.
Για κάθε $x < x_0 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, x_0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.
Για κάθε $x > x_0 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = x_0$ το $f(x_0)$. Είναι $x_0 < 1 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_0) < f(1) = e - 3 < 0$.

γ) Επειδή η f έχει ελάχιστο στο x_0 είναι $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_0$, οπότε για κάθε x κοντά στο x_0 είναι $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$.

Είναι $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)} = \lim\limits_{x \to x_0} \left[(f(x))^{2023} \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} \right] = -\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^{2023} = (f(x_0))^{2023} < 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$ αφού

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ και $f(x) - f(x_0) > 0$ κοντά στο x_0.

24760.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x} - \lambda$ και $f'(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2}$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

β) $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e \Leftrightarrow f(1) = f(e)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, e]$, παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ και $f(1) = f(e)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x_o \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

γ) Είναι $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e \Leftrightarrow \lambda e - \lambda = e^e - e - 1 \Leftrightarrow \lambda(e - 1) = e^e - e - 1 \Leftrightarrow$

$\lambda = \dfrac{e^e - e - 1}{e - 1} = \dfrac{e^e}{e - 1} - 1$. Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα άρα $1 < x_0 < e \Leftrightarrow f'(1) < f'(x_0) < f'(e) \Leftrightarrow f'(1) < 0 < f'(e)$, οπότε $f'(1) f'(e) < 0$.

Επειδή η f' είναι συνεχής στο $[1, e]$, για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1, e]$.

δ) Για κάθε $0 < x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$ και για κάθε $x > x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0) = 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - \lambda x_0$. Όμως $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} - \dfrac{1}{x_0} - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = e^{x_0} - \dfrac{1}{x_0}$, οπότε

$$f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0} \right) = e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 e^{x_0} + 1 = e^{x_o}(1 - x_o) + 1 - \ln x_o$$

.

25745.α) i. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$, τότε η σχέση $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) < 0$ για $x = x_0$ γίνεται $(f'(x_0))^2 + \cancel{f(x_0)}^{0} f''(x_0) < 0 \Leftrightarrow (f'(x_0))^2 < 0$ αδύνατο. Άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$.

ii. Επειδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$ και η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,2)$. Επειδή $f(1) = 1 > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,2)$.

β) Είναι $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < -\dfrac{(f'(x))^2}{f(x)} < 0$, άρα η f είναι κοίλη στο $(0,2)$.

γ) Επειδή η f είναι κοίλη στο $(0,2)$, η f ΄είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $0 < x < 1 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(1) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο [0,1], είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $1 < x < 2 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(1) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο [1,2], είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστα τα $f(0)$, $f(2)$ και μέγιστο το $f(1)=1$.

27320.α) Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)$.

β) Στο σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο Α(1,0) ανήκει στη γραφική παράσταση της f΄, άρα $f'(1)=0$, επομένως η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1 και ο 1ος ισχυρισμός είναι σωστός.
Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f ΄ είναι συνεχής, 1-1 και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει μοναδικό $\kappa \in (0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(\kappa) = 2$, οπότε και ο 2ος ισχυρισμός είναι σωστός.

γ) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f ΄είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στο διάστημα αυτό.

27667.α) i. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x + x$ και $f''(x) = e^x + 1$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) > 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii. Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα.
Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x + x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x + x) = +\infty$.

Επειδή η f ΄ είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $f'(A)=\mathbb{R}$.

β) Επειδή ο αριθμός α βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f ΄και η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικός αριθμός $\rho\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f'(\rho)=\alpha$, δηλαδή η εξίσωση $e^x+x=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα ρ.

γ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=\alpha-f'(x)$.

Για κάθε $x<\rho \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(\rho)=\alpha \Leftrightarrow \alpha-f'(x)>0 \Leftrightarrow g'(x)>0$.

Για κάθε $x>\rho \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\rho)=\alpha \Leftrightarrow \alpha-f'(x)<0 \Leftrightarrow g'(x)<0$. Επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\rho]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\rho,+\infty)$. Η g έχει μέγιστο το $g(\rho)=\alpha\rho-f(\rho)=f'(\rho)\rho-f(\rho)$.

31549.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow 1-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 1 \Leftrightarrow 0<x\leq e$.

Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x\in(e,+\infty)$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(e)=\dfrac{1}{e}$.

β) $2022^{2023}>2023^{2022} \Leftrightarrow \ln 2022^{2023}>\ln 2023^{2022} \Leftrightarrow$

$2023\ln 2022>2022\ln 2023 \Leftrightarrow \dfrac{\ln 2022}{2022}>\dfrac{\ln 2023}{2023} \Leftrightarrow$

$f(2022)>f(2023) \overset{f\searrow[e,+\infty)}{\Leftrightarrow} 2022<2023$ ισχύει.

γ) Η f΄είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$.

$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\ln x-3}{x^3}\geq 0 \Leftrightarrow 2\ln x-3\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x\geq e^{\frac{3}{2}}$.

Για κάθε $x\in\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)$ είναι $f''(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$ είναι $f''(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right]$ και κυρτή στο $\left[e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$. Η f έχει σημείο καμπής το $\left(e^{\frac{3}{2}},f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)\equiv\left(e^{\frac{3}{2}},\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$.

δ) Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021,2022]$ και $[2022,2023]$, υπάρχει $x_1 \in (2021,2022)$ και $x_2 \in (2022,2023)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) = f(2022) - f(2021)$ και $f'(x_2) = f(2023) - f(2022)$. Είναι $x_1 < x_2 \overset{f' \nearrow \left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)}{\Leftrightarrow} f'(x_1) < f'(x_2) \Leftrightarrow$ $f(2022) - f(2021) < f(2023) - f(2022) \Leftrightarrow 2f(2022) < f(2021) + f(2023)$.

31550.α) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f$ κυρτή.

β) $f \cup (0,+\infty) \Leftrightarrow f' \nearrow (0,+\infty)$.

Είναι $f'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - 2 = \sqrt{e} - 2 < 0$, $f'(1) = e - 1 > 0$, άρα $f'\left(\frac{1}{2}\right) f'(1) < 0$, f' συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_o \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f'.

Για κάθε $0 < x < x_0 \overset{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$ και η f' είναι συνεχής στο $(0, x_0]$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > x_0 \overset{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0$ και η f' είναι συνεχής στο $[x_0,+\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(x_0)$.

γ) Είναι $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 = \ln\frac{1}{x_0} \Leftrightarrow$

$x_0 = -\ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0$. $f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 = \frac{1}{x_0} + x_0$.

γ) Επειδή η f έχει ελάχιστο το $f(x_0)$, ισχύει ότι $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x > 0$. Θα συγκρίνουμε το $f(x_0)$ με το 2, είναι:

$$f(x_0) - 2 = \frac{1}{x_0} + x_0 - 2 = \frac{1 + x_0^2 - 2x_0}{x_0} = \frac{(x_0 - 1)^2}{x_0} > 0 \Leftrightarrow$$

$f(x_0) > 2$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > 2$, επομένως η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.

31746.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

Το τριώνυμο x^2-2x+2 έχει $\Delta=-4<0$, οπότε $x^2-2x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $f'(x)>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-4x+6)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4x+6}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-4}{-e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-x}}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-4x+6)e^x=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$.

β) Είναι $f(0)=6$ και $f'(0)=2$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση

ε: $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=2x+6$.

γ) Η f ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=x^2e^x$.

Για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι $f''(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει σημεία καμπής.

δ) Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\geq 2x+6$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Είναι $f'(x)=e^x+(x-2)e^x+\alpha$ και $f''(x)=e^x+e^x+(x-2)e^x=xe^x$.

Είναι $f''(x)>0\Leftrightarrow xe^x>0\Leftrightarrow x>0$. Η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty,0]$, παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_0=0$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ είναι $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y+2=(\alpha-1)x\Leftrightarrow y=(\alpha-1)x-2$. Τότε $\alpha-1=2\Leftrightarrow\alpha=3$. **Σωστή απάντηση Β.**

2. Είναι $f'(x)=\dfrac{4x^3}{12}+\dfrac{3\sqrt{\alpha-1}x^2}{6}+(\alpha-1)^2x+1=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{\sqrt{\alpha-1}x^2}{2}+(\alpha-1)^2x+1$

και $f''(x)=x^2+\sqrt{\alpha-1}x+(\alpha-1)^2$ με $\Delta=(\alpha-1)-4(\alpha-1)^2=(\alpha-1)(5-4\alpha)$.

Αν $\alpha<1$ ή $\alpha>\dfrac{5}{4}$ τότε $\Delta<0$, οπότε $f''(x)>0\Rightarrow f\cup\mathbb{R}$ και δεν έχει σημείο καμπής.Αν $1<\alpha<\dfrac{5}{4}$ τότε $\Delta>0$, η f ΄΄έχει δύο ρίζες, αλλάζει πρόσημο γύρω τους οπότε η f έχει 2 σημεία καμπής και απορρίπτεται η περίπτωση αυτή.

Αν α= 1 τότε $f''(x)=x^2>0$ για κάθε $x\neq 0$ οπότε η f είναι κυρτή και δεν έχει σημεία καμπής.

Αν $\alpha=\frac{5}{4}$ τότε $f''(x)=x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2>0$ για κάθε $x\neq -\frac{1}{2}$ οπότε η f είναι κυρτή και δεν έχει σημεία καμπής.

Τελικά η f δεν έχει σημεία καμπής όταν $\alpha\leq 1$ ή $\alpha\geq\frac{5}{4}$ και η μικρότερη τιμή του φυσικού αριθμού α είναι το 0. **Σωστή απάντηση Δ.**

3. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{\alpha x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1$ είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{\alpha x^2}{2}+x+1$ και $f''(x)=x^2-\alpha x+1$ η οποία είναι τριώνυμο ως προς x με $\Delta=\alpha^2-4$

- Αν $\Delta>0\Leftrightarrow\alpha^2-4>0\Leftrightarrow\alpha<-2$ ή $\alpha>2$ τότε η $f''(x)$ έχει δυο ρίζες $\rho_1,\rho_2\,(\rho_1<\rho_2)$ και είναι $f''(x)>0\Leftrightarrow x<\rho_1$ ή $x>\rho_2$ και $f''(x)<0\Leftrightarrow\rho_1<x<\rho_2$ (αφού $\alpha=1>0$). Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,\rho_1]$ και $[\rho_2,+\infty)$, ενώ είναι κοίλη στο $[\rho_1,\rho_2]$.
- Αν $\Delta=0\Leftrightarrow\alpha^2-4=0\Leftrightarrow\alpha=-2$ ή $\alpha=2$ τότε η $f''(x)$ έχει μια διπλή ρίζα ρ και είναι $f''(x)\geq 0$ (αφού $\alpha=1>0$) και μηδενίζεται μόνο για $x=\rho$ στο οποίο είναι συνεχής οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\Delta<0\Leftrightarrow\alpha^2-4<0\Leftrightarrow-2<\alpha<2$ τότε η $f''(x)>0$ οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ όταν $\alpha\in[-2,2]$.

Σωστή απάντηση Β.

4. Η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2+2\alpha x+\beta$ και $f''(x)=6x+2\alpha$. Πρέπει

$$\left\{\begin{array}{l}f'(-1)=0\\f(2)=-2\\f''(2)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}3-2\alpha+\beta=0\\8+4\alpha+2\beta+\gamma=-2\\12+2\alpha=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\beta=-15\\\gamma=44\\\alpha=-6\end{array}\right.$$ Τότε

$f(x)=x^3-6x^2-15x+44$ με $f'(x)=3x^2-12x-15=3(x-5)(x+1)$ και $f'(x)>0\Leftrightarrow x<-1$ ή $x>5$, ενώ $f'(x)<0\Leftrightarrow-1<x<5$ οπότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=-1$

Επίσης, $f''(x)=6x-12>0 \Leftrightarrow x>2$, οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$ και κυρτή στο $[2,+\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_1=2$.

Σωστή απάντηση Α.

5. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x(1+x-\alpha)$

και $f''(x)=e^x(2+x-\alpha)$. Είναι $f''(x)>0 \Leftrightarrow 2+x-\alpha>0 \Leftrightarrow x>\alpha-2$ η f είναι κοίλη στο $(-\infty,\alpha-2]$ και κυρτή στο $[\alpha-2,+\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $A(\alpha-2,-2e^{\alpha-2})$. Συνεπώς, ο γεωμετρικός τόπος του σημείου καμπής είναι η καμπύλη $y=-2e^x$. **Σωστή απάντηση Δ.**

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος

1. Σ	**2.** Λ	**3.** Λ	**4.** Λ	**5.** Λ	**6.** Σ	**7.** Λ	**8.** Λ	**9.** Σ	**10.** Σ
11. Σ	**12.** Λ	**13.** Σ	**14.** Σ	**15.** Σ	**16.** Σ	**17.** Λ	**18.** Σ	**19.** Σ	**20.** Λ
21. Σ	**22.** Σ	**23.** Σ	**24.** Σ	**25.** Σ					

31 Ασύμπτωτες

11.α) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = +\infty \Rightarrow x = 1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

β) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-1)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = 3 \Rightarrow$ η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

γ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1 \Rightarrow$ η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

δ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x-1} \ln x = +\infty$ άρα η $x = 0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

ε) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\infty \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

στ) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{3}{x+1} = -\infty \Rightarrow x = -1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

12.α) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+6} - x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{x^2} + 4x + 6 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+4x+6} + x} =$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(4 + \frac{6}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}} + 1\right)} = 2 \Rightarrow y = 2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+6} - x\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left[x\left(-\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}} - 1\right)\right] = +\infty \Rightarrow$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{x}\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} = 2 \Rightarrow y = 2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-\cancel{x}\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} = -2 \Rightarrow y = -2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+6x+5}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{x^3} = 2 \Rightarrow y = 2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Όμοια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ οριζόντια ασύμπτωτη και στο $-\infty$.

13. $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+}(-x) = 0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(x\ln x-(x+1)\ln(x+1)\right) = 0$ άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

14.α) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2+2}{x^3+x} = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\cdot\dfrac{1}{x}\right) = +\infty \Rightarrow x = 0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2}{x^3+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = 0 \Rightarrow y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2}{x^3+x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = 0 \Rightarrow y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to-5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-5^-}\left[(x-2)\dfrac{1}{x+5}\right] = +\infty \Rightarrow x = -5$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1 \Rightarrow y = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-2}{x+5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x} = 1 \Rightarrow y = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2+3x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x+1}+2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$

$y = \dfrac{3}{4}$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(-\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right)}{x} = -4$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+4x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{4x^2}+3x+1-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+3x+1}-2x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{4+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-2\right)}=-\dfrac{3}{4}$, άρα η $y=-4x-\dfrac{3}{4}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

δ) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x\dfrac{1}{x}\right)=-\infty\cdot(+\infty)=-\infty\Rightarrow x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0\Rightarrow y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

ε) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1\Rightarrow\nexists$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}$ και από το Κ.Π είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και όμοια στο $-\infty$.

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0\Rightarrow y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x}=-\infty(+\infty)=-\infty$ άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

15. Αρκεί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-5x+1}{x-2}-(2x-1)\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{2x^2}-5x+1-\cancel{2x^2}+4x+x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x-2}=0$.

16. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(3x-2+\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty\Rightarrow x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)=3$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\dfrac{1}{x^2}\right)=-2$,

άρα η $y=3x-2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1-e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{-e^x}=0\Rightarrow y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

.

17. Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\alpha x+\beta$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Αν $\alpha\neq 0$ και $\beta\in\mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{\alpha x}{x}\right)=\alpha$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-\alpha x\right)=\beta$

άρα η C_f έχει στο $\pm\infty$ πλάγια ασύμπτωτη τον εαυτό της. Αν $\alpha=0$ και $\beta\in\mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\beta$ άρα η C_f έχει στο $\pm\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη τον εαυτό της.

Αυξημένης δυσκολίας

18. Για $y=x_0$ είναι $|f(x)-f(x_0)|\le\dfrac{(x-x_0)^2}{|x-x_0|+1}$. Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)^2}{|x-x_0|+1}=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, άρα f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

19. Έστω $f(x)-x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}=g(x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x)+x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g(x)}{x}+x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=1$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\eta\mu\dfrac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)+x\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}-x\right)\right]=2$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\eta\mu\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\frac{\eta\mu u}{u}-1}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u-u}{u^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}$

$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\dfrac{-\eta\mu u}{2}=0$, άρα η $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

20.α) $A_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x}{x^2-1}=0$, γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x+1}\cdot\dfrac{\ln x}{x-1}\right) = \dfrac{1}{2}$ γιατί $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 1$.

Η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x}{x^2-1} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+1}{2x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2} = 0$, άρα η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f .

β) Έστω $g(x) = 2e^x + x - 1$, $x \ge 0$. Είναι $g'(x) = 2e^x + 1 > 0$, άρα $g\nearrow$ στο $[0,+\infty)$. Για κάθε $x \ge 0$ είναι $g(x) \ge g(0) = 1 > 0 \Leftrightarrow 2e^x + x - 1 > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2e^x+x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x\left(2+\frac{x}{e^x}-e^{-x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2+\frac{x}{e^x}-e^{-x}} = \frac{1}{2},$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \dfrac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2+x}{2e^x+x-1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+1}{2e^x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{2e^x} = 0$, άρα η $y = \dfrac{1}{2}x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

21.α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$. Είναι:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x\cdot\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot x\ln x\right) = 0$,γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

β) Για πλάγια ασύμπτωτη έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x\cdot\ln x}{x}$.

Είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x\cdot\ln x}{x}\right| = |\eta\mu x|\left|\dfrac{\ln x}{x}\right| \le \left|\dfrac{\ln x}{x}\right| \Leftrightarrow -\left|\dfrac{\ln x}{x}\right| \le \dfrac{\eta\mu x\cdot\ln x}{x} \le \left|\dfrac{\ln x}{x}\right|$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x\cdot\ln x}{x}=0$, οπότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

22.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+e^{-2x}\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=2$, γιατί

$\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}$ και από κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+e^{-2x}\eta\mu x\right)=-1$, γιατί

$\left|e^{-2x}\eta\mu x\right|=\left|e^{-2x}\right|\left|\eta\mu x\right|\le e^{-2x}\Leftrightarrow-e^{-2x}\le e^{-2x}\eta\mu x\le e^{-2x}$. Επειδή

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-2x}\right)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}\eta\mu x=0$.Επομένως η ευθεία $y=2x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) $f(x)=2x-1\Leftrightarrow2x-1+e^{-2x}\eta\mu x=2x-1\Leftrightarrow e^{-2x}\eta\mu x=0\Leftrightarrow$

$\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Κοινά σημεία τα $(k\pi,2k\pi-1),\ k\in\mathbb{Z}$.

23.Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $[1,x]$, $x>1$ και παραγωγίσιμη στο $(1,x)$, άρα λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει

$\xi\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)}{x-1}$.

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $1<\xi<x\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(1)<f'(\xi)<f'(x)\le1+\dfrac{\ln x}{x^2}$. Όμως

$1\le f'(1)\le1+\dfrac{\ln1}{1^2}\Leftrightarrow1\le f'(1)\le1\Leftrightarrow f'(1)=1$, άρα

$1<f'(\xi)<1+\dfrac{\ln x}{x^2}\Leftrightarrow1<\dfrac{f(x)}{x-1}<1+\dfrac{\ln x}{x^2}\Leftrightarrow x-1<f(x)<x-1+\dfrac{(x-1)\ln x}{x^2}\Leftrightarrow$

$0<f(x)-(x-1)<\dfrac{(x-1)\ln x}{x^2}$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)\ln x}{x^2}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{2x}+\dfrac{x-1}{2x^2}\right)=0$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{2x^2}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{4x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4x^2}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}=0$.

Από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$ άρα η ευθεία $y=x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(\lambda x+\beta)\right)=0\overset{x=-u}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{u\to-\infty}\left(f(-u)-(-\lambda u+\beta)\right)=0\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{u\to-\infty}\left(-f(u)+\lambda u-\beta\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{u\to-\infty}\left[-\left(f(u)-\lambda u+\beta\right)\right]=0\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{u\to-\infty}\left(f(u)-(\lambda u-\beta)\right)=0$, άρα η ευθεία $y=\lambda x-\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

25. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=(\alpha,\beta)$, έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x),\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)\right)$. Όμως $f(A)=\mathbb{R}$, άρα $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)=+\infty$. Άρα οι ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f .

26. Έστω $\dfrac{f(x)-x}{xf(x)+x^2-3x+1}=g(x)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2$. Τότε

$f(x)-x=g(x)\left(xf(x)+x^2-3x+1\right)\Leftrightarrow$

$f(x)-x=xf(x)g(x)+x^2g(x)-3xg(x)+g(x)\Leftrightarrow$

$f(x)-xf(x)g(x)=x+g(x)\left(x^2-3x+1\right)\Leftrightarrow$

$f(x)\left(1-xg(x)\right)=x+g(x)\left(x^2-3x+1\right)\ (1)$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-xg(x)\right)=-\infty$, άρα για πολύ μεγάλες τιμές του x είναι

$1-xg(x)<0$ και η (1) γίνεται: $f(x)=\dfrac{x+g(x)\left(x^2-3x+1\right)}{1-xg(x)}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-x+2)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+g(x)\left(x^2-3x+1\right)}{1-xg(x)}+x-2\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+g(x)\left(x^2-3x+1\right)+x-2-x(x-2)g(x)}{1-xg(x)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)\left(x^2-3x+1-x^2+2x\right)+2x-2}{1-xg(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)(1-x)+2x-2}{1-xg(x)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left[g(x)\frac{1-x}{x}+2-\frac{2}{x}\right]}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}-g(x)\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)\left(\frac{1}{x}-1\right)+2-\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}-g(x)} = \frac{2(0-1)+2-0}{0-2} = 0,$$

άρα η ευθεία $y=-x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(f(x)-2x\right)^2-8\left(f(x)-2x\right)\right]=-16 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(f(x)-2x\right)^2-8\left(f(x)-2x\right)+16\right]=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x-4\right)^2=0.$

Είναι $-\left|f(x)-2x-4\right| \le f(x)-2x-4 \le \left|f(x)-2x-4\right| \Leftrightarrow$

$-\left(f(x)-2x-4\right)^2 \le f(x)-2x-4 \le \left(f(x)-2x-4\right)^2.$

Από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x-4\right)=0$, άρα η ευθεία $y=2x+4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Εύρεση παραμέτρων σε συναρτήσεις με γνωστή ασύμπτωτη

28. Αν $x^2+\alpha x+\beta\neq 0$, τότε $A_f=\mathbb{R}$ και η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Αν ρ_1,ρ_2 ρίζες του τριωνύμου, τότε $A_f=\mathbb{R}-\{\rho_1,\rho_2\}$ και πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες είναι οι $x=\rho_1$ και $x=\rho_2$. Άρα $\rho_1=1$ και $\rho_2=4$. Τότε $1+\alpha+\beta=0$ (1) και $16+4\alpha+\beta=0$ (2). Από το σύστημα των (1),(2) προκύπτει: $\alpha=-5$ και $\beta=4$. Τότε $f(x)=\frac{4x-5}{x^2-5x+4}$ και

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{4x-5}{x-4}\cdot\frac{1}{x-1}\right)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to4^+} f(x) = \lim_{x\to4^+}\left(\frac{4x-5}{x-1}\cdot\frac{1}{x-4}\right)=+\infty.$$

29. Επειδή $A_f=\mathbb{R}-\{\gamma\}$, η ευθεία $x=\gamma$ είναι η μόνη πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Άρα $\gamma=2$. Τότε $f(x)=\frac{(\alpha-1)x^2+\beta x+3}{x-2}$. Για να είναι η ευθεία $y=2$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. Αν $\alpha\neq1$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\alpha-1)x^{\not 2}}{x} = \pm\infty$ άτοπο, άρα $\alpha = 1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\beta x+3}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\not{x}\left(\beta+\dfrac{3}{x}\right)}{\not{x}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} = \beta$, άρα $\beta = 2$. Τότε

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left[(2x+3)\dfrac{1}{x-2}\right] = -\infty$.

30. Είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{5-3}{3-2} = 2$ και ε: y = 2x-1.

Πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right) = 0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha x^2-\beta x+2}{x-3}-(2x-1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-2)x^2+(7-\beta)x-1}{x-3}$.

Αν $\alpha \neq 2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-2)x^{\not 2}}{\not{x}} = \pm\infty$, οπότε για να είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right) = 0$ πρέπει $\alpha = 2$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(7-\beta)x-1}{x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\not{x}\left(7-\beta-\dfrac{1}{x}\right)}{\not{x}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)} = 7-\beta$.

Πρέπει $7-\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 7$.

31. Πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(3x-4)\right) = 0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(3x-4)\right) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(\alpha+1)x^2-\beta x+\gamma}{x+\gamma}-(3x-4)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-2)x^2-(\beta+3\gamma-4)x+5\gamma}{x+\gamma}$

Αν $\alpha \neq 2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(3x-4)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-2)x^{\not 2}}{\not{x}} = \pm\infty$, άρα πρέπει

$\alpha = 2$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(3x-4)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\beta+3\gamma-4)x+5\gamma}{x+\gamma} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(\beta+3\gamma-4+\dfrac{5\gamma}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\dfrac{\gamma}{x}\right)}=\beta+3\gamma-4$. Πρέπει $\beta+3\gamma-4=0$ (1)

Επειδή $A_f=\mathbb{R}-\{\gamma\}$, η ευθεία $x=-\gamma$ είναι η μόνη πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Άρα $\gamma=-2$ και $(1)\Rightarrow\beta-6-4=0\Leftrightarrow\beta=10$. Τότε

$\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{3x^2-10x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to-2^+}\left[\left(3x^2-10x-2\right)\dfrac{1}{x-2}\right]=-\infty$.

32. Για να είναι η ευθεία $\varepsilon_1: y=-2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-2$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{\alpha^2+\dfrac{\beta}{x}+\dfrac{10}{x^2}}-\gamma\right)\right]$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\alpha^2+\dfrac{\beta}{x}+\dfrac{10}{x^2}}-\gamma\right)=\alpha-\gamma$, αν $\alpha-\gamma>0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, ενώ αν $\alpha-\gamma<0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. Άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-2$, πρέπει $\alpha-\gamma=0\Leftrightarrow\alpha=\gamma$. Τότε $f(x)=\sqrt{\alpha^2x^2+\beta x+10}-\alpha x$. Για να είναι η ευθεία $\varepsilon_2: y=-2x+2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, πρέπει $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-2x+2)\right)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-2x+2)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\alpha^2x^2+\beta x+10}-\alpha x+2x-2\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\alpha^2x^2+\beta x+10}-(\alpha-2)x-2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{\alpha^2+\dfrac{\beta}{x}+\dfrac{10}{x^2}}-\alpha+2-\dfrac{2}{x^2}\right)\right]$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\alpha^2+\dfrac{\beta}{x}+\dfrac{10}{x^2}}-\alpha+2-\dfrac{2}{x^2}\right)=-2\alpha+2$, αν $-2\alpha+2>0$ τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-2x+2)\right)=+\infty$, ενώ αν $-2\alpha+2<0\Leftrightarrow\alpha>1$, τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-2x+2)\right)=-\infty$. Άρα για να είναι

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-2x+2)\right)=0$, πρέπει $-2\alpha+2=0\Leftrightarrow\alpha=1$ και $\gamma=1$. Τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-2x+2)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+\beta x+10}+x-2\right)=$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+\beta x+10-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+\beta x+10}-x}-2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(\beta+\frac{10}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{\beta}{x}+\frac{10}{x^2}}-1\right)}-2\right)=-\frac{\beta}{2}-2$$

Πρέπει $-\frac{\beta}{2}-2=0\Leftrightarrow\beta=-4$.

Εύρεση παραμέτρων σε συναρτήσεις με άγνωστη ασύμπτωτη

33.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=5$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\lambda f(x)+4x}{xf(x)-2x^2+3x}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\lambda\frac{f(x)}{x}+4\right)}{\cancel{x}\left(f(x)-2x+3\right)}=1\Leftrightarrow\frac{2\lambda+4}{5+3}=1\Leftrightarrow\lambda=2$

34. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=4$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-4x\right)=3$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{xf(x)-4x^2+6x\eta\mu x}{x^2f(x)-4x^3+2\eta\mu x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{f(x)}{x}-4+6\frac{\eta\mu x}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(f(x)-4x+2\frac{\eta\mu x^2}{x^2}\right)}=\frac{4-4+6\cdot0}{3+2\cdot0}=0$$

γιατί $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$ και από Κ.Π. είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$

και όμοια $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x^2}{x^2}=0$.

Αυξημένης δυσκολίας

35.Αρκεί να βρούμε τα λ, β για τα οποία η $y=\lambda x+\beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x+1}$ στο $-\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$ και

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2-5x+3}{x+1}-2x\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-5x+3-2x^2-2x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-7x+3}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-7x}{x}=-7$$, άρα η ευθεία

$y=2x-7$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, επομένως $\lambda=2$ και $\beta=-7$.

36. Αρκεί να βρούμε τη πλάγια ασύμπτωτη της $f(x)=x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$ στο $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\eta\mu\dfrac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=u\Leftrightarrow x=\frac{1}{u}}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}-x\right)\overset{\frac{1}{x}=u\Leftrightarrow x=\frac{1}{u}}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u^2}\eta\mu u-\dfrac{1}{u}=$

$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u-u}{u^2}\overset{\text{DLH}}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\dfrac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}=\dfrac{1}{2}\cdot 0=0$, άρα η $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, οπότε $\lambda=1$ και $\beta=0$.

37. Αρκεί να βρούμε τα α, β για τα οποία η $y=\alpha x+\beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+2+\dfrac{1}{x}\right)=2$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{-x}+2\right)+1-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x}+1\right)=1$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\overset{\text{DLH}}{\underset{x\to+\infty}{=}}\lim\dfrac{1}{e^x}=0$. Άρα η ευθεία $y=2x+1$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, οπότε $\alpha=2$ και $\beta=1$.

Συνδυασμός ασυμπτώτων f, g

38.α) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=-7$,

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x+4}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}-1+\dfrac{4}{x}\right)=3-1=2$.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9g(x)+3x+\eta\mu 2x}{xf(x)-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(9\dfrac{g(x)}{x}+3+\dfrac{\eta\mu 2x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(f(x)-3x+\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{18+3+0}{-7+0}=-3$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x+7\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+x-4-3x+7\right)=0\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-2x+3\right)=0$ άρα η ευθεία $y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

39. Έστω $\varepsilon_1 : y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \lambda_2 x + \beta_2$ οι πλάγιες ασύμπτωτες των C_g, C_f αντίστοιχα. Τότε $\lambda_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ και $\lambda_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Για να είναι $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

Στη σχέση $\left|g(x)f(x)+x^2\right| \le x\ln x$ διαιρούμε με x^2, και έχουμε:

$$\frac{\left|g(x)f(x)+x^2\right|}{x^2} \le \frac{x\ln x}{x^2} \Leftrightarrow \left|\frac{g(x)f(x)}{x^2}+1\right| \le \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\ln x}{x} \le \frac{g(x)f(x)}{x^2}+1 \le \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow -\frac{\ln x}{x}-1 \le \frac{g(x)f(x)}{x^2} \le \frac{\ln x}{x}-1 .$$

Όμως, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln x}{x}-1\right) = -1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}-1\right) = -1$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)f(x)}{x^2} = -1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{x}\cdot\frac{f(x)}{x}\right) = -1 \text{ άρα } \lambda_1\cdot\lambda_2 = -1 .$$

40. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-(-x+4)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x-(-x+4)\right) = 0 \Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+4)\right) = 0$, άρα η ευθεία $y = x+4$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

41. Είναι $g'(x) = f'(x)+3 \Leftrightarrow g'(x) = \left(f(x)+3x\right)' \Leftrightarrow$.

$g(x) = f(x)+3x+c,\ c\in\mathbb{R}$. Επειδή οι C_f, C_g τέμνονται επί της ευθείας $x = 2$, ισχύει: $f(2) = g(2)$. Όμως $f(2) = g(2)+6+c \Leftrightarrow c = -6$ και $g(x) = f(x)+3x-6,\ x\in\mathbb{R}$. Επειδή η C_g έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = -x+2$, ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-(-x+2)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+3x-6+x-2\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+4x-8\right) = 0$. Οπότε η ευθεία $y = -4x+8$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

42. Αρχικά θα βρούμε το βαθμό της g.
Επειδή η ευθεία ε_3 διέρχεται από τα σημεία (0,0) και (1,1), είναι η y = x.

Επειδή η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη την y = x, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Αν το πολυώνυμο g είναι 1ου βαθμού, τότε θα είναι της μορφής $g(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha\neq 0$. Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+10}{\alpha x^2+\beta x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{\alpha x^2}=\infty$ απορρίπτεται.

Αν το πολυώνυμο g έχει βαθμό $\nu\geq 3$, τότε

$g(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, $f(x)=\dfrac{x^3-x+10}{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0}$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+10}{\alpha_\nu x^{\nu+1}+\alpha_{\nu-1}x^\nu+\ldots+\alpha_1 x^2+\alpha_0 x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{\alpha_\nu x^{\nu+1}}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha_\nu x^{\nu-2}}=0$ απορρίπτεται. Άρα το g είναι 2ου βαθμού.

Έστω $g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+10}{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{\alpha x^3}=\dfrac{1}{\alpha}$. Είναι $\dfrac{1}{\alpha}=1\Leftrightarrow\alpha=1$.

Οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f με εξισώσεις x = -1 και x = 1 αντίστοιχα. Αν η g δεν έχει ρίζες, τότε η f θα έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και δεν θα έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Αν η g έχει μία ρίζα, τότε η f θα έχει το πολύ μία κατακόρυφη ασύμπτωτη.
Επομένως, επειδή οι x = -1 και x = 1 είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες, τα -1, 1 είναι ρίζες της g, άρα $g(-1)=0\Leftrightarrow 1-\beta+\gamma=0$ (1) και

$g(1)=0\Leftrightarrow 1+\beta+\gamma=0$ (2). Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι $2+2\gamma=0\Leftrightarrow\gamma=-1$ και από την $(1)\Rightarrow\beta=0$. Άρα $g(x)=x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Θεωρητικές ασκήσεις

43. Η συμμετρική ευθεία της $y=\alpha$ ως προς την ευθεία $y=x$ είναι η $x=\alpha$.

Ευθύ: Αν η ευθεία $y=\alpha$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$.

Ισχύει $f^{-1}(f(x))=x$ άρα έχουμε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(f(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ (1)

Επίσης έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(f(x))\overset{\substack{f(x)=u,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha\\ x\to+\infty\Rightarrow u\to\alpha}}{=}\lim\limits_{u\to\alpha}f^{-1}(u)$ (2) δηλαδή από (1) και (2) είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(f(x))=\lim\limits_{x\to\alpha}f^{-1}(x)=+\infty$ άρα η ευθεία $x=\alpha$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της .

Αντιστρόφως: Αν η ευθεία $x=\alpha$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ τότε $\lim\limits_{x\to\alpha}f^{-1}(x)=+\infty$ αφού το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το $(0,+\infty)$.

Ισχύει $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ άρα έχουμε ότι: $\lim\limits_{x\to\alpha} f\left(f^{-1}(x)\right)=\lim\limits_{x\to\alpha} x=\alpha$ (3)

Επίσης έχουμε $\lim\limits_{x\to\alpha} f\left(f^{-1}(x)\right) \underset{u\to+\infty}{\overset{f^{-1}(x)=u,\ \lim\limits_{x\to\alpha} f^{-1}(x)=+\infty}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty} f(u)$ (4) δηλαδή από (3) και (4) είναι $\lim\limits_{x\to\alpha} f\left(f^{-1}(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\alpha$ άρα η ευθεία $y=\alpha$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της στο $+\infty$.

44. Επειδή η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία y = 1, είναι

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x f(x)}{e^x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x f(x)+e^x f'(x)}{e^x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{e^x}\left(f(x)+f'(x)\right)}{\cancel{e^x}}=1+\lambda\Leftrightarrow 1=1+\lambda\Leftrightarrow\lambda=0$, άρα η γραφική παράσταση της f ΄έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον άξονα x΄x.

45. Έστω ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=\beta$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\beta$. Είναι

$\beta=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}f(x)}{e^{-x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)}{-e^{-x}}\Leftrightarrow$

$\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^{-x}}\left(-f(x)+f'(x)\right)}{\cancel{e^{-x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-f'(x)\right]=\beta-\alpha\Leftrightarrow\ \alpha=0$ που είναι άτοπο.

46.α) Έστω ότι $C_f\equiv C_2$ και $C_{f'}\equiv C_1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\alpha$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$.

Είναι $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(x)}{e^x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(x)+e^x f'(x)}{e^x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+f'(x)\right)=+\infty$ πράγμα άτοπο.

β) Αφού $C_f\equiv C_1$ και $C_{f'}\equiv C_2$ τότε είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha$. Είναι $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha$.

47.Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=0$.

α) Η συνάρτηση $f+g$ ορίζεται στο $(0,+\infty)$. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι ο άξονα y΄y. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\left(f(x)+g(x)\right)=f(0)$ άρα ο άξονα y΄y δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+g(x)\right)=+\infty$ άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{g(x)}{x}\right)=1+(+\infty)=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g'(x)}{1}=+\infty$, και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\varepsilon\varphi45^{\circ}=1$ γιατί η ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45° άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\varepsilon\varphi45^{0}=1$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα είναι η $y=x$. Άρα η f + g δεν έχει ασύμπτωτες.

β) Η συνάρτηση $f\cdot g$ ορίζεται στο $(0,+\infty)$. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι ο άξονα y΄y. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\left(f(x)g(x)\right)=0$ άρα ο άξονα y΄y δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}g(x)\right)=1\cdot(+\infty)=+\infty$ άρα δεν έχει ούτε πλάγιες ούτε οριζόντιες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=+\infty$ οπότε δεν έχει και οριζόντιες ασύμπτωτες.

γ) Η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική θετική ρίζα ρ άρα συνάρτηση $\dfrac{1}{g}$ ορίζεται στο $(0,\rho)\cup(\rho,+\infty)$. Πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες είναι οι ευθείες $x=0$ και $x=\rho$. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=0$ και $g(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\rho)$ άρα $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{g(x)}=-\infty$ οπότε ο y΄y άξονας είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to\rho} g(x)=0$, $g(x)<0$ για $x\in(0,\rho)$ και $g(x)>0$ για $x>\rho$ άρα $\lim\limits_{x\to\rho^-}\dfrac{1}{g(x)}=-\infty$ ενώ $\lim\limits_{x\to\rho^+}\dfrac{1}{g(x)}=+\infty$ άρα η $x=\rho$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{g(x)}=0$ άρα ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

δ) Η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική θετική ρίζα ρ άρα συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο $(0,\rho)\cup(\rho,+\infty)$. Πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες είναι οι ευθείες $x=0$ και $x=\rho$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=0$ και $g(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\rho)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)>0$ άρα ο y΄y άξονας είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη. Είναι $\lim\limits_{x\to \rho^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to \rho^-}g(x)=0$ και $g(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\rho)$ και $\lim\limits_{x\to \rho^-}f(x)=f(\rho)>0$ άρα η $x=\rho$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g'(x)=+\infty$, άρα ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

ε) Η συνάρτηση $f\circ g$ ορίζεται στο $A=\{x\in D_g / g(x)\in D_f\}=\{x>0/x\in\mathbb{R}\}=(0,+\infty)$. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι ο άξονα y΄y.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(g(x))\overset{g(x)=u}{\underset{u\to 0^-}{=}}\lim\limits_{u\to 0^-}f(u)=f(0)>0$ άρα ο άξονα y΄y δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(g(x))\overset{g(x)=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=+\infty$ άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(f\circ g)(x)}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(g(x))g'(x)\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(g(x))\overset{g(x)=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}f'(u)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g'(x)=+\infty$ άρα δεν έχει ούτε πλάγιες ούτε οριζόντιες ασύμπτωτες.

48.α) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\beta$.

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\neq 0$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lambda$. Τότε $f(x)=xg(x)$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \lambda > 0 \\ +\infty & \lambda < 0 \end{cases}$, οπότε: $\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$

β) $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\dfrac{f(x)}{x}-\lambda\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{f(x)}{x}-\lambda}{\dfrac{1}{x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{f(x)}{x}-\lambda\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-xf'(x)\right).$$

49.α) Επειδή η $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, ισχύει ότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \beta$. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}\cdot x = +\infty$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(f(x))}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{x}\right] = \lambda\cdot\lambda = \lambda^2$, γιατί αν θέσουμε $f(x) = u$,

είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(f(x))}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(u)}{u} = \lambda$. Ακόμη

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(f(x))-\lambda^2 x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(f(x))-\lambda f(x)+\lambda f(x)-\lambda^2 x\right] \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(f(x))-\lambda^2 x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(f(f(x))-\lambda f(x)\right)+\lambda\left(f(x)-\lambda x\right)\right] \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(f(x))-\lambda^2 x\right] = \beta+\lambda\beta$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(f(x))-\lambda f(x)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(u)-\lambda u\right) = \beta$.

Οπότε η ευθεία $y = \lambda^2 x + \beta + \lambda\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της fof στο $+\infty$.

γ) Για να δέχονται οι γραφικές παραστάσεις των f, fof, δέχονται κοινή ασύμπτωτη στο $+\infty$, πρέπει οι ευθείες $y = \lambda x + \beta$ και $y = \lambda^2 x + \beta + \lambda\beta$, να ταυτίζονται. Αυτό συμβαίνει όταν $\begin{cases} \lambda = \lambda^2 \\ \beta = \beta + \lambda\beta \end{cases} \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1 = \lambda \\ \beta = \beta + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$. Άρα οι C_f, C_{fof} δέχονται ως κοινή ασύμπτωτη την $y = x$.

Σύνθετες ασκήσεις

50.α) Η f ορίζεται όταν $\begin{cases} -x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x \leq 0$, οπότε $A_f = (-\infty, 0]$.

Η g ορίζεται όταν $x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ή $x \geq 2$, οπότε $A_g = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. Επειδή $A_f \neq A_g$ είναι και $f \neq g$.Όταν όμως $x \in (-\infty, 0]$, τότε $f(x) = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{2-x} = \sqrt{-x(2-x)} = \sqrt{-2x + x^2} = g(x)$

β) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{g(x) - \eta\mu x}{\sqrt{x^2 - x}} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - \eta\mu x}{\sqrt{-x(1-x)}} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{2-x} - \eta\mu x}{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{1-x}} =$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{\cancel{\sqrt{-x}} \cdot \sqrt{2-x}}{\cancel{\sqrt{-x}} \cdot \sqrt{1-x}} - \dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{1-x}} \right) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-x}} - \dfrac{\eta\mu x \sqrt{-x}}{\left(\sqrt{-x}\right)^2 \cdot \sqrt{1-x}} \right) =$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-x}} - \dfrac{\eta\mu x \sqrt{-x}}{-x \cdot \sqrt{1-x}} \right) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{\eta\mu x}{x} \cdot \dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{1-x}} \right) = \sqrt{2} + 1 \cdot 0 = \sqrt{2}$

γ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{\left(x^2 - 2x\right)'}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{\cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι $g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (2, +\infty)$ είναι $g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η g έχει τοπικά ελάχιστα τα $g(0) = g(2) = 0$.

δ) Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = g'(x) = \dfrac{x-1}{2\sqrt{x^2 - 2x}} < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και αντιστρέφεται.

$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} = y,\ y \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = y^2 + 1 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 = y^2 + 1 \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow -x + 1 = \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y^2 + 1}$

Είναι $x \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{y^2 + 1} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 1} \geq 1 \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow y^2 \geq 0$ ισχύει. Άρα $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y^2 + 1},\ y \geq 0$, οπότε $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x^2 + 1},\ x \geq 0$.

ε) Για να υπάρχει τέτοια εφαπτομένη πρέπει να υπάρχει $x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $g'(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=1 \Leftrightarrow x-1=\sqrt{x^2-2x}$ (1)

- Αν $x \in (-\infty,0)$ τότε η (1) είναι αδύνατη.

- Αν $x \in (2,+\infty)$, τότε η (1) γίνεται:

$(x-1)^2=\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}-\cancel{2x}+1=\cancel{x^2}-\cancel{2x}$ αδύνατη.

Άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_g που να είναι παράλληλη στην ευθεία y = x.

στ) Επειδή η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{-x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{\cancel{x}}=-1$ και

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)}{\sqrt{x^2-2x}-x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2-x^2}{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}-2x-\cancel{x^2}}{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}=1,$$ άρα η

$y=-x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f.

51.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=2(\ln x-x)(\ln x-x)'=2(\ln x-x)\left(\frac{1}{x}-1\right)=2(\ln x-x)\frac{1-x}{x}.$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $\ln x \le x-1$, όμως $x-1<x$, άρα $\ln x \le x-1<x \Rightarrow \ln x-x<0$.

Είναι $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow 2(\ln x-x)\dfrac{1-x}{x}\ge 0 \Leftrightarrow 1-x\le 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (1,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=(\ln 1-1)^2=1$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x - x\right) = -\infty - 0 = -\infty$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x - x\right)^2 \overset{\substack{\ln x - x = u \\ u\to-\infty}}{=} \lim\limits_{u\to-\infty} u^2 = +\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right)\right] = +\infty(0-1) = -\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x - x\right)^2 \overset{\substack{\ln x - x = u \\ u\to-\infty}}{=} \lim\limits_{u\to-\infty} u^2 = +\infty$

.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = [1,+\infty)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = [1,+\infty)$. Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A) = f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2) = [1,+\infty)$. Θεωρούμε έναν τυχαίο αριθμό στο εσωτερικό του $f(\Delta_1) = [1,+\infty)$, έστω το 5. Τότε υπάρχει x_1 στο εσωτερικό του Δ_1 τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 5$. Όμως το 5 βρίσκεται και στο εσωτερικό του $f(\Delta_2) = [1,+\infty)$,οπότε υπάρχει x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 5$.Είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[x_1,x_2]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.Όμως η f' έχει μοναδική ρίζα το 1, άρα $\xi = 1$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την x = 0, δηλαδή τον άξονα y΄y. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(\ln x - x\right)\dfrac{1-x}{x} = 2(-\infty)(-1) = +\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x} = -1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x - x\right) = -\infty$, οπότε η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

δ) Έστω $g(x) = x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και $h(x) = \ln x - x,\ x > 0$. Είναι $(g\circ h)(x) = f(x)$ γιατί: $A_{g\circ h} = \left\{x\in A_h / h(x)\in A_g\right\} = \left\{x\in(0,+\infty)/\left(\ln x - x\right)\in\mathbb{R}\right\} = (0,+\infty) = A_f$ και $(g\circ h)(x) = g\left(h(x)\right) = h^2(x) = \left(\ln x - x\right)^2 = f(x)$

ε) $f(\rho) = \rho^2 - 2 \Leftrightarrow f(\rho) - \rho^2 + 2 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - x^2 + 2,\ x\in[1,e]$. Η φ είναι συνεχής

στο $[1,e]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $\varphi(1)=f(1)-1+2=2>0$,
$\varphi(e)=f(e)-e^2+2=1-2e+\cancel{e^2}-\cancel{e^2}+2=3-2e<0$, δηλαδή $\varphi(1)\varphi(e)<0$,
οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε
$\varphi(\rho)=0\Leftrightarrow f(\rho)=\rho^2-2$.

52.α) Η f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία (ε) οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3\overset{\alpha\neq0}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^2-x}=3\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=3\Leftrightarrow\alpha=3.$$ (Αν $\alpha=0$

τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta x+\gamma}{x^2-x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta\cancel{x}}{\cancel{x^2}}=0\ \text{απορρίπτεται, αν}\ \beta\neq0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\gamma}{x^2}=0\ \text{απορρίπτεται, αν}\ \beta=0\ \text{και}\ \gamma\in\mathbb{R}\end{cases}$)

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=-1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+\beta x+\gamma}{x-1}-3x\right)=-1\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{3x^2}+\beta x+\gamma-\cancel{3x^2}+3x}{x-1}=-1\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\beta+3)x+\gamma}{x-1}=-1\overset{\beta\neq-3}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\beta+3+\dfrac{\gamma}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=-1\Leftrightarrow\beta+3=-1\Leftrightarrow\beta=-4.$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με παράγωγο

$$f'(x)=\left(\frac{3x^2-4x+\gamma}{x-1}\right)'=\frac{(6x-4)(x-1)-(3x^2-4x+\gamma)}{(x-1)^2}=$$

$$\frac{6x^2-6x-\cancel{4x}+4-3x^2+\cancel{4x}-\gamma}{(x-1)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{3x^2-6x+4-\gamma}{(x-1)^2}.$$

Επομένως είναι παραγωγίσιμη και στο $2\in\mathbb{R}$,το οποίο είναι θέση ακροτάτου της fοπότε ισχύει το θεώρημα Fermat δηλαδή $f'(2)=0\Leftrightarrow4-\gamma=0\Leftrightarrow\gamma=4$.

Άρα $f(x)=\dfrac{3x^2-4x+4}{x-1}$.

γ)

$$f'(x)=\frac{3x^2-6x}{(x-1)^2}=\frac{3(x^2-2x)}{(x-1)^2}.$$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
f′		+	0	−	‖ −	0	+
f		↗	TM	↘	‖ ↘	TE	↗

Έχουμε

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}}_{>0}\geq 0 \Leftrightarrow x^2-2x\geq 0 \Leftrightarrow (x\leq 0)$ ή $(x\geq 2)$.

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{1\}$, $f'(x)>0$ στα διαστήματα $(-\infty,0),(2,+\infty)$, $f'(x)<0$ στα διαστήματα $(0,1),(1,2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0],[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0,1),(1,2]$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(0)=-4$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2)=8$.

δ) Έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-4x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}3x=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-4x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}3x=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{3x^2-4x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(3x^2-4x+4)\frac{1}{x-1}=3\cdot(-\infty)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x^2-4x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}(3x^2-4x+4)\frac{1}{x-1}=3\cdot(+\infty)=+\infty$.

Έστω $A_1=(-\infty,0),A_2=[0,1),A_3=(1,2]$ και $A_4=(2,+\infty)$.

Λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε :

$f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to0^-} f(x)\right)=(-\infty,f(0))=(-\infty,-4)$,

$f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to1^-} f(x),f(0)\right]=(-\infty,-4]$,

$f(A_3)=\left[f(2),\lim\limits_{x\to1^+} f(x)\right)=[8,+\infty)$, $f(A_4)=\left(\lim\limits_{x\to2^+} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(8,+\infty)$.

Τότε : $f(A_f)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)\cup f(A_4)=(-\infty,-4]\cup[8,+\infty)$.

53.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με παράγωγο

$f'(x)=e^x\cdot(\ln x+2x)+e^x\cdot\left(\frac{1}{x}+2\right)\Leftrightarrow f'(x)=e^x\cdot\left(\ln x+2x+\frac{1}{x}+2\right)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $l(x)=\ln x+2x+\frac{1}{x}+2, x>0$. Η l είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $l'(x)=\frac{1}{x}+2-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow l'(x)=\frac{2x^2+x-1}{x^2}$. Έχουμε

$l'(x)\geq 0\Leftrightarrow \frac{2x^2+x-1}{\underset{>0}{x^2}}\geq 0\Leftrightarrow 2x^2+x-1\geq 0\Leftrightarrow (2x-1)\underbrace{(x+1)}_{>0}\geq 0\Leftrightarrow$

$2x-1\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2}$.

Η l είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, $l'(x)>0$ στο $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, $l'(x)<0$ στο $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο $\frac{1}{2}$, το

$l\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+1+2+2=-\ln 2+5=\ln\frac{e^5}{2}>\ln 1>0$. Επομένως $l(x)\geq l\left(\frac{1}{2}\right)>0$.

Όμως $f'(x)=e^x\cdot l(x)>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) i) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της οπότε έχει σύνολο τιμών το $f((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[e^x(\ln x+2x)\right]=1(-\infty+0)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x(\ln x+2x)\right]=+\infty(+\infty+\infty)=+\infty$.

ii) Έστω $(\delta): y=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$ τυχαία οριζόντια ευθεία.

Το $\alpha\in f((0,+\infty))$ οπότε υπάρχει μοναδικός ,λόγω της μονοτονίας της f, $\eta>0$ τέτοιος ώστε $f(\eta)=\alpha$. Άρα η ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει οποιαδήποτε οριζόντια ευθεία σε ένα ακριβώς σημείο αφού η (δ) είναι τυχαία ευθεία.

γ) Έστω $B(x_0,f(x_0)), x_0>0$ το σημείο επαφής της (ε) με την γραφική παράσταση της f. Η (ε) έχει εξίσωση:

$$y-e^{x_0}\cdot(\ln x_0+2x_0)=e^{x_0}\cdot\left(\ln x_0+2x_0+\frac{1}{x_0}+2\right)(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$y=e^{x_0}\left(\ln x_0+2x_0+\frac{1}{x_0}+2\right)x-x_0e^{x_0}\left(\ln x_0+2x_0+\frac{1}{x_0}+2\right)+e^{x_0}(\ln x_0+2x_0)\Leftrightarrow$$

$$y=e^{x_0}\left(\ln x_0+2x_0+\frac{1}{x_0}+2\right)x-e^{x_0}\left(x_0\ln x_0+2x_0^2+1+\cancel{2x_0}-\ln x_0-\cancel{2x_0}\right)\Leftrightarrow$$

$$y=e^{x_0}\left(\ln x_0+2x_0+\frac{1}{x_0}+2\right)x-e^{x_0}\left(x_0\ln x_0+2x_0^2+1-\ln x_0\right).$$

Το σημείο Α ανήκει στην (ε) οπότε: $-3e=-e^{x_0}\left(x_0\ln x_0+2x_0^2+1-\ln x_0\right)\Leftrightarrow$

$e^{x_0}\left(x_0\ln x_0+2x_0^2+1-\ln x_0\right)-3e=0$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=e^x\left(x\ln x+2x^2+1-\ln x\right)-3e,\ x>\frac{1}{2}$

Η k είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$k'(x)=e^x\left(x\ln x+2x^2+1-\ln x\right)+e^x\left(\ln x+1+4x-\frac{1}{x}\right)$$

$$k'(x)=e^x\left(x\ln x+2x^2+1-\cancel{\ln x}+\cancel{\ln x}+1+4x-\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow$$

$$k'(x)=e^x\left(x\ln x+2x^2+2+4x-\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow$$

$$k'(x)=e^x\left(x(\ln x+2x+2)+1+2x-\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow$$

$$k'(x)=e^x\left(x\left(\ln x+2x+\frac{1}{x}+2\right)+\frac{2x^2+x-1}{x}\right)\Leftrightarrow$$

$$k'(x)=e^x\left(\underbrace{xf'(x)+\frac{l'(x)}{x}}_{>0\ \text{από α)ερ}}\right)>0$$ άρα η k είναι γνησίως αύξουσα.

Από την εξίσωση (1) έχουμε ισοδύναμα : $k(x_0)=0\Leftrightarrow k(x_0)=k(1)\Leftrightarrow x_0=1$

και $(\varepsilon):y=5e\cdot x-3e$.

δ) Από το 2ο ερώτημα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$ και δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\cdot(\ln x+2x)}{x}\overset{\text{DLH}}{\underset{x\to+\infty}{=}}\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\cdot(\ln x+2x)+e^x\cdot\left(\frac{1}{x}+2\right)\right]=$$

$+\infty\cdot(+\infty+\infty)++\infty\cdot(0+2)=+\infty$ άρα δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

54.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $f'(x)=\frac{\ln x(x+2)}{x}$.

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{\ln x(x+2)}{x}\geq 0\Leftrightarrow\ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι

$f'(x)<0$,άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι

$f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(1)=0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln^2 x + x\ln x - x + 1\right) = +\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln^2 x = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x-1) = -1$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ln^2 x + x(\ln x - 1) + 1\right] = +\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln^2 x = +\infty$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x(\ln x - 1) - 1\right] = +\infty$.

Για το διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$, έχουμε: $f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = [0,+\infty)$. Για το διάστημα $\Delta_2 = [1,+\infty)$, έχουμε: $f(\Delta_2) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = [0,+\infty)$. Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι: $f(A) = f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2) = [0,+\infty)$. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f(x) > f(1) = 0$ και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f(x) > f(1) = 0$, δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$. Επειδή $f(1) = 0$, η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, η $x = 0$ δηλαδή ο άξονας y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^2 x + x(\ln x - 1) + 1}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{2\ln x}{x} + \ln x - 1 + 1}{1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2\ln x}{x} + \ln x\right) = +\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, οπότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη. Επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

δ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln^2 x + x(\ln x - 1) + 1}{(x-1)^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{2\ln x}{x} + \ln x - 1 + 1}{2(x-1)} =$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x(x+2)}{2x(x-1)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{x+2}{x} + \ln x}{2(x-1) + 2x} = \dfrac{3}{2}$.

ε) Είναι $f''(x)=\dfrac{x+2-2\ln x}{x^2}$. Έστω $h(x)=x+2-2\ln x,\ x>0$. Είναι $h'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$. Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $h'(x)<0\Rightarrow h\searrow(0,2]$ και για κάθε $x>2$ είναι $h'(x)>0\Rightarrow h\nearrow[2,+\infty)$. Η h έχει ελάχιστο το $h(2)=4-2\ln 2=2(2-\ln 2)>0$, άρα $h(x)\geq h(2)>0\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow f\cup(0,+\infty)$

55.α) $f(x)=x\left(1+e^{-2x}\right)$, $f'(x)=\dfrac{e^{2x}-2x+1}{e^{2x}}$ και $f''(x)=4(x-1)e^{-2x}$.

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $e^{2x}-2x+1$. Έστω $g(x)=e^{2x}-2x+1,\ x\in\mathbb{R}$.Είναι $g'(x)=2e^{2x}-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$.Για κάθε $x<0$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\searrow(-\infty,0]$, οπότε $g(x)>g(0)=0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,0]$. Για κάθε $x>0$ είναι $g(x)>g(0)=0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$. $f''(x)\geq 0\Leftrightarrow 4(x-1)e^{-2x}\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$. Για κάθε $x<1$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow(-\infty,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow[1,+\infty)$.

β) Επειδή $f\nearrow\mathbb{R}$, δεν έχει ακρότατα. Σημείο καμπής το $\left(1,f(1)\right)\equiv\left(1,1+\dfrac{1}{e^2}\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-2x}\right)=1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{2x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2e^{2x}}=0$, άρα η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+e^{-2x}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$, η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Είναι

$$f(x)-x=\frac{x\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}}-x=\frac{x\left(e^{2x}+1\right)-xe^{2x}}{e^{2x}}=\frac{x}{e^{2x}}$$

Αν $x>0$ τότε $f(x)>x$ ενώ αν $x<0$ τότε $f(x)<x$.

δ) $f(x)=f'(x)\Leftrightarrow f(x)-f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}}=\dfrac{e^{2x}-2x+1}{e^{2x}}\Leftrightarrow$

$xe^{2x}-e^{2x}+3x-1=0$. Έστω $a(x)=e^{2x}(x-1)+3x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $a'(x)=2e^{2x}(x-1)+e^{2x}+3=e^{2x}(2x-1)+3,\ \ a''(x)=4xe^{2x}$.

Για κάθε $x<0$ είναι $a''(x)<0\Rightarrow a'\searrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $a''(x)>0\Rightarrow a'\nearrow[0,+\infty)$. Η a' έχει ελάχιστο το $a'(0)=4>0$ άρα $a'(x)\geq a'(0)>0\Rightarrow a\nearrow\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}a(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{2x}(x-1)+3x-1\right]=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}(x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{e^{-2x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-2e^{-2x}}=0$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}a(x)=-\infty$. Η a έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ άρα η εξίσωση $a(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

56.α) $f'(x)+f(x)=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow$

$e^xf'(x)+e^xf(x)=e^x\sqrt{x^2+1}+e^x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow\left(e^xf(x)\right)'=\left(e^x\sqrt{x^2+1}\right)'\Leftrightarrow$

$e^xf(x)=e^x\sqrt{x^2+1}+c\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{c}{e^x},x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(1)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}=\sqrt{2}+\dfrac{c}{e}\Leftrightarrow c=0$. Επομένως τελικά

$f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow x=0$. Για $x>0\overset{\sqrt{x^2+1}>0}{\Rightarrow}f'(x)>0$ και για $x<0\overset{\sqrt{x^2+1}>0}{\Rightarrow}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}<0\Leftrightarrow f'(x)<0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν τότε $f\searrow(-\infty,0]$ και $f\nearrow[0,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο μηδέν το $f(0)=1$.

γ) $x^2+1>x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>|x| \Leftrightarrow \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}<1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|<1 \Leftrightarrow |f'(x)|<1$.

Αν $x_1=x_2$ τότε ισχύει ως ισότητα η σχέση που θέλουμε να δείξουμε.

Αν $x_1<x_2$ από ΘΜΤ για την f στο $[x_1,x_2]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$:

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Rightarrow |f'(\xi)|=\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|<1 \Leftrightarrow$$

$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1| \Leftrightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$. Ομοίως αν $x_1>x_2$.

δ) $\dfrac{f^2(x)}{x-2}+\dfrac{f^4(x)-2x^2}{x-1}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{x-2}+\dfrac{x^4+2x^2+1-2x^2}{x-1}=0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{x^2+1}{x-2}+\dfrac{x^4+1}{x-1}=0 \overset{x\neq 1,2}{\Leftrightarrow} (x-1)(x^2+1)+(x-2)(x^4+1)=0$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=(x-1)(x^2+1)+(x-2)(x^4+1)$, $x\in[-2,2]$. Η g είναι συνεχής και $g(1)=-2<0$, $g(2)=5>0$ άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$.

ε) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=1$ και

επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$.

Άρα έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1$

και επίσης

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$

Άρα έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=-x$.

57.α) Είναι $h'(x)=5x^4f(x)+x^5f'(x)=5x^4f(x)+x^4xf'(x)=$

$5x^4f(x)-5x^4f(x)=0$ άρα $h'(x)=0\Leftrightarrow h(x)=\begin{cases}c_1,\ x<0\\ c_2,\ x>0\end{cases}$.

β) Αφού η f είναι άρτια και $f(1)=3$ τότε $f(-1)=f(1)=3$ άρα

$h(1)=1^5\cdot 3=3=c_2$, $h(-1)=(-1)^5\cdot 3=-3=c_1$. Άρα $h(x)=\begin{cases}-3,\ x<0\\ 3,\ x>0\end{cases}$ οπότε

για $x<0$: $x^5f(x)=-3\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{-3}{x^5}$ ενώ για $x>0$ είναι

$x^5f(x)=3\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{x^5}$. Οπότε $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-3}{x^5},\ x<0\\ \dfrac{3}{x^5},\ x>0\end{cases}$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια

ασύμπτωτη C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3}{x^5}=+\infty\Rightarrow x=0$

κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

58.α) Επειδή $y=4x+5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(4x+5)\right]=0$. Έστω $h(x)=f(x)-(4x+5)$ (1) με $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$

τότε αφού $x+1\to+\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x+1)=0$. Στην (1) όπου x το

$x+1$ προκύπτει $h(x+1)=f(x+1)-\left[4(x+1)+5\right]$ (2). Αφαιρώντας $(2)-(1)$

έχω $h(x+1)-h(x)=f(x+1)-f(x)-\left[4x+4+5\right]+4(x+5)$

$h(x+1)-h(x)=f(x+1)-f(x)-4\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=h(x+1)-h(x)+4$

συνεπώς και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=\lim\left[h(x+1)-h(x)+4\right]=4$.

β) ΘΜΤ στο $[x-1,\ x]$: $\exists\,\xi_1\in(x-1,\ x)$: $f'(\xi_1)=f(x)-f(x-1)$

Όμοια ΘΜΤ στο $[x,\ x+1]$: $\exists\,\xi_2\in(x,\ x+1)$: $f'(\xi_2)=f(x+1)-f(x)$

$x-1<\xi_1<x<\xi_2<x+1\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(\xi_1)<f'(x)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow$

$f(x)-f(-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x)$

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=4$, θέτοντας $x=u-1$, προκύπτει

$\lim\limits_{u\to+\infty}\left[f(u-1)-f(u)\right]=4$ οπότε από Κ.Π, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=4$.

59.α) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+3\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x+1\right)=0$. Το κλάσμα $\dfrac{g'(x)}{f'(x)-2}$ ορίζεται σε διάστημα της μορφής $[\alpha,+\infty)$ αφού $f'(x)\neq 2$ οπότε από το θεώρημα DLH προκύπτει:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+3}{f(x)-2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)-2}{f'(x)-2}=1.$$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+3\right)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-3\Rightarrow y=-3$ οριζόντια στο $+\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=0$ άρα $y=2x-1$ πλάγια της C_f στο $+\infty$.

γ) Έστω ότι έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$. Εφαρμόζουμε Rolle για τη g στο $[\rho_1,\rho_2]$ οπότε $\exists\,\xi\in(\rho_1,\rho_2): g'(\xi)=0$. Άρα $f'(\xi)-g'(\xi)=2\Leftrightarrow f'(\xi)=2$ άτοπο.

δ) $f'(x)-g'(x)=2\Leftrightarrow\left(f(x)-g(x)\right)'=(2x)'$ άρα

$f(x)-g(x)=2x+c\Leftrightarrow f(x)-2x=g(x)+c\Leftrightarrow f(x)-2x+1=g(x)+c+1\Leftrightarrow$

$f(x)-2x+1=g(x)+3+c-2$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(g(x)+3\right)+c-2\right]$$

δηλαδή $0=0+c-2\Leftrightarrow c=2$. Άρα $f(x)-g(x)=2x+2$.

60.α) $f^2(x)-x=x^\nu-2\Leftrightarrow f^2(x)=x^\nu+x-2$.

$f(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)=0\Leftrightarrow x^\nu+x-2=0$.

Έστω η συνάρτηση $\kappa(x)=x^\nu+x-2$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με παράγωγο $\kappa'(x)=\nu x^{\nu-1}+1>0\Rightarrow\kappa\nearrow\mathbb{R}$ γιατί ν περιττός θετικός ακέραιος αριθμός.

Είναι $\kappa(1)=0$ άρα το 1 είναι μοναδική ρίζα της κ και της f.

Για κάθε $x<1\overset{\kappa\nearrow}{\Leftrightarrow}\kappa(x)<\kappa(1)=0$ και για κάθε $x>1\overset{\kappa\nearrow}{\Leftrightarrow}\kappa(x)>\kappa(1)=0$.

Είναι $f^2(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq\alpha$ άρα για $x<1$ δεν ορίζεται η $f^2(x)=x^\nu+x-2$.

Άρα πρέπει $\alpha\geq 1$ για να έχει νόημα η $f^2(x)=x^\nu+x-2$ ώστε να ορίζεται σε υποσύνολο του διαστήματος $[1,+\infty)$.

Αν $\alpha=1$ τότε η f διατηρεί πρόσημο στο $(1,+\infty)$ ως συνεχής αφού δεν έχει

ρίζα. Άρα θα είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$ ή $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$.

Αν $\alpha>1$ τότε είναι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,+\infty)$ και η f ως συνεχής διατηρεί πρόσημο άρα θα είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,+\infty)$ ή $f(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,+\infty)$.

1η περίπτωση: Αν $f(x)\geq 0$ ή $f(x)>0$ στο $[\alpha,+\infty)$:

$$|f(x)|=\sqrt{x^{\nu}+x-2}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^{\nu}+x-2}\ ,x\geq\alpha\ \text{με}\ \alpha\geq 1\ .$$

2η περίπτωση: Αν $f(x)\leq 0$ ή $f(x)<0$ στο $[\alpha,+\infty)$:

$$|f(x)|=\sqrt{x^{\nu}+x-2}\Leftrightarrow f(x)=-\sqrt{x^{\nu}+x-2}\ ,x\geq\alpha\ \text{με}\ \alpha\geq 1\ .$$

β) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(\alpha,+\infty)$ ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{\nu x^{\nu-1}+1}{2\sqrt{x^{\nu}+x-2}}>0$ για κάθε $x\in(\alpha,+\infty)$ γιατί ο ν είναι περιττός θετικός ακέραιος αριθμός, άρα ο $\nu-1$ άρτιος. Είναι $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha^+}\sqrt{x^{\nu}+x-2}=\sqrt{\alpha^{\nu}+\alpha-2}=f(\alpha)$ άρα η f είναι συνεχής στο $[\alpha,+\infty)$ και $f\nearrow[\alpha,+\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=\alpha$ το $f(\alpha)=\sqrt{\alpha^{\nu}+\alpha-2}$.

γ) Η ελάχιστη τιμή του ελάχιστου της f είναι το ελάχιστο της υπόρριζης ποσότητας $\alpha^{\nu}+\alpha-2$ με $\alpha\geq 1$. Έστω λοιπόν η συνάρτηση $\varphi(\alpha)=\alpha^{\nu}+\alpha-2$, $\alpha\geq 1$. Από το α) ερώτημα η $\varphi\nearrow[1,+\infty)$ και $\lim\limits_{\alpha\to 1^+}\varphi(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 1^+}(\alpha^{\nu}+\alpha-2)=0=\varphi(1)$, δηλαδή η φ συνεχής στο 1 άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $\alpha=1$ το $\varphi(1)=0$. Άρα η ελάχιστη τιμή του ελαχίστου της f είναι για $\alpha=1$ το $f(1)=0$.

δ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$ άρα, είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται. Η f έχει σύνολο τιμών το $[f(\alpha),+\infty)$ αφού η f συνεχής και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Άρα η αντίστροφη f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $[f(\alpha),+\infty)$.

Για να ορίζεται η τιμή $f^{-1}(-1)$ πρέπει $-1\geq f(\alpha)$ όμως από το προηγούμενο ερώτημα η ελάχιστη τιμή του $f(\alpha)$ είναι το μηδέν άρα $f(\alpha)>-1$ και δεν ορίζεται η τιμή $f^{-1}(-1)$.

ε) Η συνάρτηση g είναι πολυωνυμική βαθμού ν γιατί

$g(x)=f^2(x)=x^{\nu}+x-2$, $x\geq\alpha$.

Αν ο $\nu=1$ τότε $g(x)=2x-2$ και έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2x-2$. Αν $\nu>1$ τότε δεν έχει ασύμπτωτες αφού είναι πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμό και άνω. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^{\nu}+x-2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(x^{\nu-2}+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}{x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x^{\nu-2}+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^{\nu-2}+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\begin{cases}+\infty\ ,\ \nu>1\\ 0\ \ ,\ \nu=1\end{cases}$$

Επομένως αν $\nu>1$ η f δεν έχει ασύμπτωτες.

Αν $\nu=1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^{\nu}+x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x-2}=+\infty$ και δεν έχει πάλι ασύμπτωτες.

61.α) Είναι $f(x)=x^{1-x}=e^{\ln x^{1-x}}=e^{(1-x)\ln x}$, $x>0$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο :

$$f'(x)=e^{(1-x)\ln x}\left(-\ln x+\frac{1-x}{x}\right)=f(x)\frac{1-x-x\ln x}{x}\ ,\ x>0.$$

Το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή.

Έστω η συνάρτηση $g(x)=1-x-x\ln x$, $x>0$ με $g(1)=0$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$g'(x)=-1-\ln x-1=-\ln x-2$.

Είναι $g'(x)\geq 0\Leftrightarrow -\ln x-2\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq -2\overset{x>0}{\Rightarrow} 0<x\leq\frac{1}{e^2}<1$

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$ είναι $g'(x)>0$ και για κάθε $x\in\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ είναι $g'(x)<0$. Επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{1}{e^2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$. Η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\left(0,\frac{1}{e^2}\right]$ άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$g\left(\left(0,\frac{1}{e^2}\right]\right)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}g(x),g\left(\frac{1}{e^2}\right)\right]=\left(0,\frac{1}{e^2}+1\right]$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} \overset{\text{DLH}}{\underset{\infty}{\overset{\infty}{=}}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x^{\not 2}}{\not x} = 0$.

Άρα για $0 < x \le \dfrac{1}{e^2} \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$.

Για $\dfrac{1}{e^2} < x < 1 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ και για

$x > 1 \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 1$ το $f(1) = 1$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{(1-x)\ln x} = 0$ άρα η ευθεία $y = 0$ δηλαδή ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) Θα εξετάσουμε αν έχει λύση η εξίσωση $f(x) = 0$.

$f\nearrow(0,1]$ και συνεχής άρα $f((0,1]) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (0,1]$

$f\searrow[1,+\infty)$ και συνεχής άρα $f([1,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), f(1)\right] = (0,1]$.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A) = f((0,1]) \cup f([1,+\infty)) = (0,1]$ και το μηδέν δεν περιέχεται σε αυτό άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη, επομένως δεν έχει κοινά σημεία με την ασύμπτωτή της.

δ) $2(\eta\mu^2 x)^{\sigma\upsilon\nu^2 x} + (\sigma\upsilon\nu^2 x)^{\eta\mu^2 x} = 3 \Leftrightarrow 2(\eta\mu^2 x)^{1-\eta\mu^2 x} + (\sigma\upsilon\nu^2 x)^{1-\sigma\upsilon\nu^2 x} = 3 \Leftrightarrow$

$2f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = 3f(1)$.

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 το $f(1) = 1$, άρα $f(x) \le 1$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 1$.

Όπου x το $\eta\mu^2 x$ είναι $f(\eta\mu^2 x) \le 1 \Leftrightarrow 2f(\eta\mu^2 x) \le 2$ για κάθε

$\eta\mu^2 x > 0 \Leftrightarrow x \ne \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\eta\mu^2 x = 1$.

Όπου x το $\sigma\upsilon\nu^2 x$ είναι $f(\sigma\upsilon\nu^2 x) \le 1$ για κάθε $\sigma\upsilon\nu^2 x > 0 \Leftrightarrow x \ne \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1$.

Άρα η (1) ισχύει μόνον αν $\eta\mu^2 x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ που είναι αδύνατο γιατί τότε $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$.

ε) $2(x+1)^{-x} < x^{1-x} + (x+2)^{-(1+x)} \Leftrightarrow 2(x+1)^{1-x-1} < x^{1-x} + (x+2)^{1-x-2} \Leftrightarrow$
$2f(x+1) < f(x) + f(x+2)$.

Για την f εφαρμόζεται το ΘΜΤ σε καθένα από τα διαστήματα $[x, x+1]$ και $[x+1, x+2]$ με $x \geq 1$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x, x+1)$ και $\xi_2 \in (x+1, x+2)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$ και

$f'(\xi_2) = \dfrac{f(x+2)-f(x+1)}{x+2-x-1} = f(x+2) - f(x+1)$

Αφού η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$ τότε $f' \nearrow [2, +\infty)$.

$1 \leq x < \xi_1 < x+1 < \xi_2 < x+2 \overset{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow$
$f(x+1) - f(x) < f(x+2) - f(x+1) \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2f(x+1) < f(x) + f(x+2)$

62.α) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ τότε:

Έστω ότι η αντίστροφή f^{-1} με πεδίο ορισμού το $f((0, +\infty)) = (0, +\infty)$ δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ τότε επειδή είναι γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως φθίνουσα. Οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι $f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2) \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(f^{-1}(x_1)) > f(f^{-1}(x_2)) \Rightarrow x_1 > x_2$ Άτοπο. Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Ομοίως αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

β) $f(x) - \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{x^2} - f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) + f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ για κάθε $x \in D_f \cap D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) + f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο:

$g'(x) = -\dfrac{2}{x^3} + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} < 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2 \overset{f,\, f^{-1}\nearrow}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) & (1) \\ f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_1) & (2) \end{cases} \overset{(1)+(2)}{\Rightarrow}$

$g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g\nearrow(0,+\infty)$ το οποίο είναι άτοπο άρα επειδή είναι γνησίως μονότονες και δεν είναι γνησίως αύξουσες τότε θα είναι γνησίως φθίνουσες.

γ) i) Είναι $x \in \left(\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$ άρα

$$\frac{1}{\pi} < x < \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{1}{x} < \pi \Rightarrow \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \overset{x>0}{\Rightarrow} x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) > 0$$

Άρα ορίζεται το $A = f\left(x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right) + f^{-1}\left(x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right) = g\left(x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

ii) Είναι $\frac{1}{x^2\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)} + \frac{\sqrt{x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}}{x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)} < 2 \Leftrightarrow g\left(x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right) < g(1) \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) > 1$

αδύνατη γιατί: Ισχύει η σχέση $|\eta\mu x| \le |x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 0$. Για $x > 0$ είναι $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$.

Σύμφωνα με την παραπάνω βασική ανισότητα αν βάλουμε για x το $\frac{1}{x} > 0$

είναι: $-\frac{1}{x} < \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \overset{x>0}{\Rightarrow} x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) < 1$ για κάθε $x > 0$.

δ) i) Αφού η ευθεία $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$.

Ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$ άρα έχουμε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(f(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ **(3)**

Επίσης έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(f(x)) \overset{\substack{f(x)=u,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\alpha \\ u\to\alpha}}{=} \lim\limits_{u\to\alpha} f^{-1}(u)$ δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(f(x)) = \lim_{x\to\alpha} f^{-1}(x)$$

Άρα από την (3) έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to\alpha} f^{-1}(x) = +\infty$ άρα η ευθεία $x = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ και η συγκεκριμένη ευθεία είναι συμμετρική της $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ ως προς την ευθεία $y = x$.

ii) Επειδή η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχει σύνολο τιμών το

$f((0,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right)$ και $f((0,+\infty)) = (0,+\infty)$ άρα

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$, επομένως $\alpha = 0$.

63.α) Για $x \neq 0$ είναι

$$\frac{5\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} - \frac{3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{2}}} < \frac{f'(x)}{x^4} < \frac{5\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} + \frac{3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow 5 - \frac{3}{x^2} < \frac{f'(x)}{x^4} < 5 + \frac{3}{x^2} \Rightarrow$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5-\frac{3}{x^2}\right)=5$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5+\frac{3}{x^2}\right)=5$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{x^4}=5$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-\frac{3}{x^2}\right)=5$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\frac{3}{x^2}\right)=5$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x^4}=5$.

β) Έστω $g(x)=xf'(x)+\sigma\upsilon\nu x$. Είναι

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(xf'(x)+\sigma\upsilon\nu x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[x^5\left(\frac{f'(x)}{x^4}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^5}\right)\right] = -\infty(5+0) = -\infty$$

γιατί $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^5}\right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|x^5|} \le \frac{1}{|x^5|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x^5|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^5} \le \frac{1}{|x^5|}$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{|x^5|}=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x^5|}\right)$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^5}=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf'(x)+\sigma\upsilon\nu x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^5\left(\frac{f'(x)}{x^4}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^5}\right)\right] = +\infty$ γιατί

όπως και πριν είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^5}=0$

Επειδή η g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, έχει σύνολο τιμών το $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της g, η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow xf'(x)+\sigma\upsilon\nu x=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

γ) i. Επειδή η f' είναι συνεχής στο $x_0=0$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)$. Για κάθε $x\neq0$ είναι $5x^4-3x^2<f'(x)<5x^4+3x^2 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to0}\left(5x^4-3x^2\right) \le \lim_{x\to0} f'(x) \le \lim_{x\to0}\left(5x^4+3x^2\right) \Leftrightarrow 0 \le f'(0) \le 0 \Leftrightarrow f'(0)=0$$

ii. Για $x<0$ είναι $\frac{5x^4}{x}-\frac{3x^2}{x} > \frac{f'(x)}{x} > \frac{5x^4}{x}+\frac{3x^2}{x} \Leftrightarrow$

$5x^3-3x > \frac{f'(x)}{x} > 5x^3+3x$. Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}\left(5x^3-3x\right)=0$, $\lim\limits_{x\to0^-}\left(5x^3+3x\right)=0$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f'(x)}{x}=0$ (1).

Για $x>0$ είναι $\frac{5x^4}{x}-\frac{3x^2}{x}<\frac{f'(x)}{x}<\frac{5x^4}{x}+\frac{3x^2}{x}\Leftrightarrow 5x^3-3x<\frac{f'(x)}{x}<5x^3+3x$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(5x^3-3x\right)=0,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(5x^3+3x\right)=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{x}=0$ (2). Από (1), (2) προκύπτει ότι

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=0\Leftrightarrow f''(0)=0$

iii. Έστω $h(x)=x^5-x^3-f(x),\ x\in\mathbb{R}$. Είναι

$h'(x)=5x^4-3x^2-f'(x)<0\Rightarrow h\searrow\mathbb{R}$.

Για κάθε $x>0$ είναι $h(x)<h(0)=0\Leftrightarrow x^5-x^3-f(x)<0\Leftrightarrow x^5-x^3<f(x)$

Έστω $t(x)=f(x)-x^5-x^3,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι

$t'(x)=f'(x)-5x^4-3x^2<0\Rightarrow t\searrow\mathbb{R}$.

Για κάθε $x>0$ είναι $t(x)<t(0)=0\Leftrightarrow f(x)-x^5-x^3<0\Leftrightarrow f(x)<x^5+x^3$.

Επομένως $x^5-x^3<f(x)<x^5+x^3$ για κάθε $x>0$.

iv. Είναι $x^5-x^3<f(x)<x^5+x^3$ για κάθε $x>0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5-x^3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^5=+\infty$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, οπότε η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Για κάθε $x>0$ είναι $x^5-x^3<f(x)<x^5+x^3\Leftrightarrow\frac{x^5}{x}-\frac{x^3}{x}<\frac{f(x)}{x}<\frac{x^5}{x}+\frac{x^3}{x}\Leftrightarrow$

$x^4-x^2<f(x)<x^4+x^2$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4=+\infty$, άρα και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, οπότε η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

64.α) Είναι $f'(x)\left(f(x)+1\right)=e^{-f(x)}>0$ άρα τα $f'(x)$ και $f(x)+1$ είναι ομόσημοι. Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$ είναι

$f(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)+1\geq 1>0$, οπότε και $f'(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

β) $f'(x)f(x)+f'(x)=e^{-f(x)}\Leftrightarrow f(x)f'(x)e^{f(x)}+f'(x)e^{f(x)}=1\Leftrightarrow$

$\left(f(x)e^{f(x)}\right)'=(x)'\Leftrightarrow f(x)e^{f(x)}=x+c,\ c\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι

$f(0)e^{f(0)}=c\Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)e^{f(x)}=x\Leftrightarrow f(x)=xe^{-f(x)},\ x\geq 0$.

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y,\ y\in[0,+\infty)$, τότε $ye^y=x$ άρα $f^{-1}(y)=ye^y,\ y\in[0,+\infty)$ και $f^{-1}(x)=xe^x,\ x\geq 0$.

δ) Είναι $f'(x)=\dfrac{e^{-f(x)}}{f(x)+1}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f''(x)=\frac{\left(e^{-f(x)}\right)'\left(f(x)+1\right)-e^{-f(x)}f'(x)}{\left(f(x)+1\right)^2}=\frac{-e^{-f(x)}f'(x)\left(f(x)+1\right)-e^{-f(x)}f'(x)}{\left(f(x)+1\right)^2}$$

Επειδή $e^{-f(x)}>0,\ f(x)+1>0,\ f'(x)>0$, είναι $f''(x)<0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

ε) $f^{-1}(x)\geq 2\alpha ex-2\alpha e+e\Leftrightarrow xe^x-2\alpha ex+2\alpha e-e\geq 0$ (1)

Έστω $h(x)=xe^x-2\alpha ex+2\alpha e-e,\ x\geq 0$, τότε η (1) γίνεται $h(x)\geq h(1)$, άρα η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $h'(x)=e^x+xe^x-2\alpha e$ και το $x=1$ βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της g, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι:
$h'(1)=0\Leftrightarrow e+e-2\alpha e=0\Leftrightarrow\alpha=1$.

στ) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta=[0,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[0,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$, όμως η f έχει σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-f(x)}}{f(x)+1}\overset{f(x)=u}{\underset{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{e^{-u}}{u+1}=$$

$\lim\limits_{u\to+\infty}\left(e^{-u}\dfrac{1}{u+1}\right)=0$, οπότε η C_g έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=0$ δηλαδή τον άξονα x΄x.

$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f'(x)}{1}=f'(0)=1$ γιατί η αρχική σχέση για $x=0$ γίνεται: $f'(0)\left(f(0)+1\right)=e^{-f(0)}\Leftrightarrow f'(0)=1$, άρα η C_g δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Τέλος επειδή η C_g έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

ζ) Αρχικά θα εξετάσουμε αν η ευθεία $y=\dfrac{x+e}{2e}=\dfrac{1}{2e}x+\dfrac{1}{2}$ είναι εφαπτομένη της

C_f . Είναι $f'(x_0)=\frac{1}{2e}\Rightarrow\frac{1}{2e}\left(f(x_0)+1\right)=e^{-f(x_0)}\Leftrightarrow 2e^{1-f(x_0)}-f(x_0)-1=0$ (3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=2e^{1-x}-x-1,\ x\geq 0$.

Είναι $\varphi'(x)=-2e^{1-x}-1<0\Rightarrow\varphi\searrow[0,+\infty)$. Η (3) γίνεται:

$\varphi(f(x_0))=\varphi(1)\Leftrightarrow f(x_0)=1\Leftrightarrow x_0=f^{-1}(1)=e$

Η εφαπτομένη της A_f στο $x_0=e$ είναι η ευθεία:

$$y-f(e)=f'(e)(x-e)\Leftrightarrow y-1=\frac{1}{2e}(x-e)\Leftrightarrow y=\frac{x-e}{2e}+1=\frac{x+e}{2e}$$

Επειδή η f είναι κοίλη, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\leq\frac{x+e}{2e}$ για κάθε $x\geq 0$.

65.α) $e^{f(x)}\left(e^{f(x)}+2\eta\mu x\right)+1=e^{2x}+\sigma\upsilon\nu^2x\Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}\right)^2+2\eta\mu x e^{f(x)}+1-\sigma\upsilon\nu^2x=e^{2x}\Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}\right)^2+2\eta\mu x e^{f(x)}+\eta\mu^2x=e^{2x}\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}+\eta\mu x\right)^2=\left(e^x\right)^2$ (1).

Είναι $\left(e^x\right)^2>0$ άρα $h(x)=e^{f(x)}+\eta\mu x\neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $h(\pi)=e^{f(\pi)}+\eta\mu\pi=e^{\pi}>0$, είναι $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται: $e^{f(x)}+\eta\mu x=e^x\Leftrightarrow e^{f(x)}=e^x-\eta\mu x$ (2).

Για κάθε $x>0$ είναι $e^x>x+1>x$ και $|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x$, άρα $e^x>x>\eta\mu x\Rightarrow e^x-\eta\mu x>0$ οπότε η (2) γίνεται $f(x)=\ln\left(e^x-\eta\mu x\right)$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=\frac{e^x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x-\eta\mu x}$.

Επειδή $e^x>x+1$ για κάθε $x>0$, θα δείξουμε ότι $x+1>\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x>0$.
Έστω $g(x)=x+1-\sigma\upsilon\nu x,\ x\geq 0$. Είναι $g'(x)=1+\eta\mu x>0$ για κάθε $x\neq 2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$ με $\kappa\geq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Για κάθε $x>0$ είναι $g(x)>g(0)=0\Leftrightarrow x+1>\sigma\upsilon\nu x$, οπότε $e^x>x+1>\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x>0$. Οπότε $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$.

γ) $f''(x)=\frac{\left(e^x+\eta\mu x\right)\left(e^x-\eta\mu x\right)-\left(e^x-\sigma\upsilon\nu x\right)^2}{\left(e^x-\eta\mu x\right)^2}\Leftrightarrow$

$$f''(x)=\frac{\cancel{e^{2x}}-\eta\mu^2x-\cancel{e^{2x}}+2e^x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^2x}{\left(e^x-\eta\mu x\right)^2}=\frac{2e^x\sigma\upsilon\nu x-1}{\left(e^x-\eta\mu x\right)^2}$$

Για κάθε $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ είναι $\sigma\upsilon\nu x<0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 2e^x\sigma\upsilon\nu x<0 \Leftrightarrow 2e^x-1<-1<0$ άρα

$f''(x)<0\Rightarrow f\cap\downarrow\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

δ) $e^x-e^\lambda=\eta\mu x\Leftrightarrow e^x-\eta\mu x=e^\lambda\Leftrightarrow\ln\left(e^x-\eta\mu x\right)=\lambda\Leftrightarrow f(x)=\lambda$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-\eta\mu x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-\frac{\eta\mu x}{e^x}\right)\right]=+\infty$ γιατί

$\left|\frac{\eta\mu x}{e^x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{e^x}\le\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow-\frac{1}{e^x}\le\frac{\eta\mu x}{e^x}\le\frac{1}{e^x}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{e^x}=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(e^x-\eta\mu x\right)\overset{e^x-\eta\mu x=u}{\underset{u\to1}{=}}\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=(0,+\infty)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$.

Αν $\lambda\le0$ τότε $\lambda\notin f(A)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη. Αν $\lambda>0$ τότε $\lambda\in f(A)$ οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0\in A$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\lambda$.

ε) Επειδή f συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$, η f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^x-\eta\mu x\right)}{x}\overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x-\eta\mu x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}\left(1-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1-\frac{\eta\mu x}{e^x}\right)}=\frac{1-0}{1-0}=$$

γιατί $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}\right|=\frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{e^x}\le\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow-\frac{1}{e^x}\le\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}\le\frac{1}{e^x}$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}=0$

. Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x-\eta\mu x\right)-\ln e^x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x-\eta\mu x}{e^x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{\eta\mu x}{e^x}\right)=0$, άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f .

στ) $f(x)>\ln\left(\frac{x^2}{2}+x+1-\eta\mu x\right)\Leftrightarrow \ln\left(e^x-\eta\mu x\right)>\ln\left(\frac{x^2}{2}+x+1-\eta\mu x\right)\Leftrightarrow$

$e^x-\cancel{\eta\mu x}>\frac{x^2}{2}+x+1-\cancel{\eta\mu x}\Leftrightarrow e^x-\frac{x^2}{2}-x-1>0$

Έστω $a(x)=e^x-1-\frac{x^2}{2}-x$, $x\in[0,+\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $a'(x)=e^x-x-1$ και $a''(x)=e^x-1$.

Για κάθε $x>0$ είναι $a''(x)>0$, άρα η a' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $a'(x)>a'(0)=0$, άρα η α είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Για κάθε $x>0$ είναι $a(x)>a(0)=0\Leftrightarrow e^x-\frac{x^2}{2}-x-1>0$.

66.α) Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Επειδή $f(0)=f(1)$, εφαρμόζεται για την f το Θ.Rolle στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

Για κάθε $x<\xi\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(\xi)=0\Rightarrow f\searrow(-\infty,\xi]$ και για κάθε $x>\xi\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(\xi)=0\Rightarrow f\nearrow[\xi,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο ξ.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to0}h(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$ οπότε η h είναι συνεχής στο $x=0$.

Για κάθε $x\neq0$ είναι $h'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0,x]$, $x>0$, οπότε υπάρχει $x_1\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)}{x}$. Είναι

$x_1<x\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x_1)<f'(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}<f'(x)\Leftrightarrow f(x)<xf'(x)\Leftrightarrow$

$xf'(x)-f(x)>0\Rightarrow h'(x)>0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $x=0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x,0]$, $x<0$, οπότε υπάρχει $x_2\in(x,0)$ τέτοιο, ώστε

$f'(x_2)=\frac{f(0)-f(x)}{0-x}=\frac{f(x)}{x}$. Είναι

$x_2>x\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x_2)>f'(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}>f'(x)\overset{x<0}{\Leftrightarrow}f(x)<xf'(x)\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)>0\Rightarrow$

$h'(x)>0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $x=0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $x=0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)+f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x+1)}{x}+\dfrac{f(x)}{x}\right)=$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x+1)-f(1)}{x}+\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right)=f'(1)+f'(0)=1+f'(0)=g(0)$ άρα η g είναι συνεχής στο $x=0$.

δ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με

$$g'(x)=\frac{\left(f'(x+1)+f'(x)\right)x-f(x+1)-f(x)}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$g'(x)=\frac{\left(xf'(x+1)-f(x+1)\right)+\left(xf'(x)-f(x)\right)}{x^2}$$

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[1,1+x]$, $x>0$, οπότε υπάρχει $\xi_1\in(1,1+x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}=\dfrac{f(1+x)}{x}$. Είναι

$$\xi_1<1+x\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi_1)<f'(1+x)\Leftrightarrow\frac{f(1+x)}{x}<f'(1+x)\Leftrightarrow xf'(1+x)-f(1+x)>0$$

και επειδή για κάθε $x>0$ είναι $xf'(x)-f(x)>0$, είναι

$g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow[0,+\infty)$.

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[1+x,1]$, $x<0$, οπότε υπάρχει $\xi_2\in(1+x,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(1)-f(1+x)}{1-1-x}=\dfrac{f(1+x)}{x}$. Είναι

$$\xi_2>1+x\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi_2)>f'(1+x)\Leftrightarrow\frac{f(1+x)}{x}>f'(1+x)\overset{x<0}{\Leftrightarrow}xf'(1+x)-f(1+x)>0$$

και επειδή για κάθε $x<0$ είναι $xf'(x)-f(x)>0$, είναι

$g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow(-\infty,0]$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $x=0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ε) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ έχει εξίσωση

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=x-1$.

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\geq x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=f'(0)x$.

Είναι $o<\xi \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(0)<f'(\xi)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(0)x=+\infty$. Επειδή $f(x)\geq f'(0)x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

στ) Επειδή η $y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=-3$.

Είναι $2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ και

$$-3=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{f(x)}{x}-2\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-2}{\dfrac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^{\cancel{2}}}}{-\dfrac{1}{x^{\cancel{2}}}}=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-xf'(x)\right)$$

ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)+f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x+1)}{x}+\dfrac{f(x)}{x}\right)=2+2=4$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x+1)}{1}\overset{\substack{x+1=u\\ x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}f'(u)=2$. Άρα η $y=4$ είναι οριζόντια ασύμπτωτης της C_g στο $+\infty$.

η) Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα, για κάθε $x>0$ ισχύει ότι

$$g(x)<g(x+1)\Leftrightarrow\frac{f(x+1)+f(x)}{x}<\frac{f(x+2)+f(x+1)}{x+1}\Leftrightarrow$$

$$\cancel{xf(x+1)}+f(x+1)+(x+1)f(x)<xf(x+2)+\cancel{xf(x+1)}\Leftrightarrow$$

$$f(x+1)<xf(x+2)-(x+1)f(x).$$

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

23530.α) Η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση

$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y-e+1=(1-e)(x+1)\Leftrightarrow y=(1-e)x$.

β) Επειδή η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-x^2}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{xf(x)}{x}-\dfrac{x^2}{x}}{\dfrac{f(x)}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{\dfrac{f(x)}{x}}=\dfrac{0}{1}=0$.

25748.α) Επειδή η ευθεία $(\varepsilon): y=3x-2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=-2$.

β) Θέτουμε $f(x)-3x=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+3x$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+3x\right)=+\infty+\infty=+\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{xf(x)-3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(\dfrac{f(x)}{x}-1\right)}{\cancel{x}\left(f(x)-3x\right)}=\dfrac{3-1}{-2}=-1$.

27084.α) Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-1}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow x^2-1\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x\geq 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=2$.

β) Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)'=\dfrac{2}{x^3}>0$, οπότε η f είναι κυρτή.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cancel{x}+\dfrac{1}{x}-\cancel{x}\right)=0$, οπότε η $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

31547.α) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}(3-2x)\dfrac{1}{(x-2)^2}=-1\cdot(+\infty)=-\infty\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{(x-2)^2}\underset{\substack{x\to2\Rightarrow\\u\to0}}{\overset{x-2=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{1}{u^2}=+\infty$, άρα η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

β) i. Επειδή $\lim\limits_{x\to2}f(x)=-\infty\neq f(2)\in\mathbb{R}$ η f δεν είναι συνεχής στο 2.

ii. Επειδή η f δεν είναι συνεχής στο 2 δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο

αυτό.

33995.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x}{x^2}\right)=0$ άρα η ευθεία y= x είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) $f(x)=x\Leftrightarrow x-\dfrac{x-1}{x^2+1}=x\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x^2+1}=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Το (1,1) είναι το κοινό σημείο των ε, C_f.

γ) Από το β σκέλος γνωρίζουμε ότι $f(1)=1$. Παρατηρούμε ότι $f(0)=1$.

Αν η f ήταν 1-1 τότε $f(0)=f(1)\Leftrightarrow 0=1$ άτοπο, άρα η f δεν είναι 1-1.

35602.α) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{x-1}-(x-1)\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x-(x-1)^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x-x^2+2x-1}{x-1}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x-1}=0$, άρα η ευθεία (ε): $y=x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-2x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\left[\left(x^2-2x\right)\dfrac{1}{x-1}\right]=-1\cdot(+\infty)=-\infty$, άρα η ευθεία x = 1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

γ) Για κάθε $x\neq1$ είναι

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$$

Το τριώνυμο x^2-2x+2 έχει $\Delta<0$, οπότε για κάθε $x\neq1$ είναι $x^2-2x+2>0\Rightarrow f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

24759.α) i. Για κάθε x > 0 είναι $\dfrac{f(x)}{x}\geq\dfrac{x^2}{x}-1+\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}\geq x-1+\dfrac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

ii. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Για x < 0 είναι $\dfrac{f(x)}{x}\leq\dfrac{x^2}{x}-1+\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}\leq x-1+\dfrac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-1+\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ οπότε και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$, άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Τέλος επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Άρα η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

iii. Αρκεί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να είναι

$x^2-x+1\geq\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x^2-x+\dfrac{1}{4}\geq 0\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\geq 0$ ισχύει.

Άρα $f(x)\geq x^2-x+1\geq\dfrac{3}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) i. Είναι $f(x)\geq\dfrac{3}{4}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=\dfrac{1}{2}$ το οποίο είναι στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$.

ii. Αν η f ήταν κοίλη τότε η f ΄θα ήταν γνησίως φθίνουσα. Για κάθε $x>\dfrac{1}{2}\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $\dfrac{1}{2}<1\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(\dfrac{1}{2}\right)>f(1)\Leftrightarrow\dfrac{3}{4}>1$ άτοπο. Άρα η f δεν είναι κοίλη.

26631.α) Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$.

Είναι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{1-x}{x}\geq 0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}1-x\geq 0\Leftrightarrow 0<x\leq 1$. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε x > 1 είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(1)=-1$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x-x)=-\infty$, οπότε η x = 0, δηλαδή ο άξονας x΄x, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}-1\right)=-1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-x-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{\ln x}{x}-2\right)\right]=-\infty$, οπότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{\ln x}{x}-1\right)\right]=-\infty$, οπότε η C_f δεν έχει και οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$\ln\left(\frac{x^2+3}{2x^2+1}\right)=2-x^2\Leftrightarrow\ln\left(x^2+3\right)-\ln\left(2x^2+1\right)=2-x^2\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(x^2+3\right)-\left(x^2+3\right)=\ln\left(2x^2+1\right)-\left(2x^2+1\right)\Leftrightarrow f\left(x^2+3\right)=f\left(2x^2+1\right)\ (1)$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x^2+3\geq 3,\ 2x^2+1\geq 1$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε η (1) γίνεται:

$x^2+3=2x^2+1\Leftrightarrow -x^2=-2\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

29130.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$. Είναι

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\eta\mu\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ και $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}=1$. Η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει εξίσωση: $y-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y-\dfrac{\pi}{2}=x-\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow y=x$.

β) i. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}=e^{-x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)=0$, άρα η $y=x$ ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $1+\dfrac{1}{e^x}>1\Leftrightarrow\ln\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)>\ln 1\Leftrightarrow$

$g(x)-x>0\Leftrightarrow g(x)>x$, άρα στο διάστημα $(0,+\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y=x$.

γ) Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)-x=x\eta\mu x-x=x\left(\eta\mu x-1\right)\leq 0\Leftrightarrow f(x)\leq x$ και επειδή $x<g(x)$, είναι $f(x)<g(x)$ για κάθε $x>0$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=5$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+5x}{(x+1)f(x)-2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\dfrac{f(x)}{x}+5\right)}{x\left[\left(f(x)-2x\right)+\dfrac{f(x)}{x}\right]}=\frac{2+5}{5+2}=1$$

Σωστή απάντηση Β.

2. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x^2\eta\mu\dfrac{3}{x}\right)=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{f(x)}{x}-x\eta\mu\dfrac{3}{x}\right)\right]=1$. Θέτουμε

$h(x)=x\left(\dfrac{f(x)}{x}-x\eta\mu\dfrac{3}{x}\right)$, $x>0$, με $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=1$, οπότε

$$h(x)=x\left(\frac{f(x)}{x}-x\eta\mu\frac{3}{x}\right)\Leftrightarrow\frac{h(x)}{x}=\frac{f(x)}{x}-x\eta\mu\frac{3}{x}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{h(x)}{x}+x\eta\mu\frac{3}{x}$$

.Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}h(x)+3\dfrac{\eta\mu\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}}\right)=0\cdot1+3\cdot1=3$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\eta\mu\frac{3}{x}+x^2\eta\mu\frac{3}{x}-3x\right]=1+0=1$$ γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\eta\mu\frac{3}{x}-3x\right)\overset{\frac{1}{x}=y}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{y^2}\eta\mu3y-\frac{3}{y}\right)=\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu3y-3y}{y^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{3\sigma\upsilon\nu3y-3}{2y}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{-3\eta\mu3y}{2}=0$. Οπότε η ασύμπτωτη είναι $y=3x+1$.

Σωστή απάντηση Α.

3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}$..

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2-\frac{5}{x}\right)}{2x\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}=\dfrac{2}{2}=1$. Άρα η ασύμπτωτη της f' στο

$+\infty$ είναι η $y=1$. **Σωστή απάντηση Β.**

4. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=1$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\alpha x^2+\beta x}{x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2+\beta x}{x^2+x}=\alpha=1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\beta x}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\beta x-x^2-x}{x+1}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\beta-1)x}{x}=\beta-1=1. \text{ Οπότε } \beta-1=1\Leftrightarrow\beta=2 \text{ και } \alpha=1.$$

Σωστή απάντηση Α.

5. Πρέπει $\alpha x^2+\beta x+1\geq 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=1$. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\alpha+\frac{\beta}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\sqrt{\alpha} \text{ άρα}$$

$\sqrt{\alpha}=2\Leftrightarrow\alpha=4$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+\beta x+1}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+\beta x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+\beta x+1}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\beta+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{\beta}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)}=\frac{\beta}{4}, \text{ οπότε } \frac{\beta}{4}=1\Leftrightarrow\beta=4.$$

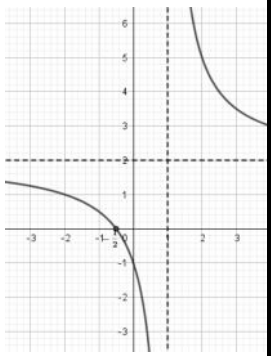
Για $\alpha=\beta=4$ είναι $4x^2+4x+1\geq 0\Leftrightarrow(2x+1)^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Σωστή απάντηση Γ.

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος								
1. Λ	**2.** Σ	**3.** Λ	**4.** Λ	**5.** Λ	**6.** Λ	**7.** Σ	**8.** Λ	**9.** Σ
10. Λ	**11.** Σ	**12.** Σ	**13.** Σ	**14.** Σ	**15.** Λ	**16.** Σ	**17.** Λ	**18.** Σ
19. Σ	**20.** Λ	**21.** Λ						

32 Μελέτη-γραφική παράσταση συνάρτησης

4. α) $f'(x)=-\frac{3}{(x-1)^2}$, $f''(x)=\frac{6}{(x-1)^3}$



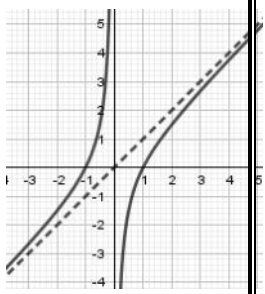
x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	−	+	
f'	−	−	
f	↘	↘	

Οριζόντια ασύμπτωτη η $y=2$ και κατακόρυφη η $x=1$

β) $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}>0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,0)$ και $\nearrow(0,+\infty)$.

$f''(x)=-\frac{2}{x^3}$, f κυρτή στο $(-\infty,0)$ και κοίλη στο $(0,+\infty)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+	−	
f'	+	+	
f	↗	↗	



$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty\Rightarrow$ y′y κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0\Rightarrow y=x$ πλάγια ασύμπτωτη.

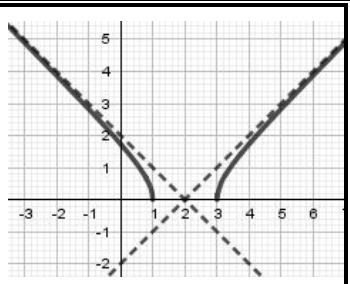
γ) $f'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$, $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$,

$f''(x)=-\frac{1}{(x^2-4x+3)\sqrt{x^2-4x+3}}<0\Rightarrow$ f κοίλη σε καθένα από τα $(-\infty,1]$ και $[3,+\infty)$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to=\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{\cancel{x}}=-1$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+3-x^2}{\sqrt{x^2-4x+3}-x}=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(-4+\frac{3}{x}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=2\Rightarrow y=-x+2$$

πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Όμοια η $y=x-2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

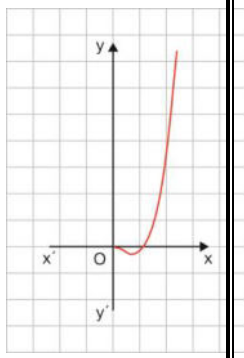


δ) $f'(x)=x(2\ln x+1)\geq 0\Leftrightarrow x\geq e^{-\frac{1}{2}}$. Είναι

$f\searrow\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$ και $\nearrow\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$. $f''(x)=2\ln x+3\geq 0\Leftrightarrow x\geq e^{-\frac{3}{2}}$.

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
f ′′	−	+	+	
f ′	−	−	+	
f	↘	Σ.Κ. ↘	Ο.Ε. ↗	

Η f είναι κοίλη στο $\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right]$ και κυρτή στο $\left[e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right)$.



Σημείο καμπής το $\left(e^{-\frac{3}{2}},-\frac{3}{2e^3}\right)$.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2\ln x\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty$$

ε) $f'(x)=e^{-x}(1-x)\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$. Είναι $f\nearrow(-\infty,1]$ και $\searrow[1,+\infty)$.

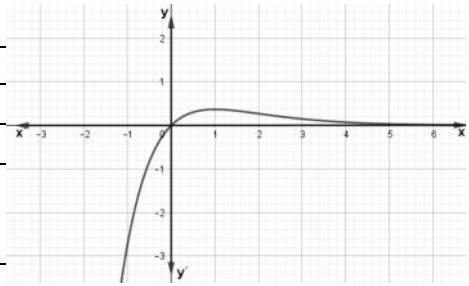
Μέγιστο το $f(1)=\frac{1}{e}$. $f''(x)=e^{-x}(x-2)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$.

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$ και κυρτή στο $[2,+\infty)$. Σημείο καμπής το $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$, άρα οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ είναι ο άξονας $x'x$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
f''	−	−	+	
f'	+	−	−	
f	↱ Ο.Μ. ↴		Σ.Κ. ↴	



στ) $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Είναι $f\searrow(-\infty,0),(0,1]$ και $\nearrow[1,+\infty)$.

Τοπικό ελάχιστο το $f(1)=e$, $f''(x)=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}>0\Rightarrow x>0$.

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ και κυρτή στο $(0,+\infty)$.

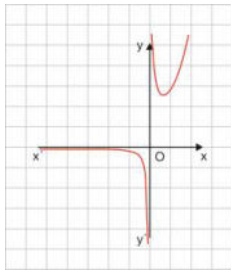
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^x}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x}{x}=+\infty$, άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f''	−	+	+	
f'	−	−	0	+
f	↘	↳	T.E.	↱



5. α) Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x^4-6x^2+8=0 \overset{x^2=\omega>0}{\Leftrightarrow}$

$\omega^2-6\omega+8=0 \Leftrightarrow (\omega=2)$ ή $(\omega=4)$.

Άρα $x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ ή $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

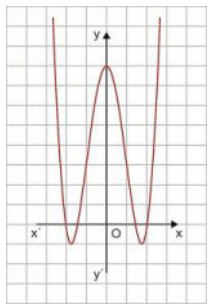
Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $(\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},0), (2,0), (-2,0)$.

Είναι $f(0)=8$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $(0,8)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=4x(x^2-3)$.

Είναι $f\searrow(-\infty,-\sqrt{3}]$, $[0,\sqrt{3}]$ και $f\nearrow[-\sqrt{3},0]$, $[\sqrt{3},+\infty)$. Τοπικά ελάχιστα τα $f(-\sqrt{3})=-1$, $f(\sqrt{3})=-1$ και τοπικό μέγιστο το $f(0)=8$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
4x	-	-	+		+
x^2-3	+	-	-		+
f′	-	+	-		+
f	↘	T.E. ↗	T.M.	↘ T.E.	↗



Η f′ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=12x^2-12$.

$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow 12x^2\geq 12 \Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 1$.

Η f είναι κυρτή στα $(-\infty,-1], [,+\infty)$ και κοίλη στο $[-1,1]$.

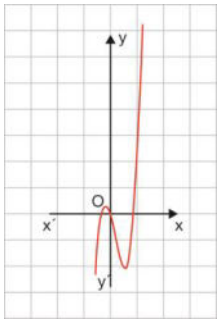
Έχει σημεία καμπής τα $(-1,3)$ και $(1,3)$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f″	+	+	–	–	+		+
f′	–	+	+	–	–		+
f	↘ T.E. ↗		Σ.Κ. ↗	T.M. ↘	Σ.Κ. ↘	T.E ↗	

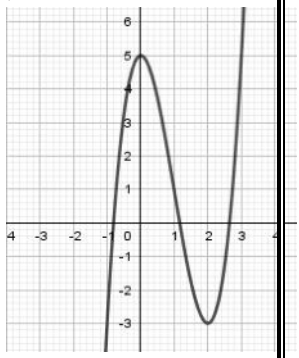
β) $f'(x)=3(x+1)(x-5)$. Είναι $f\nearrow(-\infty,-1]$, $[5,+\infty)$ και $f\searrow[-1,5]$. Τοπικό μέγιστο το $f(-1)=8$ και τοπικό ελάχιστο το $f(5)=-100$. $f''(x)=6(x-2)$.

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$ και κυρτή στο $[2,+\infty)$. Έχει σημείο καμπής το $(2,-46)$.

x	$-\infty$	- 1	2	5	$+\infty$
f ΄΄	–	–	+		+
f ΄	+	–	–		+
f	↗	T.M ↘	Σ.Κ. ↘	T.E. ↗	



γ) $f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$. Είναι $f\nearrow(-\infty,0]$, $[2,+\infty)$ και $f\searrow[0,2]$. Τοπικό μέγιστο το $f(0)=5$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2)=3$. Είναι $f''(x)=12x-12$. Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,1]$ και κυρτή στο $[1,+\infty)$. Έχει σημείο καμπής το $(1,1)$. Η C_f τέμνει τον y΄y στο $(0,5)$.



x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f″	−	−	0	+	+
f′	+	0	−	−	0	+
f	↗ T.M.	↘ Σ.Κ.	↘	↘ T.Ε.	↗

6. $f'(x)=\begin{cases}2xe^{x^2}-2, & x<0\\ \dfrac{2}{x}(\ln x-1), & x>0\end{cases}$.

Είναι $f\searrow(-\infty,0),(0,e]$ και $\nearrow[e,+\infty)$.

Τοπικό ελάχιστο το $f(e)=-1$. $f''(x)=\begin{cases}2e^{x^2}(1+2x^2), & x<0\\ \dfrac{2(2-\ln x)}{x^2}, & x>0\end{cases}$. Η f είναι κυρτή στα $(-\infty,0)$, $(0,e^2]$ και κοίλη στο $[e^2,+\infty)$. Έχει σημείο καμπής το $(e^2,0)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x^2}-2x)=+\infty$,

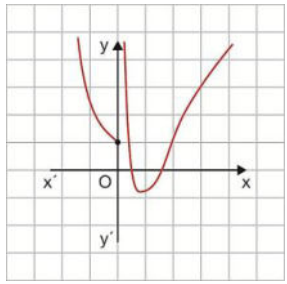
$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}[\ln x(\ln x-2)]=+\infty$

x	0	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
f΄΄	+	0	−	−
f΄	+	+	0	−
f	↗ Σ.Κ. ↗ T.Ε.		↗ T.Μ ↘	↘ T.Ε.

Η $x=0\ (y'y)$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x(\ln x-2)\right]=+\infty$

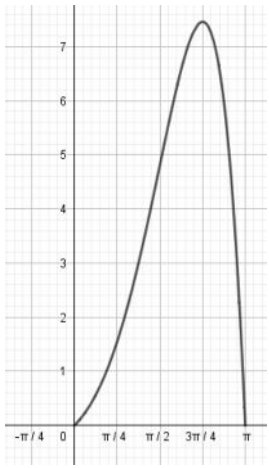
x	$-\infty$	0	e	e^2	$+\infty$
f΄΄	+	+	+	0	−
f΄	−	−	0	+	+
f	↘	↘	Τ.Ε	↗	Σ.Κ. ↗



7. $f'(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\geq 0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\geq -\eta\mu x\Leftrightarrow \sigma\phi x\geq -1=\sigma\phi\dfrac{3\pi}{4}\Rightarrow$

$0\leq x\leq\dfrac{3\pi}{4}$. $f\nearrow\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right]$ και $\searrow\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$. Η f έχει μέγιστο το $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\eta\mu\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}$ και τοπικά ελάχιστα τα $f(0)=0$ και $f(\pi)=0$,

$f''(x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x\geq 0\Leftrightarrow x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ Η f είναι κυρτή στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και κοίλη στο $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.Έχει σημείο καμπής το $\left(\dfrac{\pi}{2},e^{\frac{\pi}{2}}\right)$.

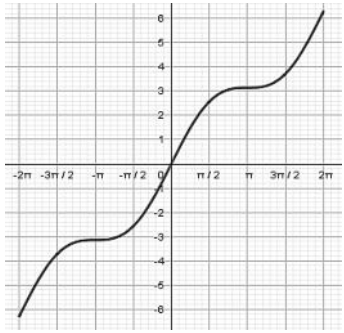


8. α) $f'(x)=1+\sigma\upsilon\nu x>0$, $x\in(-2\pi,-\pi)\cup(-\pi,\pi)\cup(\pi,2\pi)\Rightarrow f\nearrow[-2\pi,2\pi]$

Ελάχιστο το $f(-2\pi)=-2\pi$ και μέγιστο το $f(2\pi)=2\pi$.

$f''(x)=-\eta\mu x\geq 0\Rightarrow x\in[-\pi,0]\cup[\pi,2\pi]$. Η f είναι κυρτή σε καθένα από τα $[-\pi,0]$ και $[\pi,2\pi]$, κοίλη στα $[-2\pi,-\pi]$ και $[0,\pi]$. Σημεία καμπής τα $(-\pi,-\pi),(0,0),(\pi,\pi)$

x	-2π	$-\pi$	0	π	2π
f΄΄	−	0	+	0	−	0	+
f΄	+	+	+	+
f	Ο.Ε. ↗	Σ.Κ. ↘	Σ.Κ. ↗	Ο.Μ ↘



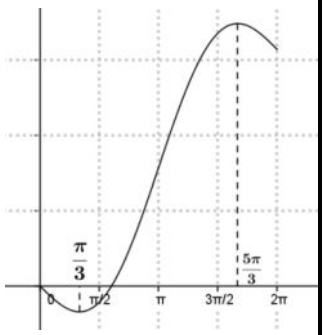
β) $f'(x)=1-2\sigma\upsilon\nu x\geq 0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\leq \frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Rightarrow \frac{\pi}{3}\leq x\leq \frac{5\pi}{3}$,

$f\searrow\left[0,\frac{\pi}{3}\right],\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$ και $\nearrow\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$. Τοπικό μέγιστο τα $f(0)=0$ και ολικό μέγιστο $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{3}$. Ελάχιστο το $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-2\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{3}$ και τοπικό

ελάχιστο το $f(\pi)=2\pi$, $f''(x)=2\eta\mu x\geq 0\Leftrightarrow x\in[0,\pi]$. Η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$

και κοίλη στο $[\pi,2\pi]$. Σημείο καμπής το (π,π).

x	0		π/3		π		5π/3		2π
f΄΄	+		+	0	−		−		
f΄	−	0	+		+	0	−		
f	T.M.	↘	T.E.	↗	Σ.Κ.	↷	T.M.	↘	T.E.



9. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$. Είναι

$f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$, οπότε η f δεν έχει ακρότατα. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$.

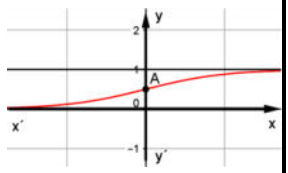
$f''(x)\geq 0\Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}\geq 0\underset{(e^x+1)^3>0}{\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}} 1-e^x\geq 0\Leftrightarrow e^x\leq 1\Leftrightarrow x\leq 0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f''(x)>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)<0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Η f έχει σημείο καμπής το $A(0,f(0))\equiv\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=0$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, οπότε ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+e^{-x}\right)} = 1$, άρα η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

10.α) $f'(x) = \dfrac{\left(x^2+3\right)^2}{\left(x^2-1\right)^2} > 0$ για κάθε $x \neq \pm 1 \Rightarrow f \nearrow$ σε καθένα από τα $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ και $(1,+\infty)$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-9x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^{\not 3}}{x^{\not 2}} = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-9x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\not 3}}{x^{\not 2}} = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \left(\dfrac{x^3-9x}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right) = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \left(\dfrac{x^3-9x}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \left(\dfrac{x^3-9x}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right) = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \left(\dfrac{x^3-9x}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right) = -\infty$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty,-1)$ η f είναι συνεχής και $\nearrow$, άρα $f(\Delta_1) = \mathbb{R}$. Στο διάστημα $\Delta_2 = (-1,1)$ η f είναι συνεχής και $\nearrow$, άρα $f(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x\to-1^+} f(x), \lim\limits_{x\to1^-} f(x)\right) = \mathbb{R}$. Στο διάστημα $\Delta_3 = (1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και $\nearrow$, άρα $f(\Delta_3) = \left(\lim\limits_{x\to1^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}$.

Είναι $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \mathbb{R}$.

β) $x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0 \Leftrightarrow x^3 - 9x = \alpha\left(x^2-1\right)$.

Αν $x = -1 : 8 = 0$ αδύνατη και αν $x = 1 : -7 = 0$ αδύνατη.

Για $x \neq \pm 1$: $\dfrac{x^3-9x}{x^2-1} = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$.

Επειδή το α ανήκει σε καθένα από τα $f(\Delta_1)$, $f(\Delta_2)$, $f(\Delta_3)$, και η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα Δ_1, Δ_2 και Δ_3 η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Οπότε η εξίσωση έχει τρείς πραγματικές ρίζες.

γ) $f''(x)=\dfrac{-16x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0]$ οπότε η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,-1),(-1,0]$ και κοίλη στα διαστήματα $[0,1),(1,+\infty)$.

Έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις $x=-1, x=1$.

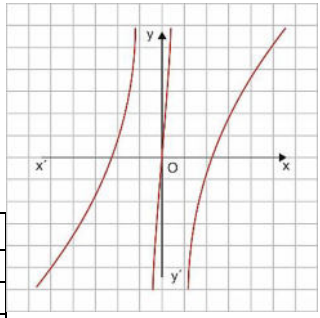
Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-9x}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1,$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-9x}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-9x-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8x}{x^2-1}=0$$

οπότε πλάγια ασύμπτωτη την $y=x$ στο $+\infty$

.Όμοια έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y=x$ στο $-\infty$.

Τέμνει τους άξονες στα σημεία $(0,0),(-3,0),(3,0)$



x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
f''	+	+	‖	0	−	‖ −	
f'	+	+	‖	+	+	‖ +	
f	↗	↗	‖	Σ.Κ	↱	‖ ↱	

Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι η C_f τέμνει τον x′x σε τρία σημεία.

11.α) $f'(x)=-e^{1+x-e^x}<0\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$. Η f δεν έχει ακρότατα.

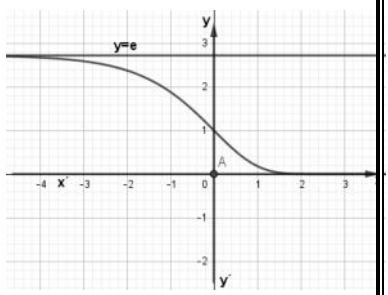
β) $f''(x)=e^{1+x-e^x}\left(e^x-1\right)\geq 0\Leftrightarrow e^x-1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq 1\Leftrightarrow x\geq 0$.

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$, έχει σημείο καμπής το $(0,1)$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-e^x}\overset{1-e^x=u}{=}\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-e^x}\overset{1-e^x=u}{=}\lim\limits_{u\to 1}e^u=e$ άρα οι ευθείες $y=0\ (x'x)$, $y=e$ είναι οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty,-\infty$ αντίστοιχα .

Άρα η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.



δ) Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

$$f(A)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,e)$$

12. α) $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}>0\Rightarrow f\nearrow(1,+\infty)$. Η f δεν έχει ακρότατα. Είναι

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\ln(\ln x)\overset{\ln x=u}{=}\lim_{u\to0^+}\ln u=-\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(\ln x)\overset{\ln x=u}{=}\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty, \text{ άρα } f(A)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}.$$

β) $f''(x)=-\dfrac{\ln x+1}{x^2\ln^2 x}<0\Rightarrow$ f κοίλη στο $(1,+\infty)$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$, η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{1}=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty, \text{ οπότε η } C_f$$

δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη.

δ) Αν $\alpha=\beta$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha<\beta$, τότε από το Θ.Μ.Τ υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$

τέτοια ώστε: $f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$.

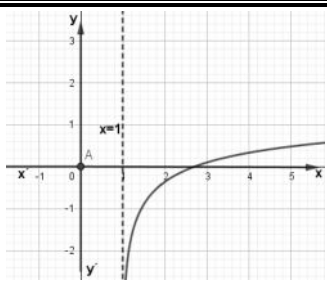
Είναι $\xi_1<\xi_2\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}>\dfrac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)>f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>f(\alpha)+f(\beta)\Leftrightarrow 2\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>\ln(\ln\alpha)+\ln(\ln\beta)\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2>\ln(\ln\alpha\cdot\ln\beta)\Leftrightarrow\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2>\ln\alpha\cdot\ln\beta.$$ Όμοια αν $\alpha>\beta$.

ε)



13.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x)=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}$

Για κάθε $x<-2$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο -2, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$.Για κάθε $x\in(-2,0)$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-2-1=-3$.

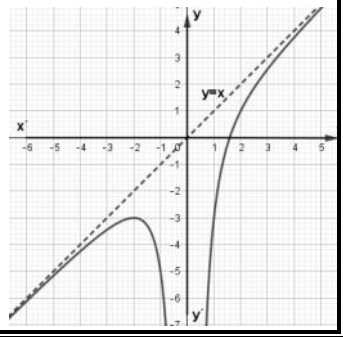
x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x^3+8	-	0 +	+	
x^3	-	-	+	
f'	+	0 -	+	
f	↗	T.M ↘	↗	

β) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f''(x)=-\frac{24}{x^4}$. Είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x\neq 0$, οπότε η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Επειδή η f είναι κοίλη στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ δεν έχει σημεία καμπής.

γ) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, οπότε αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη θα είναι στο $x=0$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$ άρα η $x=0$ (y΄y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f . Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$,οπότε η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.



Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$, η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

δ) σχήμα

14.α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως ρητή με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^3-1\right)-3x^2\left(x^3+1\right)}{\left(x^3-1\right)^2}=\frac{3x^2\left(x^3-1-x^3-1\right)}{\left(x^3-1\right)^2}=-\frac{6x^2}{\left(x^3-1\right)^2}\le 0$$ για

κάθε $x\ne 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

β) Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ ως ρητή με παράγωγο:

$$f''(x)=-\frac{12x\left(x^3-1\right)^2-12x^2\left(x^3-1\right)3x^2}{\left(x^3-1\right)^4}=-\frac{12x\left(x^3-1\right)^2-36x^4\left(x^3-1\right)}{\left(x^3-1\right)^4}=$$

$$=-\frac{12x\cancel{\left(x^3-1\right)}\left(x^3-1-3x^3\right)}{\left(x^3-1\right)^{\cancel{4}}}=-\frac{12x\left(-2x^3-1\right)}{\left(x^3-1\right)^3}=\frac{12x\left(2x^3+1\right)}{\left(x^3-1\right)^3}$$

- $12x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$
- $2x^3+1\ge 0\Leftrightarrow x^3\ge -\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\ge -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\Leftrightarrow x\ge -\frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}\Leftrightarrow x\ge -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
- $\left(x^3-1\right)^3\ge 0\Leftrightarrow x^3-1\ge 0\Leftrightarrow x^3\ge 1\Leftrightarrow x\ge 1$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$	0	1	$+\infty$
$12x$	-	-	+	+	
$2x^3+1$	-	+	+	+	
$\left(x^3-1\right)^3$	-	-	-	+	
$f''(x)$	-	+	-	+	
f	∩	∪	∩	∪	

Σ.Κ. Σ.Κ.

Είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x<-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ άρα η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right]$.

Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2},0\right)$ άρα η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt[3]{4}}{2},0\right]$.

Είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0,1)$.

Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x>1$ άρα η f είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει καμπή για $x=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ και για $x=0$. Τα σημεία καμπής είναι τα σημεία: $A\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2},f\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)\right)\equiv A\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2},-\frac{1}{3}\right)$ και $B\left(0,f(0)\right)\equiv B(0,-1)$.

γ) Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι η $x=1$ ως άκρο του πεδίο ορισμού της f.

Πράγματι είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3+1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left((x^3+1)\frac{1}{x^3-1}\right)=2(-\infty)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^3+1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left((x^3+1)\frac{1}{x^3-1}\right)=2(+\infty)=+\infty$ άρα η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$ άρα η $y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$ άρα η $y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

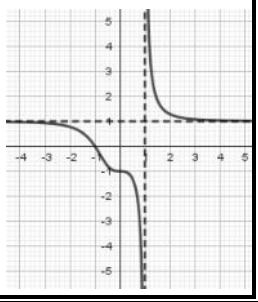
Η f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$ άρα δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

δ) Είναι $f(0)=-1$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο καμπής $B(0,-1)$.

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$	0	1	$+\infty$
f″	-	0	+	0 -	+
f′	-	-	-	-	
f	1 ↘	$-\frac{1}{3}$ ↘	-1 ↘	$-\infty$ $+\infty$ ↘	-1

Σ.Κ. **Σ.Κ.**

Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^3+1}{x^3-1}=0\Leftrightarrow$ $x^3+1\Leftrightarrow x^3=-1\Leftrightarrow x=-1$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $\Gamma(-1,0)$. Επίσης είναι $-1<-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}<0$.



$\left(-1<-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\Leftrightarrow 2>\sqrt[3]{4}\Leftrightarrow 8>4\right)$ και $-1<-\frac{1}{3}<0$ $\left(-1<-\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3>1\right)$.

15. Παρατηρούμε ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x<1$ άρα η f ως συνεχής είναι $f\searrow(-\infty,1)$. Επίσης $f'(x)<0$ για κάθε $x>1$ άρα η f ως συνεχής είναι $f\searrow(1,+\infty)$. Είναι $f'\searrow(-\infty,-1]$ άρα η f κοίλη στο $(-\infty,-1]$, $f'\nearrow[-1,0]$ άρα η f είναι κυρτή στο $[-1,0]$, $f'\searrow[0,1)$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0,1)$ και $f'\nearrow(1,+\infty)$ άρα η f κυρτή στο $(1,+\infty)$. Η f παρουσιάζει καμπή για $x=-1$ και για $x=0$, άρα έχει σημεία καμπής τα $A(-1,f(-1))$ και $B(0,f(0))$.

Επειδή η f είναι συνεχής και $f\searrow(-\infty,1)$, $f\searrow(1,+\infty)$ τότε είναι

$f((-\infty,1))=\left(\lim\limits_{x\to 1^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$ και $f((1,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\right)$.

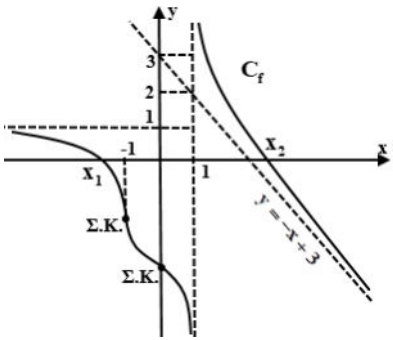
Επειδή η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ρίζα για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Για κάθε $\lambda<1$ έχει δύο ρίζες και αφού $f\searrow(-\infty,1)$, $f\searrow(1,+\infty)$ τότε ακριβώς μία σε κάθε διάστημα.

Άρα για να έχει 2 ρίζες η εξίσωση για $\lambda<1$ και 1 ρίζα για $\lambda\geq 1$ πρέπει το ένα σύνολο τιμών να είναι το $(-\infty,1)$ και το άλλο σύνολο όλο το $\mathbb{R}$. Αφού είναι $f(x)<1$ για κάθε $x<1$ τότε $f((-\infty,1))=(-\infty,1)$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ άρα η C_f δέχεται οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y=1$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=1$. Επίσης $f((1,+\infty))=\mathbb{R}$ άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=-1$ άρα η C_f δέχεται στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη της μορφής $y=-x+\beta$ και αφού διέρχεται από το Μ(1,2) τότε $2=-1+\beta\Leftrightarrow\beta=3$ άρα έχει ασύμπτωτη την (ε): $y=-x+3$.

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Κυρτότητα	∩	∪	∩	∪	
Μονοτονία	↘	↘	↘	↘	
f	1 ↘ ΣΚ	ΣΚ ↘ ΣΚ	ΣΚ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	



Σύνθετες ασκήσεις

16.α) $f'(x)=e^x(x+1)\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$.

Για κάθε $x<-1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,-1]$ και για κάθε $x>-1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[-1,+\infty)$. Ελάχιστο το $f(-1)=-\frac{1}{e}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x\overset{\infty\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,-1]$ η f είναι συνεχής και $\searrow$, άρα $f(\Delta_1)=\left[-\frac{1}{e},0\right)$.

Στο διάστημα $\Delta_2=(-1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και $\nearrow$, άρα $f(\Delta_2)=\left(-\frac{1}{e},+\infty\right)$.

Είναι $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f(x)\geq f(-1)\Leftrightarrow xe^x\geq-\frac{1}{e}\Leftrightarrow xe^x\cdot e\geq -1\Leftrightarrow xe^{x+1}+1\geq 0$.

γ) $f''(x)=e^x(x+2)\geq 0\Leftrightarrow x\geq -2$. Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,-2]$ και κυρτή στο $[-2,+\infty)$. Σημείο καμπής το $\left(-2,-\frac{2}{e^2}\right)$.

δ) Παρατηρούμε ότι $f'(1)=2e$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ είναι $\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-e=2e(x-1)\Leftrightarrow y=2ex-e$. Επειδή η C_f είναι κυρτή στο $[-2,+\infty)$, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα

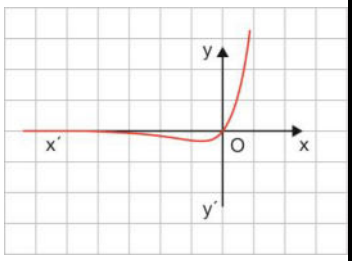
αυτό, οπότε βρίσκεται πάνω και από την ε, δηλαδή:

$f(x) \geq 2ex - e \Leftrightarrow xe^x \geq 2ex - e$ για κάθε $x \geq -2$.

ε) Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ η C_f δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.



στ) σχήμα

ζ) $x = \lambda e^{-x} \Leftrightarrow xe^x = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda$.

• Αν $\lambda < -\dfrac{1}{e}$, τότε $\lambda \notin f(A)$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

• Αν $-\dfrac{1}{e} < \lambda < 0$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ και $\lambda \in f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση έχει από μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2.

• Αν $\lambda = -\dfrac{1}{e}$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$, οπότε η εξίσωση έχει μία ρίζα στο Δ_1, την $x = -1$.

• Αν $\lambda \geq 0$, τότε $\lambda \in f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα στο Δ_2.

17.α) $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq e$. Για κάθε $x \in (0,e)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0,e]$ και για κάθε $x > e$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [e,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(e) = \dfrac{1}{e}$.

β) $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{3}{2}}$. Η f είναι κοίλη στο $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right]$ και κυρτή στο $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$. Σημείο καμπής το $\left(e^{\frac{3}{2}}, \dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$.

γ) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x \cdot \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ άρα ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow y = 0$ οριζόντια

ασύμπτωτη της C_f οπότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

δ) $x^e \le e^x \Leftrightarrow \ln x^e \le \ln e^x \Leftrightarrow e\ln x \le x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow f(x) \le \frac{1}{e}$ ισχύει αφού η f έχει μέγιστο το $\frac{1}{e}$.

ε) $e < 10 < 11 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(10) > f(11) \Leftrightarrow \frac{\ln 10}{10} > \frac{\ln 11}{11} \Leftrightarrow 11\ln 10 > 10\ln 11 \Leftrightarrow$

$\ln 10^{11} > \ln 11^{10} \Leftrightarrow 10^{11} > 11^{10}$

στ) Αν $x \le 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη. Αν $x > 0$ τότε

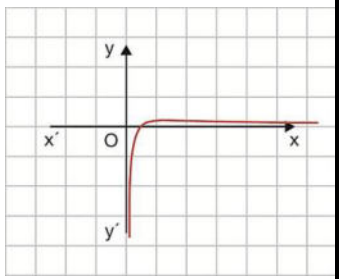
$x = e^{\lambda x} \Leftrightarrow \ln x = \lambda x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda$.

Η f είναι συνεχής και $\nearrow$ στο $\Delta_1 = (0, e]$, άρα $f(\Delta_1) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

Η f είναι συνεχής και $\searrow$ στο $\Delta_2 = (e, +\infty)$, άρα $f(\Delta_2) = \left(0, \frac{1}{e}\right)$

• Αν $\lambda \le 0$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in \Delta_1 : f(x_1) = \lambda$. Επειδή f $\nearrow$ στο Δ_1, το x_1 είναι μοναδικό. Επειδή $\lambda \notin f(\Delta_2)$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη στο Δ_2.

• Αν $\lambda \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ και $\lambda \in f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες στη περίπτωση αυτή.



• Αν $\lambda = \frac{1}{e}$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ και $\lambda \notin f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1 ,την $x = e$.

• Τέλος αν $\lambda > \frac{1}{e}$, τότε $\lambda \notin f(\Delta_1)$ και $\lambda \notin f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

18.α) Για κάθε $x \in (0,4)$ είναι:

$x^2 e^{f(x)} f'(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 e^{f(x)} f'(x) = -4 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{4}{x^2 e^{f(x)}} < 0 \Rightarrow f\searrow(0,4)$.

Για κάθε $0<x<2 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)>f(2)=0$ και για κάθε $2<x<4 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)<f(2)=0$

β) $x^2e^{f(x)}f'(x)+4=0 \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=-\frac{4}{x^2} \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=\left(\frac{4}{x}\right)' \Leftrightarrow e^{f(x)}=\frac{4}{x}+c,$

$c\in\mathbb{R}$. Για $x=2$ είναι $e^{f(2)}=\frac{4}{2}+c \Leftrightarrow 1=2+c \Leftrightarrow c=-1$. Τότε

$e^{f(x)}=\frac{4}{x}-1 \Leftrightarrow e^{f(x)}=\frac{4-x}{x} \Leftrightarrow f(x)=\ln\frac{4-x}{x}=\ln(4-x)-\ln x$, $x\in(0,4)$

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,4)$, οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} που είναι το σύνολο τιμών της f.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln(4-x)-\ln x\right)=\ln4-(-\infty)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to4^-}\left(\ln(4-x)-\ln x\right)=-\infty-\ln4=-\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,4)$, έχει σύνολο τιμών το $f((0,4))=\mathbb{R}$, άρα

$A_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

$f(x)=y \Leftrightarrow \ln\frac{4-x}{x}=y \Leftrightarrow \frac{4-x}{x}=e^y \Leftrightarrow 4-x=xe^y \Leftrightarrow 4=x+xe^y \Leftrightarrow$

$x\left(e^y+1\right)=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{e^y+1}$, άρα

$f^{-1}(y)=\frac{4}{e^y+1}$, $y\in\mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x)=\frac{4}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

δ) $f(x)<\frac{4}{x} \Leftrightarrow f(x)-\frac{4}{x}<0$.

Έστω $\varphi(x)=f(x)-\frac{4}{x}=\ln(4-x)-\ln x-\frac{4}{x}$, $x\in(0,4)$.

Είναι $\varphi'(x)=-\frac{1}{4-x}-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}=\frac{-x^2-x(4-x)+4(4-x)}{x^2(4-x)} \Leftrightarrow$

$\varphi'(x)=\frac{-\cancel{x^2}-4x+\cancel{x^2}+16-4x}{x^2(4-x)}=\frac{16-8x}{x^2(4-x)}$.

$\varphi'(x)\geq0 \Leftrightarrow \frac{16-8x}{x^2(4-x)}\geq0 \Leftrightarrow 16-8x\geq0 \Leftrightarrow x\leq2$.

Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $\varphi'(x)>0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $(0,2]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(2,4)$ είναι $\varphi'(x)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[2,4)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο

διάστημα αυτό. Η φ έχει μέγιστο το $\varphi(2)=f(2)-2=-2$, οπότε για κάθε $x\in(0,4)$ είναι $\varphi(x)\le\varphi(2)<0\Leftrightarrow f(x)-\dfrac{4}{x}<0$

ε) $e^{f(x)}=4-x^3\Leftrightarrow\dfrac{4}{x}-1=4-x^3\Leftrightarrow 4-x=4x-x^4\Leftrightarrow x^4-5x+4=0$

Έστω $h(x)=x^4-5x+4,\ x\in[1,2]$. Παρατηρούμε ότι $h(1)=0$, οπότε από το σχήμα Horner προκύπτει ότι $h(x)=(x-1)\left(x^3+x^2+x-4\right)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^3+x^2+x-4,\ x\in[1,2]$. Είναι $g(1)=-1,\ g(2)=10$, δηλαδή $g(1)g(2)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho)=0$. Τότε $h(\rho)=(\rho-1)g(\rho)=0$.

στ) Είναι $f'(x)=\left(\ln(4-x)-\ln x\right)'=-\dfrac{1}{4-x}-\dfrac{1}{x}$ και

$$f''(x)=-\frac{1}{(4-x)^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{(4-x)^2-x^2}{x^2(4-x)^2}=\frac{16-8x+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{x^2(4-x)^2}.$$

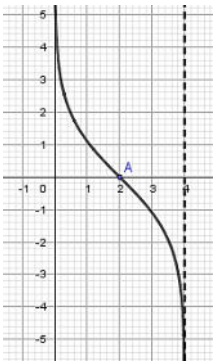
$$f'(x)\ge 0\Leftrightarrow\frac{16-8x}{x^2(4-x)^2}\ge 0\Leftrightarrow 16-8x\ge 0\Leftrightarrow 8x\le 16\Leftrightarrow x\le 2\cdot$$

Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f''(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,2]$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(2,4)$ είναι $f''(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[2,4)$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό. Η f έχει σημείο καμπής το Α(2,0).

ζ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ άρα ο άξονας y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είναι $\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=-\infty$ άρα η ευθεία x = 4 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Δεν ορίζεται σε περιοχή του $-\infty,+\infty$ οπότε δεν έχει οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες.



x	0		2		4
f″		+	0	−	
f′		−		−	
f	↘		Σ.Κ.		↘

19.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{2x\cdot x-\left(x^2+1\right)}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow x^2-1\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 1\Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε x >1 είναι $f'(x)>0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=2$. Η f ΄είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

με $f''(x)=\dfrac{2x\cdot x^2-2x\left(x^2-1\right)}{x^4}=\dfrac{2x^2-2x^2+2}{x^3}=\dfrac{2}{x^3}$.

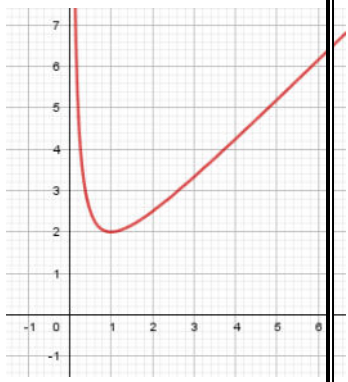
Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)>0$ οπότε η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(x^2+1\right)\dfrac{1}{x}\right]=+\infty$, οπότε η ευθεία x = 0, δηλαδή ο άξονας y΄γείναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2+1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, οπότε

η ευθεία y = x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f.
Επειδή η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.



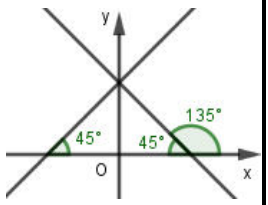
x	0	1	$+\infty$
f΄΄	+		+
f΄	–	0	+
f	↘	O.E.	↗

γ) Έστω $M(x_0,f(x_0)),x_0>0$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow$

$y=\dfrac{x_0^2-1}{x_0^2}x-\dfrac{x_0^2-1}{x_0^2}\cdot x_0+\dfrac{x_0^2+1}{x_0}\Leftrightarrow y=\dfrac{x_0^2-1}{x_0^2}x+\dfrac{2}{x_0}$. Για να διέρχεται η ε από το Α πρέπει $-4=\dfrac{x_0^2-1}{x_0^2}\cdot 0+\dfrac{2}{x_0}\Leftrightarrow -4=\dfrac{2}{x_0}\Leftrightarrow x_0=-\dfrac{1}{2}$ αδύνατο. Άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(0,-4)$.

δ) Για να σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, τότε επειδή είναι ορθογώνιο οι οξείες γωνίες του θα είναι ίσες με 45°. Άρα η γωνία που θα σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα x΄x θα είναι 45° ή 135°, οπότε η κλίση της θα είναι $\lambda = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$ ή $\lambda = \varepsilon\varphi 135^\circ = -1$.



Όμως αν $M(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής με την C_f, τότε

$f'(x_0) = 1$ ή $f'(x_0) = -1$.

- $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2 - 1}{x_0^2} = 1 \Leftrightarrow \cancel{x_0^2} - 1 = \cancel{x_0^2}$ αδύνατο

- $f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2 - 1}{x_0^2} = -1 \Leftrightarrow x_0^2 - 1 = -x_0^2 \Leftrightarrow 2x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 = \dfrac{1}{2} \overset{x_0>0}{\Leftrightarrow}$

$x_0 = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$. Επομένως υπάρχει ακριβώς μία εφαπτομένη της C_f που σχηματίζει με τον άξονα x΄x ισοσκελές τρίγωνο.

ε) Έστω $K(x(t), y(t))$, $x(t) > 0$, $t \geq 0$ σημείο της C_f με

$$y(t) = f(x(t)) = \frac{x^2(t) + 1}{x(t)}.$$

Επειδή η τετμημένη του Κ αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec, είναι $x'(t) = 2\text{cm/sec}$.
Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ είναι

$y'(t) = f'(x(t))x'(t) = \dfrac{x^2(t) - 1}{x^2(t)} \cdot x'(t)$. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Κ διέρχεται από το Β, τότε $x(t_0) = \dfrac{1}{2}$.

Είναι $y'(t_0) = \dfrac{x^2(t_0) - 1}{x^2(t_0)} \cdot x'(t_0) = \dfrac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{4}} \cdot 2 = -6\text{cm/sec}$

20.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της , με παράγωγο $f'(x) = e^x + 2x$ και δύο φορές παραγωγίσιμη , με δεύτερη παράγωγο $f''(x) = e^x + 2 > 0$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,οπότε έχει σύνολο τιμών $: f'(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right) = (-\infty, +\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+2x\right) = 0-\infty = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+2x\right) = +\infty$.

Το $0 \in f'(\mathbb{R})$ οπότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f'(x_0) = 0$.

Για $x > x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0$ και για $x < x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$,γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,x_0]$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 ,το οποίο προφανώς είναι μοναδικό.

β) Η f' είναι συνεχής στο $[-1,0]$, $f'(0) = 1 > 0, f'(-1) = \dfrac{1}{e} - 2 < 0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano ,οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1,0)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$.Μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$ είναι το x_0 άρα το ξ ταυτίζεται με το x_0 οπότε $x_0 < 0$.

γ) Από το α) ερώτημα $f''(x) = e^x + 2 > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$,οπότε δεν έχει σημεία καμπής.

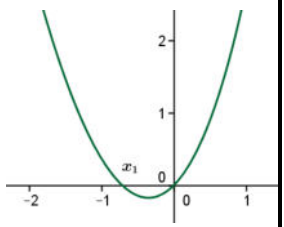
δ) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Από το ερώτημα α) δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+x^2-1}{x} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+2x\right) = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+x^2-1}{x} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+2x\right) = -\infty$ άρα δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

ε) Η f είναι συνεχής στο $[-1,x_0]$, $f(-1) = \dfrac{1}{e} > 0$,

$f(x_0) < 0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano ,οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1,x_0)$ τέτοιος ώστε $f(x_1) = 0$.



21.α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1} + 2,\ x > -1$.

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f''(x) = e^x + \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ για κάθε $x > -1$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\left(e^x - \frac{1}{x+1} + 2\right) = -\infty$ άρα πολύ κοντά στο -1 υπάρχει αριθμός $\gamma \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) : f(\gamma) < 0$.Επίσης ισχύει $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} > 0$ άρα έχουμε $f(\gamma) f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left[\gamma, -\frac{1}{2}\right]$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1 \in \left(\gamma, -\frac{1}{2}\right) : f'(x_1) = 0$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$, το x_1 είναι μοναδικό.

Για $-1 < x < x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_1) = 0$ και για $x > x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_1) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x = x_1$ τότε $f\searrow(-1, x_1]$ και $f\nearrow[x_1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = x_1$ το $f(x_1)$.

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$ τότε η f είναι κυρτή.

β) Είναι $f(0) = 0$, $0 \in [x_1, +\infty)$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_1, +\infty)$ οπότε το μηδέν είναι μοναδική ρίζα στο διάστημα $[x_1, +\infty)$ της $f(x) = 0$. Είναι $x_1 < 0 \overset{f\nearrow[x_1,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(0) = 0$ άρα το ακρότατο της f είναι αρνητικό.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\left[e^x - \ln(x+1) + 2x - 1\right] = e^{-1} - (-\infty) - 3 = +\infty$ άρα πολύ κοντά στο -1 υπάρχει αριθμός $-1 < \beta < x_1$ τέτοιος ώστε $f(\beta) > 0$. Επίσης $f(x_1) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[\beta, x_1] \subseteq (-1, 0)$ και $f(\beta) f(x_1) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_2 \in (\beta, x_2) \subseteq (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Επειδή $f\searrow(-1, x_1]$ το x_2 είναι μοναδικό.

δ) Επειδή $f(0) = 0$ η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$ είναι η ευθεία ε: $y = f'(0)x \Leftrightarrow y = 2x$. Για να εφάπτεται η (ε) στη C_h , αρχικά πρέπει να υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $h'(x_1) = 2$.

Είναι $h'(x) = e^{x-1} + 1$. Παρατηρούμε ότι $h'(1) = 2$. Η εφαπτομένη της C_h στο $x = 1$ έχει εξίσωση $y - h(1) = h'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = 2x$, δηλαδή είναι η (ε).

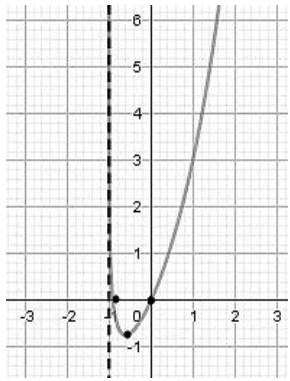
ε) Αρκεί να υπάρχουν $x_1, x_2 > 0$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) f'(x_2) = -1$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 2$, άρα $f'(x_1) f'(x_2) > 0$ οπότε δεν υπάρχουν τέτοια σημεία.

στ) Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών για την συνάρτηση f:

Επίσης η f τέμνει τον άξονα x΄x στα $x_2 \in (-1, x_1)$ και $x_3 \in (x_1, 0]$ με το $x_3 = 0$ και τον άξονα y΄y στο $(0,0]$. Δηλαδή τα σημεία τομής με τους άξονες είναι τα $A(x_2, 0)$ και $O(0,0)$.

x	-1		x_1	$+\infty$
f''	+	|	+	
f'	–	0	+	
f	↘	O.E	↗	

Επίσης έχουμε ότι $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ άρα η ευθεία $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x - \ln(x+1) + 2x - 1}{x} \right) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x + 2x - 1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = +\infty$$ γιατί έχουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 2x - 1}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH } x \to +\infty}{=}} \lim_{x \to +\infty} (e^x + 2) = +\infty$$ και

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH } x \to +\infty}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 .$$

Άρα η f δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες.

22.α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $x + 2\pi, x - 2\pi \in \mathbb{R}$ και $f(x + 2\pi) = f(x - 2\pi) = f(x)$

άρα η f είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$.

β) Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \quad (1)$

1ος τρόπος: Έστω ότι $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε από την (1) και $\eta\mu x = 0$

Άρα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ άτοπο , επομένως $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4} \overset{x \in [0, 2\pi]}{\Leftrightarrow} \left(x = \frac{3\pi}{4}\right) \text{ ή } \left(x = \frac{7\pi}{4}\right).$$

2ος τρόπος: Δείχνουμε ομοίως ότι $\eta\mu x \neq 0$ άρα

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = -1 \Leftrightarrow \sigma\varphi x = -1 \Leftrightarrow \cdots \overset{x \in [0, 2\pi]}{\Leftrightarrow} \overset{x \in [0, 2\pi]}{\Leftrightarrow} \left(x = \frac{3\pi}{4}\right) \text{ ή } \left(x = \frac{7\pi}{4}\right)$$

Επειδή f συνεχής και στα διαστήματα $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right), \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ δεν έχει ρίζες, τότε σε καθένα από αυτά θα διατηρεί πρόσημο.

Θα δώσουμε τιμές σε κάθε διάστημα και θα βρούμε το πρόσημο της f .

Διαστήματα	$\left[0,\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	π	2π
$f(x_0)$	1	- 1	1
Πρόσημο της f	+	-	+

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2\pi)$ με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x \quad (2)$

Ομοίως με την (1) στο προηγούμενο ερώτημα δείχνουμε ότι $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$, αντίστοιχα $\eta\mu x\neq 0$, εμφανίζουμε $\varepsilon\varphi x=1$ ή $\sigma\varphi x=1$ επομένως αφού

$x\in[0,2\pi]$ τότε $\left(x=\frac{\pi}{4}\right)$ ή $\left(x=\frac{5\pi}{4}\right)$.

Επειδή f' συνεχής και στα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right),\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ δεν έχει ρίζες, τότε σε καθένα από αυτά θα διατηρεί πρόσημο.
Θα δώσουμε τιμές σε κάθε διάστημα και θα βρούμε το πρόσημο της f .

Διαστήματα	$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	π	2π
$f'(x_0)$	1	–1	1
Πρόσημο της f'	+	−	+

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ και στο $\left[\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x=\frac{\pi}{4}$ το $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$,τοπικό ελάχιστο στο $x=\frac{5\pi}{4}$ το $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$, τοπικό ελάχιστο το $f(0)=1$ και τοπικό μέγιστο το $f(2\pi)=1$.

δ) $f(0)=1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ και $f(2\pi)=1$

Στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ η f συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα:

$f\left(\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}f(x)\right)=\left[1,\sqrt{2}\right)$. Στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα: $f\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]\right)=\left[f\left(\frac{5\pi}{4}\right),f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

Στο $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ η f συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα:

$f\left(\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]\right)=\left(\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{4}^+}f(x),f(2\pi)\right]=\left(-\sqrt{2},1\right]$

- Αν $\lambda>\sqrt{2}$ ή $\lambda<-\sqrt{2}$ τότε η $f(x)=\lambda$ στο $[0,2\pi]$ είναι αδύνατη αφού $f([0,2\pi])=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.
- Αν $\lambda=\sqrt{2}$ τότε η $f(x)=\lambda$ στο $[0,2\pi]$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $x=\frac{\pi}{4}$.
- Αν $\lambda\in\left(1,\sqrt{2}\right)$ τότε η $f(x)=\lambda$ στο $[0,2\pi]$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ και ακριβώς μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$, αφού η f είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση σε καθένα από τα διαστήματα αυτά, άρα έχει 2 ρίζες ακριβώς.
- Αν $\lambda=1$ τότε η $f(x)=\lambda$ στο $[0,2\pi]$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $x=0$ και στο $x=2\pi$.
- Αν $\lambda\in\left(-\sqrt{2},1\right)$ τότε η $f(x)=\lambda$ στο $[0,2\pi]$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ και ακριβώς μία ρίζα στο $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$, αφού η f είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση σε καθένα από τα διαστήματα αυτά, άρα 2 ρίζες ακριβώς.
- Αν $\lambda=-\sqrt{2}$ τότε η $f(x)=\lambda$ στο $[0,2\pi]$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $x=\frac{5\pi}{4}$.

Επειδή η f είναι περιοδική και σε μία περίοδο η $f(x)=\lambda$ έχει τουλάχιστον μία

ρίζα $\lambda \in \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ τότε έχει άπειρες ρίζες στο $\mathbb{R}$. Ομοίως είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ αν $\lambda > \sqrt{2}$ ή $\lambda < -\sqrt{2}$.

ε) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2\pi)$ με $f''(x) = -\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = -f(x)$

Από το β) ερώτημα είναι $f''(x) < 0$ σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και

$\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$. Επίσης $f''(x) > 0$ στο $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$.

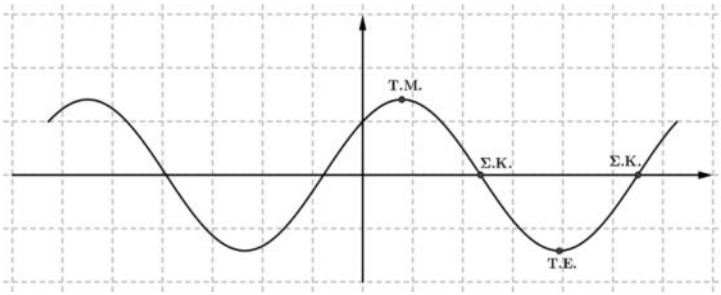
Άρα η f είναι κοίλη στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ και στο $\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$.

Η f παρουσιάζει καμπή στο $x = \frac{3\pi}{4}$ και στο $x = \frac{7\pi}{4}$. Τα σημεία καμπής είναι

$A\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ και $B\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$.

στ) Επειδή η f είναι περιοδική αρκεί να την σχεδιάσουμε στο $[0,2\pi]$ και ομοίως την συνεχίζουμε στο $[-2\pi,0]$. Έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↗	Τ.Μ. ↘	Σ.Κ. ↘	Τ.Ε. ↗	Σ.Κ. ↗	



23.α) Αρκεί $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 f(x) = e^{x^2}-1 \Leftrightarrow x^2 f(x) - e^{x^2} + 1 = 0, x \neq 0$.

Έστω $g(x)=x^2f(x)-e^{x^2}+1,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-2xe^{x^2}=x\left(2f(x)+xf'(x)-2e^{x^2}\right)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=2f(x)+xf'(x)-2e^{x^2},\ x\in\mathbb{R}$. Είναι

$h'(x)=2f'(x)+f'(x)+xf''(x)-4xe^{x^2}=3f'(x)+xf''(x)-4xe^{x^2}=$

$4xe^{x^2}-4xe^{x^2}=0\Leftrightarrow h(x)=c,\ c\in\mathbb{R}.$

$h(1)=2f(1)+f'(1)-2e=2e-2+2-2e=0\Leftrightarrow c=0\Leftrightarrow h(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε $g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$. Είναι

$g(1)=f(1)-e+1=0\Leftrightarrow c_1=0\Leftrightarrow g(x)=0\Leftrightarrow x^2f(x)-e^{x^2}+1=0$. Για $x\neq 0$ είναι $f(x)=\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$ και $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{x^2}}{2x}=1$, άρα

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}.$$

β) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{x^3}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{x^2}-2x}{3x^2}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4xe^{x^2}}{3}=0$, οπότε η f έχει κρίσιμο σημείο το $A(0,1)$.

Για $x\neq 0$ είναι $f'(x)=\dfrac{2e^{x^2}\left(x^2-1\right)+2}{x^3}$. Έστω

$a(x)=2e^{x^2}\left(x^2-1\right)+2,\ x\in\mathbb{R}.$ Είναι

$a'(x)=4xe^{x^2}\left(x^2-1\right)+4xe^{x^2}=4xe^{x^2}\left(x^2-1+1\right)=4x^3e^{x^2}$.

Για κάθε $x<0$ είναι $a'(x)<0\Rightarrow a\searrow(-\infty,0]$, οπότε $a(x)>a(0)=0$ και για κάθε $x>0$ είναι $a'(x)>0\Rightarrow a\nearrow[0,+\infty)$, οπότε $a(x)>a(0)=0$. Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$.

Άρα η f δεν έχει κρίσιμο σημείο στο $\mathbb{R}^*$.

γ) Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.

δ) $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2e^{x^2}\left(x^2-1\right)+2}{x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x^2}\left(x^2-1\right)+2}{x^4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4xe^{x^2}\left(x^2-1\right)+4xe^{x^2}}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{4}x\,e^{x^2}\left(x^2-\cancel{1}+\cancel{1}\right)}{\cancel{4}x^{\cancel{3}^{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x^2}\,e^{x^2}}{\cancel{x^2}}=1.$

Επειδή η f' είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f''(0)\neq 0$, η f' δεν έχει κρίσιμο σημείο το $O(0,0)$.

ε) Για $x\neq 0$ είναι $f''(x)=\dfrac{2e^{x^2}\left(2x^4-3x^2+3\right)-6}{x^4}$.

Έστω $b(x)=2e^{x^2}\left(2x^4-3x^2+3\right)-6,\ x\in\mathbb{R}$.Είναι

$b'(x)=4xe^{x^2}\left(2x^4-3x^2+3\right)+2e^{x^2}\left(8x^3-6x\right)\Leftrightarrow$

$b'(x)=4xe^{x^2}\left(2x^4-3x^2+3\right)+4xe^{x^2}\left(4x^2-3\right)\Leftrightarrow$

$b'(x)=4xe^{x^2}\left(2x^4-3x^2+3+4x^2-3\right)=4xe^{x^2}\left(2x^4+x^2\right)=4x^3e^{x^2}\left(2x^2+1\right)$.

Για κάθε $x<0$ είναι $b'(x)<0\Rightarrow b\searrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $b'(x)>0\Rightarrow b\nearrow[0,+\infty)$. Η b έχει ελάχιστο το $b(0)=0$, οπότε για κάθε $x\neq 0$ είναι $b(x)>0\Rightarrow$ $f''(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

στ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\underset{u\to+\infty}{\overset{x^2=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u-1}{u}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{1}=+\infty$, οπότε η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

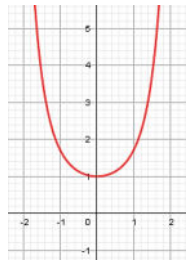
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\underset{u\to+\infty}{\overset{x^2=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u-1}{u}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{1}=+\infty$, οπότε η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\cancel{x}e^{x^2}}{3x^{\cancel{2}}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4xe^{x^2}}{3}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cancel{x}e^{x^2}}{3x^{\cancel{2}}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4xe^{x^2}}{3}=0$,

οπότε η f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

ζ) σχήμα



η) Παρατηρούμε ότι η f είναι άρτια, οπότε $f(-1)=f(1)=e-1$ και f συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, οπότε στο διάστημα $[-1,1]$ εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle.

24.α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^x+\ln x-\frac{1}{x}, x>0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-e^x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ και δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο $g''(x)=f''(x)-e^x-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}$.

Έχουμε $g''(x)-g'(x)=f''(x)-e^x-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-f'(x)+e^x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=$

$f''(x)-f'(x)-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x}=\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow$

$g''(x)=g'(x)\Leftrightarrow g'(x)=c\cdot e^x, c\in\mathbb{R}$

Όμως $g'(1)=f'(1)-e+2=e-2-e+2=0$ οπότε

$g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=c_1, c_1\in\mathbb{R}$.

Για x=1 : $g(1)=f(1)-e-1=e+1-e-1=0$ οπότε

$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)-e^x+\ln x-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow f(x)=e^x-\ln x+\frac{1}{x}, x>0$

β) i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ και δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο $f''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}>0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επομένως η f' έχει σύνολο τιμών το

$f'((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f'(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1-\infty-\infty=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty-0-0=+\infty$.

Το $0\in f'((0,+\infty))$ άρα υπάρχει $x_0>0$ τέτοιος ώστε $f'(x_0)=0$.

Για $0<x<x_0\Leftrightarrow f'(x)<f'(x_0)=0$ και για

$x > x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_0]$, γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$ οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$.

ii) Η f' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$,

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 - 4 = \sqrt{e} - 6 < 0$, $f'(1) = e - 2 > 0$ άρα $f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f'(1) < 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$, η οποία είναι μοναδική όπως είδαμε και είναι το x_0.Έχουμε: $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} - \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}$ και

$f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 + \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} - \ln x_0 + \frac{1}{x_0} = \frac{2}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} - \ln x_0$. Όμως

$\frac{1}{2} < x_0 < 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{x_0} < 2 \Leftrightarrow 2 < \frac{2}{x_0} < 4\ (1), \frac{1}{2} < x_0 < 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{x_0} < 2 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{x_0^2} < 4\ (2)$

και $\frac{1}{2} < x_0 < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{2} < \ln x_0 < 0 \Leftrightarrow 0 < -\ln x_0 < -\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < -\ln x_0 < \ln 2\ (3)$.

Με πρόσθεση των σχέσεων (1),(2) και (3) έχουμε :

$3 < -\ln x_0 + \frac{2}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} < 8 + \ln 2 \Leftrightarrow 3 < f(x_0) < 8 + \ln 2$ οπότε $f(x_0) > 0$.

Το $f(x_0)$ ελάχιστο οπότε $f(x) \geq f(x_0) > 0$ για κάθε $x > 0$.

γ) i) Από το ερώτημα β) έχουμε $f''(x) > 0$ άρα η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

ii) Έστω $B(x_1, f(x_1))$, $x_1 > 0$ το σημείο επαφής της (ε) με την γραφική παράσταση της f.

Η (ε) έχει εξίσωση : $y - e^{x_1} + \ln x_1 - \frac{1}{x_1} = \left(e^{x_1} - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1^2}\right)(x - x_1) \Leftrightarrow$

$y = \left(e^{x_1} - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1^2}\right)x - e^{x_1}x_1 + 1 + \frac{1}{x_1} + e^{x_1} - \ln x_1 + \frac{1}{x_1} \Leftrightarrow$

$y = \left(e^{x_1} - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1^2}\right)x - e^{x_1}x_1 + 1 + \frac{2}{x_1} + e^{x_1} - \ln x_1$. Το σημείο Α ανήκει στην (ε) οπότε: $3 = -e^{x_1}x_1 + 1 + \frac{2}{x_1} + e^{x_1} - \ln x_1 \Leftrightarrow e^{x_1}(x_1 - 1) + \ln x_1 - \frac{2}{x_1} + 2 = 0$. (4)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=e^x(x-1)+\ln x-\frac{2}{x}+2,\ x>0$.

Η k είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $k'(x)=e^x\cdot x+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}>0$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και 1-1.

Από τη σχέση (4) έχουμε : $k(x_1)=0\Leftrightarrow k(x_1)=k(1)\Leftrightarrow x_1=1$ οπότε η (ε) έχει εξίσωση (ε) : $y=(e-2)x-e+1+2+e\Leftrightarrow y=(e-2)x+3$.

iii) Η f είναι κυρτή οπότε η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένης εκτός από το σημείο επαφής άρα :

$f(x)\geq(e-2)x+3\Leftrightarrow f(x)\geq ex-2x+3\Leftrightarrow e^x-\ln x+\frac{1}{x}\geq ex-2x+3\Leftrightarrow$

$xe^x-x\ln x+x\geq ex^2-2x^2+3x\Leftrightarrow xe^x-x\ln x\geq ex^2-2x^2+2x..$

δ) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x-\ln x+\frac{1}{x}\right)=1+\infty+\infty=+\infty$ άρα η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα x΄ x . $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-\ln x+\frac{1}{x}\right)=+\infty+0$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ άρα δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες..

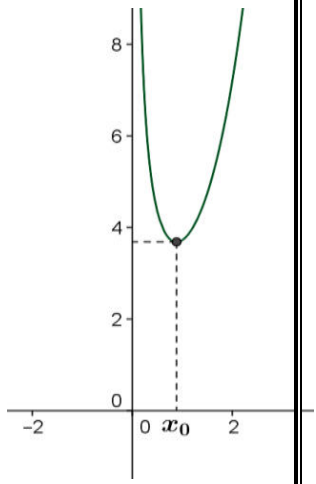
$(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\text{DLH}}{\underset{x\to+\infty}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0)$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-\ln x+\frac{1}{x}}{x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{\text{DLH}}{\underset{x\to+\infty}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ..

x	0	x_0	$+\infty$
f″	+		+
f′	−	0	+
f	↘ O.E		↗



Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

33648.α) i. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = 2\ln x \cdot (\ln x)' = \dfrac{2\ln x}{x}$.

Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$, η f είναι συνεχής, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 0$.

ii. Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) = 2\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = 2\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\dfrac{1-\ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq e$.

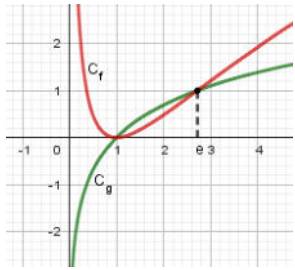
Για κάθε $x \in (0,e)$ είναι $f''(x) > 0$ και για κάθε $x > e$ είναι $f''(x) < 0$, η f είναι συνεχής ,οπότε είναι κυρτή στο $(0,e]$ και κοίλη στο $[e,+\infty)$. Έχει σημείο καμπής το $(e, f(e)) \equiv (e,1)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln^2 x \overset{\ln x = u}{=} \lim\limits_{u\to-\infty} u^2 = +\infty$ άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$, δηλαδή τον άξονα y΄y. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2\ln x}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\frac{1}{x}}{1} = 0$, άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

x	0	1	e	$+\infty$
f ΄΄	+	+	0	−
f ΄	−	0 +		+
f	↘	↗		↱



γ) i. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln^2 x - \ln x = 0 \Leftrightarrow$

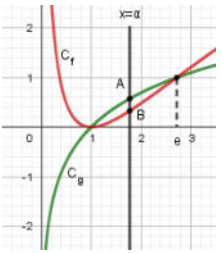
$\ln x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1)$ ή $(\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e)$.

Κοινά σημεία των C_f, C_g τα (1, 0) και (e, 1).

ii. Το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι

$d(\alpha) = (AB) = g(\alpha) - f(\alpha) = \ln\alpha - \ln^2\alpha,\ \alpha \in (1,e)$.

Για κάθε $\alpha \in (1,e)$ είναι $d'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \frac{2\ln\alpha}{\alpha} = \frac{1-2\ln\alpha}{\alpha}$.



$d'(\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2\ln\alpha}{\alpha} \geq 0 \Leftrightarrow 1-2\ln\alpha \geq 0 \Leftrightarrow$

$\ln\alpha \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \leq e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Για κάθε $\alpha \in (1,\sqrt{e})$ είναι $d'(\alpha) > 0$ και για κάθε $\alpha \in (\sqrt{e},e)$, είναι $d'(\alpha) < 0$, η d είναι συνεχής στο $(1,e)$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,\sqrt{e}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{e},e)$. Η d έχει μέγιστο για $\alpha = \sqrt{e}$.

33 Συνδυαστικές επαναληπτικές ασκήσεις

Επίπεδο Β1

1. α) $A_h=\{x\in A_g / g(x)\in A_f\}=\{x\in\mathbb{R} / e^x\neq -1 \text{ ισχύει}\}=\mathbb{R}$

$h(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

β) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h'(x)>0\Rightarrow h\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow h$ 1−1, οπότε αντιστρέφεται.

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}(1+e^{-x})}=1$.Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε έχει σύνολο τιμών το $h(\mathbb{R})=(0,1)$, άρα $A_{h^{-1}}=(0,1)$. Θέτουμε

$h(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{e^x}{e^x+1}=y\Leftrightarrow e^x=e^xy+y\Leftrightarrow e^x-ye^x=y\Leftrightarrow e^x(1-y)=y\overset{y\in(0,1)}{\Leftrightarrow}$

$e^x=\dfrac{y}{1-y}\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{y}{1-y}$. Άρα $h^{-1}(y)=\ln\dfrac{y}{1-y}$, $y\in(0,1)$, οπότε

$h^{-1}(x)=\ln\dfrac{x}{1-x}$, $x\in(0,1)$.

γ) Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με

$\varphi'(x)=\left(\ln\dfrac{x}{1-x}\right)'=(\ln x-\ln(1-x))'=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1}{x(1-x)}$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $\varphi'(x)>0\Rightarrow\varphi\nearrow(0,1)$, οπότε η φ δεν έχει ακρότατα.

Η φ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $\varphi''(x)=-\dfrac{(x-x^2)'}{x^2(1-x)^2}=\dfrac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$.

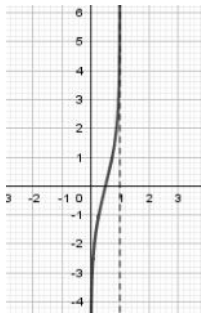
$\varphi''(x)\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{2x-1}{x^2(1-x)^2}\geq 0\Leftrightarrow 2x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq\dfrac{1}{2}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ είναι $\varphi''(x)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ είναι $\varphi''(x)>0$ και επειδή

η φ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Η φ έχει σημείο καμπής το $\left(\frac{1}{2},\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right)\equiv\left(\frac{1}{2},0\right)$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\frac{x}{1-x}\underset{\substack{x\to0^+\Rightarrow\\ u\to0^+}}{\overset{\frac{x}{1-x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$, άρα η ευθεία x = 0, δηλαδή ο άξονας y΄y, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\ln\frac{x}{1-x}\underset{\substack{x\to1^-\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{\frac{x}{1-x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$, άρα η ευθεία x = 1,είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.



x	0	1/2	1
φ″	–	+	
φ′	+	0	+
φ	↱	↴	

ε) $g(x)\ge\alpha(x+1)f(x)+1\Leftrightarrow e^x\ge\alpha\cancel{(x+1)}\frac{x}{\cancel{x+1}}+1\Leftrightarrow$

$e^x-\alpha x-1\ge0$ (1). Έστω $t(x)=e^x-\alpha x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $t(0)=0$, οπότε η (1) γίνεται: $t(x)\ge t(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η t έχει ελάχιστο για x = 0 που είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η t είναι παραγωγίσιμη με $t'(x)=e^x-\alpha$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $t'(0)=0\Leftrightarrow1-\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=1$.

στ) Η εφαπτομένη της C_g στο x = 0 είναι ε: $y-g(0)=g'(0)x\Leftrightarrow y=x+1$.

Αρχικά θα αναζητήσουμε σημείο $(x_1,f(x_1))$, στο οποίο είναι $f'(x_1)=\lambda_\varepsilon=1$

.Είναι $f'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$, οπότε

$f'(x_1)=1\Leftrightarrow\frac{1}{(x_1+1)^2}=1\Leftrightarrow(x_1+1)^2=1\Leftrightarrow x_1+1=\pm1\Leftrightarrow x_1=0$ ή $x_1=-2$

Η εφαπτομένη της C_f στο x = 0 έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=x$ και δεν είναι η ε. Η εφαπτομένη της C_f στο x = -2 έχει εξίσωση $y-f(-2)=f'(-2)(x+2)\Leftrightarrow y=x+4$ και δεν είναι η ε.

Επομένως η εφαπτομένη της C_g στο σημείο που τέμνει τον άξονα y΄y δεν

εφάπτεται και στη C_f .

2. α) Είναι $f'(x)=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{\cancel{e^x}+1-\cancel{e^x}}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x+1}>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$

β) Είναι $f''(x)=-\dfrac{\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=-\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0\Rightarrow f\cap\downarrow\mathbb{R}$

γ) Έστω $g(x)=xf'(x)-f(x)-\ln 2,\ x\geq 0$.

Είναι $g'(x)=xf''(x)<0$ για $x>0$,η g συνεχής στο $[0,+\infty)$ οπότε $g\searrow[0,+\infty)$.

Για κάθε

$$x>0\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(0)\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)-\ln 2<0\Leftrightarrow xf'(x)<f(x)+\ln 2$$

δ) $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f1-1$, οπότε αντιστρέφεται. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-\ln\left(e^x+1\right)\right]=-\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+1}\overset{\substack{\frac{e^x}{e^x+1}=u\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+e^{-x}\right)}=1}}{=}\lim_{u\to 1}\ln u=0 .$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε έχει σύνολο τιμών το

$f(\mathbb{R})=(-\infty,0)$, άρα $A_{f^{-1}}=(-\infty,0)$. $f(x)=y\Leftrightarrow\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}=y\Leftrightarrow$

$$\frac{e^x}{e^x+1}=e^y\Leftrightarrow e^x=e^xe^y+e^y\Leftrightarrow e^x-e^xe^y=e^y\Leftrightarrow e^x\left(1-e^y\right)=e^y\Leftrightarrow$$

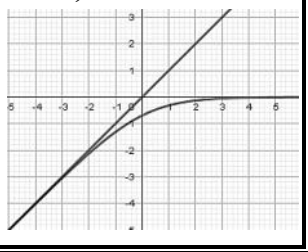
$e^x=\dfrac{e^y}{1-e^y}\overset{y<0}{\Leftrightarrow}x=\ln\dfrac{e^y}{1-e^y}$, άρα $f^{-1}(y)=\ln\dfrac{e^y}{1-e^y}$, $y<0$, οπότε

$f^{-1}(x)=\ln\dfrac{e^x}{1-e^x}$, $x<0$.

ε) Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, η ευθεία y = 0, δηλαδή ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\ln\left(e^x+1\right)\dfrac{1}{x}\right)=1-0\cdot 0=1$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\ln\left(e^x+1\right)\right)=0$, άρα η ευθεία y = x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

στ) σχήμα



3. α) $\ln\left(e^{f(x)}x^3\right)=x^3 \Leftrightarrow \ln e^{f(x)}+\ln x^3=x^3 \Leftrightarrow$

$f(x)+3\ln x=x^3 \Leftrightarrow f(x)=x^3-3\ln x$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{x}=\dfrac{3\left(x^3-1\right)}{x}$. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=1$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x)=6x+\dfrac{3}{x^2}$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)>0 \Rightarrow f\cup(0,+\infty)$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3-3\ln x\right)=+\infty$, οπότε η x = 0, δηλαδή ο άξονας y ΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-3\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(1-\frac{3\ln x}{x^3}\right)\right]=+\infty(1-0)=+\infty$$ γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x^3}=0$$, άρα η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$, οπότε η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

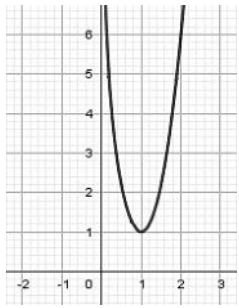
δ) $x^3-2=3\ln x \Leftrightarrow x^3-3\ln x=2 \Leftrightarrow f(x)=2$

Είναι $f(1)=1,\ f(e)=e^3-3$ και $f(1)<2<f(e)$. Επειδή η f είναι συνεχής, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=2$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,e)$ το x_0 είναι μοναδικό.

ε) Στο διάστημα $\Delta_1=(0,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=(1,+\infty)$. Στο διάστημα $\Delta_2=(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=(1,+\infty)$.Επειδή $1821\in\Delta_2$, είναι $f(1821)\in f(\Delta_2)$, οπότε και

$f(1821) \in f(\Delta_1)$, επομένως υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε

$f(x_1) = f(1821)$



στ)

x	0	1	$+\infty$
f''	+		+
f'	–	0	+
f	↘		↗

ζ) $f(x) \geq x^3 - \alpha x + \alpha \Leftrightarrow x^3 - 3\ln x \geq x^3 - \alpha x + \alpha \Leftrightarrow$

$\alpha x - \alpha - 3\ln x \geq 0 \, (4)$

Έστω $h(x) = \alpha x - \alpha - 3\ln x,\ x > 0$. Παρατηρούμε ότι

$h(1) = \alpha - \alpha - 3\ln 1 = 0$, οπότε η (4) γράφεται $h(x) \geq h(1)$ (5).

Λόγω της (5) η h παρουσιάζει ελάχιστο στο x= 1 το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

με $h'(x) = \alpha - \dfrac{3}{x}$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι

$h'(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$.

4. α) i. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει να ισχύει : $x \neq 0$ και

$\alpha x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ ,αν } \alpha > 0 \\ x < 0 \text{ ,αν } \alpha < 0 \end{cases}$ οπότε για να έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ πρέπει

$\alpha > 0$.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\alpha x)}{x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Έχουμε : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\alpha x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 5x + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\alpha x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha x = +\infty$ οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{\alpha x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 5x + 1}\right) \underset{x\to+\infty,\ u\to+\infty}{\overset{u=\frac{\alpha x^3+2x^2+1}{x^2+5x+1}}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = 0$ από β)i).

β) Η f είναι παραγωγίσιμη με τύπο $f'(x) = \dfrac{1 - \ln \alpha x}{x^2}$

Η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη στο σημείο της $A\left(\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ την

ευθεία (ε) με εξίσωση $y = 4x + \beta$ οπότε

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=4 \Leftrightarrow \frac{1-\ln\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{4}}=4 \Leftrightarrow \not{4}\left(1-\ln\frac{\alpha}{2}\right)=\not{4} \Leftrightarrow \not{1}-\ln\frac{\alpha}{2}=\not{1} \Leftrightarrow \ln\frac{\alpha}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$\frac{\alpha}{2}=1 \Leftrightarrow \alpha=2$. Επομένως η f έχει τύπο $f(x)=\frac{\ln 2x}{x}$.

Το σημείο Α ανήκει στην (ε) οπότε $f\left(\frac{1}{2}\right)=4\cdot\frac{1}{2}+\beta \Leftrightarrow 0=2+\beta \Leftrightarrow \beta=-2$.

γ) Η g είναι περιττή οπότε $g(-x)=-g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ έχουμε $g(0)=-g(0) \Leftrightarrow 2g(0)=0 \Leftrightarrow g(0)=0$ οπότε $B(0,0)$.

Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της (δ) με την γραφική παράσταση της f.

Η (δ) έχει εξίσωση :

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-\frac{\ln 2x_0}{x_0}=\frac{1-\ln 2x_0}{x_0^2}(x-x_0) \Leftrightarrow$$

$$y=\frac{1-\ln 2x_0}{x_0^2}\cdot x-\frac{1-\ln 2x_0}{x_0}+\frac{\ln 2x_0}{x_0} \Leftrightarrow y=\frac{1-\ln 2x_0}{x_0^2}\cdot x+\frac{2\ln 2x_0-1}{x_0}.$$

Η (δ) διέρχεται από το σημείο Β οπότε :

$$0=\frac{1-\ln 2x_0}{x_0^2}\cdot 0+\frac{2\ln 2x_0-1}{x_0} \Leftrightarrow \frac{2\ln 2x_0-1}{x_0}=0 \Leftrightarrow 2\ln 2x_0-1=0 \Leftrightarrow$$

$2\ln 2x_0=1 \Leftrightarrow \ln 2x_0=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x_0=e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x_0=\frac{\sqrt{e}}{2}$, άρα η (δ) έχει εξίσωση :

$$y=\frac{1-\ln\sqrt{e}}{\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^2}\cdot x+\frac{2\ln\sqrt{e}-1}{\frac{\sqrt{e}}{2}} \Leftrightarrow y=\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{e}{4}}\cdot x+\frac{1-\not{1}^{0}}{\frac{\sqrt{e}}{2}} \Leftrightarrow y=\frac{\frac{1}{\not{2}}}{\frac{e}{\not{4}^{2}}}\cdot x \Leftrightarrow y=\frac{2}{e}\cdot x$$

δ) Βρίσκουμε το σημείο τομής των (δ) και

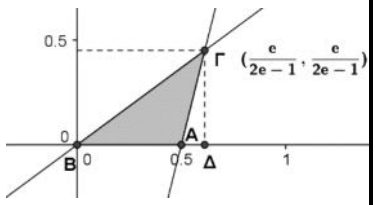
$$(\varepsilon): \frac{2}{e}\cdot x=4x-2 \Leftrightarrow 2x=4ex-2e \Leftrightarrow$$

$$(4e-2)\cdot x=2e \Leftrightarrow x=\frac{2e}{4e-2} \Leftrightarrow$$

$x=\frac{e}{2e-1}$. Για $x=\frac{e}{2e-1}$ έχουμε $y=\frac{2}{2e-1}$

οπότε το σημείο τομής τους είναι

το $\Gamma\left(\frac{e}{2e-1},\frac{2}{2e-1}\right)$ και το ζητούμενο εμβαδόν είναι το :



$(\text{ΒΑΓ}) = \frac{1}{2}(\text{ΒΑ})\cdot(\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2e-1} = \frac{1}{4e-2}$.

5. α) Έστω $h(x) = \frac{f(x)-2}{x-2}$, $x \neq 2$ με $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = 2$.Τότε:

$h(x)(x-2) = f(x)-2 \Leftrightarrow f(x) = h(x)(x-2)+2$. Είναι

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left[h(x)(x-2)+2\right] = 2$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι και

$f(2) = 2$. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2} = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 2 \Leftrightarrow f'(2) = 2$

β) Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και στο $(0,2)$. Επειδή $f(0) = f(2)$, εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[0,2]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, το ξ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

Επομένως υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο (ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

γ) Για κάθε $x < \xi \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,\xi]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε

$x > \xi \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[\xi,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο στο $x = \xi$, οπότε $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) 1ος τρόπος

Έστω $g(x) = f(x) - 2x + 2,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = f'(x) - 2 = f'(x) - f'(2)$.

Για κάθε $x < 2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(2) \Leftrightarrow g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty,2]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε

$x > 2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(2) \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η g έχει ελάχιστο στο $x = 2$, οπότε $g(x) \geq g(2) \Leftrightarrow f(x) - 2x + 2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2ος τρόπος

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο x = 2 έχει εξίσωση

$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y = 2x - 2$.

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \geq 2x-2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Επειδή $f(x) \geq 2x-2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to +\infty}(2x-2) = +\infty$ είναι και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

στ) Αν $\alpha = \beta$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha < \beta$ τότε λόγω του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$, υπάρχει $\rho \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Είναι $\alpha < \rho < \beta \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) < f'(\rho) < f'(\beta) \Leftrightarrow f'(\alpha) < \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < f'(\beta) \Leftrightarrow$

$f'(\alpha)(\beta-\alpha) < f(\beta)-f(\alpha) < f'(\beta)(\beta-\alpha)$. Ομοίως αν $\alpha > \beta$.

6. α) Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_g με την γραφική παράσταση της f. Τότε: $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \alpha e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow e^{x_0} = \dfrac{1}{\alpha} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} x_0 = -\ln\alpha$ και

$f(x_0) = x_0 + \beta \Leftrightarrow \alpha e^{x_0} + 1 = x_0 + \beta \Leftrightarrow 2 = -\ln\alpha + \beta \Leftrightarrow \beta = 2 + \ln\alpha.$

β) $f(g(x)) = e^{x+2} + 1 \Leftrightarrow \alpha e^{x+\beta} \cancel{+1} = e^{x+2} \cancel{+1} \overset{\alpha)\text{ερώτημα}}{\Leftrightarrow}$

$\alpha e^{x+2+\ln\alpha} = e^{x+2} \Leftrightarrow \alpha \cancel{e^{x+2}} \cdot e^{\ln\alpha} = \cancel{e^{x+2}} \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha = 1$ και $\beta = 2 + \ln 1 = 2$.

Για $\alpha = 1, \beta = 2$ έχουμε $f(x) = e^x + 1$ και $g(x) = x + 2$. Επίσης $\varphi(x) = e^{x+2} + 1, x \in \mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$x_1 + 2 < x_2 + 2 \Leftrightarrow e^{x_1+2} < e^{x_2+2} \Leftrightarrow e^{x_1+2} + 1 < e^{x_2+2} + 1 \Leftrightarrow$

$\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα και 1-1 άρα αντιστρέφεται.

(ή Η φ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $\varphi'(x) = e^{x+2} > 0$ οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα και 1-1 άρα αντιστρέφεται.) Η φ έχει σύνολο τιμών το

$\varphi(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x \to -\infty}\varphi(x), \lim\limits_{x \to +\infty}\varphi(x)\right) = (0+1, +\infty+1) = (1, +\infty) = A_{\varphi^{-1}}$.

Θέτω $\varphi(x) = y \Leftrightarrow e^{x+2} + 1 = y \Leftrightarrow e^{x+2} = y - 1 \Leftrightarrow x + 2 = \ln(y-1) \Leftrightarrow$

$x = \ln(y-1) - 2 \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) = \ln(y-1) - 2$ οπότε $\varphi^{-1}(x) = \ln(x-1) - 2, x > 1$.

δ) i) Από τη σχέση: $g(x) \leq k(x) \leq f(x)$ για $x = 0$ έχουμε: $2 \leq k(0) \leq 2$

οπότε $k(0) = 2$. Επίσης $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 2 = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x \to 0} k(x) = 2 = k(0)$ άρα η k είναι συνεχής στο 0.

ii) $g(x)\le k(x)\le f(x)\Leftrightarrow x+2\le k(x)\le f(x)\Leftrightarrow x\le k(x)-2\le f(x)-2\Leftrightarrow$
$x\le k(x)-k(0)\le f(x)-f(0)$. (*)

Από τη σχέση (*) για $x>0$ έχουμε : $1\le\dfrac{k(x)-k(0)}{x}\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=e^0=1$ οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{k(x)-k(0)}{x}=1$ (1)

Από τη σχέση (*) για $x<0$ έχουμε : $1\ge\dfrac{k(x)-k(0)}{x}\ge\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=e^0=1$ οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{k(x)-k(0)}{x}=1$ (2)

Από (1),(2) έχουμε : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k(x)-k(0)}{x}=1$ άρα η k είναι παραγωγίσιμη στο 0 με
$k'(0)=1$

7. α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής στο $x_0=0$, οπότε
$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow$
$\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+x+\alpha)=\lim\limits_{x\to0^+}(\beta\eta\mu x-1)=-1\Leftrightarrow\alpha=-1$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+x-1+1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}}=1$,

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\beta\eta\mu x-1+1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\beta\dfrac{\eta\mu x}{x}=\beta$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, είναι $\beta=1$.

β) Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ έχει εξίσωση
$y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y+1=x\Leftrightarrow y=x-1$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}-\dfrac{1}{x}\right)=0-0=0$ γιατί για κάθε $x>0$

είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{x}\le\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{x}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, οπότε

από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f(x)}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}+x\right)=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x-1}-x\right)}{\sqrt{x^2+x-1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-1-\cancel{x^2}}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1\right)}=\frac{1}{-1-1}=-\frac{1}{2}$$

ε) Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)=\left(x^2+x-1\right)'=2x+1$.

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 2x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq-\dfrac{1}{2}$.

Για κάθε $x<-\dfrac{1}{2}$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $-\dfrac{1}{2}<x<0$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Τώρα επειδή η $y=\eta\mu x-1$ είναι κατακόρυφη μετατόπιση της βασικής συνάρτησης $y=\eta\mu x$ και η μονοτονία της είναι γνωστή, ισχύει ότι $f\nearrow\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\searrow\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ και $\nearrow\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$. Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στα $-\dfrac{1}{2},\dfrac{3\pi}{2}$ τα $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{5}{4},f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-2$ αντίστοιχα και τοπικό μέγιστο στο $\dfrac{\pi}{2}$ το $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

8. α) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=6x^2+2\alpha x+\beta$. Επειδή η f έχει

ελάχιστη κλίση στο σημείο $A\left(\frac{1}{2},-\frac{11}{2}\right)$, η f' έχει ελάχιστο στο $x=\frac{1}{2}$ και

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{2}\Leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{8}+\alpha\cdot\frac{1}{4}+\beta\cdot\frac{1}{2}+1=-\frac{11}{2}\Leftrightarrow \alpha+2\beta=-27$ (1)

Είναι $f''(x)=12x+2\alpha\geq 0\Leftrightarrow x\geq -\frac{\alpha}{6}$.

1ος τρόπος: Επειδή η f' έχει ελάχιστο στο $x=\frac{1}{2}$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τότε από Θεώρημα Fermat:

$f''\left(\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow 6+2\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=-3$

Τότε από την σχέση (1) είναι $-3+2\beta=-27\Leftrightarrow 2\beta=-24\Leftrightarrow \beta=-12$.

Για $\beta=-12$ και $\alpha=-3$ είναι $f''(x)=12x-6$

Για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ είναι $f''(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ είναι $f''(x)>0$. Επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, οπότε η f' έχει ελάχιστο στο $x=\frac{1}{2}$.

2ος τρόπος: Για κάθε $x<-\frac{\alpha}{6}$ είναι $f''(x)<0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left(-\infty,-\frac{\alpha}{6}\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>-\frac{\alpha}{6}$ είναι $f''(x)>0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\alpha}{6},+\infty\right)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f' έχει ελάχιστο στο $x=-\frac{\alpha}{6}$, άρα $-\frac{\alpha}{6}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \alpha=-3$.

Τότε από την σχέση (1) είναι $-3+2\beta=-27\Leftrightarrow 2\beta=-24\Leftrightarrow \beta=-12$

β) Είναι $f'(x)=6x^2-6x-12=6\left(x^2-x-2\right)$.

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow x^2-x-2\geq 0\Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 2$

Για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,-1],[2,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από αυτά. Για κάθε $x\in(-1,2)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1,2]$, είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό. Η f έχει τοπικό μέγιστο το

$f(-1)=-2-3+12+1=8$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2)=-19$.

γ) Είναι $f(0)=1$, $f(1)=-12$, δηλαδή $f(0)f(1)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική, εφαρμόζεται για αυτήν το θεώρημα Bolzano στο $[0,1]$, άρα κ = 0.

δ) Έστω $M(x_0,f(x_0))$, $x_0\in\mathbb{R}$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η ευθεία ε με εξίσωση: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, πρέπει:

$-f(x_0)=f'(x_0)(-x_0)\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0\Leftrightarrow$

$x_0(6x_0^2-6x_0-12)-2x_0^3+3x_0^2+12x_0-1=0\Leftrightarrow$

$6x_0^3-6x_0^2-12x_0-2x_0^3+3x_0^2+12x_0-1=0\Leftrightarrow$

$4x_0^3-3x_0^2-1=0\overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow}(x_0-1)(4x_0^2+x_0+1)=0\Leftrightarrow x_0=1$ ή

$4x_0^2+x_0+1=0$ αδύνατη ($\Delta<0$)

Άρα ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+12=-12(x-1)\Leftrightarrow y=-12x$.

9. α) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της άρα και στο 1 οπότε :

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+x+1)=\alpha\Leftrightarrow1=\alpha$.

β) Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3+x^2+x-x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^2=0$,

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+x+x-x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $f'(x)=2x+1$, στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=3x^2$.

γ) Για $x<0$: $f'(x)=-3\Leftrightarrow2x+1=-3\Leftrightarrow2x=-4\Leftrightarrow x=-2$.

Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο αυτό είναι :

$y-f(-2)=f'(-2)(x+2)\Leftrightarrow y-3=-3(x+2)\Leftrightarrow y=-3x-3$.

Για $x>0$: $f'(x)=-3\Leftrightarrow3x^2=-3$ αδύνατη .

δ) Έστω $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης με την γραφική παράσταση της f. Αν $x_0<0$: Η εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-x_0^2-x_0-1=(2x_0+1)(x-x_0)\Leftrightarrow$

$y=(2x_0+1)x-x_0^2+1$. Το σημείο (0,0) ανήκει στην εφαπτομένη οπότε :

$0=-x_0^2+1\Leftrightarrow x_0^2=1\overset{x_0<0}{\Leftrightarrow}x_0=-1$ και (ε): $y=-x$.

Αν $x_0 > 0$: Η εφαπτομένη έχει εξίσωση :

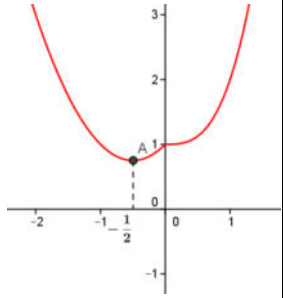
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$

$y - x_0^3 - 1 = 3x_0^2(x - x_0) \Leftrightarrow y = 3x_0^2 x - 2x_0^3 + 1$.

Το σημείο (0,0) ανήκει στην εφαπτομένη οπότε :

$0 = -2x_0^3 + 1 \Leftrightarrow 2x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ άρα

είναι (ε): $y = 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 x - 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2}}x$



ε) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από την παραβολή $y = x^2 + x + 1, x < 0$ και την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^3 + 1, x > 0$, η οποία είναι η κατακόρυφη μετατόπιση της καμπύλης $y = x^3$ κατά 1 προς τα πάνω.

10. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,με παράγωγο $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$

Τα εσωτερικά σημεία $-1,1$ είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, η f είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά οπότε ισχύει το θεώρημα Fermat άρα :

$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha - 2\beta + \gamma = 0(1)$ και $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0(2)$

Με αφαίρεση της σχέσης (1) από την (2) έχουμε $4\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$.

β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,με δεύτερη παράγωγο

$f''(x) = 6\alpha x + 2\beta \overset{\beta=0}{=} 6\alpha x$.Έχουμε:

$f(0) = 2 \Leftrightarrow \delta = 2$, $f''(1) = 6 \Leftrightarrow 6\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Από τη σχέση (1) έχουμε $3 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -3$ οπότε : $f(x) = x^3 - 3x + 2, x \in \mathbb{R}$.

γ) Έχουμε $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 \geq 3 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$ ή $x \leq -1$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν πολυωνυμική. Όμως $f'(x) > 0$ στα διαστήματα $(-\infty,-1),(1,+\infty)$, $f'(x) < 0$ στο $(-1,1)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1][1,+\infty)$,γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$ άρα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το $f(-1) = 4$ και τοπικό ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 0$.

δ) Έστω $A_1 = (-\infty,-1), A_2 = [-1,1]$ και $A_3 = (1,+\infty)$.

Λόγω της μονοτονίας και της συνέχειας στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε :

$f(A_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)\right) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 - 3x + 2), f(-1)\right) =$

$\left(\lim\limits_{x\to-\infty} x^3, 4\right) = (-\infty, 4)$, $f(A_2) = [f(1), f(-1)] = [0,4]$ και

$f(A_3)=\left(\lim\limits_{x\to 1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left(f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x+2\right)\right)=\left(0,\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\right)=(0,+\infty)$.

Αν:

- $\alpha<0$,τότε το α ανήκει μόνο στο $f(A_1)$,οπότε υπάρχει μοναδικός (λόγω της μονοτονίας) $\eta\in(-\infty,-1)$ τέτοιος ώστε $f(\eta)=\alpha$.
- $0<\alpha<4$,τότε το α ανήκει και στα $f(A_1),f(A_2),f(A_3)$,οπότε υπάρχουν μοναδικοί (λόγω της μονοτονίας) $x_1\in A_1,x_2\in A_2,x_3\in A_3$ τέτοιοι ώστε $f(x_1)=\alpha,f(x_2)=\alpha,f(x_3)=\alpha$.
- $\alpha>4$, τότε το α ανήκει μόνο στο $f(A_3)$,οπότε υπάρχει μοναδικός (λόγω της μονοτονίας) $\theta\in(1,+\infty)$ τέτοιος ώστε $f(\theta)=\alpha$.
- $\alpha=0$,τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα την $f(1)=0$ και μία ακόμη ρίζα <-1 αφού το α ανήκει και στο $f(A_1)$.
- $\alpha=4$,τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα την $f(-1)=4$ και μία ακόμη ρίζα >1 αφού το α ανήκει και στο $f(A_3)$.

11. α) $f(1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{2x^5+20}\cdot\sigma\upsilon\nu x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}}{x^{\not5}}\cdot\dfrac{3+\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{20}{x^5}}\cdot\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow$

$f(1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\dfrac{1^{\to0}}{\cancel{x}}}{2+\dfrac{20^{\to0}}{\cancel{x^5}}}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^4}=\dfrac{3}{2}\cdot0=0$, άρα

$f(1)=f(4)-1\Leftrightarrow0=f(4)-1\Leftrightarrow f(4)=1$.

($\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^4}\right|\le\left|\dfrac{1}{x^4}\right|\underset{x>0}{\overset{x\to+\infty}{=}}\dfrac{1}{x^4}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x^4}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^4}\le\dfrac{1}{x^4}$. Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^4}\right)$

οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^4}=0$).

β) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x+5}+3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9x^2+3x+5}\right)^2-9x^2}{\sqrt{9x^2+3x+5}-3x}=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{9x^2}+3x+5-\cancel{9x^2}}{\sqrt{9x^2+3x+5}-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}}\cdot\frac{3+\frac{5^{\to 0}}{x}}{\sqrt{9+\frac{3^{\to 0}}{x}+\frac{5^{\to 0}}{x^2}}+3}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$$

γ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=3^x\ln 3-1$. Έχουμε

$$g'(x)\ge 0\Leftrightarrow 3^x\ln 3-1\ge 0\Leftrightarrow 3^x\ln 3\ge 1\overset{\ln 3>\ln 1=0}{\Leftrightarrow} 3^x\ge\frac{1}{\ln 3}\Leftrightarrow x\ge\ln\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\Leftrightarrow.$$

$x\ge-\ln(\ln 3)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,άρα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Όμως $g'(x)>0$ στο $(-\ln(\ln 3),+\infty)$, $g'(x)<0$ στο $(-\infty,-\ln(\ln 3))$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\ln(\ln 3),+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-\ln(\ln 3)]$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $-\ln(\ln 3)$. Επομένως $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\ln(\ln 3)<0$.

$(-\ln(\ln 3)<0\Leftrightarrow\ln(\ln 3)>0=\ln 1\Leftrightarrow\ln 3>1=\ln e\Leftrightarrow 3>e$ ισχύει.

δ) 1,2,3 διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, η f συνεχής στο $[0,4]$ άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $[0,1),(1,2),(2,3),(3,4]$. Όμως

$f\left(\frac{1}{2}\right)<0, f\left(\frac{3}{2}\right)<0, f\left(\frac{5}{2}\right)<0, f(4)>0$ οπότε $f(x)<0$ στο $[0,1), f(x)<0$ στο $(1,2)$, $f(x)<0$ στο $(2,3)$ και $f(x)>0$ στο $(3,4]$.

12. α) Έχουμε : $A_f=(-\infty,2], A_g=\mathbb{R}$. Για το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ έχουμε:

$$\begin{cases}x\in A_f\\ f(x)\in A_g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ \sqrt{x-2}\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow x\le 2 \text{ οπότε } A_{g\circ f}=(-\infty,2].$$

Η $g\circ f$ έχει τύπο: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{2-x}^2+4=2-x+4=6-x$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,2)$ με παράγωγο $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}<0$.

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,2]$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Επομένως έχει σύνολο τιμών το

$f((-\infty,2])=\left[f(2),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=[0,+\infty)$ αφού

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty$ ($\lim_{x\to-\infty}(2-x)=\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$.

Άρα η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$.

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{2-x}=y \Leftrightarrow 2-x=y^2 \Leftrightarrow x=2-y^2 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=2-y^2$ οπότε η f^{-1} έχει τύπο $f^{-1}(x)=2-x^2, x\geq 0$.

γ) i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}}}{1+\dfrac{4}{x^2}}\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{\cancel{x}}^{0}\cdot\dfrac{\sqrt{\dfrac{2}{\cancel{x^2}}^{0}-\dfrac{1}{\cancel{x}}^{0}}}{1+\dfrac{4}{\cancel{x^2}}^{0}}\right)=0$.

ii) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\sqrt{g(x)-6}-\sqrt{2}}{f(x)}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{(x^2-2-2)\cdot\sqrt{2-x}}{(2-x)\cdot\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{(x^2-4)\cdot\sqrt{2-x}}{(2-x)\cdot\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2}\right)}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)\cdot\sqrt{2-x}}{-\cancel{(x-2)}\cdot\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to2^-}\left[-\dfrac{(x+2)\cdot\sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2}}\right]=-\dfrac{4\cdot0}{2\sqrt{2}}=0$.

iii) $\left|f(x)\eta\mu\dfrac{1}{g(x)}\right|\leq|f(x)|\overset{x<2}{\Leftrightarrow}-|f(x)|\leq f(x)\eta\mu\dfrac{1}{g(x)}\leq|f(x)|$.

Όμως $\lim\limits_{x\to2^-}|f(x)|=0=\lim\limits_{x\to2^-}\left(-|f(x)|\right)$ οπότε από Κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{g(x)}=0$

δ) Έστω (ζ) κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων της g και f^{-1}. Έστω $\Delta(x_1,g(x_1)), x_1\in\mathbb{R}$, $E(x_2,f^{-1}(x_2)), x_2\geq0$, τα σημεία επαφής της (ζ) με τις γραφικές παραστάσεις των g, f^{-1} αντίστοιχα. Η (ζ) έχει εξισώσεις αντίστοιχα $\zeta: y-g(x_1)=g'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y-x_1^2-4=2x_1(x-x_1)\Leftrightarrow$

$y=2x_1\cdot x-x_1^2+4.$ και

$y-f^{-1}(x_2)=\left(f^{-1}\right)'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow y-2+x_2^2=-2x_2(x-x_2)\Leftrightarrow$

$y=-2x_2\cdot x+x_2^2+2$. Εφ' όσον πρόκειται για την ίδια ευθεία πρέπει :

$\begin{cases} 2x_1 = -2x_2 \\ -x_1^2 + 4 = x_2^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ -x_2^2 + 4 = x_2^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ 2x_2^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$.

Άρα η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = -2x + 3$.

13. α) Η f είναι συνεχής στο $(0,1)$.

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0)$ και $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{x} = 1 = f(1)$ άρα τελικά η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0) \neq f(1)$ επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο διάστημα $[0,1]$.

β) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0$ και $f(0) = 0$, επομένως η f είναι συνεχής στο $x_1 = 0$.

Είναι $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3 - x^3) = 2$ και $f(1) = 1$, επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_2 = 1$. Επομένως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$.

γ) Για $x < 0$: Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 2x < 0$

Για $0 < x < 1$: Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

Για $x > 1$: Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = -3x^2 < 0$

Η f είναι συνεχής στο μηδέν και $f'(x) = 2x < 0$ για κάθε $x < 0$ άρα $f \searrow (-\infty, 0]$. Επίσης η f είναι συνεχής στο μηδέν και μη συνεχής στο 1 και $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ για κάθε $0 < x < 1$ άρα $f \nearrow [0,1)$.

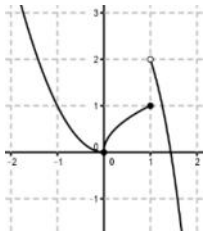
x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+		−
f	2		1		2

Είναι $f'(x) = -3x^2 < 0$ για κάθε $x > 1$ άρα $f \searrow (1,+\infty)$. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο μηδέν το $f(0) = 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \leq f(1)$ και $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) > f(1)$ δεν ικανοποιείται ο ορισμός του τοπικού μέγιστου στο 1 και δεν είναι ακρότατο το f(1).

δ) Οι δύο πρώτοι κλάδοι της συνάρτησης είναι γνωστές συναρτήσεις άρα

σχεδιάζονται εύκολα. Ο τρίτος κλάδος είναι η $y=-x^3$, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα x΄x με την $y=x^3$, μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

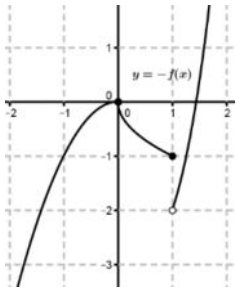


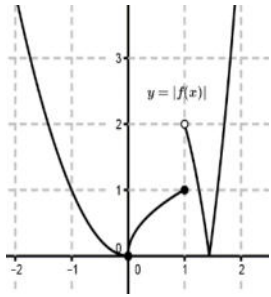
ε) $D_{\sqrt{f}}=\{x\in D_f / f(x)\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R} / x\leq\sqrt[3]{3}\}=(-\infty,\sqrt[3]{3}]$
γιατί έχουμε ότι:
Είναι $f(x)=x^2>0$ για κάθε $x<0$ και $f(x)=\sqrt{x}\geq 0$ για κάθε $0\leq x\leq 1$.
Για $x>1$: $f(x)\geq 0\Leftrightarrow 3-x^3\geq 0\Leftrightarrow x^3\leq 3\Rightarrow 1<x\leq\sqrt[3]{3}$

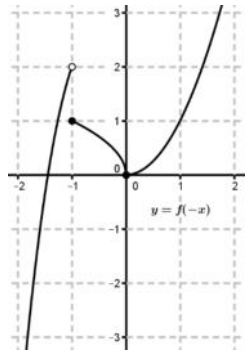
$D_{\frac{1}{f}}=\{x\in D_f / f(x)\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R} / x\neq 0 \text{ και } x\neq\sqrt[3]{3}\}=\mathbb{R}-\{0,\sqrt[3]{3}\}$

$D_{f(-x)}=\{x\in\mathbb{R} / -x\in D_f\}=\mathbb{R}$

στ) Η συνάρτηση $-f$ είναι συμμετρική της f ως προς τον άξονα x΄x. Η $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και τα συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x των σημείων που βρίσκονται κάτω από αυτόν. Η $f(-x)$ είναι συμμετρική της f ως προς τον άξονα y΄y.







Επίπεδο Β2

14. α) $f'(x)=\frac{x-1}{x}\Leftrightarrow f'(x)=1-\frac{1}{x}\Leftrightarrow f'(x)=(x-\ln x)'\Leftrightarrow$.
$f(x)=x-\ln x+c,\ c\in\mathbb{R}$.
Είναι $f(1)=1\Leftrightarrow 1+c=1\Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)=x-\ln x$.

β) $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}\geq 0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η είναι συνεχής στο $(0,1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και

επειδή η είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=1$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f''(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}>0\Rightarrow f\cup(0,+\infty)$$

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln x)=+\infty$, οπότε η ευθεία $x = 0$ (y΄y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)\right]=+\infty(1-0)=+\infty$ γιατί

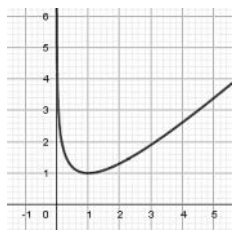
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$, άρα η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\cancel{x}-\ln x-\cancel{x})=-\infty$, άρα η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

δ)

x	0	1	$+\infty$
f''	+		+
f'	–	0	+
f	↘		↗



ε) $e^{x-\lambda}-x=0\Leftrightarrow e^{x-\lambda}=x\Leftrightarrow x-\lambda=\ln x\Leftrightarrow x-\ln x=\lambda\Leftrightarrow f(x)=\lambda$.

Στο διάστημα $\Delta_1=(0,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=(1,+\infty)$. Στο διάστημα $\Delta_2=(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=(1,+\infty)$.

- Αν $\lambda<1$, τότε $\lambda\notin f(A)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda=1$, τότε $\lambda\notin f(\Delta_1)$, $\lambda\notin f(\Delta_2)$. Επειδή $f(1)=1$ η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.
- Αν $\lambda>1$, τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$, $\lambda\in f(\Delta_2)$ και η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, μία σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1,Δ_2.

στ) Επειδή $f(\Delta_1)=f(\Delta_2)=(1,+\infty)$, υπάρχει $\alpha\in\Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha)=2$ και υπάρχει $\beta\in\Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(\beta)=2$. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και

παραγωγίσιμη στο (α,β). Επειδή $f(\alpha)=f(\beta)$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle την f στο $[\alpha,\beta]$.

ζ) Έστω $M\left(x(t),f\left(x(t)\right)\right)$.Η απόσταση του Μ από την αρχή Ο των αξόνων είναι $d(x)=\sqrt{x^2+f^2\left(x(t)\right)}$. Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης d είναι

$$d'(t)=\left(\sqrt{x^2(t)+f^2\left(x(t)\right)}\right)'=\frac{\left(x^2(t)+f^2\left(x(t)\right)\right)'}{2\sqrt{x^2(t)+f^2\left(x(t)\right)}}=$$

$$\frac{2x(t)x'(t)+2f\left(x(t)\right)f'\left(x(t)\right)x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+f^2\left(x(t)\right)}}.$$

Τη χρονική στιγμή t = 1 sec είναι $d'(1)=\frac{2x(1)x'(1)+2f(1)f'(1)}{2\sqrt{x^2(1)+f^2\left(x(1)\right)}}$.

Είναι $x(1)=1^3+3\cdot1-3=1$, $x'(t)=3t^2+3$ και $x'(1)=6$, οπότε

$$d'(1)=\frac{2x(1)x'(1)+2f\left(x(1)\right)f'\left(x(1)\right)x'(1)}{2\sqrt{x^2(1)+f^2\left(x(1)\right)}}=\frac{12+2f(1)\cancel{f'(1)^{0}}\cdot6}{2\sqrt{1+f^2(1)}}=3\sqrt{2}\text{cm/sec}$$

15. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x+1$ και $f''(x)=e^x>0\Rightarrow f\cup\mathbb{R}$.Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}+1 \text{ και } g''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}<0\Rightarrow g\cap\searrow(-1,+\infty)$$

Είναι $f(0)=1=g(0)$ και $g'(0)=1+1=2=f'(0)$, οπότε στο σημείο Μ οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη την ευθεία ε: $y-1=2x\Leftrightarrow y=2x+1$

β) Επειδή η f είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\geq 2x+1$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Επειδή η g είναι κοίλη, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $g(x)\leq 2x+1$ (2) για κάθε $x>-1$.Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $f(x)\geq g(x)\Leftrightarrow e^x+x\geq\ln(x+1)+x+1\Leftrightarrow e^x\geq\ln(x+1)+1$ για κάθε $x>-1$.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0-\infty=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty+\infty=+\infty$, οπότε η f έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.Επειδή η f είναι συνεχής και το 0 περιέχεται στο σύνολο

τιμών της, υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)=0 \Leftrightarrow e^{\rho}=-\rho$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα το ρ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0 \Leftrightarrow e^{x}=-x$.

Το ρ είναι η τετμημένη του κοινού σημείου των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y=e^{x}$ και $y=-x$. Παρατηρούμε ότι οι δύο καμπύλες τέμνονται σε σημείο του οποίου η τετμημένη βρίσκεται στο διάστημα $(-1,0)$. Πράγματι,

$f(-1)=e^{-1}-1=\frac{1}{e}-1<0$, $f(0)=1>0$, δηλαδή $f(-1)f(0)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής υπάρχει $\rho \in (-1,0)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)=0 \Leftrightarrow e^{\theta}=-\rho$. Το ρ είναι προφανώς η προηγούμενη ρίζα, μιας που η f έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

δ) $\frac{\ln\frac{\alpha+1}{\beta+1}}{\beta-\alpha}<1 \Leftrightarrow \ln(\alpha+1)-\ln(\beta+1)<\beta-\alpha \Leftrightarrow$

$\ln(\alpha+1)+\alpha-1<\ln(\beta+1)+\beta-1 \Leftrightarrow g(\alpha)<g(\beta)$ που ισχύει αφού η g είναι γνησίως αύξουσα και $-1<\alpha<\beta$.

ε) Έστω $\varphi(x)=e^{5x}+x^2+x^3-1$, $x \in [\rho,1]$. Είναι

$\varphi(\rho)=e^{5\rho}+\rho^2+\rho^3-1=\left(e^{\rho}\right)^5+\rho^2+\rho^3-1=(-\rho)^5+\rho^2+\rho^3-1 \Leftrightarrow$

$\varphi(\rho)=-\rho^5+\rho^2+\rho^3-1=\rho^2(1-\rho^3)-(1-\rho^3)=(\rho^2-1)(1-\rho^3)<0$.

Επειδή $-1<\rho<0$, είναι $0<\rho^2<1 \Leftrightarrow -1<\rho^2-1<0$ και $1-\rho^3>0$, άρα $\varphi(\rho)<0$ και $\varphi(1)=e^5+1>0$, δηλαδή $\varphi(\rho)\varphi(1)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, λόγω του θ.Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\rho,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0$.

16. α) Για $x \neq 0$ είναι $\ln\frac{f(x)}{x}=x-\alpha \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=e^{x-\alpha} \Leftrightarrow f(x)=xe^{x-\alpha}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και στο $x=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0) \Leftrightarrow f(0)=0$.

Άρα $f(x)=\begin{cases} xe^{x-\alpha}, x\neq 0 \\ 0 \quad , x=0 \end{cases}$, οπότε $f(x)=xe^{x-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^{x-\alpha}+xe^{x-\alpha}=e^{x-\alpha}(x+1)$.

Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=ex+1$, ισχύει ότι $f'(0)=e \Leftrightarrow e^{-\alpha}=e \Leftrightarrow -\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=-1$.

γ) Είναι $f'(x)=e^{x+1}(x+1)$.

Για κάθε $x<-1$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>-1$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(-1)=-1$.

δ) $\beta e^{\beta-\alpha}+\gamma e^{\gamma-\alpha}+(\delta-1)^2\le -2\Leftrightarrow f(\beta)+f(\gamma)+(\delta-1)^2\le -2\Leftrightarrow$

$f(\beta)+1+f(\gamma)+1+(\delta-1)^2\le 0$ (1). Επειδή η f έχει ελάχιστο το $f(-1)=-1$, είναι $f(x)\ge -1\Leftrightarrow f(x)+1\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=-1$. Επομένως $f(\alpha)\ge -1$, $f(\beta)\ge -1$, $(\delta-1)^2\ge 0$, οπότε

$f(\beta)+1+f(\gamma)+1+(\delta-1)^2\ge 0$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $f(\beta)+1+f(\gamma)+1+(\delta-1)^2=0$ οπότε

$f(\beta)+1=0\Leftrightarrow f(\beta)=-1\Leftrightarrow \beta=-1, f(\gamma)+1=0\Leftrightarrow f(\gamma)=-1\Leftrightarrow \gamma=-1$ και

$(\delta-1)^2=0\Leftrightarrow \delta-1=0\Leftrightarrow \delta=1$

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x-1}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x-1}}=0$ άρα η y = 0, δηλαδή ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

στ) $xe^x=\ln e^{\frac{\lambda}{e}}\Leftrightarrow xe^x=\dfrac{\lambda}{e}\Leftrightarrow xe^x\cdot e=\lambda\Leftrightarrow xe^{x+1}=\lambda\Leftrightarrow f(x)=\lambda$ (3)

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x+1}=+\infty$.Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,-1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=(-1,0)$. Στο διάστημα $\Delta_2=(-1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=(-1,+\infty)$.

-Αν λ < -1, τότε το λ δεν βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f, οπότε η (3) είναι αδύνατη.

- Αν λ = -1, τότε $\lambda\notin f(\Delta_1)$, $\lambda\notin f(\Delta_2)$, οπότε η (3) είναι αδύνατη στα Δ_1,Δ_2. Επειδή $f(-1)=-1=\lambda$, η (3) έχει μοναδική λύση την x – 1 στη περίπτωση αυτή.

- Αν $-1<\lambda<0$, τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$, $\lambda\in f(\Delta_2)$, οπότε η (3) έχει μία λύση σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1,Δ_2 .Άρα η (3) έχει δύο ακριβώς λύσεις αφού είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα αυτά.

- Αν $\lambda\ge 0$, τότε $\lambda\notin f(\Delta_1)$, $\lambda\in f(\Delta_2)$, οπότε η (3) έχει μία λύση στο Δ_2 αφού είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό.

17. α) i) Έχουμε : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\alpha x+\beta}+\gamma\right) \underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to-\infty}}{\overset{u=\alpha x+\beta}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty}\left(e^{u}+\gamma\right) = 0+\gamma = \gamma$

οπότε $\gamma = 1$.($\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha x+\beta) = \lim\limits_{x\to+\infty}\alpha x = \alpha\cdot(+\infty) = -\infty$ αφού $\alpha < 0$.)

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{e^{\alpha x}+2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{\alpha x+\beta}+1}{e^{\alpha x}+2} \underset{\substack{x\to-\infty,\\ u\to+\infty}}{\overset{u=e^{\alpha x}}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^{\beta}\cdot u+1}{u+2} \lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\not{u}\,\dfrac{e^{\beta}+\dfrac{1}{u}}{\not{u}}}{1+\dfrac{2}{u}} = e^{\beta}$ οπότε

$e^{\beta} = 1 \Leftrightarrow \beta = 0$. ($\lim\limits_{x\to-\infty}(\alpha x) = \alpha\cdot(-\infty) = +\infty$ αφού $\alpha < 0$.)

β) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = \alpha\cdot e^{\alpha\cdot0} = \alpha$ οπότε $\alpha = -1$ και

$f(x) = e^{-x}+1, x\in\mathbb{R}$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$h(x) = f(x)-g(x) = e^{-x}+1-\ln x+1 = e^{-x}-\ln x+2$.

Η h είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $h'(x) = -e^{-x}-\dfrac{1}{x} < 0$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε έχει σύνολο τιμών το

$h((0,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty}h(x), \lim\limits_{x\to0^+}h(x)\right) = (-\infty,+\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-\ln x+2\right) = 0-\infty+2 = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to0^+}h(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(e^{-x}-\ln x+2\right) = 1+\infty+2 = +\infty$.

Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της h, άρα υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$, μοναδικό αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη μεγαλύτερη του μηδενός.

δ) Για την f ισχύει το ΘΜΤ στο $[\kappa-1,\kappa+1]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\kappa-1,\kappa+1)$

τέτοιος ώστε : $f'(\xi) = \dfrac{f(k+1)-f(k-1)}{2} \Leftrightarrow -e^{-\xi} = \dfrac{f(k+1)-f(k-1)}{2}$.

Όμως $k-1<\xi<k+1 \Leftrightarrow -k-1<-\xi<-k+1 \Leftrightarrow e^{-k-1}<e^{-\xi}<e^{-k+1} \Leftrightarrow$

$-e^{-k+1}<-e^{-\xi}<e^{-k-1} \Leftrightarrow -e^{-k+1}<\dfrac{f(k+1)-f(k-1)}{2}<-e^{-k-1} \Leftrightarrow$

$-2e^{-k+1}<f(k+1)-f(k-1)<-2e^{-k-1} \Leftrightarrow 2e^{-k-1}<f(k-1)-f(k+1)<2e^{-k+1}$.

18. α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\alpha x-2}{|x|+\beta}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\alpha x-2}{x+\beta}=1 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(\alpha-\dfrac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\dfrac{\beta}{x}\right)}=1 \Leftrightarrow \alpha=1$. Είναι $f(x)=\dfrac{x-2}{|x|+\beta}=\begin{cases}-\dfrac{x-2}{x-\beta}, & x<0\\ \dfrac{x-2}{x+\beta}, & x\geq 0\end{cases}$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{x+\beta-x+2}{(x+\beta)^2}=\frac{\beta+2}{(x+\beta)^2}$$

Είναι $f'(4)=0,08 \Leftrightarrow \dfrac{\beta+2}{(4+\beta)^2}=\dfrac{8}{100} \Leftrightarrow 100\beta+200=128+64\beta+8\beta^2 \Leftrightarrow$

$8\beta^2-36\beta-72=0 \Leftrightarrow 2\beta^2-9\beta-18=0$, $\Delta=81+144=225$,

$\beta_{1,2}=\dfrac{9\pm 15}{4}=\begin{cases}6 & \text{Δεκτή}\\ -\dfrac{3}{2} & \text{Απορ}\end{cases}$ άρα $\beta=6$. Επομένως

$$f(x)=\frac{x-2}{|x|+6}=\begin{cases}-\dfrac{x-2}{x-6}, & x<0\\ \dfrac{x-2}{x+6}, & x\geq 0\end{cases}$$

β) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=-\frac{x+6-x+2}{(x+6)^2}=\frac{8}{(x+6)^2}>0$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\dfrac{x-2}{x-6}\right)=-\dfrac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x-2}{x+6}\right)=-\dfrac{1}{3}$ και

$f(0)=-\dfrac{1}{3}$ άρα η f είναι συνεχής στο 0. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

γ) Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με

$$f''(x)=-\frac{8}{(x-6)^3}>0$$

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=-\dfrac{16}{(x+6)^3}<0$

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{x-2}{x-6}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{x}{x}\right) = -1$

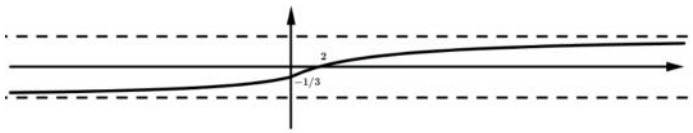
Άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=-1$ και από το α) ερώτημα έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=1$.

δ) Είναι $f(0) = -\dfrac{1}{3}$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A\left(0,-\dfrac{1}{3}\right)$.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$f''(x)$	+	−
$f'(x)$	+	+
f	↗	↗

Για $x<0$: $f(x)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{x-2}{x-6}=0 \Leftrightarrow x=2$

απορρίπτεται και για $x>0$: $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x+6}=0 \Leftrightarrow x=2$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $B(2,0)$.



ε) Η f↗ἰ άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Είναι $f((-\infty,0)) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to0^-} f(x)\right) = \left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)$ αφού f συνεχής και γνησίως αύξουσα. Είναι $f([0,+\infty)) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[-\dfrac{1}{3},1\right)$ αφού η f συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Για $x<0$ και $-1<y<-\dfrac{1}{3}$: $f(x)=y \Leftrightarrow -\dfrac{x-2}{x-6}=y \Leftrightarrow -x+2=yx-6y \Leftrightarrow$

$yx+x=6y+2 \Leftrightarrow x(y+1)=6y+2 \overset{y+1>0}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{6y+2}{y+1}$. Άρα

$f^{-1}(y)=\dfrac{6y+2}{y+1}$, $y\in\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)$

Για $x\geq0$ και $-\dfrac{1}{3}\leq y<1$: $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x+6}=y \Leftrightarrow x-2=yx+6y \Leftrightarrow$

$yx-x=-6y-2 \Leftrightarrow x(y-1)=-6y-2 \overset{y-1<0}{\Leftrightarrow} x=-\dfrac{6y+2}{y-1}$. Άρα

$f^{-1}(y)=-\dfrac{6y+2}{y-1}$, $y\in\left[-\dfrac{1}{3},1\right)$. Επομένως $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{6x+2}{x+1}, & x\in\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)\\ -\dfrac{6x+2}{x-1}, & x\in\left[-\dfrac{1}{3},1\right)\end{cases}$

19. α) Για κάθε $x\in[1,+\infty)$ έχουμε:

$\ln x\le f(x)+2\sqrt{\ln x}-1\Leftrightarrow f(x)\ge \ln x-2\sqrt{\ln x}+1\Leftrightarrow f(x)\ge\left(\sqrt{\ln x}-1\right)^2$ (1)

$f\left(e^{\left(\sqrt{\ln x+1}+1\right)^2}\right)-1\le \ln x$ (2). Θέτουμε $e^{\left(\sqrt{\ln x+1}+1\right)^2}=u\ge 1$ γιατί είναι

$\sqrt{\ln x+1}+1\ge 1\Leftrightarrow\left(\sqrt{\ln x+1}+1\right)^2\ge 1$ και είναι

$e^{\left(\sqrt{\ln x+1}+1\right)^2}=u\Leftrightarrow\left(\sqrt{\ln x+1}+1\right)^2=\ln u\Leftrightarrow$

$\left|\sqrt{\ln x+1}+1\right|=\sqrt{\ln u}\overset{\sqrt{\ln x+1}+1\ge 1}{\Leftrightarrow}\sqrt{\ln x+1}+1=\sqrt{\ln u}\Leftrightarrow\sqrt{\ln x+1}=\sqrt{\ln u}-1\Leftrightarrow$

$\ln x+1=\left(\sqrt{\ln u}-1\right)^2\Leftrightarrow\ln x=\left(\sqrt{\ln u}-1\right)^2-1$

Η (2) γίνεται $f(u)-1\le\left(\sqrt{\ln u}-1\right)^2-1\Leftrightarrow f(u)\le\left(\sqrt{\ln u}-1\right)^2$, άρα

$f(x)\le\left(\sqrt{\ln x}-1\right)^2$ (3) Από τις (1) και (3) έχουμε: $f(x)=\left(\sqrt{\ln x}-1\right)^2$, $x\ge 1$

β) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με παράγωγο

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{\ln x}-1}{x\sqrt{\ln x}}$. Είναι

$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{\ln x}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{\ln x}=1\Leftrightarrow\ln x=1\Leftrightarrow x=e$. Είναι $x\sqrt{\ln x}>0$ για κάθε $x>1$ και $\sqrt{\ln x}-1>0\Leftrightarrow\sqrt{\ln x}>1\Leftrightarrow\ln x>1\Leftrightarrow x>e$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1=f(1)$ άρα η f συνεχής στο 1 και επίσης η f συνεχής και στο e άρα $f\searrow[1,e]$ και $f\nearrow[e,+\infty)$. Η f παρουσιάζει στο $x=e$ ολικό ελάχιστο το $f(e)=0$ και τοπικό μέγιστο στο $x=1$ το $f(1)=1$.

γ) $f(x)=\left(\sqrt{\ln x}-1\right)^2$, $x\ge 1$. Έστω $g(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ και $h(x)=x-1$, $x\in\mathbb{R}$ τότε ορίζεται η σύνθεσή τους $g\circ h$ με πεδίο ορισμού και τύπο:

$D_{g\circ h}=\{x\in D_h / h(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}/x-1\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$ και

$(g\circ h)(x)=g(h(x))=(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$

Έστω τώρα και η συνάρτηση $v(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$ τότε ορίζεται $(g\circ h)\circ v$ με πεδίο ορισμού και τύπο:

$D_{(g\circ h)\circ v}=\{x\in D_v / v(x)\in D_{g\circ h}\}=\{x\geq 0/\sqrt{x}\in\mathbb{R}\}=[0,+\infty)$ και

$((g\circ h)\circ v)(x)=(g\circ h)(v(x))=(\sqrt{x}-1)^2$, $x\geq 0$

Τέλος έστω και η συνάρτηση $k(x)=\ln x$, $x>0$ τότε ορίζεται $((g\circ h)\circ v)\circ k$ με πεδίο ορισμού και τύπο:

$D_{((g\circ h)\circ v)\circ k}=\{x\in D_k / k(x)\in D_{(g\circ h)\circ v}\}=\{x>0/\ln x\geq 0\}=\{x>0/x\geq 1\}=[1,+\infty)$

$[((g\circ h)\circ v)\circ k](x)=((g\circ h)\circ v)(k(x))=(\sqrt{\ln x}-1)^2$, $x\geq 1$

δ) Η $f\searrow[1,e]$ και συνεχής στο διάστημα αυτό άρα:

$f([1,e])=[f(e),f(1)]=[0,1]$. Η $f\nearrow[e,+\infty)$ και συνεχής στο διάστημα αυτό άρα: $f((e,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to e^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$

Παρατηρούμε ότι $f([1,e])\cap f([e,+\infty))\neq\varnothing$, άρα υπάρχουν $x_1\in[1,e]$ και $x_2\in(e,+\infty)$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Rolle στο διάστημα αυτό.

2ος τρόπος

$f(1)=f(e^4)=1$. Η f συνεχής στο $[1,e^4]$, παραγωγίσιμη στο $(1,e^4)$ οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $[1,e^4]$.

ε) Είναι $x'(t)=1\Leftrightarrow x'(t)=(t)'\Leftrightarrow x(t)=t+c$

Για $t=1$ είναι $x(1)=1+c\Leftrightarrow 1=1+c\Leftrightarrow c=0$ άρα τελικά $x(t)=t$, $t\geq 1$.

Ισχύει ότι $y(t)=f(x(t))=\left(\sqrt{\ln x(t)}-1\right)^2=\left(\sqrt{\ln t}-1\right)^2$, $t\geq 1$ και προφανώς από το β) ερώτημα η τεταγμένη γίνεται ελάχιστη για $t=e$ sec .

20. α) Η f ορίζεται όταν $|x|+x\neq 0\Leftrightarrow|x|\neq -x\Leftrightarrow x>0$. Τότε

$$f(x)=\frac{2x^2-2}{|x|+x}=\frac{2x^2-2}{x+x}=\frac{2x^2-2}{2x}=\frac{\cancel{2}x^{\cancel{2}}}{\cancel{2}x}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x}=x-\frac{1}{x}.$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}>0\Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$

γ) i. Είναι $f\left(g\left(x\right)\right)=e^x-e^{-x} \Leftrightarrow f\left(g\left(x\right)\right)=e^x-\frac{1}{e^x} \Leftrightarrow f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(e^x\right) \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$g\left(x\right)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$

ii. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'\left(x\right)=e^x+e^{-x}>0 \Rightarrow \varphi\nearrow\mathbb{R} \Rightarrow \varphi\ 1-1$, οπότε η φ είναι αντιστρέψιμη.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-e^{-x}\right)=0-\left(+\infty\right)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-e^{-x}\right)=+\infty-0=+\infty$.

Επειδή η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $\varphi\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$.

iii. Επειδή το πεδίο ορισμού της φ^{-1} είναι το σύνολο τιμών της φ, είναι $A_{\varphi^{-1}}=\mathbb{R}$.

$\varphi\left(x\right)=y \Leftrightarrow e^x-e^{-x}=y \Leftrightarrow e^x-\frac{1}{e^x}=y \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2-1=ye^x \Leftrightarrow$

$\left(e^x\right)^2-ye^x-1=0$ (1). Θέτουμε $e^x=\omega>0$ και η (1) γίνεται $\omega^2-y\omega-1=0$. Η εξίσωση αυτή είναι $2^{ου}$ βαθμού ως προς ω με

$\Delta=y^2+4>0$ και ρίζες $\omega_{1,2}=\frac{y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}$.

Είναι $\omega>0 \Leftrightarrow \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}>0 \Leftrightarrow y+\sqrt{y^2+4}>0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+4}>-y$ (2)

Αν $y\geq 0$ τότε η (2) είναι αληθής.

Αν $y<0$ τότε η (2) γίνεται $\left(\sqrt{y^2+4}\right)^2>\left(-y\right)^2 \Leftrightarrow y^2+4>y^2$ ισχύει.

Είναι $\omega>0 \Leftrightarrow \frac{y-\sqrt{y^2+4}}{2}>0 \Leftrightarrow y-\sqrt{y^2+4}>0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+4}<y$ (3)

Αν $y\leq 0$ τότε η (2) είναι αδύνατη.

Αν $y>0$ τότε η (3) γίνεται $\left(\sqrt{y^2+4}\right)^2<y^2 \Leftrightarrow y^2+4<y^2$ αδύνατη.

Άρα $\omega=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} \Leftrightarrow e^x=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2} \Leftrightarrow x=\ln\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$.

Οπότε $\varphi^{-1}\left(y\right)=\ln\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2},\ y\in\mathbb{R}$, άρα $\varphi^{-1}\left(x\right)=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2},\ x\in\mathbb{R}$.

iv. $e^x-e^{-x}>x-\frac{1}{x} \Leftrightarrow f\left(g\left(x\right)\right)>f\left(x\right) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} g\left(x\right)>x \Leftrightarrow e^x>x$ που ισχύει γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x\geq x+1>x$.

21. α) Έστω $\dfrac{f(x)-\eta\mu x-1}{x}=\varphi(x),\ x\neq 0$ με $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lambda$.

Είναι $f(x)-\eta\mu x-1=x\varphi(x)\Leftrightarrow f(x)=x\varphi(x)+\eta\mu x+1$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0$, ισχύει ότι

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x\varphi(x)+\eta\mu x+1)=1$

β) Επειδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(0)=1>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\varphi(x)+\eta\mu x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\varphi(x)+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=\lambda+1$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=\lambda+1$.

δ) Γνωρίζουμε ότι αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_1,f(x_1))$, τότε $f'(x_1)=\varepsilon\varphi\omega$. Άρα στο σημείο Α είναι

$f'(0)=\varepsilon\varphi\omega\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=\lambda+1\geq 1$ γιατί $\lambda\geq 0$, οπότε $\varepsilon\varphi\omega\geq\varepsilon\varphi 45^{\circ}\Leftrightarrow\omega\geq 45^{\circ}$.

ε) $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\Leftrightarrow xf(x)-\sigma\upsilon\nu x=0$.

Έστω $h(x)=xf(x)-\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Είναι $h(0)=0-\sigma\upsilon\nu 0=-1<0$,

$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$, δηλαδή $h(0)h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow xf(x)-\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

22. α) Είναι $A_{g\circ h}=\{x\in A_h/\ h(x)\in A_g\}=\{x\geq 0/\sqrt[3]{x}\in\mathbb{R}\}=[0,+\infty)$ και

$(g\circ h)(x)=3\sqrt[3]{x}-\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=3\sqrt[3]{x}-x$

β) Για κάθε x > 0 η f είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x)=\left(3x^{\frac{1}{3}}-x\right)'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-1=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-1$

Στο x = 0 είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sqrt[3]{x}-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}-1\right)=+\infty$, οπότε

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x = 0.

γ) Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$x^2 \leq \frac{1}{27} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{9}, +\infty\right)$ είναι

$f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{9}\right]$ και

γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{9}, +\infty\right)$. Η f έχει μέγιστο το

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) = 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9}} - \frac{\sqrt{3}}{9} = 3\left(3^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{8\sqrt{3}}{9}.$$

δ) Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3\sqrt[3]{x} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\left(\frac{3}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} - 1\right)\right] = +\infty$ οπότε η f δεν έχει

οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3\frac{\sqrt[3]{x}}{x} - 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} - 1\right) = -1$ και

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3\sqrt[3]{x} - \cancel{x} + \cancel{x}\right) = +\infty$, οπότε η f δεν έχει πλάγια

ασύμπτωτη.

ε) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{g(x)} - x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{3x - x^3} - x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2\left(\frac{3}{x} - x\right)} - x\right) =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x\sqrt{\frac{3}{x} - x} - x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x\left(\sqrt{\frac{3}{x} - x} + 1\right)\right) = +\infty(+\infty) = +\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{x} - x\right) = +\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{3}{x} - x} = +\infty$.

Συνδυαστικά θέματα Γ μέχρι και τις παραγώγους

Επίπεδο Γ1

23.α) Είναι $f(0) = -συν0 = -1 < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}ημ\frac{\pi}{2} - συν\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 0$,

δηλαδή $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Έστω $0 \le x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2}$ τότε: $0 < ημx_1 < ημx_2$ και $x_1 ημx_1 < x_2 ημx_2$ (1) .Ακόμη $συνx_1 > συνx_2 \Leftrightarrow -συνx_1 < -συνx_2$ (2).

Από $(1)+(2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f\nearrow\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f$ 1−1 οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

β) Είναι $g'(x) = 2x + 2ημx = 2(ημx + x)$.Γνωρίζουμε ότι $|ημx| \le |x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα: Αν $x < 0$ είναι $|ημx| < -x \Leftrightarrow x < ημx < -x \Rightarrow ημx + x < 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g\searrow(-\infty, 0]$. Αν $x > 0$ είναι $|ημx| < x \Leftrightarrow -x < ημx < x \Rightarrow ημx + x > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g\nearrow[0, +\infty)$.

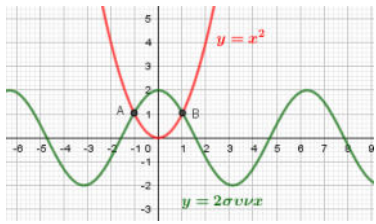
Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\left(1 - 2\frac{συνx}{x^2}\right)\right] = +\infty$ γιατί για κάθε $x \ne 0$ είναι $\left|\frac{συνx}{x^2}\right| = \frac{|συνx|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \le \frac{συνx}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 0$ οπότε από το Κ.Π. είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{συνx}{x^2} = 0$. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Επίσης $g(0) = -2$. Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta_1) = \left[g(0), \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\right) = [-2, +\infty)$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $g(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό x_1 στο εσωτερικό του Δ_1 τέτοιο, ώστε $g(x_1) = 0$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [0, +\infty)$ άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta_2) = \left[g(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right) = [-2, +\infty)$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $g(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο,

ώστε $g(x_2)=0$. Τελικά η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

$g(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow x^2=2\sigma\upsilon\nu x$

Επειδή η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=x^2$ και $y=2\sigma\upsilon\nu x$ έχουν δύο σημεία τομής.



γ) Έστω $h(x)=g(x)-f(x)=x^2-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $h'(x)=2x-x\sigma\upsilon\nu x=x(2-\sigma\upsilon\nu x)$

.Επειδή $2-\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

έχουμε: Για κάθε $x<0$ είναι $h'(x)<0\Rightarrow h\searrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $h'(x)>0\Rightarrow h\nearrow[0,+\infty)$. Είναι $h(0)=-1$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\left(1-\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)\right]=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1-\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)\right]=+\infty$ αφού $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow$

$-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{|x|}=0=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής

είναι και $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$. Όμοια $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=0$. Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0)$ είναι $h(\Delta_1)=(-1,+\infty)$ και στο $\Delta_2=(0,+\infty)$ είναι $h(\Delta_2)=(-1,+\infty)$. Επειδή $0\in h(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικός $x_1\in\Delta_1$ τέτοιος, ώστε $h(x_1)=0$. Επειδή $0\in h(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικός $x_2\in\Delta_2$ τέτοιος, ώστε $h(x_2)=0$.

δ) Από το β σκέλος έχουμε ότι: Για $x<0\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)=-2$ και για

$x\ge0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)\ge g(0)=-2$, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\ge-2\Leftrightarrow g(x)+2\ge0$,

οπότε $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{g(x)+2}\overset{\substack{g(x)+2\\=\\u\to0^+}}{\lim\limits_{u\to0^+}}\frac{1}{u}=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)+2}=\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)+2}\right)=-1(+\infty)=-\infty$

24.α) Αν υπήρχε $\rho\in(0,2)$ με $f(\rho)=0$ τότε $[f'(\rho)]^2+f(\rho)f''(\rho)=-1\Leftrightarrow$

$[f'(\rho)]^2=-1$ άτοπο, άρα $f(x)\ne0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί

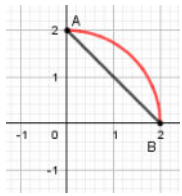
σταθερό πρόσημο στο $(0,2)$. Επειδή $f(1)=\sqrt{3}>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,2)$.

β) $\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)=-1\Leftrightarrow\left[f'(x)f(x)\right]'=(-x)'\Leftrightarrow$
$f'(x)f(x)=-x+c,\ c\in\mathbb{R}$. Για $x=1$ είναι $f'(1)f(1)=-1+c\Leftrightarrow c=0$, άρα
$f'(x)f(x)=-x\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=-2x\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(-x^2\right)'\Leftrightarrow$
$f^2(x)=-x^2+c'$.
Για $x=1$ είναι $f^2(1)=-1+c'\Leftrightarrow c'=4$, άρα $f^2(x)=4-x^2$. Επειδή $f(x)>0$ είναι $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in(0,2)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,2]$, τελικά είναι $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in[0,2]$.

γ) Είναι $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}<0$ για κάθε $x\in(0,2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.
$f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=y$ με $y\geq 0$ (1), τότε $4-x^2=y^2\Leftrightarrow 4-y^2=x^2$
(2)Πρέπει $4-y^2\geq 0\Leftrightarrow y^2\leq 4\Leftrightarrow|y|\leq 2\Leftrightarrow -2\leq y\leq 2$ και λόγω της (1) είναι $0\leq y\leq 2$. Η (2) γίνεται: $x=\sqrt{4-y^2}$. Είναι $0\leq x\leq 2\Leftrightarrow 0\leq\sqrt{4-y^2}\leq 2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0\leq 4-y^2\leq 4\Leftrightarrow -4\leq -y^2\leq 0\Leftrightarrow 0\leq y^2\leq 4\Leftrightarrow|y|\leq 2\Leftrightarrow -2\leq y\leq 2$ το οποίο ισχύει αφού $0\leq y\leq 2$ άρα $f^{-1}(y)=\sqrt{4-y^2}$, $y\in[0,2]$, άρα
$f^{-1}(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in[0,2]$.

ε) Είναι $4-y^2=x^2\Leftrightarrow x^2+y^2=4$ με $x\in[0,2]$, $y\in[0,2]$.
Η γραφική παράσταση της f είναι το τεταρτοκύκλιο του διπλανού σχήματος και το AB είναι χορδή του. Η μέγιστη χορδή είναι αυτή του σχήματος και έχει μήκος
$(AB)=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, άρα $(AB)\leq 2\sqrt{2}$



στ) Έστω $M(x(t),y(t))$ όπου t ο χρόνος σε sec με $t\geq 0$.
Είναι $y(t)=\sqrt{4-x^2(t)}$ και $x'(t)=0,1$ μ.μ./sec.
i. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το A, τότε:
$x(t_0)=\sqrt{3},\ y(t_0)=1$.

Είναι $y'(t)=\left(\sqrt{4-x^2(t)}\right)'=\frac{-2x(t)x'(t)}{2\sqrt{4-x^2(t)}}$ και την χρονική στιγμή t_0 :

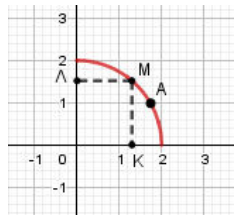
$$y'(t_0)=-\frac{x(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{4-x^2(t_0)}}=-\frac{0,1\cdot\sqrt{3}}{1}=-\frac{\sqrt{3}}{10}\ \text{μ.μ./sec}$$

ii. $E(t)=(OK)(O\Lambda)=x(t)y(t)$

Είναι $E'(t)=x'(t)y(t)+x(t)y'(t)$ και την χρονική στιγμή t_0 :

$E'(t_0)=x'(t_0)y(t_0)+x(t_0)y'(t_0)=-0,2$ μ.μ./sec

ζ) Έστω $K(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f , Η εφαπτομένη της C_f στο Κ είναι η ευθεία ε:



$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y-\sqrt{4-x_0^2}=-\frac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}(x-x_0)\ .$$

Για $y=0$ είναι $x=\frac{4}{x_0}$ και για $x=0$ είναι $y=\frac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}$, δηλαδή η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $B\left(\frac{4}{x_0},0\right)$ και $\Gamma\left(0,\frac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}\right)$.

$$(OB\Gamma)=\alpha\Leftrightarrow\frac{1}{2}(OB)(O\Gamma)=\alpha\Leftrightarrow\frac{4}{x_0}\cdot\frac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}=2\alpha\Leftrightarrow 8=\alpha x_0\sqrt{4-x_0^2}\Leftrightarrow$$

$64=\alpha^2x_0^2(4-x_0^2)$ (3). Θέτουμε $x_0^2=\omega\geq 0$ και η (3) γίνεται:

$64=\alpha^2\omega(4-\omega)\Leftrightarrow 64=4\alpha^2\omega-\alpha^2\omega^2\Leftrightarrow\alpha^2\omega^2-4\alpha^2\omega+64=0$ (4)

Η (4) είναι 2ου βαθμού ως προς ω με $\Delta=16\alpha^4-256\alpha^2=16\alpha^2(\alpha^2-16)$.

Αν $\Delta>0\Leftrightarrow 16\alpha^2(\alpha^2-16)>0\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha^2-16>0\Leftrightarrow\alpha^2>16\Leftrightarrow\alpha>4$ η (4) έχει ρίζες τις $\omega=\frac{4\alpha^2\pm4\alpha\sqrt{\alpha^2-16}}{2\alpha^2}=2\pm\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}$. Επειδή $x_0\in[0,2]$, είναι $0\leq x_0^2\leq 4$, άρα $0\leq\omega\leq 4$.

Αν $\omega=2+\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}$, τότε $2+\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}\leq 4\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2-16}\leq\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-16\leq\alpha^2$ που ισχύει. Αν $\omega=2-\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}$, τότε

$2-\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}\geq 0 \Leftrightarrow 2\geq \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16} \Leftrightarrow \alpha \geq \sqrt{\alpha^2-16} \Leftrightarrow \alpha^2 \geq \alpha^2-16$ ισχύει.

Τότε $x_0^2=2+\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16} \overset{x_0\in[0,2]}{\Leftrightarrow} x_0=\sqrt{2+\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}}$ ή

$x_0^2=2-\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16} \overset{x_0\in[0,2]}{\Leftrightarrow} x_0=\sqrt{2-\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}}$. Οπότε η C_f δέχεται δύο εφαπτόμενες που σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν α. Αν $\Delta=0\Leftrightarrow\alpha=4$, τότε η (4) γίνεται

$16\omega^2-64\omega+64=0\Leftrightarrow\omega^2-4\omega+4=0\Leftrightarrow(\omega-2)^2=0\Leftrightarrow\omega=2$.

Τότε $x_0^2=2 \overset{x_0\in[0,2]}{\Leftrightarrow} x_0=\sqrt{2}$ και η C_f δέχεται μοναδική εφαπτομένη στη περίπτωση αυτή. Τέλος αν $\Delta<0\Leftrightarrow 0<\alpha<4$ η (4) είναι αδύνατη και δεν υπάρχουν τέτοιες εφαπτόμενες.

25.α) Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[1,10]$, έχει ελάχιστη τιμή $m=1$ και μέγιστη τιμή $M=10$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,1)$ τέτοια ώστε $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=10$. Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στις θέσεις x_1,x_2 που βρίσκονται στο εσωτερικό του $[0,1]$ και είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό, λόγω του θεωρήματος Fermat είναι: $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

β) Έστω $x_1<x_2$. Επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2), και $f'(x_1)=f'(x_2)=0$, λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi_1\in(x_1,x_2)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1)=0$.

γ) $f''(x)+f'(x)=0\Leftrightarrow e^x f''(x)+e^x f'(x)=0$ ή $\left[e^x f'(x)\right]'=0$. Έστω $g(x)=e^x f'(x)$, $x\in[x_1,x_2]$. Η g είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2). Επειδή $g(x_1)=e^{x_1}f'(x_1)=0$ και $g(x_2)=e^{x_2}f'(x_2)=0$, λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi_2\in(x_1,x_2)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_2)=0\Leftrightarrow e^{\xi_2}f''(\xi_2)+e^{\xi_2}f'(\xi_2)=0\Leftrightarrow f''(\xi_2)+f'(\xi_2)=0$.

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=15x-6\Leftrightarrow f(x)-15x+6=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0,1)$. Έστω $h(x)=f(x)-15x+6$, $x\in[0,1]$. Είναι $h(0)=f(0)-15\cdot 0+6=2+6=8>0$ και

$h(1)=f(1)-15\cdot 1+6=7-15+6=-2<0$, δηλαδή $h(0)h(1)<0$ και η h είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$

τέτοιο ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-15x_0+6=0 \Leftrightarrow f(x_0)=15x_0-6$.

26.α) Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\alpha+1]$. Για κάθε $\alpha<x<\alpha+1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\alpha)<f'(x)<f'(\alpha+1)$ άρα $\frac{1}{2}<f'(x)$, δηλαδή $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\alpha+1]$. Το σύνολο τιμών της f είναι: $f([\alpha,\alpha+1])=[f(\alpha),f(\alpha+1)]=[\alpha+1,\alpha+2]$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x=\alpha$ είναι η ευθεία

$\varepsilon: y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow$

$y=\frac{1}{2}(x-\alpha)+\alpha+1 \Leftrightarrow 2y=x+\alpha+2 \Leftrightarrow x-2y+\alpha+2=0$

γ) Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα $[\alpha,\alpha+1]$, άρα βρίσκεται πάνω και από την ε, δηλαδή

$f(x)\geq\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\alpha+1$ για κάθε $x\in[\alpha,\alpha+1]$.

δ) Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής για την f, υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\alpha+1)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi_1)=\frac{f(\alpha+1)-f(\alpha)}{\alpha+1-\alpha}=\alpha+2-\alpha-1=1$. Επειδή η f' είναι συνεχής στο $[\alpha,\xi_1]$ και παραγωγίσιμη στο (α,ξ_1), λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\xi_1)$

τέτοιο ώστε $f''(\xi)=\frac{f'(\xi_1)-f'(\alpha)}{\xi_1-\alpha}=\frac{1-\frac{1}{2}}{\xi_1-\alpha}=\frac{1}{2(\xi_1-\alpha)}$.

Είναι $\alpha<\xi_1<\alpha+1 \Leftrightarrow 0<\xi_1-\alpha<1 \Leftrightarrow 0<2(\xi_1-\alpha)<2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2(\xi_1-\alpha)}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow f''(\xi)>\frac{1}{2}$

ε) Αρκεί η εξίσωση $f(x)=-3x+4\alpha+2 \Leftrightarrow f(x)+3x-4\alpha-2=0$, να έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(\alpha,\alpha+1)$. Έστω $g(x)=f(x)+3x-4\alpha-2$, $x\in[\alpha,\alpha+1]$. Είναι $g'(x)=f'(x)+3>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\alpha+1]$. Είναι $g(\alpha)=f(\alpha)+3\alpha-4\alpha-2=\alpha+1-\alpha-2=-1<0$ και $g(\alpha+1)=f(\alpha+1)+3(\alpha+1)-4\alpha-2=\alpha+2+3\alpha+3-4\alpha-2=3>0$, δηλαδή $g(\alpha)g(\alpha+1)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\alpha+1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=-3x+4\alpha+2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\alpha,\alpha+1)$. Επειδή η g είναι

γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\alpha+1]$, η ρίζα της g είναι μοναδική.

27.α) Για $x=0$ είναι: $f^3(0)+f(0)=4\cdot 0 \Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0)+1\right)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f^2(0)=-1$ που είναι αδύνατο.

β) $f^3(x)+f(x)=4x \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right)=4x \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{4x}{f^2(x)+1}$ (2).

Είναι $f(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{f^2(x)+1}>0 \Leftrightarrow 4x>0 \Leftrightarrow x>0$ και

$f(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{f^2(x)+1}<0 \Leftrightarrow 4x<0 \Leftrightarrow x<0$.

γ) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έχουμε: $\left(f^3(x)+f(x)\right)'=(4x)' \Leftrightarrow$ $3f^2(x)f'(x)+f'(x)=4 \Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)+1\right)=4$ (3).

Επειδή $3f^2(x)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι και $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Αν $\alpha=\beta$, τότε $f(\alpha)-f(\alpha)\le 4(\alpha-\alpha)$ και ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha<\beta$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Όμως από τη σχέση (3) είναι $f'(x)=\dfrac{4}{3f^2(x)+1}\le 4$, αφού $3f^2(x)+1\ge 1$, άρα και

$f'(\xi)\le 4 \Leftrightarrow \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\le 4 \Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha)\le 4(\beta-\alpha)$.

ε) Πρέπει $f'(x)=1$, τότε $(3)\Rightarrow 3f^2(x)+1=4 \Leftrightarrow f^2(x)=1 \Leftrightarrow f(x)=\pm 1$

Αν $f(x)=1$, τότε από την αρχική σχέση έχουμε: $1^3+1=4x \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ και η εφαπτομένη είναι η $\varepsilon_1: y-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y-1=x-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y=x+\dfrac{1}{2}$

Αν $f(x)=-1$, τότε από την αρχική σχέση έχουμε: $(-1)^3-1=4x \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ και η εφαπτομένη είναι η

$\varepsilon_2: y-f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y+1=x+\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y=x-\dfrac{1}{2}$

στ) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το

$f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$. Έστω ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\alpha\in\mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f^3(x)+f(x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}(4x)\Leftrightarrow\alpha^3+\alpha=-\infty$ αδύνατο, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\pm\infty$.

Όμοια και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\pm\infty$. Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ τότε $f(\mathbb{R})=\left(+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$ που είναι αδύνατο.

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ τότε $f(\mathbb{R})=(-\infty,-\infty)$ που είναι αδύνατο, άρα $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

ζ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Rightarrow y^3+y=4x\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\left(y^3+y\right)$, άρα $f^{-1}(y)=\frac{1}{4}\left(y^3+y\right)$

η) $f^{-1}(1)=\frac{1}{4}(1+1)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ και

$f^{-1}(4)=\frac{1}{4}(64+4)=\frac{68}{4}=17\Leftrightarrow f(17)=4$

28.α) Αφού $f'(x)=\frac{e}{e+e^{f(x)}}>0\quad(1)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε και η συνάρτηση $\frac{e}{e+e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη οπότε η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=-\frac{e^{f(x)+1}f'(x)}{\left(e+e^{f(x)}\right)^2}<0$

οπότε η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

γ) Είναι $f'(1)=\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow\frac{e}{e+e^{f(1)}}=\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow e+e^{f(1)}=e+1\Leftrightarrow e^{f(1)}=1\Leftrightarrow f(1)=0$

οπότε το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ και αφού η $f\nearrow$ τότε το 1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ) $(1)\Leftrightarrow\left(e+e^{f(x)}\right)f'(x)=e\Leftrightarrow ef'(x)+e^{f(x)}f'(x)=e\Leftrightarrow\left(ef(x)+e^{f(x)}\right)'=(ex)'$

άρα $ef(x)+e^{f(x)}=ex+c$. Για $x=1$ έχουμε $e\cdot0+e^0=e+c\Leftrightarrow c=1-e$. Άρα $ef(x)+e^{f(x)}=ex+1-e\quad(2)$.

ε) $(2)\Leftrightarrow ex=ef(x)+e^{f(x)}+e-1\Leftrightarrow x=f(x)+\frac{e^{f(x)}}{e}+\frac{e-1}{e}\quad(3)$. Αφού η f είναι $\nearrow$ θα είναι και $1-1$ οπότε αντιστρέφεται. Θέτω όπου $f(x)=y$ και $x=f^{-1}(y)$ οπότε $f^{-1}(y)=y+\frac{e^y}{e}+\frac{e-1}{e}$ άρα $f^{-1}(x)=x+e^{x-1}+\frac{e-1}{e}$.

29.α) $x(x+2)f'(x)+(x+2)f(x)=1 \Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=\dfrac{1}{x+2} \Rightarrow$

$\left(xf(x)\right)'=\left(\ln(x+2)\right)' \Leftrightarrow xf(x)=\ln(x+2)+c$, $f(e-2)=\dfrac{1}{e-2} \Leftrightarrow c=0$ άρα

$f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{x}$, $x>0$.

β) Είναι $f'(x)=\dfrac{x-(x+2)\ln(x+2)}{x^2(x+2)}$. Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $x-(x+2)\ln(x+2)$. Έστω $g(x)=x-(x+2)\ln(x+2)$, $x>0$. Είναι

$g'(x)=-\ln(x+2)<0 \Rightarrow g\searrow(0,+\infty)$ $x>0 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(0)=-2\ln 2<0$ άρα $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow(0,+\infty)$

γ) $(x+2)<(x+3) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x+2)>f(x+3) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x+4)}{x+2}>\dfrac{\ln(x+5)}{x+3} \Leftrightarrow$

$(x+3)\ln(x+4)>(x+2)\ln(x+5) \Leftrightarrow \ln(x+4)^{x+3}>\ln(x+5)^{x+2} \Leftrightarrow$

$(x+4)^{x+3}>(x+5)^{x+2}$

δ) Είναι $f(e^x)\le\dfrac{x+\alpha}{e^x} \Rightarrow \dfrac{\ln(e^x+2)}{e^x}\le\dfrac{x+\alpha}{e^x} \Leftrightarrow \ln(e^x+2)-x\le\alpha$.

Έστω $h(x)=\ln(e^x+2)-x$, $x\ge 0$. $h'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}-1=\dfrac{\cancel{e^x}-\cancel{e^x}-2}{e^x+2}<0$ άρα $h\searrow$ στο $[0,+\infty)$. Για κάθε $x\ge 0 \Rightarrow h(x)\le h(0)=\ln 3$. Άρα $\alpha_{min}=\ln 3$

30.α) Έστω $g(x)=x^2f(x)-1$, $x\in(0,+\infty)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)=x\left(2f(x)+xf'(x)\right)<0$ για κάθε $x>0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $g(1)=f(1)-1=0$. Για κάθε

$x>1 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(1) \Leftrightarrow x^2f(x)-1<0 \Leftrightarrow f(x)<\dfrac{1}{x^2}$ και για κάθε

$0<x<1 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(1) \Leftrightarrow x^2f(x)-1>0 \Leftrightarrow f(x)>\dfrac{1}{x^2}$.

β) Από το θεώρημα μέσης τιμής για την f, υπάρχει $\xi\in\left(\dfrac{1}{\alpha},\alpha\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\alpha)-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha-\frac{1}{\alpha}}=\frac{f(\alpha)-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{\alpha^2-1}{\alpha}}=\frac{\alpha}{\alpha^2-1}\left(f(\alpha)-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) \quad (1)$$

Επειδή $\alpha>1$ είναι $f(\alpha)<\frac{1}{\alpha^2}$ και επειδή $\frac{1}{\alpha}<1$, είναι

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)>\frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}=\alpha^2 \Leftrightarrow -f\left(\frac{1}{\alpha}\right)<-\alpha^2, \text{ άρα } f(\alpha)-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)<\frac{1}{\alpha^2}-\alpha^2=\frac{1-\alpha^4}{\alpha^2}.$$

Επειδή για $\alpha>1$ είναι $\frac{\alpha}{\alpha^2-1}>0$, έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-1}\left(f(\alpha)-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)<\frac{\alpha}{\alpha^2-1}\cdot\frac{1-\alpha^4}{\alpha^2} \Leftrightarrow f'(\xi)<\frac{\cancel{(1-\alpha^2)}(1+\alpha^2)}{-\cancel{(1-\alpha^2)}\alpha} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)<-\frac{1+\alpha^2}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha f'(\xi)<-1-\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha f'(\xi)+\alpha^2+1<0$$

γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$. Επειδή $f(1)=1>0$, είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

δ) Επειδή $f(x)>\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$, άρα και $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$, οπότε η ευθεία $x=0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Επειδή $0<f(x)<\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x>1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$, θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, άρα η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

31.α) Είναι $f'(x)=e^{x-f(x)} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=e^x \Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}\right)'=\left(e^x\right)' \Leftrightarrow e^{f(x)}=e^x+c$ και για $x=0$ είναι $e^{\ln 2}=e^0+c \Leftrightarrow c=1$, οπότε $e^{f(x)}=e^x+1 \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(e^x+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

β) $f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ και $f''(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0$ οπότε η f είναι

κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) $f'(0)=\dfrac{e^0}{e^0+1}=\dfrac{1}{2}$ άρα η εξίσωση εφαπτομένης είναι

$y-\ln 2=\dfrac{1}{2}(x-0)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x+\ln 2$.

Αφού η f είναι κυρτή σε κάθε σημείο η εφαπτομένη θα είναι κάτω από C_f

άρα $f(x)\geq\dfrac{1}{2}x+\ln 2 \quad \ln\left(e^x+1\right)\geq\dfrac{1}{2}x+\ln 2$.

δ) Είναι $g(x)=3x-e^{f(x)+x}=3x-e^{\ln\left(e^x+1\right)+x}=3x-\left(e^x+1\right)e^x=3x-e^{2x}-e^x$

οπότε $g'(x)=3-2e^{2x}-e^x$, $g''(x)=-4e^{2x}-e^x<0$ οπότε η $g'\searrow$. Για $x<0$

είναι $g'(x)>g'(0)\Rightarrow g'(x)>0$ ενώ για $x>0$ είναι $g'(x)<g'(0)\Rightarrow g'(x)<0$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\leq g(0)\Leftrightarrow g(x)\leq -2$. Άρα η g έχει μέγιστο

στο σημείο $A(0,-2)$.

στ) Είναι $g(x)\leq -2<0$ και αφού $1+e^x>1$ τότε $\ln\left(1+e^x\right)>\ln 1\Leftrightarrow f(x)>0$

άρα $f(x)>g(x)$.

32. Ισχύει $\ln f(x)+f(x)=x \quad (1)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Έστω $h(x)=\ln x+x$, $x>0$ είναι $h'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$ οπότε η h είναι $\nearrow$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τότε από (1) θα είναι

$\ln f(x_1)+f(x_1)<\ln f(x_2)+f(x_2)$. Δηλαδή $h\left(f(x_1)\right)<h\left(f(x_2)\right)$ και αφού η

h είναι $\nearrow$ τότε θα έχουμε $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η $f\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $f(x)=x$, τότε $(1)\Rightarrow \ln x+x=x\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$

γ) i. Παραγωγίζουμε στη σχέση (1) και έχουμε:

$$f'(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}=1\Leftrightarrow f'(x)\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)+1}>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R} \quad (2).$$

ii. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε από (2) και η f' είναι παραγωγίσιμη με

$f''(x)=\dfrac{f'(x)}{\left(f(x)+1\right)^2}>0$ άρα η f είναι κυρτή.

δ) Για $x=1$: $\ln f(1)+f(1)=1\Leftrightarrow h\left(f(1)\right)=h(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(1)=1$ και

$f'(1)=\dfrac{f(1)}{f(1)+1}=\dfrac{1}{2}$.

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. Επειδή η f είναι κυρτή, ισχύει ότι $f(x)\geq\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=+\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

33.α) $f'(x)=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\frac{0}{0+1}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\overset{e^x=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u}{u+1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u}{u}=1$, άρα $f(\mathbb{R})=(0,1)$

β) $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow 1-1\Rightarrow$ f αντιστρέφεται. Είναι $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=(0,1)$.

$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{e^x}{e^x+1}=y\Leftrightarrow e^x=e^xy+y\Leftrightarrow e^x(1-y)=y\Leftrightarrow\ e^x=\frac{y}{1-y}\Leftrightarrow$

$x=\ln\frac{y}{1-y}$, άρα $f^{-1}(y)=\ln\frac{y}{1-y}$, $y\in(0,1)$.

γ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f''(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)^2-e^x2\left(e^x+1\right)\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}\geq 0\Rightarrow 1-e^x\geq 0\Rightarrow x\leq 0$.

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(0,f(0))\equiv\left(0,\frac{1}{2}\right)$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο $x=0$ την διαπερνά.

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι: $f\left(4^x\right)-f'\left(4^x\right)<f\left(5^x\right)-f'\left(5^x\right)$. Θεωρούμε την $g(x)=f(x)-f'(x)$, $x>0$.

Είναι $g'(x)=f'(x)-f''(x)=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}-\frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}=\frac{2e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^3}>0$ οπότε η $g\nearrow$ στο $(0,+\infty)$. Για $x>0$ είναι $4<5$ και $4^x<5^x$ άρα $g\left(4^x\right)<g\left(5^x\right)\Leftrightarrow f\left(4^x\right)-f'\left(4^x\right)<f\left(5^x\right)-f'\left(5^x\right)$.

ε) Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$ έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$. Είναι $h(0)=f(0)=\frac{1}{2}>0$, $h(1)=f(1)-1=\frac{e}{e+1}-1=-\frac{1}{e+1}<0$ οπότε αφού h συνεχής στο $[0,1]$ και $h(0)\cdot h(1)<0$ από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0$. Επίσης

$h'(x)=f'(x)-1=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}-1=-\dfrac{e^{2x}+e^x+1}{(e^x+1)^2}<0$ οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

34.α) Είναι $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x^2}}$, $x\neq 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x)=2xe^{\frac{1}{x^2}}-x^2e^{\frac{1}{x^2}}\dfrac{2}{x^3}=2e^{\frac{1}{x^2}}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=2e^{\frac{1}{x^2}}\dfrac{x^2-1}{x}$ οπότε για το πρόσημο της f' και την μονοτονία της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x^2-1	+	0 −	−	0 +	
x	−	−	+	+	
f'	−	+	−	+	
f	↘	↗	↘	↗	

Η f έχει τοπικό ελάχιστο για $x=1$ και $x=-1$ το $f(-1)=f(1)=e$.

β) $\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}<2\ln\dfrac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow\dfrac{\cancel{\beta^2}}{\alpha^2\cancel{\beta^2}}-\dfrac{\cancel{\alpha^2}}{\cancel{\alpha^2}\beta^2}<2\ln\beta-2\ln\alpha\Leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha^2}+\ln\alpha^2<\dfrac{1}{\beta^2}+\ln\beta^2\Leftrightarrow$

$\ln e^{\frac{1}{\alpha^2}}+\ln\alpha^2<\ln e^{\frac{1}{\beta^2}}+\ln\beta^2\Leftrightarrow\ln\left(\alpha^2e^{\frac{1}{\alpha^2}}\right)<\ln\left(\beta^2e^{\frac{1}{\beta^2}}\right)\Leftrightarrow\alpha^2e^{\frac{1}{\alpha^2}}<\beta^2e^{\frac{1}{\beta^2}}\Leftrightarrow$

$f(\alpha)<f(\beta)\overset{f\nearrow(1,+\infty)}{\Leftrightarrow}\alpha<\beta$ ισχύει

γ) $f''(x)=2e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\dfrac{2}{x^3}\right)\dfrac{x^2-1}{x}+2e^{\frac{1}{x^2}}\dfrac{2x^2-\left(x^2-1\right)}{x^2}=2e^{\frac{1}{x^2}}\dfrac{x^2+1}{x^2}-4e^{\frac{1}{x^2}}\dfrac{x^2-1}{x^4}=$

$=2e^{\frac{1}{x^2}}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}-\dfrac{2\left(x^2-1\right)}{x^4}\right)=2e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\dfrac{x^4-x^2+2}{x^4}>0$ αφού $x^4-x^2+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (τριώνυμο ως προς x^2 με $x<0$). Οπότε η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$.

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^{\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x^2}}=1$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(x^2e^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{2}{x^3}} = +\infty$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$. Από τον πίνακα μονοτονίας και τα προηγούμενα όρια διαπιστώνουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = [e, +\infty)$.

ε) Η εξίσωση $e^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\lambda}{x^2}$ γίνεται $x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda$

- Αν $\lambda < e$ η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda = e$ η εξίσωση έχει δύο λύσεις $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 1$
- Αν $\lambda > e$ η εξίσωση έχει τέσσερις λύσεις μία σε κάθε διάστημα: $\rho_1 \in (-\infty, -1)$, $\rho_2 \in (-1, 0)$, $\rho_3 \in (0, 1)$ και $\rho_4 \in (1, +\infty)$.

35.α) Η συνάρτηση $f'(x) = \dfrac{4e^x + x^2}{e^x + x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = \frac{(4e^x + 2x)(e^x + x^2) - (e^x + 2x)(4e^x + x^2)}{(e^x + x^2)^2} =$$

$$= \frac{4e^{2x} + 4x^2 e^x + 2xe^x + 2x^3 - 4e^{2x} - x^2 e^x - 8xe^x - 2x^3}{(e^x + x^2)^2} =$$

$\dfrac{3x^2 e^x - 6xe^x}{(e^x + x^2)^2} = \dfrac{3e^x x(x-2)}{(e^x + x^2)^2}$ οπότε για το πρόσημο της f'' και την κυρτότητα της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$ 0	$+$
f	∪		∩	∪

Η f είναι κυρτή στα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$ και κοίλη στο $[0, 2]$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{3e^x}{e^x + x^2} > 0$ άρα η h είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

γ) Αφού $f'(x) > 0$ τότε η f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε το σύνολο τιμών είναι:

$f(A) = \left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)$. Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι

$h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) - x < f(0) \Leftrightarrow f(x) < x + f(0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+f(0)\right)=-\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. Επίσης για κάθε $x>0$ θα είναι $h(x)>h(0)\Leftrightarrow f(x)-x>f(0)\Leftrightarrow f(x)>x+f(0)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+f(0)\right)=+\infty$,άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Οπότε το σύνολο τιμών της $\mathbb{R}$ είναι $f(A)=\mathbb{R}$.

δ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,x+1]$ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow f'(\xi)=f(x+1)-f(x).$$

Για $x>2$ η f είναι κυρτή άρα η $f'\nearrow$ οπότε

$$2<x<\xi<x+1\Rightarrow f'(x)<f'(\xi)<f'(x+1)\Leftrightarrow f'(x)<f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^x+x^2}{e^x+x^2}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^x+2x}{e^x+2x}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^x+2}{e^x+2}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^x}{e^x}=4.$$

Αν $x\to+\infty$ τότε $x+1\to+\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x+1)\right]=4$. Οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=4$.

36.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1-\ln 2x}{2x^2}\geq 0\Leftrightarrow$

$1-\ln 2x\geq 0\Rightarrow \ln 2x\leq \ln e\Leftrightarrow x\leq\frac{e}{2}$. Η $f\nearrow$ στο $\left(0,\frac{e}{2}\right]$ και $\searrow$ στο $\left[\frac{e}{2},+\infty\right)$, παρουσιάζει μέγιστο για $x=\frac{e}{2}$ το $f\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{1}{e}$

β) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln 2x}{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{1}{2x}\ln 2x\right]=-\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2x}{2x}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4x}=0.$$

$f\nearrow$ στο $\left(0,\frac{e}{2}\right]$ με $f(A_1)=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$ και $f\searrow$ στο $\left[\frac{e}{2},+\infty\right)$ με $f(A_2)=\left(0,\frac{1}{e}\right]$.

Οπότε το σύνολο τιμών $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$.

γ) Η εξίσωση $\sqrt{2x}=e^{\lambda x}$ γίνεται $2x=\left(e^{\lambda x}\right)^2\Leftrightarrow 2x=e^{2\lambda x}$ οπότε

$\ln 2x = \ln e^{2\lambda x} \Leftrightarrow 2\lambda x = \ln 2x \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln 2x}{2x} \Leftrightarrow f(x) = \lambda$

Αν $\lambda \le 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση . Αν $0 < \lambda < \dfrac{1}{e}$ η εξίσωση έχει 2 λύσεις

Αν $\lambda = \dfrac{1}{e}$ η εξίσωση έχει λύση την $x = \dfrac{e}{2}$. Αν $\lambda > \dfrac{1}{e}$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ) Η εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \dfrac{\ln 2x_0}{2x_0} = \dfrac{1 - \ln 2x_0}{2x_0^2}(x - x_0)$.

Αν αυτή διέρχεται από το σημείο $(0, -1008)$ τότε

$-1008 - \dfrac{\ln 2x_0}{2x_0} = \dfrac{1 - \ln 2x_0}{2x_0^2}(-x_0) \Leftrightarrow -2016x_0 - \ln 2x_0 = -1 + \ln 2x_0 \Leftrightarrow$

$2\ln 2x_0 + 2016x_0 - 1 = 0$.

Έστω $g(x) = 2\ln 2x + 2016x - 1$, $x > 0$ με $g'(x) = \dfrac{2}{x} + 2016 > 0$ άρα η $g \nearrow$ με σύνολο τιμών $g((0, +\infty)) = \left(\lim\limits_{x \to 0^+} g(x), \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right) = (-\infty, +\infty)$.

Επειδή $0 \in g((0, +\infty))$ υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

ε) Θεωρούμε την $h(t) = \ln^2 2t$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[x, x+1]$ με $h'(x) = 2\ln 2x \dfrac{1}{2x} 2 = 4f(x)$, οπότε από ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$h'(\xi) = \dfrac{h(x+1) - h(x)}{x + 1 - x} \Leftrightarrow 4f(\xi) = \ln^2 2(x+1) - \ln^2 2x$.

Αφού $x \to +\infty$ τότε $x > \dfrac{e}{2}$ όπου $f \searrow$ οπότε $x < \xi < x + 1 \Leftrightarrow$

$4f(x) > 4f(\xi) > 4f(x+1)$ ή $4f(x+1) < \ln^2(2x+1) - \ln^2 2x < 4f(x)$

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln 2x}{2x} = 0$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x+1) \underset{u \to +\infty}{\overset{x+1=u}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} f(u) = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln^2 2(x+1) - \ln^2 2x\right] = 0$.

37.α) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[\left(x^3 - \dfrac{3}{2}x^2\right) + 3x^2 \ln x\right] = 0 + 0 = 0$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)=0$

β) i. Έστω $g(x)=x+\ln x+1$, $x\in\left[\dfrac{1}{e^2},1\right]$. Η g συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{e^2},1\right]$ ως άθροισμα συνεχών και $g\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{1}{e^2}+\ln\dfrac{1}{e^2}+1=\dfrac{1}{e^2}-2+1=\dfrac{1}{e^2}-1<0$,

$g(1)=2>0$. Άρα σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in\left(\dfrac{1}{e^2},1\right)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0\Leftrightarrow\xi+\ln\xi+1=0$.

Είναι $g'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$, $x\in\left[\dfrac{1}{e^2},1\right]$ οπότε η g είναι $\nearrow$ στο $\left[\dfrac{1}{e^2},1\right]$ άρα η ρίζα ξ είναι μοναδική.

ii. Είναι $f'(x)=3x^2+6x\ln x+3x^2\dfrac{1}{x}-3x=3x^2+6x\ln x$,

$f''(x)=6x+6\ln x+6x\dfrac{1}{x}=6(x+\ln x+1)=6g(x)$. Είναι $f''(\xi)=6g(\xi)=0$ και αφού $g\nearrow$, έχουμε: Για $x<\xi$ είναι $g(x)<g(\xi)\Leftrightarrow f''(x)<0$. Για $x>\xi$ είναι $g(x)>g(\xi)\Leftrightarrow f''(x)>0$, οπότε η f'' αλλάζει πρόσημο στο $x=\xi$ άρα το ξ είναι θέση σημείου καμπής.

iii. Είναι $f'(x)=3x^2+6x\ln x$ με $f'(\xi)=3\xi^2+6\xi\ln\xi$. Όμως

$\xi+\ln\xi+1=0\Rightarrow\ln\xi=-1-\xi$ άρα $f'(\xi)=3\xi^2+6\xi(-1-\xi)=-3\xi^2-6\xi<0$ αφού

$\xi>0$. $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(3x^2+6x\ln x\right)=0$, γιατί

$$\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0$$

Το σύνολο τιμών της f' στο διάστημα $\Delta_1=(0,\xi)$ είναι $f'(\Delta_1)=\left(-3\xi^2-6\xi,0\right)$, άρα $f'(x)<0$ στο Δ_1 και $f\searrow(0,\xi]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+6x\ln x\right)=+\infty$ και $f'\nearrow$ στο Δ_2, άρα $f'(\Delta_2)=\left[-3\xi^2-6\xi,+\infty\right)$. Επειδή $0\in f'(\Delta_2)$, υπάρχει $x_0\in\Delta_2$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$. Για κάθε $\xi<x<x_0$ είναι $f'(x)<f'(x_0)=0\Rightarrow f\searrow[\xi,x_0]$, ενώ

για $x > x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \nearrow [x_0, +\infty)$. Οπότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x = x_0$.

38.α) Είναι $g'(x) = f'(x)e^{-f(x)}$ (1), όμως από την υπόθεση $f'(x) = e^{f(x)} - 1$ (2). Άρα από (1) και (2) θα είναι $g'(x) = \left(e^{f(x)} - 1\right)e^{-f(x)} = e^{f(x)}e^{-f(x)} - e^{-f(x)} = 1 - e^{-f(x)}$.

Συνεπώς είναι $g'(x) = g(x)$ άρα $g(x) = ce^x$.

Για $x = 0$ $g(0) = c \Rightarrow 1 - e^{-f(0)} = c \Leftrightarrow c = 1 - e^{\ln 2} \Leftrightarrow c = -1$ άρα $g(x) = -e^x$

β) Είναι $g(x) = 1 - e^{-f(x)} \Leftrightarrow -e^x = 1 - e^{-f(x)} \Leftrightarrow e^{-f(x)} = 1 + e^x \Leftrightarrow$ $f(x) = -\ln\left(1 + e^x\right)$.

γ) $f'(x) = -\dfrac{e^x}{e^x + 1}$ και $f''(x) = -\dfrac{e^x\left(e^x + 1\right) - e^x e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} = -\dfrac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} < 0$. Άρα η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

δ) Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $\left(0, f(0)\right)$ είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ με $f(0) = \ln\dfrac{1}{2}$ και $f'(0) = \dfrac{e^0}{e^0 + 1} = -\dfrac{1}{2}$. Άρα $\in$: $y = -\dfrac{1}{2}x - \ln 2$. Αφού f είναι κοίλη τότε $f(x) \le y$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε

$$\ln\frac{1}{1 + e^x} \le -\frac{1}{2}x - \ln 2 \Leftrightarrow -\ln\left(1 + e^x\right) \le -\frac{x}{2} - \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(1 + e^x\right) \ge \frac{x}{2} + \ln 2 \Leftrightarrow 2\ln\left(1 + e^x\right) \ge x + \ln 4.$$

ε) Επειδή η f είναι κοίλη, ισχύει ότι: $f(x) \le -\dfrac{1}{2}x - \ln 2$. Επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\dfrac{1}{2}x - \ln 2\right) = -\infty$ είναι και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{e^x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x \to +\infty}\frac{f'(x)}{e^x} = \lim_{x \to +\infty}\frac{-\dfrac{e^x}{e^x + 1}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty}\left(-\frac{1}{1 + e^x}\right) = 0.$$

39.α) Για $x > 0$ έχουμε $x^2 f'(x) + xf(x) = 1 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow$

$$\left(xf(x)\right)' = \left(\ln x\right)' \Leftrightarrow xf(x) = \ln x + c$$

Για $x=e$ είναι $ef(e)=\ln e+c\Rightarrow 2e\cdot e^{-1}=1+c\Leftrightarrow c=1$. Άρα

$xf(x)=\ln x+1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$

β) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x-(\ln x+1)}{x^2}=\dfrac{-\ln x}{x^2}$. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι

$f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[1,+\infty)$.

Η f έχει μέγιστο το $f(1)=1$.

$f''(x)=-\dfrac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{x(2\ln x-1)}{x^4}=\dfrac{2\ln x-1}{x^3}$. Η f είναι κοίλη στο $\left(0,\sqrt{e}\right]$ και κυρτή στο $\left[\sqrt{e},+\infty\right)$ με σημείο καμπής το $\left(\sqrt{e},\dfrac{3}{2\sqrt{e}}\right)$.

γ) $\ln x=\alpha x-1\Leftrightarrow\dfrac{\ln x+1}{x}=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{1}{x}(\ln x+1)\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+1}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$.

Είναι $f\nearrow$ στο $A_1=(0,1]$ οπότε $f(A_1)=(-\infty,1]$ και $f\searrow$ στο $A_2=[1,+\infty)$ οπότε $f(A_2)=(0,1]$. Άρα το σύνολο τιμών $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,1]$.

Αν $\alpha<0$ τότε $\alpha\in f(A_1)$ και η εξίσωση έχει μια ρίζα $\rho\in(0,1)$.

Αν $\alpha=0$ τότε $f(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$ άρα η εξίσωση έχει ρίζα την $\rho=\dfrac{1}{e}$.

Αν $0<\alpha<1$ το $\alpha\in f(A_1)$, $\alpha\in f(A_2)$ και η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς 2 ρίζες $\rho_1\in(0,1)$ και $\rho_2\in(1,+\infty)$.

Αν $\alpha=1$ τότε η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μόνο μια ρίζα τη $\rho=1$ αφού $f(1)=1$ και αν $\alpha>1$ τότε $\alpha\notin f(A)$ και η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ) $\dfrac{\alpha^\beta}{\beta^\alpha}>e^{\alpha-\beta}\Leftrightarrow\ln\dfrac{\alpha^\beta}{\beta^\alpha}>\alpha-\beta\Leftrightarrow\ln\alpha^\beta-\ln\beta^\alpha>\alpha-\beta\Leftrightarrow\beta\ln\alpha-\alpha\ln\beta>\alpha-\beta\Leftrightarrow$

$\beta\ln\alpha+\beta>\alpha\ln\beta+\alpha\Leftrightarrow\beta(\ln\alpha+1)>\alpha(\ln\beta+1)\Leftrightarrow\dfrac{\ln\alpha+1}{\alpha}>\dfrac{\ln\beta+1}{\beta}\Leftrightarrow$

$f(\alpha)>f(\beta)\overset{f\searrow[1,+\infty)}{\Leftrightarrow}\alpha<\beta$ ισχύει

40.α) Είναι $f(x)=e^{x-1}+x^2-3x+1$, $D_f=\mathbb{R}$. $f'(x)=e^{x-1}+2x-3$ και

$f'(1)=0$ και $f''(x)=e^{x-1}+2>0$ οπότε η $f'\nearrow$. Για $x<1$ είναι $f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$. Για $x>1$ είναι $f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0$.

Οπότε η f έχει ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=0$.

Επίσης $g(x)=\ln x-x+1$, $Dg=(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$$

x	0	1	$+\infty$
g'	+	0	−
g	↗		↘

Η g έχει μέγιστο για $x=1$ το $g(1)=0$.

β) Η εξίσωση $e^{x-1}-\ln x+x^2-2x=0$ γίνεται $e^{x-1}+x^2=\ln x+2x\Leftrightarrow$ $e^{x-1}+x^2-3x+1=\ln x-x+1\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ και αφού $f(1)=g(1)=0$ και $g(x)\le g(1)=0=f(1)\le f(x)$ τότε το $x=1$ μοναδική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο $(1,0)$ είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=0$ και η εφαπτομένη της C_g στο $(1,0)$ είναι επίσης $y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=0$.

Οπότε οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(1,0)$.

δ) Έστω $F(x)=3e^{x-1}+3x+x^3-(3x\ln x+3x^2+4)$, $x>0$. Είναι

$F'(x)=3e^{x-1}+3+3x^2-(3\ln x+3+6x)$. Είναι

$f(x)\ge f(1)=0\Leftrightarrow e^{x-1}+x^2-3x+1\ge 0\Leftrightarrow e^{x-1}+x^2+1\ge 3x\Leftrightarrow$

$3e^{x-1}+3x^2+3\ge 9x$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Είναι

$g(x)\le 0\Leftrightarrow \ln x-x+1\le 0\Leftrightarrow \ln x+1\le x\Leftrightarrow 3\ln x+3\le 3x\Leftrightarrow$

$3\ln x+3+6x\le 9x$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Άρα για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι $3e^{x-1}+3x^2+3>9x>3\ln x+3+6x\Rightarrow$

$F'(x)>0\Rightarrow F\nearrow(0,+\infty)$ αφού F συνεχής.

Παρατηρούμε ότι $F(1)=0$ άρα η εξίσωση γίνεται:

$$3e^{x-1}+3x+x^3=3x\ln x+3x^2+4\Leftrightarrow F(x)=0\Leftrightarrow F(x)=F(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=1$$

41.α) Για $x>e$ είναι $2(f'(x)-1)(f(x)-x)=\frac{1}{x}$ οπότε

$\left[(f(x)-x)^2\right]'=(\ln x)'\Leftrightarrow (f(x)-x)^2=\ln x+c$. Για $x=e^5$ είναι

$(e^5+2-e^5)^2=\ln e^5+c\Rightarrow 4=5+c\Rightarrow c=-1$ άρα $(f(x)-x)^2=\ln x-1$ και αφού $f(e^5)-e^5=2>0$ τότε $f(x)-x>0$ αφού και για $x>e$ $\ln x-1>0$ άρα

$f(x)-x=\sqrt{\ln x-1}\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{\ln x-1}$, $x>e$.

β) $f'(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x-1}}+1>0\Rightarrow f\nearrow(e,+\infty)$ και

$f''(x)=-\dfrac{2(\ln x-1)+1}{4x^2(\ln x-1)\sqrt{\ln x-1}}<0$ άρα f κοίλη στο $(e,+\infty)$.

γ) $(\alpha-\beta)\left(\sqrt{\ln\beta-1}+\sqrt{\ln\alpha-1}\right)<\ln\dfrac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)\dfrac{\left(\sqrt{\ln\beta-1}+\sqrt{\ln\alpha-1}\right)\left(\sqrt{\ln\beta-1}-\sqrt{\ln\alpha-1}\right)}{\left(\sqrt{\ln\beta-1}-\sqrt{\ln\alpha-1}\right)}<\ln\beta-\ln\alpha\Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)\left(\ln\beta-1-\ln\alpha+1\right)<(\ln\beta-\ln\alpha)\left(\sqrt{\ln\beta-1}-\sqrt{\ln\alpha-1}\right)\Leftrightarrow$

$\alpha-\beta<\sqrt{\ln\beta-1}-\sqrt{\ln\alpha-1}\Leftrightarrow\alpha+\sqrt{\ln\alpha-1}<\beta+\sqrt{\ln\beta-1}\Leftrightarrow f(\alpha)<f(\beta)$

ισχύει

δ) Η εφαπτομένη στο $A\left(e^5,e^5+2\right)$ είναι $y=\left(\dfrac{1}{4e^5}+1\right)x+\dfrac{7}{4}$ και αφού η f κοίλη τότε $f(x)\le\left(\dfrac{1}{4e^5}+1\right)x+\dfrac{7}{4}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left(4f(x)-7\right)e^5\le\left(4e^5+1\right)x$.

ε) Είναι $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}=1+\dfrac{\sqrt{\ln x-1}}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\ln x-1}}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x-1}}=0$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=1$ οπότε η $y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη C_h στο $+\infty$.

42.α) Είναι $f(x)=x^3-6x^2+9x-5$, $x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=3x^2-12x+9=3\left(x^2-4x+3\right)=3(x-1)(x-3)$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(1)=-1$, $f(3)=-5$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Η $f\nearrow$ στο $(-\infty,1]$ με $f(A_1)=(-\infty,-1]$, $f\searrow$ στο $[1,3]$ με $f(A_2)=[-5,-1]$.

Η $f\nearrow$ στο $[3,+\infty)$ με $f(A_3)=[-5,+\infty)$. Επειδή $0\in f(A_3)$ και $0\notin f(A_1)$, $0\notin f(A_2)$ τότε υπάρχει μοναδικός $\rho\in(3,+\infty)$ τέτοιος ώστε $f(\rho)=0$.

β) Είναι $g(x)=3x^4-24x^3+54x^2-60x+1$, $x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=12x^3-72x^2+108x-60=12\left(x^3-6x^2+9x-5\right)=12f(x)$

• Αν $x\in(-\infty,1]$ τότε $f(x)\le-1$ άρα $g'(x)<0$ οπότε $g\searrow(-\infty,1]$

• Αν $x\in[1,3]$ τότε $-5\le f(x)\le-1\Leftrightarrow f(x)<0$ άρα $g'(x)<0$ οπότε η $g\searrow$ στο $[1,3]$.

• Αν $x \in [3,p]$ τότε αφού $f\nearrow$ τότε $f(3) \le f(x) \le f(p) - 5 \le f(x) \le 0$ άρα $g'(x) < 0$ οπότε η $g\searrow$ στο $[3,p]$. Αφού η g συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η g είναι $\searrow$ στο $(-\infty, p]$. Επίσης $x \ge p$ θα είναι $f(x) \ge f(p) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$.Άρα η $g\nearrow$ στο $[3,+\infty)$ οπότε η g έχει ολικό ελάχιστο για $x = p$.

γ) Η ζητούμενη σχέση γίνεται $f(\beta) - f(\alpha) + 3(\beta - \alpha) \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \ge -3$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$. Οπότε αρκεί $f'(\xi) \ge -3$,δηλαδή

$3\xi^2 - 12\xi + 9 \ge -3 \Leftrightarrow 3\xi^2 - 12\xi + 12 \ge 0 \Leftrightarrow 3(\xi - 2)^2 \ge 0$ που ισχύει.

43.α) Είναι $f(x) = 12x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 30x^2 - 1821$

$f'(x) = 60x^4 + 60x^3 + 60x^2 + 60x = 60x(x^3 + x^2 + x + 1) = 60x(x+1)(x^2+1)$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = -1808 < 0$, $f(0) = -1821 < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Από τα επιμέρους σύνολα τιμών διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_1 \in (0,+\infty)$.

β) Έχουμε $f''(x) = 240x^3 + 180x^2 + 120x + 60 = 60(4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)$

Έστω $g(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ και $g'(x) = 12x^2 + 6x + 2 > 0 \Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$ (αφού $\Delta < 0$) . Είναι $g(-1) = -2$ και $g(0) = 1$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_2 η οποία $x_2 \in (-1, 0)$. Για κάθε $x < x_2 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x_2) = 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f\cap(-\infty, x_2]$ και για κάθε $x > x_2 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(x_2) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f\cup[x_2, +\infty)$. Οπότε η f έχει μοναδικό σημείο καμπής στο σημείο $B(x_2, f(x_2))$.

γ) Αφού $x_1 \in (0, +\infty)$ και $x_2 \in (-1, 0)$ τότε $x_1 > x_2$.

44.α) Λόγω ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x)}{x}$.

$0 < \xi < x \overset{\substack{f\cup\Rightarrow \\ f'\searrow}}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) > 0$

β) $F'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x}>0\Rightarrow F\nearrow(0,+\infty)$

γ) $g(x)=h(x)\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}-x=e^{-x}-x\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}-e^{-x}=0$

Έστω $\varphi(x)=F(x)-e^{-x},\ x>0.$ Είναι $\varphi'(x)=F'(x)+e^{-x}>0\Rightarrow\varphi\nearrow(0,+\infty)$

άρα η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

δ) Για κάθε $x<0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(0)=0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$ και για κάθε

$x>0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(0)=0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$, άρα η f έχει ελάχιστο στο $x=0.$

45.α) $f'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}-2=2\dfrac{\ln x-x}{x}$. Για κάθε $x>0$ είναι

$\ln x\le x-1<x\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(0,+\infty)$

β) $f''(x)=2\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. $f\cup(0,e],\cap[e,+\infty)$, έχει σημείο καμπής το $A(e,1-2e)$

.

γ) Είναι $\ln^2 x+2=2x\Leftrightarrow f(x)=-2=f(1)\Leftrightarrow x=1$

δ) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ άρα ο άξονα y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}}{1}=0$ άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln^2 x}{x}-2\right)=-2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln^2 x=+\infty$ άρα

δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{\ln^2 x}{x}-2\right)\right]=-\infty$ οπότε δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

ε) Η f' έχει μέγιστο το $f'(e)=\dfrac{2}{e}-2$ άρα

$f'(\alpha)\le\dfrac{2}{e}-2\Leftrightarrow\dfrac{2\ln\alpha}{\alpha}-\not{2}\le\dfrac{2}{e}-\not{2}\Leftrightarrow\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}\le\dfrac{1}{e}\ (1)$,

$f'(\beta)\le\dfrac{2}{e}-2\Leftrightarrow\dfrac{2\ln\beta}{\beta}-\not{2}\le\dfrac{2}{e}-\not{2}\Leftrightarrow\dfrac{\ln\beta}{\beta}\le\dfrac{1}{e}\ (2)$ και από

$(1)+(2)\Rightarrow\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}+\dfrac{\ln\beta}{\beta}\le\dfrac{2}{e}$

στ) $\alpha^{\alpha+1}>(\alpha+1)^{\alpha}\Leftrightarrow\ln\alpha^{\alpha+1}>\ln(\alpha+1)^{\alpha}\Leftrightarrow(\alpha+1)\ln\alpha>\alpha\ln(\alpha+1)\Leftrightarrow$

$\frac{\ln\alpha}{\alpha} > \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha+1} \Leftrightarrow 2\frac{\ln\alpha}{\alpha} - 2 > 2\frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha+1} - 2 \Leftrightarrow f'(\alpha) > f'(\alpha+1) \overset{f'\searrow(e,+\infty)}{\Leftrightarrow} \alpha < \alpha+1$ ισχύει

46.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επομένως η f' έχει σύνολο τιμών το

$$f'((0,+\infty)) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (1-\infty, +\infty - 0) = (-\infty, +\infty)$$

Το $0 \in f'((0,+\infty))$ άρα υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Το x_0 μοναδικό αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Η f όπως είπαμε είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της άρα το x_0 είναι μοναδικό κρίσιμο σημείο.

β) Η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε :για κάθε $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ και για κάθε $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$. Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$,

γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$ οπότε παρουσιάζει ελάχιστο x_0.

γ) i) Αν $x_0 \geq 1$ τότε $f'(x_0) \geq f'(1) \Leftrightarrow 0 \geq e-1$ αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άτοπο. Άρα $x_0 < 1$.

ii) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$ οπότε

$x_0 < 1 \Leftrightarrow f(x_0) < f(1) = e < 3$.

Επίσης $f'(x_0) = e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 = -\ln x_0$ (1)

Έχουμε $f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 \overset{(1)}{=} \frac{1}{x_0} + x_0 > 2$, αφού $x_0 < 1$ και

$\frac{1}{x_0} + x_0 > 2 \Leftrightarrow 1 + x_0^2 > 2x_0 \Leftrightarrow 1 + x_0^2 - 2x_0 > 0 \Leftrightarrow (1-x_0)^2 > 0$ ισχύει.

iii) Έστω $A_1 = (0, x_0), A_2 = [x_0, +\infty)$.

Λόγω της μονοτονίας της f στα διαστήματα A_1, A_2 έχουμε :

$$f(A_1) = \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = (f(x_0), +\infty),$$

$$f(A_2) = \left[f(x_0), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = [f(x_0), +\infty)$$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x - \ln x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\cdot\left(1-\frac{\ln x}{e^x}\right)\right] = +\infty\cdot(1-0) = +\infty$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x} \overset{\text{DLH}}{\underset{+\infty}{\overset{+\infty}{=}}} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x} = 0\right).$$

Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $f\left((0,+\infty)\right) = f(A_1)\cup f(A_2) = \left[f(x_0),+\infty\right)$.

Από γ) ι) ερώτημα έχουμε $2 < f(x_0) < 3$ οπότε το 2 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f άρα η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.

δ) Έστω $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης με την γραφική παράσταση της f .Η εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y - e^{x_0} + \ln x_0 = \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0}\right)(x-x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0}\right)x - x_0e^{x_0} + 1 + e^{x_0} - \ln x_0 .$$

Το σημείο (0, 0) ανήκει στην εφαπτομένη οπότε :

$$0 = -x_0e^{x_0} + 1 + e^{x_0} - \ln x_0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)e^{x_0} + \ln x_0 - 1 = 0 \ .$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = (x-1)e^x + \ln x - 1, x > 0$.

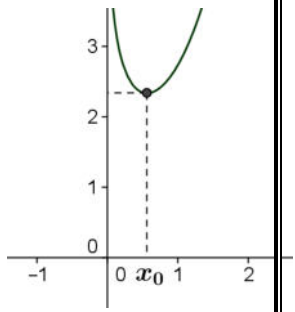
Η k είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $k'(x) = e^x(x-1) + e^x + \frac{1}{x} = xe^x + \frac{1}{x} > 0$

άρα είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και 1-1.
Η k έχει σύνολο τιμών το

$$k\left((0,+\infty)\right) = \left(\lim_{x\to0^+}k(x), \lim_{x\to+\infty}k(x)\right) = (-2-\infty, +\infty+\infty-1) = (-\infty,+\infty).$$

Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της k οπότε η εξίσωση $k(x) = 0$ έχει μοναδική , λόγω της μονοτονίας, ρίζα.

Άρα υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



ε) Από γ) ερώτημα η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα y΄γκαι δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.. Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x - \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

άρα δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

47.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ με παράγωγο

$f'(x)=\dfrac{1}{συν^2x}+\dfrac{1}{ημ^2x}>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ άρα δεν έχει ακρότατα.

β) Έστω $A_1=\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $A_2=\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα αυτά οπότε:

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)\right)=(0-\infty,+\infty-0)=(-\infty,+\infty),$$

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f(x),\lim_{x\to\pi^-}f(x)\right)=(-\infty-0,0+\infty)=(-\infty,+\infty).$$

Το 2021 ανήκει στα $f(A_1),f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1\in A_1,x_2\in A_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)=2021,f(x_2)=2021$. Τα x_1,x_2 μοναδικά ,λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα A_1,A_2 ,άρα η εξίσωση $f(x)=2021$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.

γ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ με δεύτερη παράγωγο $f''(x)=\dfrac{2ημx}{συν^3x}-\dfrac{2συνx}{ημ^3x}=\dfrac{2\left(ημ^4x-συν^4x\right)}{συν^3x\cdot ημ^3x}\Leftrightarrow$.

$$f''(x)=\frac{2\left(ημ^2x-συν^2x\right)\left(ημ^2x+συν^2x\right)}{συν^3x\cdot ημ^3x}=\frac{2\left(ημ^2x-συν^2x\right)}{συν^3x\cdot ημ^3x}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\left(ημ^2x-συν^2x\right)}{συν^3x\cdot ημ^3x}=0\Leftrightarrow ημ^2x-συν^2x=0\Leftrightarrow ημ^2x=συν^2x\Leftrightarrow$$

$$\left(ημx=συνx\Leftrightarrow εφx=1\overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)}{\Leftrightarrow}x=\frac{\pi}{4}\right)\text{ή}$$

$$\left(ημx=-συνx\Leftrightarrow εφx=-1\overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)}{\Leftrightarrow}x=\frac{3\pi}{4}\right)\text{.Έχουμε}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\left(ημ^2\frac{\pi}{6}-συν^2\frac{\pi}{6}\right)}{συν^3\frac{\pi}{6}\cdot ημ^3\frac{\pi}{6}}=\frac{2\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{8}}=-\frac{64}{3\sqrt{3}}<0\text{ οπότε }f''(x)<0\text{ στο}$$

$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\left(\eta\mu^2\frac{\pi}{3}-\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu^3\frac{\pi}{3}\cdot\eta\mu^3\frac{\pi}{3}}=\frac{2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}=\frac{64}{3\sqrt{3}}>0$ οπότε $f''(x)>0$

στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, $f''\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\left(\eta\mu^2\frac{2\pi}{3}-\sigma\upsilon\nu^2\frac{2\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu^3\frac{2\pi}{3}\cdot\eta\mu^3\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)}{-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}=-\frac{64}{3\sqrt{3}}<0$ οπότε

$f''(x)<0$ στο $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$,

$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{2\left(\eta\mu^2\frac{5\pi}{6}-\sigma\upsilon\nu^2\frac{5\pi}{6}\right)}{\sigma\upsilon\nu^3\frac{5\pi}{6}\cdot\eta\mu^3\frac{5\pi}{6}}=\frac{2\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)}{-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{8}}=\frac{64}{3\sqrt{3}}>0$ οπότε $f''(x)>0$ στο

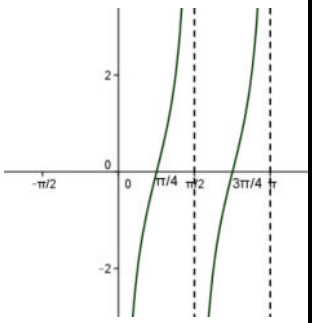
$\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.Η f είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ άρα είναι κοίλη στα

διαστήματα$\left(0,\frac{\pi}{4}\right],\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$,κυρτή στα διαστήματα $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right),\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ και έχει

σημεία καμπής τα σημεία$\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right),\left(\frac{3\pi}{4},f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$δηλαδή τα σημεία

$\left(\frac{\pi}{4},0\right),\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$.

δ) Από β) ερώτημα η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=0,x=\frac{\pi}{2},x=\pi$.Στο πεδίο ορισμού της δεν υπάρχουν περιοχές του $\pm\infty$ άρα δεν έχει οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες.



48.α) Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow|2x-6|=0\Leftrightarrow 2x-6=0\Leftrightarrow x=3$.

Για κάθε $x\neq 3$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής(αφού είναι παραγωγίσιμη), είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x<3$ είναι $f'(x)=-2x+6$ με $f''(x)=-2<0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,3]$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>3$ είναι

$f'(x)=2x-6$ με $f''(x)=2>0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[3,+\infty)$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Η f έχει σημείο καμπής το $(3,f(3))$.

β) Είναι $f'(x)=\begin{cases}2x-6, & x\geq 3\\ -2x+6, & x<3\end{cases}$.

Για $x<3$ είναι $f'(x)=-2x+6=\left(-x^2+6x\right)' \Leftrightarrow f(x)=-x^2+6x+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(0)=-8\Leftrightarrow c_1=-8$, άρα $f(x)=-x^2+6x-8,\ x<3$.

Για $x>3$ είναι $f'(x)=2x-6=\left(x^2-6x\right)' \Leftrightarrow f(x)=x^2-6x+c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής σ' αυτό, οπότε είναι συνεχής και στο $x_0=3$, άρα

$f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)\Leftrightarrow f(3)=1=-9+c_2\Rightarrow c_2=10$.

Επομένως $f(x)=\begin{cases}-x^2+6x-8, & x<3\\ 1, & x=3\\ x^2-6x+10, & x>3\end{cases}$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Για $x<3$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow -x^2+6x-8=y\Leftrightarrow x^2-6x+8=-y\Leftrightarrow x^2-6x+9=1-y\Leftrightarrow (x-3)^2=1-y$ (1). Επειδή $x<3$, είναι $(x-3)^2>0\Leftrightarrow 1-y>0\Leftrightarrow y<1$. Τότε η (1) γίνεται: $|x-3|=\sqrt{1-y}\Leftrightarrow -x+3=\sqrt{1-y}\Leftrightarrow 3-\sqrt{1-y}=x$, άρα

$f^{-1}(y)=3-\sqrt{1-y},\ y<1$. Για $x>3$ είναι

$f(x)=y\Leftrightarrow x^2-6x+10=y\Leftrightarrow x^2-6x+9=y-1\Leftrightarrow (x-3)^2=y-1$ (2)

Επειδή $x>3$ είναι $(x-3)^2>0\Leftrightarrow y-1>0\Leftrightarrow y>1$. Τότε η (2) γίνεται:

$|x-3|=\sqrt{y-1}\Leftrightarrow x-3=\sqrt{y-1}\Leftrightarrow x=3+\sqrt{y-1}$, άρα

$f^{-1}(y)=3+\sqrt{y-1},\ y>1$

Τέλος για $x=3$ είναι $y=1$, οπότε $f^{-1}(1)=3$.

Άρα $f^{-1}(y)=\begin{cases}3-\sqrt{1-y}, & y<1\\ 3, & y=1\\ 3+\sqrt{y-1}, & y>1\end{cases}$, οπότε $f^{-1}(x)=\begin{cases}3-\sqrt{1-x}, & x<1\\ 3, & x=1\\ 3+\sqrt{x-1}, & x>1\end{cases}$.

δ) Αρκεί να βρούμε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$f'(x_1)=f'(x_2)\Leftrightarrow |2x_1-6|=|2x_2-6|\Leftrightarrow 2x_1-6=\pm(2x_2-6)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x_1-6=2x_2-6\Leftrightarrow x_1=x_2)$ ή $(2x_1-6=-2x_2+6\Leftrightarrow x_1=-x_2+6)\overset{x_1\neq x_2}{\Leftrightarrow}$

$x_1 = -x_2 + 6$. Για $x_1 = 2$ είναι $x_2 = 4$ και έχουμε ότι:

Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 4$ είναι η ευθεία

$\varepsilon_1 : y - f(4) = f'(4)(x-4) \Leftrightarrow y - 2 = 2(x-4) \Leftrightarrow y = 2x - 6$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 2$ είναι η ευθεία

$\varepsilon_2 : y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y - 0 = 2(x-2) \Leftrightarrow y = 2x - 4$. Επειδή

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

ε) Για να δέχεται η C_f κάθετες εφαπτόμενες πρέπει να υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)f'(x_2) = -1$. Όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η C_f δεν δέχεται κάθετες εφαπτόμενες.

στ) Αρκεί η εξίσωση $f'(x) = x^3$ να έχει ακριβώς μια ρίζα.

Για $x < 3$ είναι $f'(x) = x^3 \Leftrightarrow -2x + 6 = x^3 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 6 = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x^3 + 2x - 6,\ x < 3$. Είναι

$\varphi'(x) = 3x^2 + 2 > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow (-\infty, 3)$.

Είναι $\varphi(0) = -6,\ \varphi(1) = -3,\ \varphi(2) = 6$, άρα $\varphi(1)\varphi(2) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική, η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^3$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$. Επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 3)$, η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

Για $x > 3$ είναι $f'(x) = x^3 \Leftrightarrow 2x - 6 = x^3 \Leftrightarrow x^3 - 2x + 6 = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 - 2x + 6,\ x \geq 3$. Είναι $h'(x) = 3x^2 - 2 > 0$ για κάθε $x > 3$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$.

Για κάθε $x \geq 3$ είναι $h(x) \geq h(3) = 27 - 6 + 6 = 27 > 0$, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^3$ είναι αδύνατη.

Τελικά η γραφική παράσταση της f' τέμνει την γραφική παράσταση της $y = x^3$ ακριβώς σε ένα του οποίου η τετμημένη βρίσκεται στο διάστημα (1,2). Άρα το διάστημα $(\alpha, \alpha+1)$ είναι το (1,2) με $\alpha = 1$.

49.α) Πρέπει $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$ οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το $[-2,2]$.Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$, με παράγωγο

$f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.Έχουμε

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0.$

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της , $f'(x) > 0$ στο $(-2,0)$, $f'(x) < 0$ στο

$(0,2)$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2,0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$ οπότε παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0, το $f(0)=2$ και ολικά ελάχιστα στα -2, 2 τα $f(-2)=f(2)=0$.

β) Έστω $A_1=[-2,0], A_2=(0,2]$. Λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα αυτά έχουμε : $f(A_1)=\left[f(-2),f(0)\right]=[0,2]$ και

$f(A_2)=\left[f(2),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=\left[0,f(0)\right)=[0,2)$.

- Αν $\alpha<0$ ή $\alpha>2$,τότε η εξίσωση είναι αδύνατη .
- Αν $0<\alpha<2,\ \alpha\in f(A_1),f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1\in A_1, x_2\in A_2$ τέτοιοι ώστε $f(x_1)=\alpha, f(x_2)=\alpha$.

Τα x_1, x_2 μοναδικά αφού η f είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα αυτά.

- Αν $\alpha=0$,τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha,\alpha\in\mathbb{R}$ έχει δύο ρίζες τις $x=-2,2$.
- Αν $\alpha=2$,τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha,\alpha\in\mathbb{R}$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

γ) i) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της , με δεύτερη παράγωγο $f''(x)=\dfrac{-\sqrt{4-x^2}+x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}=\dfrac{-\left(4-x^2\right)-x^2}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}\Leftrightarrow$

$f''(x)=\dfrac{-4}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}<0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[-2,2]$.

ii) Έστω $B\left(x_0,f(x_0)\right), x_0\in[-2,2]$ το σημείο επαφής της (ε) με την γραφική παράσταση της f. Η (ε) έχει εξίσωση:

$$y-\sqrt{4-x_0^2}=-\frac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}(x-x_0)\Leftrightarrow y=-\frac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}\cdot x+\frac{x_0^2}{\sqrt{4-x_0^2}}+\sqrt{4-x_0^2}\ .$$

Το σημείο Γ ανήκει στην (ε) οπότε:

$$\sqrt{3}=-\frac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}+\frac{x_0^2}{\sqrt{4-x_0^2}}+\sqrt{4-x_0^2}\Leftrightarrow\sqrt{12-3x_0^2}=-x_0+\cancel{x_0^2}+4-\cancel{x_0^2}\Leftrightarrow$$

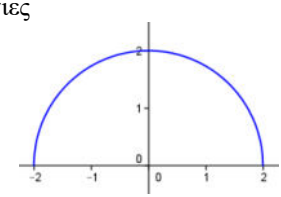
$$\left(\sqrt{12-3x_0^2}\right)^2=(-x_0+4)^2\Leftrightarrow 12-3x_0^2=x_0^2-8x_0+16\Leftrightarrow 4x_0^2-8x_0+4=0\Leftrightarrow$$

$$x_0^2-2x_0+1=0\Leftrightarrow(x_0-1)^2=0\Leftrightarrow x_0-1=0\Leftrightarrow x_0=1 \text{ και}$$

$$(\varepsilon):\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}\ .$$

ε) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες .Στο πεδίο ορισμού της δεν υπάρχει περιοχή του $-\infty,+\infty$ άρα δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες.

x	-2		0		2
f″		−		−	
f′		+	0	−	
f	ΟΕ	↱	ΟΜ	↴	ΟΕ



50.α) Η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει προφανή ρίζα την $x_0=2$.

Έχουμε $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 15^x+8^x=17^x \Leftrightarrow \left(\frac{15}{17}\right)^x+\left(\frac{8}{17}\right)^x=1.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\left(\frac{15}{17}\right)^x+\left(\frac{8}{17}\right)^x-1, x\in\mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,+\infty)$ με παράγωγο

$h'(x)=\underbrace{\left(\frac{15}{17}\right)^x}_{>0}\underbrace{\ln\frac{15}{17}}_{<\ln 1=0}+\underbrace{\left(\frac{8}{17}\right)^x}_{>0}\cdot\underbrace{\ln\frac{8}{17}}_{<\ln 1=0}<0$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της και 1-1 οπότε $x_0=2$ μοναδική ρίζα της.

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.

β) i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{g(x)-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{15^x+8^x-2}{17^x-1}\overset{\text{DLH}}{\underset{x\to 0}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{15^x\ln 15+8^x\ln 8}{17^x\ln 17}=\frac{\ln 15+\ln 8}{\ln 17}=\frac{\ln 120}{\ln 17}$.

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{15^x+8^x}{17^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{15^x}{17^x}+\frac{8^x}{17^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{15}{17}\right)^x+\left(\frac{8}{17}\right)^x\right)=0$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}+2021\right)=2021$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}\cdot\eta\mu\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to 0}}{\overset{u=\frac{f(x)}{g(x)}}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{u}\cdot\eta\mu u=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

γ) Έστω $B\left(x_0, f\left(x_0\right)\right), x_0 \in \mathbb{R}$ το σημείο επαφής της (ε) με την γραφική παράσταση της f. Η (ε) έχει εξίσωση :

$y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right) \Leftrightarrow y-15^{x_0}-8^{x_0}=\left(15^{x_0}\ln 15+8^{x_0}\ln 8\right)\cdot\left(x-x_0\right) \Leftrightarrow .$

$y=\left(15^{x_0}\ln 15+8^{x_0}\ln 8\right)\cdot x-x_0\cdot\left(15^{x_0}\ln 15+8^{x_0}\ln 8\right)+15^{x_0}+8^{x_0}.$

Το σημείο Α ανήκει στην (ε) οπότε :

$2=\left(15^{x_0}\ln 15+8^{x_0}\ln 8\right)\cdot 0-x_0\cdot\left(15^{x_0}\ln 15+8^{x_0}\ln 8\right)+15^{x_0}+8^{x_0} \Leftrightarrow$

$x_0\left(15^{x_0}\ln 15+8^{x_0}\ln 8\right)-15^{x_0}-8^{x_0}+2=0.(1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k\left(x\right)=x\left(15^x\ln 15+8^x\ln 8\right)-15^x-8^x+2.$

Η k είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$k'\left(x\right)=\cancel{15^x\ln 15+8^x\ln 8}+x\left(15^x\ln^2 15+8^x\ln^2 8\right)\cancel{-15^x\ln 15-8^x\ln 8} \Leftrightarrow$

$k'\left(x\right)=x\left(15^x\ln^2 15+8^x\ln^2 8\right).$

Έχουμε $k'\left(x\right)\geq 0 \Leftrightarrow x\left(\underbrace{15^x\ln^2 15+8^x\ln^2 8}_{>0}\right)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$. Η k είναι συνεχής στο $\left(-\infty,+\infty\right)$.

$k'\left(x\right)>0$ για $x>0$, $k'\left(x\right)<0$ για $x<0$ οπότε η k είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$, γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,0\right]$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $k\left(0\right)=0$. Επομένως $k\left(x\right)\geq k\left(0\right)=0$ με ίσον να ισχύει μόνο για $x=0$.

Από την εξίσωση (1) έχουμε ισοδύναμα : $k\left(x_0\right)=0 \Leftrightarrow x_0=0$ και

$(\varepsilon): y=\left(\ln 15+\ln 8\right)\cdot x+2 \Leftrightarrow y=\ln 120\cdot x+2.$

δ) Έχουμε

$15^x-2\geq \ln 120\cdot x-8^x \Leftrightarrow 15^x+8^x\geq \ln 120\cdot x+2 \Leftrightarrow f\left(x\right)\geq \ln 120\cdot x+2$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο

$f''\left(x\right)=15^x\ln^2 15+8^x\ln^2 8>0$ άρα είναι κυρτή, οπότε η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη εκτός από το σημείο επαφής. Επομένως $f\left(x\right)\geq \ln 120\cdot x+2$.

Επίπεδο Γ2

51.α) Επειδή $f'\left(x\right)=e^{g(x)}$ και η $e^{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, τότε και η f' θα είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$, δηλαδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ με

$f''\left(x\right)=\left(e^{g(x)}\right)'=e^{g(x)}g'\left(x\right)$. Όμοια και η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο

$(0,+\infty)$ με $g''(x)=\left(-e^{-f(x)}\right)'=e^{-f(x)}f'(x)$.

Είναι $f''(x)=e^{g(x)}g'(x)$ και $g'(x)=-e^{-f(x)}$, άρα

$f''(x)=e^{g(x)}\left(-e^{-f(x)}\right)=-e^{g(x)-f(x)}$ (1). Είναι $g''(x)=e^{-f(x)}f'(x)$ και

$f'(x)=e^{g(x)}$, άρα

$g''(x)=e^{-f(x)}e^{g(x)}=e^{-f(x)+g(x)}$ (2).

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ προκύπτει ότι $f''(x)=-g''(x)$, οπότε υπάρχει $c_1\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $f'(x)=-g'(x)+c_1$. Είναι $f'(e)=e^{g(e)}=e^{-1}$ και

$g'(e)=-e^{-f(e)}=-e^{-1}$, οπότε η σχέση (3) για $x=e$ γίνεται:

$f'(e)=-g'(e)+c_1\Leftrightarrow e^{-1}=e^{-1}+c_1\Leftrightarrow c_1=0$, άρα $f'(x)=-g'(x)$.

Είναι: $f'(x)=-g'(x)\Leftrightarrow f(x)=-g(x)+c_2$, $c_2\in\mathbb{R}$. Για $x=e$ είναι

$f(e)=-g(e)+c_2\Leftrightarrow 1=1+c_2\Leftrightarrow c_2=0$, άρα $f(x)=-g(x)$ για κάθε $x>0$.

β) Επειδή $f'(x)=e^{g(x)}$ και $f(x)=-g(x)$ είναι: $f'(x)=e^{-f(x)}\Leftrightarrow$

$f'(x)=\dfrac{1}{e^{f(x)}}\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}=1\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\right)'=(x)'\Leftrightarrow e^{f(x)}=x+c$, $c\in\mathbb{R}$. Για

$x=e$ είναι $e^{f(e)}=e+c\Leftrightarrow e=e+c\Leftrightarrow c=0$, άρα $e^{f(x)}=x\Leftrightarrow f(x)=\ln x$,

$x>0$.

γ) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο

ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(\pi)-f(e)}{\pi-e}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{\ln\pi-1}{\pi-e}$. Είναι

$e<\xi<\pi\Leftrightarrow\dfrac{1}{e}>\dfrac{1}{\xi}>\dfrac{1}{\pi}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\pi}<\dfrac{\ln\pi-1}{\pi-e}<\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow(\pi-e)\dfrac{1}{\pi}<\ln\pi-1<(\pi-e)\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow$

$1-\dfrac{e}{\pi}<\ln\pi-1<\dfrac{\pi}{e}-1\Leftrightarrow 2-\dfrac{e}{\pi}<\ln\pi<\dfrac{\pi}{e}$.

δ) $\varphi(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x}$, $x>0$. $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}>0$ για κάθε $x>1$ άρα

$\varphi\nearrow(0,+\infty)$. Για κάθε $x>1\overset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow}\varphi(x)>\varphi(1)=0$.

52.α) Έστω υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1,x_2]$ τότε από Θ. Rolle υπάρχει

$\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο $f'(\xi_1) = 0$ άτοπο. Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ θα είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$ οπότε η f είναι $1-1$ και αντιστρέφεται.

β) Αφού η f' είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα η f είναι γνησίως μονότονη και αφού $1<3$ και $f(1)<f(3)$ τότε η f θα είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

γ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,3]$ οπότε υπάρχει $\rho \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho) = \dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{6-2}{2} = 2$. Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\rho, f(\rho))$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$.

δ) Είναι $f(3) = 6 \Leftrightarrow f^{-1}(6) = 3$ οπότε $f\left(4 - f^{-1}(x-2)\right) < 6$ γίνεται

$f\left(4 - f^{-1}(x-2)\right) < f(3) \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} 4 - f^{-1}(x-2) < 3 \Leftrightarrow f^{-1}(x-2) > 1 \Leftrightarrow$

$f\left(f^{-1}(x-2)\right) > f(1) \Leftrightarrow x-2 > 2 \Leftrightarrow x > 4$.

ε) Θεωρούμε την $g(x) = 2f(x) - f(e) - f(1,8)$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Επίσης

$g(1) = 2f(1) - f(e) - f(1,8) = f(1) - f(e) + f(1) - f(1,8) < 0$ γιατί $f\nearrow$ και

$1 < e \Leftrightarrow f(1) < f(e)$, $1 < 1,8 \Leftrightarrow f(1) < f(1,8)$.

Επίσης $g(3) = 2f(3) - f(e) - f(1,8) = \left(f(3) - f(e)\right) + \left(f(3) - f(1,8)\right) > 0$ ως

άθροισμα θετικών. Οπότε $0 < f(x) < \dfrac{x^2}{2}$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει

$\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $0 < f(x) < \dfrac{x^2}{2}$ $2f(\xi) = f(e) + f(1,8)$.

Επίσης η g είναι $\nearrow$ στο $[1,3]$ γιατί για

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow 2f(x_1) < 2f(x_2) \Leftrightarrow$

$2f(x_1) - f(e) - f(1,8) < 2f(x_2) - f(3) - f(1,8) \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$ οπότε η ρίζα ξ που βρήκαμε είναι μοναδική.

στ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την $x > 0$ στα διαστήματα $[1,2], [2,3]$ οπότε υπάρχουν $\theta_1 \in (2,3)$ και $\theta_2 \in (2,3)$ τέτοια ώστε

$f'(\theta_1) = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = \dfrac{4-2}{1} = 2$ και $f'(\theta_2) = \dfrac{f(3)-f(2)}{3-2} = \dfrac{6-4}{1} = 2$ οπότε

$f'(\theta_1) = f'(\theta_2)$ και εφαρμόζοντας Θ. Rolle για την f' στο $[\theta_1, \theta_2]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\theta) = 0$.

ζ) Θεωρώ $h(x) = f(x) - 5$, συνεχής στο $[1,3]$ με $h(1) = f(1) - 5 = -3 < 0$,

$h(3)=f(3)-5=1>0$ οπότε $h(1)\cdot h(3)<0$ άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $\alpha_{min}=\ln 3$ και αφού η $f\nearrow$ τότε και η $h\nearrow$ οπότε το x_0 μοναδικό.

η) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[1,x_0]$ και $[x_0,3]$ οπότε υπάρχουν $x_1\in(1,x_0)$ και $x_2\in(x_0,3)$ τέτοια ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=\frac{5-2}{x_0-1}=\frac{3}{x_0-1}\Leftrightarrow\frac{3}{f'(x_1)}=x_0-1\quad(1)\text{ και}$$

$$f'(x_2)=\frac{f(3)-f(x_0)}{3-x_0}=\frac{6-5}{3-x_0}=\frac{1}{3-x_0}\Leftrightarrow\frac{1}{f'(x_2)}=3-x_0\quad(2)$$

Άρα από (1) και (2) προκύπτει $\frac{3}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=x_0-1+3-x_0=2$.

53.α) Η $h(x)=\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta)$ ως πηλίκο σ.σ. Στο $x=\beta$ είναι $\lim\limits_{x\to\beta^-}h(x)=\lim\limits_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}=f'(\beta)=0=h(\beta)$ άρα h συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

β) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta)$ με $h'(x)=\frac{f'(x)(x-\beta)-f(x)+f(\beta)}{(x-\beta)^2}$

και $h'(\alpha)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}<0$ γιατί $f'(\alpha)=0$ και $f(\beta)>f(\alpha)$.

γ) Αφού $h'(\alpha)<0$ τότε $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}<0$, άρα $\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}<0$ κοντά στο α. Όμως $x-\alpha>0$ κοντά στο α, οπότε $h(x)-h(\alpha)<0\Leftrightarrow h(x)<h(\alpha)$.

Είναι $h(\alpha)=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}<0$ οπότε $h(x)<h(\alpha)<0=h(\beta)$ και η f δεν έχει ελάχιστη τιμή στα άκρα α ή β. Όμως είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ οπότε έχει ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο του (α,β). Έστω $x_0\in(\alpha,\beta)$ τότε από Fermat είναι $h'(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{f'(x_0)(x_0-\beta)-f(x_0)+f(\beta)}{(x_0-\beta)^2}=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{f(x_0)-f(\beta)}{x_0-\beta}$.

54.α) $f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow(-\infty,2]$ οπότε για κάθε $x<2$ είναι $f'(x)>f'(2)=2\Rightarrow f\nearrow(-\infty,2]$

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x=2$ είναι η

$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=2x+3$

Επειδή $f''(x)<0$ η f είναι κοίλη, οπότε βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\le 2x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Έστω $g(x)=f(x)-2x+1,\ x\ge 1$. Είναι $g'(x)=f'(x)-2>0\Rightarrow g\nearrow[1,2]$

Για κάθε $1\le x\le 2\Rightarrow g(x)\ge g(1)=0$ άρα $f(x)-2x+1\ge 0\Leftrightarrow f(x)\ge 2x-1$

γ) Λόγω του ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi_1\in(1,x)$ και $\xi_2\in(x,2)$, $x\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$.

Είναι $\xi_1<\xi_2\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow\dfrac{f(x)-1}{x-1}>\dfrac{7-f(x)}{2-x}\Leftrightarrow$

$(2-x)(f(x)-1)>(x-1)(7-f(x))$

δ) Λόγω του ΘΜΤ υπάρχει $\xi_3\in(1,2):f'(\xi_3)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=6$ και

$\xi_4\in(\xi_3,2):f''(\xi_4)=\dfrac{f'(2)-f'(\xi_3)}{2-\xi_3}=\dfrac{-4}{2-\xi_3}$.Αρκεί

$\dfrac{-4}{2-\xi_3}<-4\Leftrightarrow -4<-8+4\xi_3\Leftrightarrow\xi_3>1$ ισχύει

ε) Είναι $f(1)<4<f(2)$ οπότε από το ΘΕΤ υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=4$.

στ) Λόγω ΘΜΤ για την f υπάρχει $x_1\in(1,x_0)$ και $x_2\in(x_0,2)$ τέτοια, ώστε

$f'(x_1)=\dfrac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=\dfrac{3}{x_0-1}\Leftrightarrow\dfrac{1}{f'(x_1)}=\dfrac{x_0-1}{3}\ (1)$ και

$f'(x_2)=\dfrac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}=\dfrac{3}{2-x_0}\Leftrightarrow\dfrac{1}{f'(x_2)}=\dfrac{2-x_0}{3}\ (2)$

Από $(1)+(2)\Rightarrow\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=\dfrac{1}{3}$.

55.α) Έστω $h(x)=\ln x+x-2$, $x>0$ με $h'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$, άρα $h\nearrow(0,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=-\infty$, άρα $h(A)=\mathbb{R}$. Επειδή $0\in h(A)$ και η h είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικό $\theta>0$ για το οποίο ισχύει:

$h(\theta)=0\Leftrightarrow\ln\theta+\theta-2=0$

β) i. $f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-1)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}\left((\ln x-1)+\frac{x-1}{x^2}\right)\Leftrightarrow$

$f'(x)=\frac{\ln x+x-2}{x^2}=\frac{h(x)}{x^2}$. Για κάθε

$x>\theta \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(\theta)=0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[\theta,+\infty)$

Για κάθε $0<x<\theta \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x)<h(\theta)=0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(0,\theta]$.

Ελάχιστο το $f(\theta)=\left(1-\frac{1}{\theta}\right)(\ln\theta-1)=\frac{\theta-1}{\theta}(2-\theta-1)=-\frac{(\theta-1)^2}{\theta}$.

Άρα $\forall x>0$ είναι $f(x)\geq f(\theta)\Leftrightarrow f(x)\geq-\frac{(\theta-1)^2}{\theta}\Leftrightarrow f(x)+\frac{(\theta-1)^2}{\theta}\geq 0$

ii. Είναι $h(1)=-1,\ h(2)=\ln 2$, οπότε $h(1)h(2)<0$. Σύμφωνα με το θ.Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$. Όμως το θ είναι η μοναδική ρίζα της h, άρα $\theta\in(1,2)$. Έστω $a(\theta)=-\frac{(\theta-1)^2}{\theta}$, $\theta\in[1,2]$. Είναι

$a'(\theta)=-\frac{2(\theta-1)\theta-(\theta-1)^2}{\theta^2}=-\frac{(\theta-1)(\theta+1)}{\theta^2}<0\Rightarrow a\searrow[1,2]$.

Για κάθε $1<\theta<2\overset{a\searrow}{\Rightarrow}a(\theta)>a(2)=-\frac{1}{2}$, οπότε $f(x)\geq-\frac{(\theta-1)^2}{\theta}>-\frac{1}{2}$.

iii. Έστω $g(x)=f(x)+f'(x)$, $x\in[\theta,e]$.

$g(\theta)=f(\theta)+f'(\theta)=f(\theta)+0=-\frac{(\theta-1)^2}{\theta}<0$,

$g(e)=f(e)+f'(e^2)=\left(1-\frac{1}{e}\right)(\ln e-1)+\frac{\ln e+e-2}{e^2}=\frac{e-1}{e^2}>0$. Οπότε από θεώρημα Bolzano…

56.α) i. $h'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=0$ άρα $h(x)=c$

ii) Για $x=2$ $h(2)=2f'(2)-f(2)+e^{\frac{1}{2}}=2\frac{\sqrt{e}}{2}-2\sqrt{e}+\sqrt{e}=0$

Άρα $xf'(x)-f(x)+e^{\frac{1}{x}}=0\Leftrightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}} + c_1 \overset{x=2}{\Rightarrow} c_1 = 0$ άρα $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$.

β) $f'(x) = \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}$. Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0,1]$. Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1,+\infty)$. $f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} > 0$ άρα f κυρτή στο $(0,+\infty)$.

γ) Εφαπτόμενη στο $x_0 = 2 : y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{e}}{2}x + \sqrt{e}$. Επειδή η f είναι κυρτή ισχύει: $f(x) \geq y$, για κάθε $x > 0$, άρα

$xe^{\frac{1}{x}} \geq \frac{\sqrt{e}}{2}x + \sqrt{e} \Rightarrow 2xe^{\frac{1}{x}} \geq \sqrt{e}(x+2)$

δ) Η f έχει ελάχιστο στο $x = 1$ άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \geq f(1) = e$.Είναι $f(\alpha) \geq 1 \Leftrightarrow \alpha e^{\frac{1}{\alpha}} \geq e$, $f(\beta) \geq 1 \Leftrightarrow \beta e^{\frac{1}{\beta}} \geq e$, οπότε $\alpha e^{\frac{1}{\alpha}} + \beta e^{\frac{1}{\beta}} \geq 2e$ άρα για να είναι $\alpha e^{\frac{1}{\alpha}} + \beta e^{\frac{1}{\beta}} \leq 2e$ πρέπει $\alpha e^{\frac{1}{\alpha}} + \beta e^{\frac{1}{\beta}} = 2e$ και αυτό ισχύει μόνο όταν $f(\alpha) = e \Leftrightarrow \alpha = 1$ και $f(\beta) = e \Leftrightarrow \beta = 1$

57.α) i. Για $x = 2$ και $x = -2$ προκύπτει $f(-2) \neq 0$ και $f(2) \neq 0$.

ii. Έστω $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-2,2)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{3x^2 - 12}{f(x)}$, $x \in [-2,2]$. Είναι $g(-2) = g(2) = 0$, οπότε από το Θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{6\xi f(\xi) - (3\xi^2 - 12)f'(\xi)}{f^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow 6\xi f(\xi) = (3\xi^2 - 12)f'(\xi)$ που είναι άτοπο.

β) i. $(3x^2 - 12)f'(x) - 6xf(x) = (3x^2 - 7)(3x^2 - 12)^2 \Leftrightarrow$

$\frac{(3x^2 - 12)f'(x) - 6xf(x)}{(3x^2 - 12)^2} = (3x^2 - 7) \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{3x^2 - 12}\right]' = (x^3 - 7x)' \Leftrightarrow$

$\frac{f(x)}{3x^2 - 12} = x^3 - 7x + c \Leftrightarrow f(x) = (3x^2 - 12)(x^3 - 7x + c)$, $c \in \mathbb{R}$.

$f(0) = -48 \Leftrightarrow -12c = -48 \Leftrightarrow c = 4$ άρα $f(x) = (3x^2 - 12)(x^3 - 7x + 4) \Leftrightarrow$

$f(x)=3x^5-33x^3+12x^2+84x-48,\ x\in(-2,2).$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στα $x=-2,\ x=2$ είναι και συνεχής σε αυτά,

άρα $f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(3x^5-33x^3+12x^2+84x-48\right)=0$ και

$f(-2)=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(3x^5-33x^3+12x^2+84x-48\right)=0.$

Τελικά $f(x)=\begin{cases}3x^5-33x^3+12x^2+84x-48, & x\in(-2,2)\\ 0, & x=-2\ \text{ή}\ 2\end{cases}$ ή

$f(x)=3x^5-33x^3+12x^2+84x-48,\ x\in[-2,2].$

ii. Από το σχήμα Horner προκύπτει: $f(x)=(x-2)(x+2)(3x^3-21x+12)$

Έστω $g(x)=3x^3-21x+12,\ x\in[-2,2]$. Είναι $g(-2)=30>0,\ g(2)=-6<0$ δηλαδή $g(-2)g(2)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική, υπάρχει $x_0\in(2,2)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$. Τότε $f(x_0)=(x_0-2)(x_0+2)g(x_0)=0$

58.α) Έστω ΑΔ = y cm. Κατασκευάζουμε τα ύψη ΑΚ και ΔΛ του τραπεζίου.

Είναι $\text{συν}60^\circ=\dfrac{BK}{x}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{BK}{x}\Leftrightarrow BK=\dfrac{x}{2}$. Όμοια και $\Gamma\Lambda=\dfrac{x}{2}$. Επειδή η περίμετρος του τραπεζίου είναι 20cm, ισχύει ότι

$$A\Delta+AB+B\Gamma+\Gamma\Delta=20\Leftrightarrow A\Delta+x+\left(\frac{x}{2}+A\Delta+\frac{x}{2}\right)+x=20\Leftrightarrow$$

$$2A\Delta+3x=20\Leftrightarrow 2A\Delta=20-3x\Leftrightarrow A\Delta=\frac{20-3x}{2}\ \text{cm}$$

β) Είναι $\eta\mu 60^\circ=\dfrac{AK}{x}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{AK}{x}\Leftrightarrow AK=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ cm. Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:

$$E(x)=\frac{(B\Gamma+A\Delta)AK}{2}=\frac{\left(\cancel{2}\,\frac{20-3x}{\cancel{2}}+x\right)\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}=\frac{(20-2x)\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}\Leftrightarrow$$

$$E(x)=\frac{\cancel{2}\,(10-x)\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(10x-x^2\right)$$

γ) 1ος τρόπος: Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,6)$ με

$E'(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(10-2x).\ E'(x)\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}(10-2x)\ge 0\Leftrightarrow 10-2x\ge 0\Leftrightarrow x\le 5$

Για κάθε $x\in(0,5)$ είναι $E'(x)>0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $(0,5]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(5,6)$ είναι

$E'(x)<0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $[5,6)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η Ε παρουσιάζει μέγιστο για $x=5\,cm$. Επειδή στις 12 το μεσημέρι η ΑΔ είχε αρχικό μήκος 1cm, και μέγιστο εμβαδό έχει το τραπέζιο όταν $x=5$ μετέβαλε το μήκος της κατά 4cm. Επειδή κάθε ώρα αυξάνει το μήκος της κατά 0,4 cm, θα χρειαστεί $t=\dfrac{4}{0,4}=\dfrac{4}{\frac{4}{10}}=10$ ώρες για αυτή τη μεταβολή, οπότε στις 10 το βράδυ της ίδιας ημέρας το τραπέζιο θα έχει το μέγιστο εμβαδό.

2ος τρόπος: Επειδή το χαυξάνεται με ρυθμό 0,4cm/h, είναι $x'(t)=0,4\Leftrightarrow x(t)=0,4t+c,\ c\in\mathbb{R}$

Είναι $x(12)=1\Leftrightarrow 1=4,8+c\Leftrightarrow c=-3,8$, οπότε $x(t)=0,4t-3,8$.

Επειδή $x(t)\in(0,6)$ είναι $0<0,4t-3,8<6\Leftrightarrow 9,5<t<24,5$. Όμως η ΑΔ αρχίζει να αυξάνει στις 12 το μεσημέρι, οπότε $t\in[12\ ,\ 24,5)$ Τότε

$$E(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}x(t)\big(10-x(t)\big)=\frac{\sqrt{3}}{2}(0,4t-3,8)\big(10-0,4t+3,8\big)=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(0,4t-3,8)(13,8-0,4t),\ t\in[12\ ,\ 24,5)\ \text{Είναι}$$

$$E'(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\big[0,4(13,8-0,4t)-0,4(0,4t-3,8)\big]\Leftrightarrow$$

$$E'(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0,4(13,8-0,4t-0,4t+3,8)\Leftrightarrow$$

$E'(t)=0,2\cdot\sqrt{3}(17,6-0,8t)$. Είναι $E'(t)\ge 0\Leftrightarrow 17,6-0,8t\ge 0\Leftrightarrow t\le 22$.

Όταν $t\in(12\ ,\ 22)$ είναι $E'(t)>0\Rightarrow E\nearrow[12\ ,\ 22]$ και για $t\in(22\ ,\ 24,5)$ είναι $E'(t)<0\Rightarrow E\searrow[22\ ,\ 24,5)$. Το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο τη χρονική στιγμή $t=22$, δηλαδή στις 10 το βράδυ της ίδιας ημέρας.

δ) Αρκεί να υπάρχει μοναδικό $t_0\in[12\ ,\ 24,5)$ τέτοιο ώστε $E(t_0)=8$

Είναι $E(12)=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$, $E(22)=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$ και $\lim\limits_{t\to 24,5}E(t)=12\sqrt{3}$.Στο διάστημα $\Delta_1=[12,22]$ η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_1)=\left[\dfrac{9\sqrt{3}}{2},\dfrac{25\sqrt{3}}{2}\right]$. Στο διάστημα $\Delta_2=(22,\ 24,5)$ η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_2)=\left(12\sqrt{3},\ \dfrac{25\sqrt{3}}{2}\right)$.Τώρα θα εξετάσουμε το 8 σε ποιο από τα

$E(\Delta_1)$, $E(\Delta_2)$ ανήκει. Για να ανήκει στο

$E(\Delta_1)$ πρέπει $\frac{9\sqrt{3}}{2} \le 8 \le \frac{25\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{81\cdot 3}{4} \le 64 \le \frac{625\cdot 3}{4} \Leftrightarrow 243 \le 256 \le 1875$

ισχύει. Για να ανήκει στο $E(\Delta_2)$ πρέπει

$12\sqrt{3} \le 8 \le \frac{25\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 144\cdot 3 \le 64 \le \frac{635\cdot 3}{4}$ αδύνατο. Επειδή το 8 περιέχεται

στο $E(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδική χρονική στιγμή $t_0 \in (12,22)$ τέτοιο ώστε

$E(t_0) = 8$.

59.α) Θέτουμε $x-1 = u$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $u \in \mathbb{R}$. Η σχέση

$(x-1)f'(x-1) = 2(x-1)|x-1|$ γίνεται $uf'(u) = 2u|u|$.

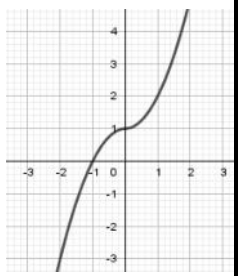
Αν $u > 0$, τότε $uf'(u) = 2u\cdot u \Leftrightarrow f'(u) = 2u \Leftrightarrow f(u) = u^2 + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$

Αν $u < 0$, τότε $uf'(u) = 2u\cdot(-u) \Leftrightarrow f'(u) = -2u \Leftrightarrow f(u) = -u^2 + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 1$. Τελικά $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ 1-x^2, & x < 0 \end{cases}$.

β) Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = -2x > 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = 2x > 0$, άρα για κάθε $x \ne 0$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.



γ) Για $x < 0$ η f αποτελείται από το τμήμα της παραβολής $y = 1-x^2$ που βρίσκεται αριστερά του άξονα y΄y και για $x > 0$ από το τμήμα της παραβολής $y = 1+x^2$ που βρίσκεται δεξιά του άξονα y΄y.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Για $x < 0$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow 1-x^2 = y \Leftrightarrow 1-y = x^2$ (1)

Είναι $x < 0$ άρα $x^2 > 0 \Leftrightarrow 1-y > 0 \Leftrightarrow y < 1$, τότε η (1) γίνεται:

$-x = \sqrt{1-y} \Leftrightarrow x = -\sqrt{1-y}$, άρα $f^{-1}(y) = -\sqrt{1-y},\ y < 1$

Για $x > 0$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow 1+x^2 = y \Leftrightarrow x^2 = y-1$ (2)

Είναι $x > 0$ άρα $x^2 > 0 \Leftrightarrow y-1 > 0 \Leftrightarrow y > 1$, τότε η (2) γίνεται:

$x = \sqrt{y-1} \Leftrightarrow x = \sqrt{y-1}$, άρα $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1},\ y > 1$. Άρα

$$f^{-1}(y)=\begin{cases}-\sqrt{1-y}, & y<1\\ 1, & y=1\\ \sqrt{y-1}, & y>1\end{cases}\text{, οπότε } f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x}, & x<1\\ 1, & x=1\\ \sqrt{x-1}, & x>1\end{cases}.$$

ε) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x^{\not 2}}{\not x}=0,$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^{\not 2}}{\not x}=0$, άρα

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0\Rightarrow f'(0)=0$

στ) Για $x>0$ είναι $f(x)\ge 2\ln x+2\Leftrightarrow 1+x^2\ge 2\ln x+2\Leftrightarrow x^2-2\ln x-1\ge 0$

Έστω $h(x)=x^2-2\ln x-1,\ x>0$. Είναι $h'(x)=2\dfrac{x^2-1}{x}\ge 0\Leftrightarrow x^2\ge 1\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\ge 1.$

Για κάθε $0<x<1$ είναι $h'(x)<0$ και για κάθε $x>1$ είναι $h'(x)>0$, επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η h έχει ελάχιστο το $h(1)=0$, άρα $h(x)\ge 0\Leftrightarrow x^2-2\ln x-1\ge 0$.

60.α) Έστω $g(x)=f(x)-x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)-1=e^{x^2}-1$.

Για κάθε $x\ne 0$ είναι $x^2>0\Leftrightarrow e^{x^2}>1\Leftrightarrow g'(x)>0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\le 0$ είναι $g(x)\le g(0)=0\Leftrightarrow f(x)-x-1\le 0\Leftrightarrow f(x)\le x+1$ και για κάθε $x>0$ είναι $g(x)>g(0)=0\Leftrightarrow f(x)-x-1>0\Leftrightarrow f(x)>x+1$

β) Είναι $f'(x)=e^{x^2}>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f\ 1-1$, οπότε η f αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$, οπότε επειδή για κάθε $x\le 0$ είναι $f(x)\le x+1$, είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$, οπότε επειδή για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>x+1$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f^{-1}(f(x))=x$, οπότε

$$\left[f^{-1}(f(x))\right]'=(x)'\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)=1$$

Αντικαθιστούμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και έχουμε:

$\left(f^{-1}\right)'\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)f'\left(f^{-1}(x)\right)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)e^{\left(f^{-1}(x)\right)^2}=1\Leftrightarrow$

$\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{e^{\left(f^{-1}(x)\right)^2}}=e^{-\left(f^{-1}(x)\right)^2}$

2ος τρόπος: Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$, οπότε

$\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]'=(x)'\Leftrightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}\right)'(x)=1\Leftrightarrow e^{\left(f^{-1}(x)\right)^2}\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)=1\Leftrightarrow$

$\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{e^{\left(f^{-1}(x)\right)^2}}=e^{-\left(f^{-1}(x)\right)^2}$.

δ) Αν $\alpha=\beta$ τότε $\alpha-\alpha\le f(\alpha)-f(\alpha)\le e(\alpha-\alpha)$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha<\beta$ τότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$

τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow e^{\xi^2}=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Είναι $0<\xi<1\Leftrightarrow 0<\xi^2<1\Leftrightarrow 1<e^{\xi^2}<e\Leftrightarrow 1<\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<e\Leftrightarrow$

$\beta-\alpha<f(\beta)-f(\alpha)<e(\beta-\alpha)$

ε) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)f(h)-f(1+h)-ef(h)+e}{h^4}=$

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)\left(f(h)-1\right)-e\left(f(h)-1\right)}{h^4}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\left(f(h)-1\right)\left(f(1+h)-e\right)}{h^4}=$

$\lim\limits_{h\to0}\left[\dfrac{f(h)-1}{h}\cdot\dfrac{f(1+h)-e}{h}\cdot\dfrac{1}{h^2}\right]=f'(0)f'(1)(+\infty)=1\cdot e(+\infty)=+\infty$

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}}{3x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\cancel{e^{x^2}}}{6\cancel{x}}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{x^2=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{3}=+\infty$

$f(x)=x^3-4x\Leftrightarrow f(x)-x^3+4x=0$

Έστω $h(x)=f(x)-x^3+4x,\ x\in[-1,+\infty)$.

Είναι $h(-1)=f(-1)+1-4=f(-1)-3$. Για κάθε $x<0$ είναι $f(x)<x+1$,

οπότε $f(-1)>-1+1=0\Leftrightarrow f(-1)-3<-3\Rightarrow h(-1)<0$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x^3+4x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3\left(\dfrac{f(x)}{x^3}-1+\dfrac{4}{x^2}\right)\right]=+\infty$, άρα

υπάρχει $\kappa>0$, όπου ο κ είναι πολύ μεγάλος αριθμός, τέτοιος ώστε $h(\kappa)>0$.

Επειδή $h(-1)h(\kappa)<0$ και η h είναι συνεχής στο $[-1,\kappa]$, σύμφωνα με το

θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=x^3-4x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

61.α) $f(x)=\sqrt{e^x-x-1+\alpha x}, x\in\mathbb{R}$ και για να ορίζεται στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x-x-1+\alpha x\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=e^x-x-1+\alpha x$, $x\in\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $g(x)\geq g(0)$ άρα στο μηδέν παρουσιάζει ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x)=e^x-1+\alpha, x\in\mathbb{R}$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat $g'(0)=0\Leftrightarrow \alpha=0$. Άρα τελικά έχουμε $f(x)=\sqrt{e^x-x-1}, x\in\mathbb{R}$.

β) Ισχύει ότι $e^x\geq x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο: $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{2\sqrt{e^x-x-1}}, x\neq 0$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$ Απορρίπτεται και έχουμε

$e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$ άρα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμων: Επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν τότε έχουμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x-1	-		+
$2\sqrt{e^x-x-1}$	+		+
$f'(x)$	-		+
f	↘		↗

γ) Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f''(x)=\frac{2e^x\sqrt{e^x-x-1}-\dfrac{(e^x-1)^2}{\sqrt{e^x-x-1}}}{4(e^x-x-1)}=\frac{2e^x(e^x-x-1)-(e^x-1)^2}{4(e^x-x-1)\sqrt{e^x-x-1}}, x\neq 0$$

Ισχύει από β ερώτημα ότι $4(e^x-x-1)\sqrt{e^x-x-1}>0$ για $x\neq 0$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=2e^x(e^x-x-1)-(e^x-1)^2=e^{2x}-2xe^x-1, x\geq 0$

Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$h'(x)=2e^{2x}-2e^x-2xe^x=2e^x(e^x-x-1)>0$ για κάθε $x>0$ άρα έχουμε ότι $h\nearrow$ στο $[0,+\infty)$, άρα για $x>0\Leftrightarrow h(x)>h(0)=0\Rightarrow f''(x)>0$ άρα η $f'\nearrow$ στο $(0,+\infty)$.

δ) $f'\left((1+x)^{\nu}\right) > f'(1+\nu x) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} (1+x)^{\nu} > 1+\nu x \Leftrightarrow (1+x)^{\nu} - \nu x - 1 > 0$.

Έστω η συνάρτηση $k(x) = (1+x)^{\nu} - \nu x - 1, x \geq 0$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $k'(x) = \nu(1+x)^{\nu-1} - \nu = \nu\left[(1+x)^{\nu-1} - 1\right], x > 0$

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow 1+x > 1 \Leftrightarrow (1+x)^{\nu-1} > 1 \Leftrightarrow (1+x)^{\nu-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow k'(x) > 0$ άρα η κ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Για κάθε $x > 0$ άρα έχουμε $x > 0 \Leftrightarrow k(x) > k(0) = 0$. Άρα $(1+x)^{\nu} - \nu x - 1 > 0$ για $x > 0$.

ε) $r(x) = (1+x)^{\nu} - 1 - \nu x - \dfrac{\nu(\nu-1)}{2}x^2, x \geq 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $r'(x) = \nu(1+x)^{\nu-1} - \nu - \nu(\nu-1)x = \nu\left[(1+x)^{\nu-1} - (\nu-1)x - 1\right], x > 0$

και από γ ερώτημα έχουμε ότι $(1+x)^{\nu} - \nu x - 1 > 0$ για $x > 0$, $\nu \geq 2$ άρα για κάθε $\nu \geq 3 \Leftrightarrow \nu - 1 \geq 2$ άρα βάζοντας στην σχέση όπου ν το $\nu - 1$ προκύπτει ότι $r'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα r είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε:

$$x > 0 \Leftrightarrow r(x) > r(0) = 0 \Leftrightarrow (1+x)^{\nu} > 1 + \nu x + \frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2$$

62.α) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{x} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}$

Σε καθένα από τα διαστήματα $(0,+\infty)$ και $(-\infty,0)$ η f είναι συνεχής.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\sqrt{-x}\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}\right) = 0$ και $f(0) = 0$ άρα η f είναι συνεχής και στο μηδέν άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(-\xi, 0)$ είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ και έχουμε:

Για $x = -\xi$ είναι $y = 0 \Leftrightarrow \alpha\xi = \beta$

Για $x = \xi$ είναι $y = f(\xi) \Leftrightarrow \alpha\xi + \beta = f(\xi)$

Αν $\xi > 0$ τότε: $\alpha\xi + \beta = \sqrt{\xi}$ άρα

$$\begin{cases} \alpha\xi = \beta \\ \alpha\xi + \beta = \sqrt{\xi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\xi = \beta \\ 2\beta = \sqrt{\xi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\xi = \dfrac{\sqrt{\xi}}{2} \\ \beta = \dfrac{\sqrt{\xi}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\sqrt{\xi}}{2\xi} \\ \beta = \dfrac{\sqrt{\xi}}{2} \end{cases} .$$

Δηλαδή τότε έχει εφαπτομένη την ευθεία:

$$y=\frac{\sqrt{\xi}}{2\xi}x+\frac{\sqrt{\xi}}{2}=\frac{\not{\xi}}{2\not{\xi}\sqrt{\xi}}x+\frac{\sqrt{\xi}}{2}=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}x+\frac{\sqrt{\xi}}{2}$$

Για $x>0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ και η εφαπτομένη στο Α είναι η

$$(\varepsilon): y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)\Leftrightarrow y-\sqrt{\xi}=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}(x-\xi)\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{\xi}}{2\xi}x-\frac{\xi\sqrt{\xi}}{2\xi}+\sqrt{\xi}\Leftrightarrow$$

$$y=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}x+\frac{\sqrt{\xi}}{2}$$

γ) $g(x)=\begin{cases} x^{\frac{f(x)}{\ln(\eta\mu x)}} & ,x>0 \\ 1 & ,x=0 \end{cases}$. Για x>0 είναι

$$g(x)=x^{\frac{f(x)}{\ln(\eta\mu x)}}=e^{\ln\left(x^{\frac{f(x)}{\ln(\eta\mu x)}}\right)}=e^{f(x)\frac{\ln x}{\ln(\eta\mu x)}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln(\eta\mu x)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x\sigma\upsilon\nu x}=1\cdot\frac{1}{1}=1$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι συνεχής και στο μηδέν και ισχύει

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0$. Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)\frac{\ln x}{\ln(\eta\mu x)}\right)=0$ και

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}e^{f(x)\frac{\ln x}{\ln(\eta\mu x)}}\overset{f(x)\frac{\ln x}{\ln(\eta\mu x)}=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim_{x\to 0^+}e^u=e^0=1=g(0)$$

Άρα η g είναι συνεχής στο μηδέν.

δ) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & ,x>0 \\ 0 & ,x=0 \\ -\sqrt{-x} & ,x<0 \end{cases}$. Για $x<0$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x)=-\frac{-1}{2\sqrt{-x}}=\frac{1}{2\sqrt{-x}}>0\ .$$

Για $x>0$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$

Επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν τότε $f\nearrow\mathbb{R}$.

ε) $f\nearrow\mathbb{R}$ άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και στο $(0,+\infty)$ και $f\nearrow\mathbb{R}$ άρα: $f\left((-\infty,0)\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\right)=(-\infty,0)$

$f\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$

Για $x<0$ και $y<0: y=f(x)\Leftrightarrow y=-\sqrt{-x}\Leftrightarrow -y=\sqrt{-x}\Leftrightarrow y^2=-x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-y^2\Leftrightarrow f^{-1}(y)=-y^2, y<0$ άρα $f^{-1}(x)=-x^2, x<0$

Για $x\geq0$ και $y\geq0: y=f(x)\Leftrightarrow y=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=y^2\Leftrightarrow f^{-1}(y)=y^2, y\geq0$ άρα $f^{-1}(x)=x^2, x\geq0$. Τελικά $f^{-1}(x)=\begin{cases}-x^2, x<0\\ x^2, x\geq0\end{cases}$.

στ) Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως πολ/μική και στο $(0,+\infty)$ ως πολ/μική και είναι παραγωγίσιμη και στο μηδέν γιατί:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to0^-}-x=0,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0^-}x=0$$

Έχουμε ότι: $\left(f^{-1}\right)'(x)=\begin{cases}-2x, x<0\\ 0, x=0\\ 2x, x>0\end{cases}$

Για $x<0$ η εξίσωση εφαπτομένης στο $A\left(x_1,f^{-1}(x_1)\right)$ είναι:

$(\varepsilon_1): y-f^{-1}(x_1)=\left(f^{-1}\right)'(x_1)(x-x_1)$. Το $(0,0)\in\varepsilon_1$ άρα έχουμε:

$-f^{-1}(x_1)=-\left(f^{-1}\right)'(x_1)x_1\Leftrightarrow x_1^2=2x_1^2\Leftrightarrow 2x_1^2-x_1^2=0\Leftrightarrow x_1^2=0\Leftrightarrow x_1=0$

Απορρίπτεται επειδή $x<0$ άρα σε αυτό το διάστημα δεν υπάρχει τέτοια εφαπτομένη.

Για $x>0$ η εξίσωση εφαπτομένης στο $B\left(x_2,f^{-1}(x_2)\right)$ είναι:

$$(\varepsilon_2): y-f^{-1}(x_2)=\left(f^{-1}\right)'(x_2)(x-x_2)$$

Το $(0,0)\in\varepsilon_2$ άρα έχουμε: $-f^{-1}(x_2)=-\left(f^{-1}\right)'(x_2)x_2\Leftrightarrow -x_2^2=2x_2^2\Leftrightarrow$

$x_2^2=0\Leftrightarrow x_2=0$ Απορρίπτεται επειδή $x>0$ άρα σε αυτό το διάστημα δεν υπάρχει τέτοια εφαπτομένη. Για $x=0$ έχουμε $f^{-1}(0)=0$ και $\left(f^{-1}\right)'(0)=0$ άρα έχουμε: $(\varepsilon_3): y-f^{-1}(0)=\left(f^{-1}\right)'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=0$

Άρα μοναδική εφαπτομένη που διέρχεται από την αρχή τον αξόνων είναι ο άξονας x΄x.

63.α) $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0 \quad (1)$ για $x\in(\alpha,\beta)$.

Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, $x\in[\alpha,\beta]$ άρα η εξίσωση (1) γίνεται:

$g(x)=0$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Γνωρίζουμε ότι το σημείο $M(\alpha,\beta)$ με $\alpha<\beta$ και $\alpha,\beta\in\Delta$, ανήκει στην γραφική παράσταση της f, δηλαδή έχουμε ότι $f(\alpha)=\beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta)=\alpha$. Επίσης ισχύει $f(x)=f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in\Delta$ άρα για $x=\alpha$ έχουμε $f(\alpha)=f^{-1}(\alpha)=\beta$ και για $x=\beta$ έχουμε $f(\beta)=f^{-1}(\beta)=\alpha$

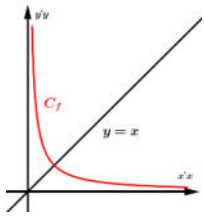
Είναι $g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=\beta-\alpha>0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\beta=\alpha-\beta<0$ άρα $g(\alpha)g(\beta)<0$. Από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$.

Για κάθε $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]\subseteq\Delta$ με $x_1<x_2$ έχουμε $-x_1>-x_2$ και $f(x_1)>f(x_2)$ αφού f φθίνουσα στο Δ και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $g(x_1)>g(x_2)\Rightarrow g\searrow\Delta$.

Άρα το x_0 είναι μοναδικό και η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x$ έχει μοναδική ρίζα στο (α,β).

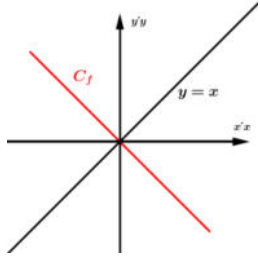
β) 1ο παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$, δηλαδή $f=f^{-1}$. Η f έχει μοναδικό κοινό σημείο με την $y=x$ το $M(1,1)$ και προφανώς ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις της άσκησης.



2ο παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x)=-x$, $x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x)=-x$, $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή $f=f^{-1}$. Η f έχει μοναδικό κοινό σημείο με την $y=x$ το $O(0,0)$ και προφανώς ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις της άσκησης.



γ) $\dfrac{f(2x-2\gamma+\delta)}{x-\gamma}-\dfrac{f(\delta-x+\gamma)}{x-\delta}=0 \overset{\substack{x\neq\gamma\\ x\neq\delta}}{\Leftrightarrow}$

$$\frac{f(2x-2\gamma+\delta)(x-\delta)-f(\delta-x+\gamma)(x-\gamma)}{(x-\gamma)(x-\delta)}=0$$

Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα στο (γ,δ) με $\gamma<\delta$ και $\gamma,\delta\in\Delta$ άρα υπάρχει $\kappa\in(\gamma,\delta)$ τέτοιο ώστε $f(\kappa)=0$

Έστω η συνάρτηση

$g(x)=f(2x-2\gamma+\delta)(x-\delta)-f(\delta-x+\gamma)(x-\gamma)$, $x\in[\gamma,\delta]$.

Η g είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Ισχύει $g(\gamma)=f(\delta)(\gamma-\delta)>0$ γιατί $\gamma<\delta\Leftrightarrow\gamma-\delta<0$ και για

$\gamma<\kappa<\delta\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(\kappa)>f(\delta)\Leftrightarrow f(\delta)<0$

Ισχύει $g(\delta)=-f(\gamma)(\delta-\gamma)<0$ γιατί $\gamma<\delta\Leftrightarrow\delta-\gamma>0$ και για

$\gamma<\kappa<\delta\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(\gamma)>f(\kappa)\Leftrightarrow f(\gamma)>0$.Άρα $g(\delta)g(\gamma)<0$ και από το Θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\gamma,\delta)$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi)=0\Leftrightarrow f(2\xi-2\gamma+\delta)(\xi-\delta)-f(\delta-\xi+\gamma)(\xi-\gamma)=0\overset{\substack{\xi\neq\gamma\\ \xi\neq\delta}}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f(2\xi-2\gamma+\delta)(\xi-\delta)-f(\delta-\xi+\gamma)(\xi-\gamma)}{(\xi-\gamma)(\xi-\delta)}=0\Leftrightarrow\frac{f(2\xi-2\gamma+\delta)}{\xi-\gamma}-\frac{f(\delta-\xi+\gamma)}{\xi-\delta}=0$$

.

δ) Έστω ότι η f' είναι περιττή τότε για κάθε $x\in\Delta$ το $-x\in\Delta$ και

$f'(-x)=-f'(x)\Leftrightarrow f'(x)=-f'(-x)\Leftrightarrow f'(x)=\left[f(-x)\right]'\overset{x\in\Delta}{\Leftrightarrow}f(x)=f(-x)+c$

Για $x=0:c=0$ άρα $f(x)=f(-x)$ για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή η f είναι άρτια και δεν είναι 1-1, άρα δεν αντιστρέφεται άτοπο.

ε) Έστω $x,x_0\in\Delta$.

Αν $x<x_0\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)>0\Rightarrow\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0\Rightarrow$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0\Rightarrow f'(x_0)\leq 0$$

Αν $x>x_0\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(x_0)\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)<0\Rightarrow\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0\Rightarrow$

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0\Rightarrow f'(x_0)\leq 0$$

στ) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ στα $[0,x]$ και $[x,1]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,x)$, $\xi_2 \in (x,1)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x)}{x}$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{-1-f(x)}{1-x}$.

Είναι $f'(\xi_1) \le -1 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x} \le -1 \Leftrightarrow f(x) \le x \ \ (\alpha)$

Είναι $f'(\xi_2) \le -1 \Leftrightarrow \dfrac{-1-f(x)}{1-x} \le -1 \Leftrightarrow -1-f(x) \le -1+x \Leftrightarrow f(x) \ge -x \ \ (\beta)$

Από (α),(β) προκύπτει ότι $f(x) = -x$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Για $x = 0 : f(0) = 0$ και για $x = 1 : f(1) = -1$ άρα τελικά $f(x) = -x$ για κάθε $x \in [0,1]$.

64.α) $e^{2f(x)} = e^{2x^3+2x+4} - 2e^{x^3+x+2} + 2e^{f(x)} \Leftrightarrow$

$e^{2f(x)} - 2e^{f(x)} = e^{2x^3+2x+4} - 2e^{x^3+x+2} \Leftrightarrow$

$e^{2f(x)} - 2e^{f(x)} + 1 = e^{2x^3+2x+4} - 2e^{x^3+x+2} + 1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)} - 1\right)^2 = \left(e^{x^3+x+2} - 1\right)^2 \Leftrightarrow$

$\left|e^{f(x)} - 1\right| = \left|e^{x^3+x+2} - 1\right| \ \ (1)$

Έστω η συνάρτηση $\nu(x) = e^{f(x)} - 1$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$\nu(x) = 0 \Leftrightarrow |\nu(x)| = 0 \Leftrightarrow \left|e^{f(x)} - 1\right| = 0 \Leftrightarrow \left|e^{x^3+x+2} - 1\right| = 0 \Leftrightarrow e^{x^3+x+2} - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$e^{x^3+x+2} = 1 \Leftrightarrow e^{x^3+x+2} = e^0 \Leftrightarrow$

$x^3 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2 - x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow (x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1)$ ή

$\left(x^2 - x + 2 = 0 \text{ αδύνατη}\right)$ Τώρα θα λύσουμε την ανίσωση:

$e^{x^3+x+2} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x^3+x+2} > 1 \Leftrightarrow e^{x^3+x+2} > e^0 \Leftrightarrow x^3 + x + 2 > 0$.

$x^3 + x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2 - x + 2\right) > 0 \Leftrightarrow x > -1$ γιατί το τριώνυμο $x^2 - x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -7 < 0$ άρα δεν έχει ρίζες και επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1 > 0$ τότε $x^2 - x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε x < - 1 είναι $\nu(x) \ne 0$ και επειδή η ν είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty,-1)$. Είναι $\nu(-2) = e^{f(-2)} - 1 = e^{-8} - 1 < 0$, άρα $\nu(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,-1)$, οπότε:

$\left|e^{f(x)}-1\right|=\left|e^{x^3+x+2}-1\right| \Leftrightarrow -e^{f(x)}+1=-e^{x^3+x+2}+1 \Leftrightarrow$

$e^{f(x)}=e^{x^3+x+2} \Leftrightarrow f(x)=x^3+x+2$.

Για κάθε $x > -1$ είναι $\nu(x)\neq 0$ και επειδή η ν είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,+\infty)$. Είναι $\nu(0)=e^{f(0)}-1=e^2-1>0$, άρα $\nu(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$, οπότε:

$\left|e^{f(x)}-1\right|=\left|e^{x^3+x+2}-1\right| \Leftrightarrow e^{f(x)}+-1=e^{x^3+x+2}-1 \Leftrightarrow$

$e^{f(x)}=e^{x^3+x+2} \Leftrightarrow f(x)=x^3+x+2$

Επειδή για $x=-1$ είναι $f(-1)=0$ τελικά είναι

$f(x)=\begin{cases} x^3+x+2\ ,\ x\neq -1 \\ 0\quad\ ,\ x=-1 \end{cases} = x^3+x+2\ ,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Έστω ότι η γραφική παράσταση της f δέχεται τρεις εφαπτόμενες παράλληλες μεταξύ τους στα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma(x_3,f(x_3))$ με $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

Τότε θα είναι $f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle στην f στα $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ και προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,x_2)$ και $\xi_2\in(x_2,x_3)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)=0$ και $f''(\xi_2)=0$. Όμως $f''(x)=6x$, οπότε $f''(\xi_1)=0\Leftrightarrow\xi_1=0$ και $f''(\xi_2)=0\Leftrightarrow\xi_2=0$, δηλαδή $\xi_1=\xi_2$ που είναι άτοπο.

γ) Για το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ πρέπει $\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ g(x)\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x\neq 0$

Άρα είναι $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}+2$, $x\neq 0$.

Έστω $h(x)=(f\circ g)(x)-5=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}+2-5=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}-3$, $x>0$. Για κάθε

$x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x_1^3}>\dfrac{1}{x_2^3} \\ \dfrac{1}{x_1}-5>\dfrac{1}{x_2}-5 \end{cases} \Rightarrow$

$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_1}-5>\frac{1}{x_2^3}+\frac{1}{x_2}-5\Rightarrow h(x_1)>h(x_2)$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Επίσης η h είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-3\right)=+\infty$ άρα υπάρχει $\alpha>0$ πολύ κοντά στο 0 τέτοιο ώστε $f(\alpha)>0$. Είναι επίσης $h(1)=2-3=-1<0$ άρα έχουμε ότι $h(\alpha)h(1)<0$ άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1\in(\alpha,1)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_1)=0$ και επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ τότε το x_1 είναι μοναδικό.

δ) Για $0<x<x_1\overset{h\searrow}{\Rightarrow}h(x)>h(x_1)=0$ και για $x>x_1\overset{h\searrow}{\Rightarrow}h(x)<h(x_1)=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to x_1^-}\frac{1}{(f\circ g)(x)-5}=\lim\limits_{x\to x_1^-}\frac{1}{h(x)}=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to x_1^+}\frac{1}{(f\circ g)(x)-5}=\lim\limits_{x\to x_1^+}\frac{1}{h(x)}=-\infty$. Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_1}\frac{1}{(f\circ g)(x)-5}$.

ε) Είναι $M(x(t),y(t))$ με $y(t)=f(x(t))=x^3(t)+x(t)+2$ και $x'(t)=1\ cm/sec$.

Οι προβολή του Μ στον άξονα x΄x είναι το σημείο $A(x(t),0)$ και αντίστοιχα στον y΄y το σημείο $B(0,y(t))$. Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι :

$E(t)=(OA)(OB)=x(t)y(t)=x^4(t)+x^2(t)+2x(t)$

Είναι $E'(t)=4x^3(t)x'(t)+2x(t)x'(t)+2x'(t)=4x^3(t)+2x(t)+2$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο Κ τότε $x(t_0)=1$ άρα:

$E'(t_0)=4x^3(t_0)+2x(t_0)+2=4+2+2=8\ cm^2/sec$

65.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=1-\sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $x\neq 2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=-\eta\mu x-1=-(\eta\mu x+1)$.

Για κάθε $x\neq 2\kappa\pi-\frac{3\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$ είναι $g'(x)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(0)=0=g(0)$. Για κάθε $x<0$ είναι $f(x)<f(0)=0$ και $g(x)>g(0)=0$

Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>f(0)=0$ και $g(x)<g(0)=0$ άρα $g(x)<f(x)$.

β) $2x+1=\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x \Leftrightarrow x-\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x-x-1 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$

Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=0$ γιατί για κάθε $x<0$ είναι $f(x)<0<g(x)$ και για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>0>g(x)$.

γ) Έστω $M(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f με $x_0\in(\pi,2\pi)$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι η ευθεία ε με εξίσωση:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-(x_0-\eta\mu x_0)=(1-\sigma\upsilon\nu x_0)(x-x_0)$

Για να διέρχεται η ε από το σημείο Α πρέπει:

$1-(x_0-\eta\mu x_0)=(1-\sigma\upsilon\nu x_0)(-x_0) \Leftrightarrow 1-\cancel{x_0}+\eta\mu x_0=-\cancel{x_0}+x_0\sigma\upsilon\nu x_0 \Leftrightarrow$

$1+\eta\mu x_0-x_0\sigma\upsilon\nu x_0=0$

Έστω $h(x)=1+\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[\pi,2\pi]$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(\pi,2\pi)$ με $h'(x)=\cancel{\sigma\upsilon\nu x}-\cancel{\sigma\upsilon\nu x}+x\eta\mu x=x\eta\mu x$.

Για κάθε $x\in(\pi,2\pi)$ είναι $\eta\mu x<0\Rightarrow h'(x)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\pi,2\pi]$.

Είναι $h(\pi)=1+\eta\mu\pi-\pi\sigma\upsilon\nu\pi=1+0-\pi(-1)=1+\pi>0$,

$h(2\pi)=1+\eta\mu 2\pi-2\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi=1+0-2\pi=1-2\pi<0$, δηλαδή $h(\pi)h(2\pi)<0$

και επειδή η h είναι συνεχής, λόγω του Θ.Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\pi,2\pi)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$. Επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\pi,2\pi]$, το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$.

δ) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-x-1}{x-\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}-1}{1-\frac{\eta\mu x}{x}}=$

$\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}-1\right)\dfrac{1}{1-\frac{\eta\mu x}{x}}\right]=-1(+\infty)=-\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=0$ και $1-\dfrac{\eta\mu x}{x}=\dfrac{x-\eta\mu x}{x}=\dfrac{f(x)}{x}>0$

ε) Η f είναι συνεχής στο $[x,x+1]$, $x\in(0,\pi-1)$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$ με $f'(x)=1-\sigma\upsilon\nu x$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow \not{1}-\sigma\upsilon\nu\xi=x+\not{1}-\eta\mu(x+1)-x+\eta\mu x \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\xi=\eta\mu(x+1)-\eta\mu x$

Είναι $x<\xi<x+1 \overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow[0,\pi]}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu x>\sigma\upsilon\nu\xi>\sigma\upsilon\nu(x+1) \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu(x+1)<\eta\mu(x+1)-\eta\mu x<\sigma\upsilon\nu x$

στ) $f(x)\le\dfrac{1}{2}(\varepsilon\varphi x-x) \Leftrightarrow 2x-2\eta\mu x\le\varepsilon\varphi x-x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x+2\eta\mu x-3x\ge 0$

Έστω $B(x)=2\eta\mu x-3x+\varepsilon\varphi x$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Η Β είναι παραγωγίσιμη στο

$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ με $B'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-3+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu^3x-3\sigma\upsilon\nu^2x+1}{\sigma\upsilon\nu^2x} \Leftrightarrow$

$B'(x)=\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x-1)(2\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu x-1)}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x-1)^2(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2x}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $B'(x)>0$ και επειδή η Β είναι συνεχής στο $x=0$,

είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Για κάθε

$0\le x<\dfrac{\pi}{2} \overset{B\nearrow}{\Rightarrow} B(x)\ge B(0) \Leftrightarrow 2\eta\mu x-3x+\varepsilon\varphi x\ge 0$.

ζ) $k(x)=x-f(x)=x-x+\eta\mu x=\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$.

i. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη $x_1,x_2\in(0,\pi)$ τέτοια, ώστε $k'(x_1)+k'(x_2)=0$.

Είναι $k'(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Επειδή για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $k'(x)>0$, ενώ για

$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ είναι $k'(x)<0$. Αν $0<x_1<\dfrac{\pi}{2}$ τότε $\dfrac{\pi}{2}<x_2<\pi$.

Είναι $k'(x_2)=-k'(x_1) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_2=-\sigma\upsilon\nu x_1=\sigma\upsilon\nu(\pi-x_1) \Leftrightarrow x_2=\pi-x_1$

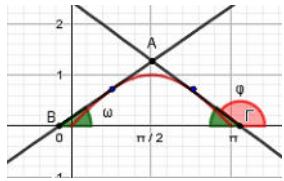
Άρα για κάθε $x_1\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ οι εφαπτομένες της C_k στο $x=x_1$ και στο $x=\pi-x_1$ έχουν αντίθετες κλίσεις.

ii. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_k στο x_1 με τον άξονα x΄x και φ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_k στο $x_2=\pi-x_1$ με τον άξονα x΄x.

Είναι $k'(x_1)=\varepsilon\varphi\omega$ και $k'(x_2)=\varepsilon\varphi\varphi$

Έστω ότι οι εφαπτομένες τέμνονται στο Α. Είναι
$k'(x_2) = -k'(x_1) \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi\varphi = -\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(180° - \varphi) \Leftrightarrow A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$,
οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



η)

$x-1 = 2x(g(x)+x)+4f(x) \Leftrightarrow x-1 = 2x(\sigma\upsilon\nu x - x - 1 + x) + 4(x - \eta\mu x) \Leftrightarrow$

$x-1 = 2x\sigma\upsilon\nu x - 2x + 4x - 4\eta\mu x \Leftrightarrow 4\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x - x - 1 = 0$

Έστω $\varphi(x) = 4\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x - x - 1,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Είναι

$\varphi'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x - 1,\ \varphi''(x) = 2x\sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ είναι $\varphi''(x) < 0 \Rightarrow \varphi' \searrow \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και για κάθε

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\varphi''(x) > 0 \Rightarrow \varphi' \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ οπότε η φ' παρουσιάζει ελάχιστο

στο 0. Δηλαδή για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\varphi'(x) \geq 1 > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Είναι $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -5 + \frac{\pi}{2} < 0,\ \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - \frac{\pi}{2} > 0$ δηλαδή $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$\varphi(x_0) = 0$ και αφού $\varphi \nearrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, το x_0 είναι μοναδικό.

66.α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x = \frac{1 - 4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}},\ x > 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow 4x\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x\sqrt{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 1 - 4x\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^3 < \frac{1}{16} \Rightarrow 0 < x < \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow 1 - 4x\sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^3 > \frac{1}{16} \Rightarrow x > \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

Επειδή η f είναι συνεχής, είναι $f \nearrow \left(0, \sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right]$ και $f \searrow \left[\sqrt[3]{\frac{1}{16}}, +\infty\right)$.

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ το

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right)=\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{16}}}-\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right)^2-1=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2-1=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-1=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-1$$

.

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f''(x)=-\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x}-2=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}-2<0$ για $x>0$, άρα η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

β) Επειδή η f έχει μέγιστο στο $x=\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$,για κάθε $x>0$ ισχύει ότι:

$f(x)\le f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right)=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-1<0$ αφού $\frac{3}{4}<1$ και $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}<1$.

γ) Η εξίσωση που δόθηκε είναι $\sqrt[4]{x}-x=\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}\Leftrightarrow\sqrt[4]{x}-x-1=\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}-1\Leftrightarrow$

$$f\left(\sqrt{x}\right)=\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}-1\,(1)$$

Από ερώτημα Β2 ισχύει $f(x)<\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-1$ για κάθε $x\ne\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ οπότε η (1) ισχύει μόνον για $\sqrt{x}=\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\Leftrightarrow x=\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right)^2=\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}$.

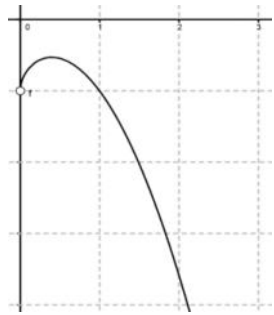
δ) Η συνάρτηση f μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο μηδέν αφού είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και το μηδέν είναι άκρο αυτού. Έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}-x^2-1\right)=-1$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επίσης έχουμε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}-1-\frac{1}{x^2}\right)}{x}=$

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\sqrt{x}}-1-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty(0-1-0)=-\infty$$

Άρα η f δεν έχει ούτε πλάγιες ούτε οριζόντιες ασύμπτωτες. Επίσης ισχύει $f(1)=-1$ και $f(x)<0$ για κάθε $x>0$ και έχουμε και τον παρακάτω πίνακα μεταβολών. Επίσης και με βάση ότι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-1$ μπορούμε να

σχεδιάσουμε την f στο περίπου χωρίς ακριβέστατο προσδιορισμό της θέσεως του ακροτάτου αλλά σε σχέση με αυτά που μας ζητάει η εκφώνηση. Οπότε έχουμε:



x	$-\infty$ 0	$\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0	-
$f''(x)$		-	-
f		⌒	⌒

ε) i) Έστω $M(x(t),y(t))$, όπου $y(t)=f(x(t))$

Απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με σταθερή ταχύτητα 1 m/sec άρα έχουμε ότι $x'(t)=1$ για κάθε $t>0$. Άρα ισχύει: $x'(t)=1\Leftrightarrow x(t)=t+c, t>0, c\in\mathbb{R}$.

Για $t=1$ διέρχεται από το σημείο $A(1,-1)$ άρα ισχύει $x(1)=1$ άρα τελικά $c=0$.

Άρα έχουμε $x(t)=t, t>0$ και $y(t)=f(x(t))=f(t)$. Επομένως η τεταγμένη y παρουσιάζει μέγιστο όπου και η συνάρτηση f δηλαδή για $t=\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ sec το M έχει μέγιστη τεταγμένη.

ii) Η απόσταση ΒΜ δίνεται από την συνάρτηση:

$$d(t)=\sqrt{(x(t)-1)^2+(y(t)-1)^2}=\sqrt{(x(t)-1)^2+(f(x(t))-1)^2}, t>0$$

Η d είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο: $d'(t)=\dfrac{(x(t)-1)x'(t)+(f(x(t))-1)f'(x(t))x'(t)}{\sqrt{(x(t)-1)^2+(f(x(t))-1)^2}}, t>0$

Για $t=1$ sec έχουμε:

$$d'(1)=\frac{(x(1)-1)x'(1)+(f(x(1))-1)f'(x(1))x'(1)}{\sqrt{(x(1)-1)^2+(f(x(1))-1)^2}}=\frac{(1-1)\cdot 1+(f(1)-1)f'(1)\cdot 1}{\sqrt{(1-1)^2+(f(1)-1)^2}}=$$

$$=\frac{(-1-1)\left(-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{(-1-1)^2}}=\frac{-2\left(-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}\ \text{m/sec}$$

Συνδυαστικά θέματα Δ μέχρι και τις παραγώγους

Επίπεδο Δ1

67.α) Έστω $g(x)=f(x)-x^3$, $x\geq 0$. Είναι $g'(x)=f'(x)-3x^2$,
$g''(x)=f''(x)-6x>0\Rightarrow g'\nearrow[0,+\infty)$.Για κάθε $x>0\Rightarrow$
$g'(x)>g'(0)=0\Rightarrow g\nearrow[0,+\infty)$.Για κάθε $x>0\Rightarrow g(x)>g(0)\Leftrightarrow f(x)>x^3$
Έστω $h(x)=f(x)-x^4$, $x\geq 0$. Είναι $h'(x)=f'(x)-4x^3$ και
$h''(x)=f''(x)-12x^2<0\Rightarrow h'\searrow[0,+\infty)$
Για κάθε $x>0\Rightarrow h'(x)<h'(0)=0\Rightarrow h\searrow[0,+\infty)$.Για κάθε
$x>0\Rightarrow h(x)<h(0)=0\Rightarrow f(x)<x^4$.

β) Είναι $g'(x)>0\Leftrightarrow f'(x)>3x^2$ για κάθε $x>0$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2)=+\infty$
είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

γ) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(x,x+1):f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$. Είναι
$3\xi^2<f'(\xi)$ και $3\xi^2>3x^2$ άρα $f'(\xi)>3x^2\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)>3x^2$ και επειδή
$\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=+\infty$

δ) Έστω $\varphi(x)=f(x)-2+e^x$, $x\geq 0$. Είναι $\varphi(0)=-1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ και
$\varphi\nearrow[0,+\infty)$ (αποδεικνύεται εύκολα), άρα $\varphi([0,+\infty))=[-1,+\infty)$. Επειδή
$0\in[-1,+\infty)$ η $\varphi(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

68.α) Είναι $f(x)=e^x-1$ και $f'(x)=e^x$, $f(0)=0$ και $f'(0)=1$ οπότε η
εξίσωση εφαπτομένης στο $x_0=0$ είναι $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ άρα $\varepsilon:y=x$.
Θέλουμε να δείξουμε ότι η $y=x$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της
συνάρτησης $h(x)=-x^2-x-1$. Είναι $h'(x)=-2x-1$. Αν υποθέσουμε ότι
$(x_1,h(x_1))$ είναι το σημείο επαφής πρέπει $h'(x_1)=\lambda_\varepsilon\Leftrightarrow -2x_1-1=1\Leftrightarrow$
$x_1=-1$ και $h(-1)=-1$, $h'(-1)=1$ οπότε η εφαπτομένη της C_h στο $x_1=-1$
είναι $y-h(-1)=h'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y+1=x+1\Leftrightarrow y=x$.

β) Έστω $g(x)=f(x)-h(x)=e^x-1+x^2+x+1=e^x+x^2+x$.
Είναι $g'(x)=e^x+2x+1$ και $g''(x)=e^x+2>0$ οπότε η g' είναι γνησίως
αύξουσα. $g'(-1)=e^{-1}-1=\dfrac{1}{e}-1<0$, $g'(0)=e^0+1=2>0$. Οπότε

$g'(-1)g'(0)<0$ και αφού η g' είναι συνεχής στο $[-1,0]$ και γνησίως αύξουσα θα υπάρχει μοναδικό $p\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $g'(p)=0\Leftrightarrow e^p+2p+1=0\quad(1)$.

γ) Για $x<p$ είναι $g'(x)<g'(p)\Leftrightarrow g'(x)<0$ οπότε $g\searrow$

i. Για $x>p$ είναι $g'(x)>g'(p)\Leftrightarrow g'(x)>0$ οπότε $g\nearrow$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα είναι $g(x)\geq g(p)\Leftrightarrow g(x)\geq e^p+p^2+p$.

Όμως από (1) $e^p=-2p-1$ οπότε $g(x)\geq -2p-1+p^2+p\Leftrightarrow g(x)\geq p^2-p-1$.

ii. Για το πρόσημο της g' και την μονοτονία της g έχουμε το διπλανό πίνακα.

	$-\infty$	p	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x+x^2+x\right]=+\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x\right)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x^2+x\right)=+\infty$.

Επίσης $p^2-p-1<1821\Leftrightarrow p^2-p<1822$ γιατί

$p\in(-1,0)$ και $-2<p-1<-1$ οπότε $\rho(\rho-1)<2\Leftrightarrow\rho^2-\rho<2<1822$. Η $g\searrow$ στο $(-\infty,p]$ με σύνολο τιμών $g(A_1)=\left[g(p),\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right)=\left[p^2-p-1,+\infty\right)$ και αφού $1821\in g(A_1)$ τότε υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=1821$ στο $(-\infty,p)$. Επίσης η $g\nearrow$ στο $[p,+\infty)$ με σύνολο τιμών $g(A_2)=\left[g(p),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=\left[p^2-p-1,+\infty\right)$ και αφού $1821\in g(A_2)$ τότε η εξίσωση $g(x)=1821$ θα έχει άλλη μια ρίζα στο διάστημα $(p,+\infty)$. Άρα η εξίσωση $g(x)=1821$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$.

69.α) Έχουμε $\left(f'(x)\right)^2-2f'(x)+\dfrac{4}{x^2+4}=0\Leftrightarrow$

$\left(f'(x)\right)^2-2f'(x)+1=1-\dfrac{4}{x^2+4}\Leftrightarrow\left(f'(x)-1\right)^2=\dfrac{x^2}{x^2+4}$.

Έστω $h(x)=f'(x)-1$ τότε είναι $h^2(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$. Για κάθε $x\neq0$ είναι $h^2(x)>0$ και αφού η h είναι συνεχής τότε διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Είναι $h(-2)=f'(-2)-1<0$ άρα

$h(x)=-\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+4}}=-\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}\overset{x<0}{=}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ και $h(2)=f'(2)-1>0$, άρα

$h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$, $x>0$. Δηλαδή $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$, $x\neq 0 \Leftrightarrow$

$f'(x)-1=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}+1$, $x\neq 0$.

Επίσης για $x=0$ $h(0)=(f'(0)-1)^2=0 \Leftrightarrow f'(0)=1$, άρα $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $f'(x)=\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)' \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+4}+c$. Για $x=0$ είναι

$f(0)=2+c \Leftrightarrow c=0$. Άρα $f(x)=x+\sqrt{x^2+4}$. Επίσης

$f(x)=x+\sqrt{x^2+4}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq 0 \Leftrightarrow f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Είναι $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}}>0$ (1) άρα η f είναι $\nearrow$

στο $\mathbb{R}$. Επίσης $f''(x)=\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)'=\dfrac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}>0$ οπότε η f κυρτή

στο $\mathbb{R}$.

δ) i. Είναι $g(x)=\ln f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\overset{(1)}{=}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}>0$.

ii. Αφού $g'(x)>0$ τότε η $g\nearrow$ οπότε για $x>0$ είναι

$g(x)>g(0)=\ln 2>0 \Leftrightarrow g(x)>0$. Θεωρούμε $\varphi(x)=xg(x)-f(x)+x+2$,

$x>0$ είναι $\varphi'(x)=g(x)+xg'(x)-f'(x)+1=$

$g(x)+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}-1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}+1=g(x)>0$ οπότε η $\varphi\nearrow$ άρα για $x>0$ θα

είναι $\varphi(x)>\varphi(0) \Leftrightarrow xg(x)-f(x)+x+2>0 \Leftrightarrow$

$xg(x)>f(x)-x-2 \Leftrightarrow g(x)>\dfrac{f(x)-x-2}{x}$

70.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x+3x^2$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$

είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow\mathbb{R} \Rightarrow f$ $1-1$. $f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=0$.

Για κάθε $x<0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0)=0 \Rightarrow xf(x)>0$ και για κάθε

$x>0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0 \Rightarrow xf(x)>0$. Άρα $xf(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $g(-1)=-3,\ g(0)=1$, δηλαδή $g(-1)g(0)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική, σύμφωνα με το Θ.Bolzano, υπάρχει $\rho\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho)=0$. Είναι $g'(x)=3x^2-2x+2>0\ (\Delta<0)\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$ οπότε το ρ είναι η μοναδική ρίζα της $g(x)=0$ στο διάστημα $(-1,0)$ άρα $\alpha=-1$.

Είναι $g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}<0$, δηλαδή $g\left(-\frac{1}{2}\right)g(0)<0$ οπότε σύμφωνα με το Θ.Bolzano, η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

Όμως το ρ είναι η μοναδική ρίζα της g στο $(-1,0)$, άρα $\rho\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$ επομένως βρίσκεται πλησιέστερα στο 0.

γ) Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=e^x+x^2-2x-2,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι

$h'(x)=e^x+2x-2$ και $h''(x)=e^x+2>0\Rightarrow h'\nearrow\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}h'(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}h'(x)=+\infty$ οπότε η h' έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα υπάρχει $x_1: h'(x_1)=0$. Επειδή $h'(0)=-1<0,\ h'(1)=e>0$, λόγω του Θ.Bolzano, $x_1\in(0,1)$.

Για κάθε $x<x_1 \overset{h'\nearrow}{\Leftrightarrow} h'(x)<h'(x_1)=0\Rightarrow h\searrow(-\infty,x_1]$ και για κάθε

$x>x_1 \overset{h'\nearrow}{\Leftrightarrow} h'(x)>h'(x_1)=0\Rightarrow h\nearrow[x_1,+\infty)$. Είναι

$h'(x_1)=0\Leftrightarrow e^{x_1}+2x_1-2=0\Leftrightarrow e^{x_1}=2-2x_1\ (1)$.

$h(x_1)=e^{x_1}+x_1^2-2x_1-2=2-2x_1+x_1^2-2x_1-2=+x_1^2-4x_1=x_1(x_1-4)<0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-2x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$.

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$.

Στο $\Delta_1=(-\infty,0)$ είναι $h(\Delta_1)=(-1,+\infty)$. Επειδή $0\in h(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $\rho_1\in\Delta_1$ άρα $\rho_1<0$ τέτοιο, ώστε $h(\rho_1)=0\Leftrightarrow f(\rho_1)=g(\rho_1)$. Στο $\Delta_2=[0,x_1]$ είναι $h(\Delta_2)=[h(x_1),-1]$ οπότε η h δεν έχει ρίζα στο Δ_2. Τέλος στο $\Delta_3=[x_1,+\infty)$ είναι $h(\Delta_3)=[h(x_1),+\infty)$.Επειδή $0\in h(\Delta_3)$ υπάρχει μοναδικό $\rho_2\in\Delta_3$ άρα $\rho_2>0$ τέτοιο, ώστε $h(\rho_2)=0\Leftrightarrow f(\rho_2)=g(\rho_2)$.

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.

δ) Έστω $\varphi(x)=e^x+\frac{x^4}{4}-x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $\varphi'(x)=e^x-x^3-1=f(x)$, οπότε:

Για $x<0$ είναι $f(x)<0\Rightarrow\varphi'(x)<0\Rightarrow\varphi\searrow(-\infty,0]$ οπότε για $x\le 0$ είναι $\varphi(x)\ge\varphi(0)=0$ και για $x>0$ είναι $f(x)>0\Rightarrow\varphi'(x)>0\Rightarrow\varphi\nearrow[0,+\infty)$ άρα $\varphi(x)\ge\varphi(0)=0$ και για κάθε $x\ge 0$.

Άρα $\varphi(x)\ge 0\Leftrightarrow e^x-\frac{x^4}{4}-x-1\ge 0\Leftrightarrow e^x+\frac{x^4}{4}\ge x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2ος τρόπος

$e^x+\frac{x^4}{4}\ge e^x\ge x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu^\nu x)}{x^\nu}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(\eta\mu^\nu x)}{\eta\mu^\nu x}\cdot\frac{\eta\mu^\nu x}{x^\nu}\right)$ (1). Θέτουμε $\eta\mu^\nu x=u$ με $\lim\limits_{x\to 0}u=0$,

τότε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu^\nu x)}{\eta\mu^\nu x}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u+u^3-1}{u}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u+3u^2}{1}=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu^\nu x}{x^\nu}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^\nu=1$, οπότε $(1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu^\nu x)}{x^\nu}=1\cdot 1=1$

στ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{e^\beta+\beta^3-1-e^\alpha-\alpha^3+1}{\beta-\alpha}=\frac{e^\beta-e^\alpha}{\beta-\alpha}+\frac{\beta^3-\alpha^3}{\beta-\alpha}=$$

$$\frac{e^\beta-e^\alpha}{\beta-\alpha}+\frac{(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\frac{e^\beta-e^\alpha}{\beta-\alpha}+\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2\ (2).$$

Έστω $a(x)=e^x$, $x\in[\alpha,\beta]$. Λόγω του Θ.Μ.Τ για την a υπάρχει $\xi_2\in(\alpha,\beta)$

τέτοιο, ώστε $a'(\xi_2)=\frac{a(\beta)-a(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow e^{\xi_2}=\frac{e^\beta-e^\alpha}{\beta-\alpha}$ (3) . Από τις (2),(3)

$\Rightarrow f'(\xi_1)=e^{\xi_2}+\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2$

71.α) Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[1,5]$ τότε το ελάχιστο της f είναι το 1 και το μέγιστο της f είναι το 5 και $1<f(0)<f(2)<5$ οπότε τα ακρότατα δεν εμφανίζονται στα άκρα 0 και 2, άρα αφού η f είναι συνεχής υπάρχουν $x_1,\ x_2\in(0,2)$ τέτοια ώστε $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=5$, οπότε από Θ. Fermat θα είναι $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

β) Αφού $f'(x_1)=f'(x_2)$ και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε από Θ.

Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

γ) Θεωρούμε την $g(x) = 2f(x) + f'(x) - x - 2$, η οποία είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και $g(x_1) = 2f(x_1) + f'(x_1) - x_1 - 2 = 2 \cdot 1 + 0 - x_1 - 2 = -x_1 < 0$ αφού $x_1 \in (0,2)$.

$g(x_2) = 2f(x_2) + f'(x_2) - x_2 - 2 = 2 \cdot 5 - x_2 - 2 = 8 - x_2 > 0$ αφού $x_2 \in (0,2)$.

Οπότε $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$ άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2f(x_0) + f'(x_0) = x_0 + 2$.

δ) Θεωρούμε την $h(x) = xf'(x) + f(x) - 4$, η οποία είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και $h(x_1) = x_1 f'(x_1) + f(x_1) - 4 = 0 + 1 - 4 = -3 < 0$,

$h(x_2) = x_2 f'(x_2) + f(x_2) - 4 = 5 - 4 = 1 > 0$. Οπότε $h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$ και από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho \in (x_1, x_2) \subseteq (0,2)$ τέτοιο ώστε $h(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho f'(\rho) = 4 - f(\rho)$.

ε) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,1)$ και $\xi_2 \in (1,2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - 2$

και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 4 - f(1)$ οπότε

$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(1) - 2 + 4 - f(1) = 2$.

72.α) Έστω ότι η f'' δεν είναι $1-1$ τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, έστω $x_1 < x_2$ με $f''(x_1) = f''(x_2)$ οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$ (άτοπο).

β) Αφού η f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη, $f^{(3)}(x)$ είναι συνεχής και διάφορη του μηδενός τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αφού $f^{(3)}(3) > 0$ τότε $f^{(3)}(x) > 0$ άρα $f'' \nearrow$.

γ) Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x) + f(6-x) = 5 \quad (1)$ έχουμε $f'(x) - f'(6-x) = 0$ και $f''(x) + f''(6-x) = 0 \quad (2)$. Στην (2) για $x = 3$ προκύπτει $f''(3) = 0$ οπότε για $x < 3$ θα είναι $f''(x) < f''(3) = 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$ οπότε f κοίλη στο $(-\infty, 3]$ ενώ για $x > 3$ είναι $f''(x) > f''(3) \Leftrightarrow f''(x) > 0$ άρα f κυρτή στο $[3, +\infty)$. Η f έχει Σ.Κ. για $x = 3$ το $(3, f(3)) \equiv \left(3, \dfrac{5}{2}\right)$ γιατί

για x=3 στην (1) είναι $2f(3)=5\Leftrightarrow f(3)=\frac{5}{2}$.

δ) Αφού $f(3)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2f(3)=5$ τότε η εξίσωση $2f(x)=5$ έχει ρίζα τη $x=3$.

Για κάθε $x<3\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(3)>0$ και για κάθε $x>3\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(3)>0$

οπότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι $\nearrow$ οπότε η ρίζα $x=3$ είναι μοναδική.

ε) Η εξίσωση $2f(x+2)=f(x+1)+f(x+3)$ γίνεται

$f(x+2)-f(x+1)=f(x+3)-f(x+2)\ \ (3)$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα $[x+1,x+2]$ και $[x+2,x+3]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(x+1,x+2)$ και $\xi_2\in(x+2,x+3)$ τέτοια, ώστε

$f'(\xi_1)=f(x+2)-f(x+1)$, $f'(\xi_2)=f(x+3)-f(x+2)$. Άρα (3) προκύπτει $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ άτοπο αφού $\xi_1\neq\xi_2$ και $f'\nearrow$ στο $[3,+\infty)$.

73.α) i. Στη σχέση $f(x)\geq e^{2x}\ \ (1)$ θέτω όπου $x=0$ και προκύπτει

$f(0)\geq e^0\Leftrightarrow f(0)\geq 1\ (3)$. Επίσης στη σχέση (2) $f(x)\cdot f(-x)=1$ θέτουμε όπου $x=0$ και προκύπτει $f(0)\cdot f(0)=1\Rightarrow f^2(0)=1\ \ (4)$. Από (3) και (4) προκύπτει $f(0)=1$.

ii. Στην (1) θέτω όπου x το $-x$ και έχουμε

$f(-x)\geq e^{-2x}\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\frac{1}{f(x)}\geq\frac{1}{e^{2x}}\Leftrightarrow f(x)\leq e^{2x}\ \ (5)$.

Οπότε από (1) και (5) προκύπτει $f(x)=e^{2x}$.

β) i. Είναι $h(x)=\frac{e^{2x}}{x}$, $x>0$ και $h'(x)=\frac{2e^{2x}x-e^{2x}}{x^2}=\frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$

$h'(x)\geq 0\Leftrightarrow 2x-1\geq 0\Rightarrow x\geq\frac{1}{2}$. Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $h'(x)<0$ και για κάθε $x>\frac{1}{2}$ είναι $h'(x)>0$, επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. Η h έχει ελάχιστο το $h\left(\frac{1}{2}\right)=2e$, άρα για κάθε $x>0$ θα είναι $h(x)\geq h\left(\frac{1}{2}\right)=2e$.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}e^{2x}\right) = +\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\dfrac{2e^{2x}}{1} = +\infty$ οπότε και από τον πίνακα μονοτονίας της h προκύπτει ότι το σύνολο τιμών είναι $h(A) = [2e, +\infty)$.

iii. Είναι $\ln\alpha + \ln\beta + \ln\gamma = -2 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta\gamma) = -2 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = e^{-2}$.

Επίσης $h(\alpha) = \dfrac{e^{2\alpha}}{\alpha} \geq 2e$, $h(\beta) = \dfrac{e^{2\beta}}{\beta} \geq 2e$, $h(\gamma) = \dfrac{e^{2\gamma}}{\gamma} \geq 2e$.

Επομένως $h(\alpha)h(\beta) + h(\beta)h(\gamma) + h(\gamma)h(\alpha) \geq 12e^2 \Leftrightarrow$

$\dfrac{e^{2\alpha}}{\alpha}\cdot\dfrac{e^{2\beta}}{\beta} + \dfrac{e^{2\beta}}{\beta}\cdot\dfrac{e^{2\gamma}}{\gamma} + \dfrac{e^{2\gamma}}{\gamma}\cdot\dfrac{e^{2\alpha}}{\alpha} \geq 12e^2 \Leftrightarrow \dfrac{\gamma e^{2(\alpha+\beta)} + \alpha e^{2(\beta+\gamma)} + \beta e^{2(\gamma+\alpha)}}{\alpha\beta\gamma} \geq 12e^2 \Leftrightarrow$

$\dfrac{\gamma e^{2(\alpha+\beta)} + \alpha e^{2(\beta+\gamma)} + \beta e^{2(\gamma+\alpha)}}{e^{-2}} \geq 12e^2 \Leftrightarrow \gamma e^{2(\alpha+\beta)} + \alpha e^{2(\beta+\gamma)} + \beta e^{2(\gamma+\alpha)} \geq 12$

74.α) Η $f(x) = (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x) = (3x^2 + 6x + 6)e^{-x} - e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) =$

$e^{-x}(3x^2 + 6x + 6 - x^3 - 3x^2 - 6x - 6) = -x^3e^{-x}$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 0]$ και για $x > 0$ είναι

$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [0, +\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(0) = 6$.

β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = e^{-x}x^2(x-3)$.

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 3]$ και κυρτή στο $[3, +\infty)$. Η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $A\left(3, \dfrac{84}{e^3}\right)$.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
f''	−	−	0	+
f	∩	∩		∪

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{e^x} = -\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x} = +\infty$. Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{e^x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2 + 6x + 6}{e^x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x + 6}{e^x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{e^x} = 0$. Η f είναι $\nearrow$ στο $(-\infty, 0]$ οπότε έχει σύνολο τιμών

$f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(0)\right]=(-\infty,6]$ και η f είναι ↘ στο $[0,+\infty)$ οπότε έχει σύνολο τιμών $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(0)\right]=(0,6]$ οπότε το σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,6]$.

δ) Είναι $f(x)\le f(0)\Leftrightarrow f(x)\le 6\Leftrightarrow \dfrac{x^3+3x^2+6x+6}{e^x}\le 6\Leftrightarrow$

$\dfrac{x^3+3x^2+6x+6}{6}\le e^x \Leftrightarrow e^x\ge \dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+x+1\Leftrightarrow e^x-x\ge \dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+1$.

ε) Από το προηγούμενο ερώτημα είναι:

$e^{h(x)}-h(x)\ge \dfrac{h^3(x)}{6}+\dfrac{h^2(x)}{2}+1\Leftrightarrow e^{h(x)}-h(x)-\dfrac{h^3(x)}{6}\ge \dfrac{h^2(x)}{2}+1$

οπότε $e^{h(x)}-h(x)-\dfrac{h^3(x)}{6}\ge \dfrac{h^2(x)}{2}+1\ge 1$ και σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{h^2(x)}{2}+1\right)=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{h^2(x)}{2}=0$ άρα $\lim\limits_{x\to0}h^2(x)=0$

.Επειδή $-|h(x)|\le h(x)\le h(x)\Leftrightarrow -\sqrt{h^2(x)}\le h(x)\le \sqrt{h^2(x)}$ τότε $\lim\limits_{x\to0}\left(-\sqrt{h^2(x)}\right)=0=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{h^2(x)}$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to0}h(x)=0$.

75.α) Είναι $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\ge -x\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $D_f=\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=$

$\ln\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x)$

οπότε η f είναι περιττή άρα η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

γ) $f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$ άρα f↗ στο $\mathbb{R}$

και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

δ) Είναι $f''(x)=-\dfrac{x}{x^2+1}$. Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$, κοίλη στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο $(0,f(0))\equiv(0,0)$.

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\ln 2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln 2x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$.

στ) $f(5x)+2x=f(3x)\Leftrightarrow\Leftrightarrow f(5x)+5x=f(3x)+3x\quad(1)$.

Αν θεωρήσουμε $g(x)=f(x)+x$ τότε $g'(x)=f'(x)+1=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+1>0$ άρα η g↗ οπότε και $1-1$. Συνεπώς η (1) γίνεται $g(5x)=g(3x)\Leftrightarrow 5x=3x\Leftrightarrow x=0$.

76.α) $f^2(x)+4x^2=4xf(x)+e^{-4x}\Leftrightarrow f^2(x)-4xf(x)+4x^2=e^{-4x}\Leftrightarrow$ $\left(f(x)-2x\right)^2=e^{-4x}$. Επειδή $e^{-4x}>0$ είναι $g(x)=f(x)-2x\neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $g(0)=f(0)=1>0$ άρα $g(x)>0$ οπότε $g(x)=f(x)-2x=\sqrt{e^{-4x}}\Leftrightarrow f(x)=2x+e^{\frac{-4x}{2}}=2x+e^{-2x}$.

β) $f'(x)=2-2e^{-2x}=2\left(1-e^{-2x}\right)\geq 0\Leftrightarrow 1-e^{-2x}\geq 0\Leftrightarrow e^{-2x}\leq e^0\Leftrightarrow$ $-2x\leq 0\Leftrightarrow x\geq 0$. Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$ και για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)$, άρα $f(x)\geq f(0)=1$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{2x}}=0$, άρα η $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη, ενώ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+e^{-2x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2+\dfrac{e^{-2x}}{x}\right]=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-2x}}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2e^{-2x}}{1}=-\infty$ οπότε δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

δ) Η εξίσωση γίνεται $\left[f(x)-1\right]+\left[f\left(x^2\right)-1\right]+\left[f\left(x^3\right)-1\right]+\left[f\left(x^4\right)-1\right]=0$.

Επειδή $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε η προηγούμενη εξίσωση αποτελεί άθροισμα μη αρνητικών αριθμών το οποίο είναι ίσο με 0. Άρα πρέπει

$f(x)-1=0$, $f(x^2)-1=0$, $f(x^3)-1=0$ και $f(x^4)-1=0$. Όμως η f παίρνει ελάχιστη τιμή μόνο για $x=0$ άρα οι παραπάνω ισότητες ισχύουν αν και μόνο αν $(x=0$ **και** $x^2=0$ **και** $x^3=0$ **και** $x^4=0)\Leftrightarrow x=0$.

ε) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq 1\Leftrightarrow 2x+e^{-2x}\geq 1\Leftrightarrow 2x+\frac{1}{e^{2x}}\geq 1\Leftrightarrow$ $1\geq e^{2x}-2xe^{2x}\Leftrightarrow 1\geq e^{2x}(1-2x)$ και το = ισχύει μόνο όταν $x=0$. Άρα για $x=\frac{1}{10}$ έχουμε: $1>e^{\frac{1}{5}}\left(1-\frac{1}{5}\right)\Leftrightarrow 1>e^{\frac{1}{5}}\frac{4}{5}\Leftrightarrow e^{\frac{1}{5}}<\frac{5}{4}$.

στ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x\geq x+1$ και αντικαθιστώντας όπου x το x^2 προκύπτει: $e^{x^2}+x^2\geq 1\Leftrightarrow -1\geq x^2-e^{x^2}\Leftrightarrow 1\geq x^2-e^{x^2}+2$, άρα $2x+e^{-2x}\geq 1\geq x^2+e^{x^2}+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

77.α) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-3)\ln x+2x-5\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-3)=-3$ άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-3)\ln x+2x-5\right]=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x-3}{x}\cdot\ln x+\frac{2x-5}{x}\right]=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x}=1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$. Άρα η C_f δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.

β) $f'(x)=\ln x+(x-3)\frac{1}{x}+2=\ln x+1-\frac{3}{x}+2=\ln x+3-\frac{3}{x}$ με $f'(1)=0$,

$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}>0$ για $x>0$ οπότε $f'\nearrow$

- $0<x<1\Rightarrow f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$ άρα $f\searrow$ στο $[0,1)$.
- Αν $x>1$ τότε $f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$ άρα $f\nearrow$ στο $[1,+\infty)$.

Είναι $f(1)=-3<0$ οπότε η f έχει μια ρίζα $\rho_1\in(0,1)$ αφού $f(A_1)=[-3,+\infty)$ και έχει μια ρίζα $\rho_2\in(1,+\infty)$ αφού $f\nearrow$ στο $A_2=[1,+\infty)$ και $f(A_2)=[-3,+\infty)$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

γ) Έστω $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\in[\rho_1,\rho_2]$ Από το Rolle για τη g υπάρχει $x_0\in(\rho_1,\rho_2)$:

$g'(x_0)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x_0 f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^2}=0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0)-f(x_0)=0$. Έστω

$\varphi(x)=xf'(x)-f(x)$ με $\varphi'(x)=f'(x)+xf''(x)=xf''(x)>0 \Rightarrow \varphi\nearrow$ στο $(0,+\infty)$ άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Η εφαπτομένη στο $M(x_0,f(x_0))$ έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ και για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει

$0-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0)-f(x_0)=0$ που ισχύει.

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x>0$ είναι

$f(x)>h(x) \Leftrightarrow x\ln x-\cancel{3\ln x}+2x-\cancel{3}>-x-\cancel{3\ln x}-\cancel{3}-e \Leftrightarrow$

$x\ln x+3x+e>0$

Έστω $a(x)=x\ln x+3x+e,\ x>0$. Είναι $a'(x)=\ln x+4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq e^{-4}$.

Για κάθε $x\in(0,e^{-4})$ είναι $a'(x)<0 \Rightarrow a\searrow(0,e^{-4}]$ και για κάθε $x>e^{-4}$ είναι $a'(x)>0 \Rightarrow a\nearrow[e^{-4},+\infty)$. Η a έχει ελάχιστο το $a(e^{-4})=-e^{-4}+e>0$, άρα $a(x)\geq a(e^{-4})>0$.

78.α) $\left(f(x)e^{f(x)}\right)'=(x)' \Rightarrow f'(x)e^{f(x)}+f(x)f'(x)e^{f(x)}=1 \Leftrightarrow$

$f'(x)e^{f(x)}(1+f(x))=1$ (1). Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)e^{f(x)}=x>0 \Leftrightarrow$

$f(x)>0$, άρα από την (1) προκύπτει ότι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.

β) Αφού η f παραγωγίσιμη τότε και η $\dfrac{1}{e^{f(x)}+x}$ είναι παραγωγίσιμη άρα η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)=-\dfrac{1}{\left(e^{f(x)}+x\right)^2}\left(f'(x)e^{f(x)}+1\right)<0$ άρα f κοίλη.

γ) Είναι $(1)\overset{x=0}{\Rightarrow} f'(0)=1$. Η εφαπτόμενη της C_f στο $x_0=0$ είναι η

$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=x$

Επειδή f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της, εκτός βέβαια από το σημείο επαφής, άρα: $f(x)\leq x$ για κάθε $x\geq 0$.

δ) Έστω $g(x)=f(x)-xf'(x),\ x\geq 0$. Είναι $g'(x)=-xf''(x)>0 \Rightarrow$

$g\nearrow[0,+\infty)$. Για κάθε $x>0 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0)=0 \Leftrightarrow f(x)>xf'(x)$

ε) Είναι $f\nearrow[0,+\infty) \Rightarrow 1-1$ και αντιστρέφεται.

Έστω ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lambda\in\mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)e^{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty} x \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda}=+\infty$ που είναι άτοπο. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ τότε επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=[0,+\infty)$ θα είχε σύνολο τιμών το $f(A)=[0,-\infty)$ που είναι αδύνατο. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $f(A)=[0,+\infty)=D_{f^{-1}}$.

Θέτουμε $f(x)=y$ και έχουμε $ye^{y}=x \Leftrightarrow f^{-1}(y)=ye^{y}$, $y\geq 0$ άρα $f^{-1}(x)=xe^{x}$, $x\geq 0$.

στ) Είναι $f(e)e^{f(e)}=e \Leftrightarrow f^{-1}(f(e))=f^{-1}(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(e)=1$, άρα

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-1}{x-e}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to e}\frac{f'(x)}{1}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to e}\frac{1}{e^{f(x)}\left(1+f(x)\right)}=\frac{1}{e^{f(e)}\left(1+f(e)\right)}=\frac{1}{2e}$$

ζ) Είναι $f'(e)=\dfrac{1}{2e}<1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega<1$ άρα $\omega<45^{\circ}$.

79.α) $f'(x)=\sqrt{4+f^2(x)}>0 \Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$. Για κάθε $x>0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0$ και για κάθε $x<0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0)=0$.

β) Είναι $f''(x)=\dfrac{2f(x)\,f'(x)}{2\sqrt{4+f^2(x)}} \Leftrightarrow f''(x)+f'(x)=f'(x)+f(x) \Leftrightarrow$

$e^{x}f''(x)+e^{x}f'(x)=e^{x}f'(x)+e^{x}f(x) \Leftrightarrow \left[e^{x}f'(x)\right]'=\left[e^{x}f(x)\right]' \Leftrightarrow$

$e^{x}f'(x)=e^{x}f(x)+c_1$. Για $x=0$ είναι $f'(0)=\sqrt{4+f^2(0)}=0$ οπότε

$e^{0}f'(0)=e^{0}f(0)+c_1 \Leftrightarrow c_1=2$. Είναι

$e^{x}f'(x)=e^{x}f(x)+2 \Leftrightarrow f''(x)=f(x)+2e^{-x} \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=2e^{-x} \Leftrightarrow$

$e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=2e^{-2x} \Leftrightarrow \left(e^{-x}f(x)\right)'=\left(-e^{-2x}\right)' \Leftrightarrow e^{-x}f(x)=-e^{-2x}+c \Leftrightarrow$

$f(x)=-e^{-x}+ce^{x}$. Για $x=0$ είναι $f(0)=-1+c \Leftrightarrow c=1$ και $f(x)=e^{x}-e^{-x}$

γ) $e^{2(x+\sigma\upsilon\nu x)+e^{-x}}-e^{e^{-x}}=e^{x+\sigma\upsilon\nu x+2e^{-x}}-e^{x+\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$

$\left(e^{x+\sigma\upsilon\nu x}\right)^2 e^{e^{-x}}-e^{e^{-x}}=e^{x+\sigma\upsilon\nu x}\left(e^{e^{-x}}\right)^2-e^{x+\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$

$$\frac{\left(e^{x+\sigma\upsilon\nu x}\right)^2 e^{e^{-x}}-e^{e^{-x}}}{e^{e^{-x}}e^{x+\sigma\upsilon\nu x}}=\frac{e^{x+\sigma\upsilon\nu x}\left(e^{e^{-x}}\right)^2-e^{x+\sigma\upsilon\nu x}}{e^{e^{-x}}e^{x+\sigma\upsilon\nu x}} \Leftrightarrow$$

$e^{x+\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{e^{x+\sigma\upsilon\nu x}}=e^{e^{-x}}-\frac{1}{e^{e^{-x}}}\Leftrightarrow f\left(x+\sigma\upsilon\nu x\right)=f\left(e^{-x}\right)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x+\sigma\upsilon\nu x=e^{-x}\Leftrightarrow$

$x+\sigma\upsilon\nu x-e^{-x}=0$ (1). Έστω $g\left(x\right)=x+\sigma\upsilon\nu x-e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι

$g'\left(x\right)=1-\eta\mu x+e^{-x}>0\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$. $(1)\Leftrightarrow g\left(x\right)=g\left(0\right)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=0$

δ) $e^{2x}=\lambda e^{x}+1\Leftrightarrow e^{x}=\lambda+e^{-x}\Leftrightarrow f\left(x\right)=\lambda$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$ οπότε $f\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η εξίσωση $f\left(x\right)=\lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

ε) $f\left(x\right)=e^{4x}+e^{3x}-3e^{2x}-2e^{x}+3\Leftrightarrow e^{x}-e^{-x}=e^{4x}+e^{3x}-3e^{2x}-2e^{x}+3$ (2)

Θέτουμε $e^{x}=\omega$, $0<x<\ln 2\Leftrightarrow 1<e^{x}<2\Leftrightarrow 1<\omega<2$ και η (2) γίνεται:

$\omega-\frac{1}{\omega}=\omega^{4}+\omega^{3}-3\omega^{2}-2\omega+3\Leftrightarrow\omega^{2}-1=\omega^{5}+\omega^{4}-3\omega^{3}-2\omega^{2}+3\omega\Leftrightarrow$

$\omega^{5}+\omega^{4}-3\omega^{3}-3\omega^{2}+3\omega+1=0$. Έστω

$a\left(\omega\right)=\omega^{5}+\omega^{4}-3\omega^{3}-3\omega^{2}+3\omega+1=\left(\omega-1\right)\left(\omega^{4}+2\omega^{3}-\omega^{2}-4\omega-1\right)$

Έστω $b\left(\omega\right)=\omega^{4}+2\omega^{3}-\omega^{2}-4\omega-1$, $\omega\in\left[1,2\right]$. Είναι

$b\left(1\right)=-3<0$, $b\left(2\right)=19>0$ δηλαδή $b\left(1\right)b\left(2\right)<0$ οπότε λόγω του Θ.Bolzano υπάρχει $\omega_{1}\in\left(1,2\right)$ τέτοιο, ώστε $b\left(\omega_{1}\right)=0$. Τότε $a\left(\omega_{1}\right)=\left(\omega_{1}-1\right)b\left(\omega_{1}\right)=0$.

80.α) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει ότι

$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x^{2}}\Leftrightarrow x^{2}f\left(x\right)-\ln x=0$.Θεωρούμε τη συνάρτηση

$a\left(x\right)=x^{2}f\left(x\right)-\ln x$, $x>0$. Η a είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $a'\left(x\right)=2xf\left(x\right)+x^{2}f'\left(x\right)-\frac{1}{x}$. Η a' είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$a''\left(x\right)=2f\left(x\right)+2xf'\left(x\right)+2xf'\left(x\right)+x^{2}f''\left(x\right)+\frac{1}{x^{2}}=$

$2f\left(x\right)+4xf'\left(x\right)+x^{2}f''\left(x\right)+\frac{1}{x^{2}}\Leftrightarrow$

$a''\left(x\right)=\frac{2x^{2}f\left(x\right)+4x^{3}f'\left(x\right)+x^{4}f''\left(x\right)+1}{x^{2}}=\frac{-1+1}{x^{2}}=0\Leftrightarrow a'\left(x\right)=c,\ c\in\mathbb{R}.$

Είναι $a'\left(1\right)=2f\left(1\right)+f'\left(1\right)-1=0$ άρα $c=0$ και $a'\left(x\right)=0\Leftrightarrow a\left(x\right)=c_{1},\ c_{1}\in\mathbb{R}.$

Είναι $a(1)=f(1)-\ln 1=0\Leftrightarrow c_1=0$ άρα για κάθε $x>0$ ισχύει ότι

$x^2f(x)-\ln x=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

β) Είναι $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}\geq 0\Leftrightarrow 1-2\ln x\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq \dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x\leq e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

Για κάθε $x<\sqrt{e}$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\left(0,\sqrt{e}\right]$ και για κάθε $x>\sqrt{e}$ είναι

$f'(x)<0\Rightarrow f\searrow\left[\sqrt{e},+\infty\right)$.

Η f έχει μέγιστο το $f\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{e}\right)^2}=\dfrac{1}{2e}$, οπότε για κάθε $x>0$ ισχύει ότι:

$f(x)\leq\dfrac{1}{2e}\Leftrightarrow\dfrac{\ln x}{x^2}\leq\dfrac{1}{2e}\Leftrightarrow 2e\ln x\leq x^2\Leftrightarrow\ln x^{2e}\leq x^2\Leftrightarrow x^{2e}\leq e^{x^2}$

γ) $x^{2e}\leq\lambda^{x^2}\Leftrightarrow\ln x^{2e}\leq\ln\lambda^{x^2}\Leftrightarrow 2e\ln x\leq x^2\ln\lambda\Leftrightarrow\dfrac{\ln x}{x^2}\leq\dfrac{\ln\lambda}{2e}\Leftrightarrow f(x)\leq\dfrac{\ln\lambda}{2e}$

Επειδή για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\leq\dfrac{1}{2e}$, αρκεί $\dfrac{1}{2e}\leq\dfrac{\ln\lambda}{2e}\Leftrightarrow\ln\lambda\geq 1\Leftrightarrow\lambda\geq e$

δ) Είναι $g(x)\geq 0$ και επειδή $g(1)=0$, τελικά για κάθε $x>0$ είναι

$g(x)\geq g(1)$, οπότε η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη, σύμφωνα με το Θ.Fermat, είναι $g'(1)=0$

ε) Είναι $g(x)=\left|\alpha x-\alpha-x^3f(x)\right|=\left|\alpha x-\alpha-x^{\not 3}\dfrac{\ln x}{x^{\not 2}}\right|=\left|\alpha x-\alpha-x\ln x\right|$ και

$g'(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{g(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)}{x-1}=0$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\left|\alpha x-\alpha-x\ln x\right|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\left|\alpha x-\alpha-x\ln x\right|}{|x-1|}\lim\limits_{x\to 1^+}\left|\dfrac{\alpha x-\alpha-x\ln x}{x-1}\right|=|\alpha-1|$

άρα $\alpha-1=0\Leftrightarrow\alpha=1$ γιατί $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\alpha x-\alpha-x\ln x}{x-1}\overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\alpha-\ln x-1}{1}=\alpha-1$.

στ) Είναι $g(x)=|x-1-x\ln x|,\ x>0$.

Έστω $b(x)=x-1-x\ln x,\ x>0$. Είναι $b'(x)=1-1-\ln x=-\ln x$.

Αν $0<x<1$ είναι $b'(x)>0\Rightarrow b\nearrow(0,1]$ και αν $x>1$ είναι

$b'(x)<0\Rightarrow b\searrow[1,+\infty)$.Η b έχει μέγιστο το $b(1)=0$ άρα

$b(x)\le 0\Leftrightarrow x-1-x\ln x\le 0$ για κάθε $x>0$ οπότε $g(x)=x\ln x-x+1$

ζ) $x^4 f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^{\not 4^2}\dfrac{\ln x}{\not x^2}=x\ln x-x+1\Leftrightarrow x^2\ln x-x\ln x+x-1=0\Leftrightarrow$

$x\ln x(x-1)+(x-1)=0\Leftrightarrow (x-1)(x\ln x+1)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x\ln x+1=0$

Έστω $h(x)=x\ln x+1,\ x>0$. Είναι $h'(x)=\ln x+1$.

$h'(x)\ge 0\Leftrightarrow \ln x+1\ge 0\Leftrightarrow \ln x\ge -1\Leftrightarrow x\ge e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

Για κάθε $0<x<\dfrac{1}{e}$ είναι $h'(x)<0\Rightarrow h\searrow\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$ και για κάθε $x>\dfrac{1}{e}$ είναι

$h'(x)>0\Rightarrow h\nearrow\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$. Η h έχει ελάχιστο το $h\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}\ln\dfrac{1}{e}+1=-\dfrac{1}{e}+1>0$,

άρα για κάθε $x>0$ είναι $h(x)\ge h\left(\dfrac{1}{e}\right)>0$, οπότε η εξίσωση

$h(x)=0\Leftrightarrow x\ln x+1=0$ είναι αδύνατη.

81.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=f(x)+xf'(x)-\sigma\upsilon\nu x$. Η g' είναι και αυτή παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$g''(x)=f'(x)+f'(x)+xf''(x)+\eta\mu x=2f'(x)+xf''(x)+\eta\mu x\Leftrightarrow$

$g''(x)=-\eta\mu x+\eta\mu x=0\Leftrightarrow g'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$. Είναι

$g'(\pi)=f(\pi)+\pi f'(\pi)-\sigma\upsilon\nu\pi=\pi\left(-\dfrac{1}{\pi}\right)+1=0\Leftrightarrow c=0$.

Τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $g(\pi)=\pi f(\pi)-\eta\mu\pi=0$ άρα $c_1=0$ και

$g(x)=0\Leftrightarrow xf(x)-\eta\mu x=0\Leftrightarrow xf(x)=\eta\mu x$. Για $x\ne 0$ είναι $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο $x_0=0$, οπότε

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$. Τελικά $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\ne 0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

γ) Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με:

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\eta\mu x}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-x}{x^2}\overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{2x}=0$,

οπότε το $x_0 = 0$ είναι κρίσιμο σημείο της f.

δ) Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$.Έστω

$h(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x,\ x \in [-\pi, \pi]$ με $h'(x) = -x\eta\mu x$.

Αν $x \in (-\pi, 0)$ τότε $x < 0,\ \eta\mu x < 0$ άρα $h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow [-\pi, 0]$.

Αν $x \in (0, \pi)$ τότε $x > 0,\ \eta\mu x > 0$ άρα $h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow [-\pi, 0]$. Επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$. Για κάθε $-\pi < x < \pi$ είναι $h(\pi) < h(x) < h(-\pi) \Leftrightarrow -\pi < h(x) < 0$ άρα $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$.

ε) $f''(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^3} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{\sigma\upsilon\nu x} - \cancel{x}\eta\mu x - \cancel{\sigma\upsilon\nu x}}{3x^{\cancel{2}}} = \lim\limits_{x \to 0}\left(-\dfrac{1}{3}\dfrac{\eta\mu x}{x}\right) = -\dfrac{1}{3}$

στ) Για κάθε $x > 0$ είναι

$f(x) > 1 - \dfrac{x^2}{6} \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu x}{x} > 1 - \dfrac{x^2}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x > x - \dfrac{x^3}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x - x + \dfrac{x^3}{6} > 0$

Θεωρούμε την $a(x) = \eta\mu x - x + \dfrac{x^3}{6},\ x \geq 0$, η οποία είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, με $a'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ και $a''(x) = -\eta\mu x + x > 0$

για κάθε $x > 0$ ($\eta\mu x < x$ για κάθε $x > 0$), άρα η a' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι $a'(x) > a'(0) = 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Για $x > 0$ είναι $a(x) > a(0) \Leftrightarrow \eta\mu x - x + \dfrac{x^3}{6} > 0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu x > x - \dfrac{x^3}{6}$.

ζ) Αρχικά παρατηρούμε ότι η $x = 0$ δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, οπότε για $x \neq 0$ είναι: $x^2 = x^2 f(x) + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x^2 - x^2 \dfrac{\eta\mu x}{x} - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0$. Έστω $b(x) = x^2 - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι

$b'(x) = 2x - x\sigma\upsilon\nu x = x(2 - \sigma\upsilon\nu x)$.Επειδή $2 - \sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

έχουμε: Για κάθε $x < 0$ είναι $b'(x) < 0 \Rightarrow b \searrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι $b'(x) > 0 \Rightarrow b \nearrow [0, +\infty)$. Είναι $b(0) = -1$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} b(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\left(1-\dfrac{\eta\mu x}{x}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)\right]=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} b(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1-\dfrac{\eta\mu x}{x}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)\right]=+\infty$ αφού $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow$

$-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|}=0=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής

είναι και $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$. Όμοια $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=0.$

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0)$ είναι $b(\Delta_1)=(-1,+\infty)$ και στο $\Delta_2=(0,+\infty)$ είναι $b(\Delta_2)=(-1,+\infty)$. Επειδή $0\in b(\Delta_1)$, άρα υπάρχει μοναδικός $x_1\in\Delta_1$ τέτοιος, ώστε $b(x_1)=0$. Επειδή $0\in b(\Delta_2)$, άρα υπάρχει μοναδικός $x_2\in\Delta_2$ τέτοιος, ώστε $b(x_2)=0$. Άρα η εξίσωση $x^2=x^2f(x)+\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

82.α) Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}\Leftrightarrow(x^2+1)f(x)-e^x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x^2+1)f(x)-e^x$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)-e^x$ και

$g''(x)=2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f''(x)-e^x\Leftrightarrow$

$g''(x)=2f(x)+4xf'(x)+(x^2+1)f''(x)-e^x=e^x-e^x=0\Leftrightarrow g'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}.$

Είναι $g'(0)=2\cdot0\cdot f(0)+(0^2+1)f'(0)-e^0=0\Leftrightarrow c=0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$. Είναι $g(0)=f(0)-1=0$ άρα $c_1=0$ και

$g(x)=0\Leftrightarrow(x^2+1)f(x)-e^x=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}.$

β) Είναι $f'(x)=\dfrac{e^x(x^2+1)-e^x2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.

Για κάθε $x\ne1$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει ακρότατα. Για κάθε $x\ge0$ είναι

$f(x)\ge f(0)\Leftrightarrow\dfrac{e^x}{x^2+1}\ge1\Leftrightarrow e^x\ge x^2+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

γ) Έστω $h(x)=e^{x^2}-\dfrac{1}{3}x^6-x^2-1,\ x\ge0$. Είναι $h'(x)=2x\left(e^{x^2}-x^4-1\right)$

Για κάθε $x>0$ είναι $e^x>x^2+1$ οπότε αντικαθιστώντας όπου x το x^2 προκύπτει ότι $e^{x^2}>x^4+1\Leftrightarrow e^{x^2}-x^4-1>0$ άρα $h'(x)=>0\Rightarrow h\nearrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x\geq 0$ είναι $h(x)\geq h(0)\Leftrightarrow e^{x^2}-\frac{1}{3}x^6-x^2-1\geq 0\Leftrightarrow$

$e^{x^2}\geq\frac{1}{3}x^6+x^2+1$.

δ) Είναι $f''(x)=\frac{\left[e^x(x-1)^2\right]'(x^2+1)^2-e^x(x-1)^2\,2\cancel{(x^2+1)}2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}3}}\Leftrightarrow$

$f''(x)=\frac{\left[e^x(x-1)^2+e^x2(x-1)\right](x^2+1)-e^x(x-1)^2\,4x}{(x^2+1)^3}\Leftrightarrow$

$f''(x)=\frac{e^x(x-1)(x-1+2)(x^2+1)-e^x(x-1)^2\,4x}{(x^2+1)^3}\Leftrightarrow$

$f''(x)=\frac{e^x(x-1)\left[(x+1)(x^2+1)-4x(x-1)\right]}{(x^2+1)^3}=\frac{e^x(x-1)(x^3-3x^2+5x+1)}{(x^2+1)^3}$

Έστω $a(x)=x^3-3x^2+5x+1,\ a\in\mathbb{R}$. Είναι $a'(x)=3x^2-6x+5>0\Rightarrow a\nearrow\mathbb{R}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}a(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x^2+5x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}a(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x^2+5x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ η a έχει σύνολο τιμών το $a(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Επειδή $0\in a(\mathbb{R})$ υπάρχει μοναδικό x_1 τέτοιο, ώστε $a(x_1)=0$.

Για κάθε $x<x_1\overset{a\nearrow}{\Leftrightarrow}a(x)<a(x_1)=0$ και για κάθε $x>x_1\overset{a\nearrow}{\Leftrightarrow}a(x)>a(x_1)=0$.

Επειδή $a(0)=1$ και $a(-1)=-8<0$, λόγω του Θ.Bolzano η εξίσωση $a(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,0)$. Όμως το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της a, άρα $x_1\in(-1,0)$.

Από τον πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

x	$-\infty$	x_1	1	$+\infty$
e^x	+	+		+
$x-1$	-	-	○	+
$a(x)$	-	○	+	+
$(x^2+1)^3$	+	+		+
f''	+	-		+
f	∪ Σ.Κ	∩	Σ.Κ.	∪

ε) $\sqrt{3}>\sqrt{2}\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(\sqrt{3}\right)>f\left(\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow\frac{e^{\sqrt{3}}}{3+1}>\frac{e^{\sqrt{2}}}{2+1}\Leftrightarrow\frac{e^{\sqrt{3}}}{e^{\sqrt{2}}}>\frac{4}{3}\Leftrightarrow e^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}>\frac{4}{3}$

στ) $4x^2+4x+2=e^x\left(x^2+2x+2\right)\Leftrightarrow\left(2x+1\right)^2+1=e^x\left[\left(x+1\right)^2+1\right]\Leftrightarrow$

$\left(2x+1\right)^2+1=e^{2x+1-(x+1)}\left[\left(x+1\right)^2+1\right]\Leftrightarrow\left(2x+1\right)^2+1=\frac{e^{2x+1}}{e^{x+1}}\left[\left(x+1\right)^2+1\right]\Leftrightarrow$

$\frac{e^{x+1}}{\left(x+1\right)^2+1}=\frac{e^{2x+1}}{\left(2x+1\right)^2+1}\Leftrightarrow f\left(x+1\right)=f\left(2x+1\right)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x+1=2x+1\Leftrightarrow x=0$

83.α) Έστω τυχαίο σημείο Α(α, -1), $\alpha\in\mathbb{R}$ της ευθείας $y=-1$. Θα αποδείξουμε ότι οι εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το Α είναι κάθετες. Έστω $M\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$, $x_0\in\mathbb{R}$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι η ευθεία ε: $y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$. Για να διέρχεται από το Α πρέπει:

$-1-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(\alpha-x_0\right)\Leftrightarrow-1-\frac{1}{4}x_0^2=\frac{1}{2}x_0\left(\alpha-x_0\right)\Leftrightarrow$

$-4-x_0^2=2\alpha x_0-2x_0^2\Leftrightarrow x_0^2-2\alpha x_0-4=0$ (1)

Η (1) είναι $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=4\alpha^2+16>0$, οπότε έχει δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 που από τους τύπους του Vieta ισχύει ότι $\rho_1+\rho_2=2\alpha$ και $\rho_1\rho_2=-4$. Αν λ_1,λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ της C_f στα ρ_1,ρ_2, τότε $\lambda_1=f'\left(\rho_1\right)=\frac{1}{2}\rho_1$ και $\lambda_2=f'\left(\rho_2\right)=\frac{1}{2}\rho_2$. Είναι

$\lambda_1\lambda_2=\frac{1}{2}\rho_1\cdot\frac{1}{2}\rho_2=\frac{1}{4}\rho_1\rho_2=\frac{1}{4}(-4)=-1\Leftrightarrow\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$.

β) $f\left(x\right)=g\left(x\right)\Leftrightarrow\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{2}\left(e^x-x-1\right)\Leftrightarrow x^2=2e^x-2x-2\Leftrightarrow$

$2e^x-x^2-2x-2=0$. Έστω $h\left(x\right)=2e^x-x^2-2x-2,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι

$h'\left(x\right)=2e^x-2x-2, h''\left(x\right)=2e^x-2$

Για κάθε $x<0$ είναι $h''\left(x\right)<0$ και επειδή η h' είναι συνεχής στο $\left(-\infty,0\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x<0$ είναι $h'\left(x\right)<h'\left(0\right)=0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $\left(-\infty,0\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>0$ είναι $h''\left(x\right)>0$ και επειδή η h' είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>0$ είναι $h'\left(x\right)>h'\left(0\right)=0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$ είναι γνησίως

αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η h έχει ελάχιστο στο $x=0$ το $h(0)=0$, οπότε για κάθε $x\neq 0$ είναι $h(x)>0$. Επομένως η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ έχει μοναδική ρίζα την x = 0. Είναι $h'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)=g'(0)$, οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f,g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο x = 0.

γ) $g(x)\geq\frac{1}{2}(\lambda-1)x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(e^x-x-1)\geq\frac{1}{2}(\lambda-1)x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$e^x-x-1\geq\lambda x-x-1\Leftrightarrow e^x\geq\lambda x\Leftrightarrow e^x-\lambda x\geq 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$\varphi(x)=e^x-\lambda x,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $\varphi'(x)=(e^x-\lambda x)'=e^x-\lambda$.

$\varphi'(x)\geq 0\Leftrightarrow e^x-\lambda\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq\lambda\Leftrightarrow x\geq\ln\lambda$.

Η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ln\lambda]$, γνησίως αύξουσα στο $[\ln\lambda,+\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $\ln\lambda$ το $\varphi(\ln\lambda)=\lambda-\lambda\ln\lambda$.

$e^x\geq\lambda x\Leftrightarrow e^x-\lambda x\geq 0\Leftrightarrow\varphi(x)\geq 0$. Όμως $\varphi(x)\geq\varphi(\ln\lambda)$, οπότε αρκεί

$\varphi(\ln\lambda)\geq 0\Leftrightarrow\lambda-\lambda\ln\lambda\geq 0\Leftrightarrow\ \not{\lambda}\ln\lambda\leq\not{\lambda}\Leftrightarrow\ln\lambda\leq 1=\ln e\Leftrightarrow\lambda\leq e$.

Άρα η μεγαλύτερη τιμή του $\lambda>0$ για την οποία ισχύει $e^x\geq\lambda x$ είναι η $\lambda=e$.

δ) Είναι $f'(x)=\frac{1}{2}x,\ f''(x)=\frac{1}{2}>0\Rightarrow f'\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f'$ 1−1, οπότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ είναι $f'(x_1)\neq f'(x_2)$.

84.α) $e^{f(x)}\left(e^{f(x)}+2\eta\mu x\right)+1=e^{2x}+\sigma\upsilon\nu^2x\Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}\right)^2+2\eta\mu xe^{f(x)}+1-\sigma\upsilon\nu^2x=e^{2x}\Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}\right)^2+2\eta\mu xe^{f(x)}+\eta\mu^2x=e^{2x}\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}+\eta\mu x\right)^2=\left(e^x\right)^2$ (1).

Είναι $\left(e^x\right)^2>0$ άρα $h(x)=e^{f(x)}+\eta\mu x\neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $h(\pi)=e^{f(\pi)}+\eta\mu\pi=e^{\pi}>0$, είναι $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται: $e^{f(x)}+\eta\mu x=e^x\Leftrightarrow e^{f(x)}=e^x-\eta\mu x$ (2). Για κάθε $x>0$ είναι $e^x>x+1>x$ και $|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x$, άρα

$e^x>x>\eta\mu x\Rightarrow e^x-\eta\mu x>0$ οπότε η (2) γίνεται $f(x)=\ln\left(e^x-\eta\mu x\right)$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με $f'(x)=\dfrac{e^x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x-\eta\mu x}$.

Επειδή $e^x>x+1$ για κάθε $x>0$, θα δείξουμε ότι $x+1>\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x>0$. Έστω $g(x)=x+1-\sigma\upsilon\nu x,\ x\geq 0.$ Είναι $g'(x)=1+\eta\mu x>0$ για κάθε $x\neq 2\kappa\pi+\dfrac{3\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ με $\kappa\geq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Για κάθε $x>0$ είναι $g(x)>g(0)=0\Leftrightarrow x+1>\sigma\upsilon\nu x$, οπότε $e^x>x+1>\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x>0$. Οπότε $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$.

γ) $f''(x)=\dfrac{\left(e^x+\eta\mu x\right)\left(e^x-\eta\mu x\right)-\left(e^x-\sigma\upsilon\nu x\right)^2}{\left(e^x-\eta\mu x\right)^2}=$

$\dfrac{\cancel{e^{2x}}-\eta\mu^2x-\cancel{e^{2x}}+2e^x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^2x}{\left(e^x-\eta\mu x\right)^2}=\dfrac{2e^x\sigma\upsilon\nu x-1}{\left(e^x-\eta\mu x\right)^2}$

Έστω $\varphi(x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x-1,\ x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$. Είναι

$\varphi'(x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x-2e^x\eta\mu x=2e^x\left(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\right)<0$

(στο 2ο τεταρτημόριο είναι $\sigma\upsilon\nu x<0,\ \eta\mu x>0$) άρα $\varphi\searrow\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

Για κάθε $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ είναι $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>\varphi(x)>\varphi(\pi)\Rightarrow -1>\varphi(x)$ άρα

$f''(x)<0\Rightarrow f\cap\searrow\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

δ) $e^x-e^\lambda=\eta\mu x\Leftrightarrow e^x-\eta\mu x=e^\lambda\Leftrightarrow\ln\left(e^x-\eta\mu x\right)=\lambda\Leftrightarrow f(x)=\lambda$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-\eta\mu x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-\dfrac{\eta\mu x}{e^x}\right)\right]=+\infty$ γιατί

$\left|\dfrac{\eta\mu x}{e^x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{e^x}\leq\dfrac{1}{e^x}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{e^x}\leq\dfrac{\eta\mu x}{e^x}\leq\dfrac{1}{e^x}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{e^x}=0$.Επίσης

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(e^x-\eta\mu x\right)\overset{\substack{e^x-\eta\mu x=u\\ x\to1\\ u\to1}}{=}\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=(0,+\infty)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$.Αν $\lambda\leq 0$ τότε

$\lambda \notin f(A)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη. Αν $\lambda > 0$ τότε $\lambda \in f(A)$ οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in A$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\lambda$.

ε) Επειδή f συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$, η f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^x-\eta\mu x\right)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x-\eta\mu x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}\left(1-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1-\frac{\eta\mu x}{e^x}\right)}=1$$

γιατί $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}\right|=\frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{e^x}\le\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow-\frac{1}{e^x}\le\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}\le\frac{1}{e^x}$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x-\eta\mu x\right)-\ln e^x\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x-\eta\mu x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{\eta\mu x}{e^x}\right)=0$, άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f .

στ) $f(x)>\ln\left(\frac{x^2}{2}+x+1-\eta\mu x\right)\Leftrightarrow\ln\left(e^x-\eta\mu x\right)>\ln\left(\frac{x^2}{2}+x+1-\eta\mu x\right)\Leftrightarrow$

$e^x-\cancel{\eta\mu x}>\frac{x^2}{2}+x+1-\cancel{\eta\mu x}\Leftrightarrow e^x-\frac{x^2}{2}-x-1>0$. Έστω

$a(x)=e^x-1-\frac{x^2}{2}-x$, $x\in[0,+\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $a'(x)=e^x-x-1$ και $a''(x)=e^x-1$.

Για κάθε $x>0$ είναι $a''(x)>0$, άρα η a' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $a'(x)>a'(0)=0$, άρα η α είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Για κάθε $x>0$ είναι $a(x)>a(0)=0\Leftrightarrow e^x-\frac{x^2}{2}-x-1>0$

85.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=e^{f(x)}+xf'(x)e^{f(x)}-\frac{1}{x}=e^{f(x)}\left(1+xf'(x)\right)-\frac{1}{x}$. Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$g''(x)=e^{f(x)}f'(x)\left(1+xf'(x)\right)+e^{f(x)}\left(f'(x)+xf''(x)\right)+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow$

$g''(x)=e^{f(x)}\left(f'(x)+x\left(f'(x)\right)^2+f'(x)+xf''(x)\right)+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow$

$g''(x)=e^{f(x)}\left(2f'(x)+x\left(f'(x)\right)^2+xf''(x)\right)+\frac{1}{x^2}=e^{f(x)}\left(-\frac{e^{-f(x)}}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow$

$g''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow\ g'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$

Είναι $g'(e)=e^{f(e)}\left(1+ef'(e)\right)-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}-\frac{1}{e}=0\Leftrightarrow c=0$ άρα

$g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$.Είναι

$g(e)=ee^{f(e)}-\ln e,=e\frac{1}{e}-1=1-1=0\Leftrightarrow c_1=0\Leftrightarrow g(x)=0$ για κάθε $x>1$.

β) $g(x)=0\Leftrightarrow xe^{f(x)}-\ln x=0\Leftrightarrow xe^{f(x)}=\ln x\Leftrightarrow e^{f(x)}=\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow$

$f(x)=\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)\Leftrightarrow f(x)=\ln(\ln x)-\ln x$. Για κάθε $x>1$ είναι

$0<\ln x<x-1<x\Rightarrow\ln(\ln x)<\ln x\Leftrightarrow\ln(\ln x)-\ln x<0\Leftrightarrow f(x)<0$

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x>1$ η εξίσωση
$f(x)=-x\Leftrightarrow\ln(\ln x)-\ln x+x=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln(\ln x)-\ln x+x,\ x>1$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x)=\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{x}+1=\frac{1-\ln x+x\ln x}{x\ln x}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=1-\ln x+x\ln x,\ x\geq 1$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $\varphi'(x)=-\frac{1}{x}+\ln x+1=\ln x+\frac{x-1}{x}$.

Για κάθε $x>1$ είναι $\varphi'(x)>0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>1$ είναι
$\varphi(x)>\varphi(1)=1>0\Rightarrow h'(x)>0\Rightarrow h\nearrow(1,+\infty)$.Είναι

$\lim\limits_{x\to 1^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\ln(\ln x)-\ln x+x\right)=-\infty-0+1=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(\ln x)\overset{\ln x=u}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$, οπότε υπάρχει θετικός και πολύ μικρός θετικός αριθμός α, τέτοιος, ώστε $h(\alpha)<0$.

Παρατηρούμε ότι $h(e)=\ln(\ln e)-\ln e+e=\ln 1-1+e=e-1>0$, οπότε $h(\alpha)h(e)<0$ κι επειδή η h είναι συνεχής, λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $\rho\in(\alpha,e)\subseteq(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho)=0\Leftrightarrow f(\rho)=-\rho$. Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα το ρ είναι μοναδικό.

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $x_1,x_2>1$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)f'(x_2)=-1$. Είναι $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x\ln x}\geq 0\Leftrightarrow 1-\ln x\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq 1\Leftrightarrow x\leq e$.

Επειδή $f'(x_1)f'(x_2)<0$ τα $f'(x_1), f'(x_2)$ είναι ετερόσημοι αριθμοί, άρα $f'(x_1)<0$ και $f'(x_2)>0$ ή αντίστροφα. Τότε $x_1>e$ και $1<x_2<e$.

Έστω $x_1>e$, τότε $f'(x_1)<0$ και $-\dfrac{1}{f'(x_1)}>0$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x_1>e$, υπάρχει $x_2\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2)=-\dfrac{1}{f'(x_1)}$. Είναι

$$\lim_{x\to 1^+}f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1-\ln x}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\right)=1(+\infty)=+\infty$$ γιατί $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\ln x}\overset{\ln x=u}{=}\lim\limits_{u\to o^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$

Αν $\Delta=(1,e)$, τότε επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+}f'(x)=+\infty$ και $f'(e)=0$ το σύνολο $(0,+\infty)$ θα είναι υποσύνολο του $f'(\Delta)$. Επειδή $-\dfrac{1}{f'(x_1)}\in(0,+\infty)$, θα είναι και $-\dfrac{1}{f'(x_1)}\in f'(\Delta)$, οπότε υπάρχει $x_2\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2)=-\dfrac{1}{f'(x_1)}$.

86.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-2e^x+2x+1$, Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x\geq x+1\Leftrightarrow 2e^x\geq 2x+2\Leftrightarrow -1\geq 2x+1-2e^x$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x = 0. Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-1\leq\sigma\upsilon\nu x\leq 1$ με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $\sigma\upsilon\nu x-2e^x+2x+1\leq 0\Leftrightarrow f'(x)\leq 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x= 0 οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Έχουμε $e^{-x}(\eta\mu x+x^2+x+2)=2\Leftrightarrow \eta\mu x+x^2+x+2=2e^x\Leftrightarrow$ $\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2=0\Leftrightarrow f(x)=0$. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ αφού

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2)=$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x^2}+1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)-2e^x\right]=+\infty\cdot\left[(0+1+0+0)-0\right]=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x^2}-\frac{2e^x}{x^2}+1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right]=-\infty$.

$\left(\left|\frac{\eta\mu x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow-\frac{1}{x^2}\le\frac{\eta\mu x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}\right.$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}=0=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ οπότε από

Κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu x}{x^2}=0$).

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\overset{\text{DLH}}{\underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\text{DLH}}{\underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$).

Το $0\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ οπότε υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=0$.

Το x_0 μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

γ) Πρέπει και αρκεί: $\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2>0(1)$ και

$\eta\mu x-2e^x+x^2+x+1-\ln\left(\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2\right)\ge0(2)$

$(1)\Leftrightarrow f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(0)\Leftrightarrow x<0(3)$ και για την (2) αν θέσουμε

$\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2=y>0$ για $x<0$ τότε $-2e^x+x^2+x+2=y-1,(2)\Leftrightarrow$

$y-1\ge\ln y$, αληθής για κάθε $y>0$, κάτα συνέπεια αληθής για κάθε $x<0$ (4).

Από $(3),(4)\Rightarrow A_g=(-\infty,0)$.

δ) Έστω (ε) εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία (δ).

Αν $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της με την C_f τότε $f'(x_0)=\pi-e^\pi$.

Έστω $A_1=(-\infty,0)$ και $A_2=[0,+\infty)$.

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ οπότε

: $f'(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\right)=(-\infty,0)$,

$f'(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(0)\right]=(-\infty,0]$.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x\ge x+1>x$, οπότε

$e^\pi>\pi\Leftrightarrow\pi-e^\pi<0$. Το $\pi-e^\pi<0$ ανήκει στα $f(A_1),f(A_2)$ οπότε υπάρχουν

$x_1\in A_1,x_2\in A_2$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=\pi-e^\pi$, $f'(x_2)=\pi-e^\pi$

Τα x_1,x_2 μοναδικά ,λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα A_1,A_2 ,άρα η

εξίσωση $f'(x)=\pi-e^{\pi}$ έχει δύο ακριβώς ρίζες. Άρα υπάρχουν δύο ακριβώς εφαπτομένες παράλληλες στην ευθεία $(\delta): y=(\pi-e^{\pi})\cdot x-2021$.

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=\lim_{x\to-\infty}(\sigma\upsilon\nu x-2e^{x}+2x+1)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\cdot\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}+2+\frac{1}{x}\right)-2e^{x}\right]=$$

$-\infty\cdot[(0+2+0)-0]=-\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}(\sigma\upsilon\nu x-2e^{x}+2x+1)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}-2\frac{e^{x}}{x}+2+\frac{1}{x}\right)\right]=$$

$+\infty\cdot(0-\infty+2+0)=-\infty$. $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$.

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{|x|}=0=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)$ οπότε από Κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.

Επίσης $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{1}=+\infty$).

87.α) Έχουμε : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}, x\ge 2\\ \dfrac{-x+2}{\sqrt{x^2+1}}, x<2\end{cases}$.

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,2),(2,+\infty)$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης $\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2)=0$ άρα η f είναι συνεχής στο 2 οπότε και στο $\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,2)$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{-\sqrt{x^2+1}+(x-2)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\cancel{-x^2}-1+\cancel{x^2}-2x}{\sqrt{x^2+1}^3}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{-2x-1}{\sqrt{x^2+1}^3}.$$

$$f'(x)\ge0\Leftrightarrow\frac{-2x-1}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}^3}_{>0}}\ge0\Leftrightarrow-2x-1\ge0\Leftrightarrow x\le-\frac{1}{2}.$$

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,2]$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{1}{2},2\right]$ οπότε παρουσιάζει μέγιστο στο $-\frac{1}{2}$,το

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}=\frac{\frac{5}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{5}}{\cancel{2}}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2}=\frac{\cancel{5}\sqrt{5}}{\cancel{5}}=\sqrt{5}\,.$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2,+\infty)$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-(x-2)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+2x}{\sqrt{x^2+1}^3}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}^3}>0$$

για $x\geq 2$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 2 το $f(2)=0$.

β)Εστω $A_1=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right), A_2=\left[-\frac{1}{2},2\right)$ και $A_3=[2,+\infty)$.

Λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε:

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to-\frac{1}{2}^-}f(x)\right)=\left(1,\sqrt{5}\right),$$

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to 2}f(x),f\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=\left(0,\sqrt{5}\right]\ \text{και}\ f(A_1)=\left[f(2),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[0,1)\,.$$

Άρα έχει σύνολο τιμών το $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=\left[0,\sqrt{5}\right]$.

$$(\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+2}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1)$$ από το σύνολο τιμών βλέπουμε ότι το $f(2)=0, f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{5}$ είναι αντίστοιχα ελάχιστο και μέγιστο της συνάρτησης.

γ) Η απόσταση d της αρχής των αξόνων από τις ευθείες δίνεται από τον τύπο :

$$d=\frac{|2B-A|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|2-\frac{A}{B}\right|}{\sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)^2+1}}=\frac{\left|\frac{A}{B}-2\right|}{\sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)^2+1}}$$

Αν θέσουμε $\frac{A}{B}=x$, προκύπτει η συνάρτηση f , η οποία έχει μέγιστο το $\sqrt{5}$ για $x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{A}{B}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow B=-2A$,όπως φαίνεται από το Δ2,οπότε η ζητούμε ευθεία έχει τύπο: $Ax-2Ay-5A=0\Leftrightarrow x-2y-5=0$.

δ) i. Στο $[2,+\infty)$,η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο

$$f''(x)=\frac{2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}-(2x+1)\cdot 3x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+1\right)^{3}}=\frac{-4x^2-3x+2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Για $x>2$ έχουμε : $\begin{cases}x^2>4\\-3x<-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4x^2<-16\\-3x+2<-4\end{cases}\Rightarrow -4x^2-3x+2<-20<0$

οπότε $f''(x)<0$ στο $[2,+\infty)$ άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

ii. Η f είναι κοίλη στο $[2,+\infty)$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα. Επομένως έχει σύνολο τιμών το

$f'\left([2,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x),f(2)\right]=\left(0,\sqrt{5}\right]$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x^3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}^3}^{0}=0.$$

Το $\frac{1}{2}\in f'\left([2,+\infty)\right)$ οπότε η εξίσωση $f'(x)=\frac{1}{2}$ έχει λύση στο $[2,+\infty)$, η οποία είναι μοναδική αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα. Άρα υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f παράλληλη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x+2021$.

88.α) Η κατακόρυφη απόσταση των f, g είναι $d=|f(x)-g(x)|$, $x\in\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-x+x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $h'(x)=e^x-1+2x$ και $h''(x)=e^x+2$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h''(x)>0\Rightarrow h'\nearrow\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $h'(0)=0$, οπότε για κάθε $x<0\overset{h'\nearrow}{\Leftrightarrow}h'(x)<h'(0)=0\Rightarrow h\searrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0\overset{h'\nearrow}{\Leftrightarrow}h'(x)>h'(0)=0\Rightarrow h\nearrow[0,+\infty)$.

Η h έχει ελάχιστο το $h(0)=1$, άρα $h(x)\geq h(0)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $d=h(x)$ και $d_{min}=h_{min}=1$ για $x=0$, τότε το σημείο της f είναι το $(0,f(0))$ ή $(0,1)$ και το σημείο της g είναι το $(0,g(0))$ ή $(0,0)$.

β) $f(x)\geq \lambda g(x)+1 \Leftrightarrow e^x-\lambda x+\lambda x^2-1\geq 0$ (1)

Έστω $\varphi(x)=e^x-\lambda x+\lambda x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $\varphi(0)=0$, οπότε η (1) γίνεται $\varphi(x)\geq\varphi(0)$, άρα η συνάρτηση φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$.

Επειδή η φ είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x)=e^x-\lambda+2\lambda x$, λόγω του θεωρήματος Fermat είναι $\varphi'(0)=0\Leftrightarrow 1-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=1$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η αντίστροφη της $f(x)=e^x$ είναι η $f^{-1}(x)=\ln x,\ x>0$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=g(x)\Leftrightarrow \ln x=x-x^2\Leftrightarrow$ $\ln x+x^2-x=0$ (2) έχει ακριβώς μια ρίζα.

Έστω $k(x)=\ln x+x^2-x,\ x>0$. Παρατηρούμε ότι $k(1)=0$. Η k είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $k'(x)=\dfrac{1}{x}+2x-1=\dfrac{2x^2-x+1}{x}$.

Το τριώνυμο $2x^2-x+1$ έχει $\Delta=-7<0$ οπότε για κάθε $x>0$ είναι $2x^2-x+1>0\Rightarrow$

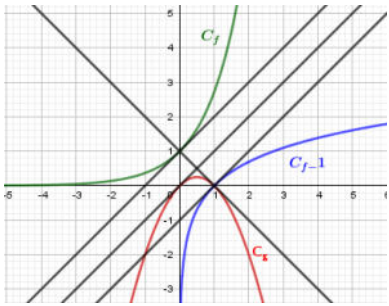
$k'(x)>0\Rightarrow k\nearrow(0,+\infty)\Rightarrow k$ 1-1. Η σχέση (2) γίνεται: $k(x)=k(1)\Leftrightarrow x=1$, άρα $M(1,0)$. Είναι $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x}$ και $\left(f^{-1}\right)'(1)=1$, $g'(x)=1-2x$, $g'(1)=-1$.

Επειδή $\left(f^{-1}\right)'(1)g'(1)=-1$ οι εφαπτομένες των $C_{f^{-1}}, C_g$ στο Μ είναι κάθετες.

δ) Η g είναι παραβολή με κορυφή $K\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},-\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

Είναι $-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{1}{-2}=\dfrac{1}{2}$, $\Delta=1$ και $-\dfrac{\Delta}{4\alpha}=\dfrac{1}{4}$, άρα $K\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$.

$g(x)=0\Leftrightarrow x(1-x)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$. Η g τέμνει τους άξονες στα σημεία $(0,0)$ και $(1,0)$.



ε) Έστω $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,g(\beta))$. Η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ευθεία

$\varepsilon_1: y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=e^{\alpha}x+e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}$

Η εφαπτομένη της C_g στο Β είναι η ευθεία $\varepsilon_2 : y - g(\beta) = g'(\beta)(x-\beta) \Leftrightarrow$ $y = (1-2\beta)x + \beta^2$. Για να δέχονται οι C_f, C_g κοινή εφαπτομένη πρέπει να υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να ταυτίζονται, άρα:

$$\begin{cases} e^{\alpha} = 1-2\beta \\ e^{\alpha} - \alpha e^{\alpha} = \beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{1-e^{\alpha}}{2} \\ e^{\alpha} - \alpha e^{\alpha} = \left(\dfrac{1-e^{\alpha}}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (3)$$

. Αρκεί η εξίσωση (3) να έχει ακριβώς 1 λύση στο $(0,+\infty)$. Είναι $e^{\alpha} - \alpha e^{\alpha} = \left(\dfrac{1-e^{\alpha}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$e^{\alpha} - \alpha e^{\alpha} = \frac{1-2e^{\alpha}+e^{2\alpha}}{4} \Leftrightarrow 4e^{\alpha} - 4\alpha e^{\alpha} = 1 - 2e^{\alpha} + e^{2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$4e^{\alpha} - 4\alpha e^{\alpha} - 1 + 2e^{\alpha} - e^{2\alpha} = 0 \Leftrightarrow 6e^{\alpha} - 4\alpha e^{\alpha} - 1 - e^{2\alpha} = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x) = 6e^x - 4xe^x - 1 - e^{2x}$, $x \geq 0$.

Η t είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$t'(x) = 6e^x - 4e^x - 4xe^x - 2e^{2x} = 2e^x - 4xe^x - 2e^{2x} = 2e^x(1-e^x) - 4xe^x$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $e^x > 1 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0 \Rightarrow 2e^x(1-e^x) < 0$ και $-4xe^x < 0$, άρα $t'(x) < 0 \Rightarrow t \searrow [0,+\infty)$.

Είναι $t(0) = 4$, $t(1) = 6e - 4e - 1 - e^2 = 2e - 1 - e^2 = -(e-1)^2 < 0$.

Επειδή $t(0)t(1) < 0$ και η t είναι συνεχής στο $[0,1]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $t(x_1) = 0$ και επειδή η t είναι $\searrow [0,+\infty)$, το x_1 είναι η μοναδική της ρίζα στο διάστημα αυτό.

89.α) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=2x+2-\sigma\upsilon\nu x$. Η f' είναι επίσης παραγωγίσιμη με $f''(x)=2+\eta\mu x$. Επειδή $-1\le\eta\mu x\le 1$, είναι

$f''(x)>0\Rightarrow f'(x)\nearrow\mathbb{R}\Leftrightarrow f\cup\mathbb{R}$

β) Έστω $h(x)=f(x)-\lambda x+1$. Είναι

$f(x)\ge\lambda x-1\Leftrightarrow f(x)-\lambda x+1\ge 0\Leftrightarrow h(x)\ge h(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

άρα η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$ που είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=f'(x)-\lambda=2x+2-\sigma\upsilon\nu x-\lambda$, λόγω του Θεωρήματος Fermat είναι $h'(0)=0\Leftrightarrow 2-1-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=1$.

γ) Επειδή η f είναι κυρτή και ισχύει ότι $f(x)\ge x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ υποψιαζόμαστε ότι η ευθεία ε: $y=x-1$ είναι εφαπτομένη της C_f. Είναι $f'(0)=2\cdot 0+2-\sigma\upsilon\nu 0=2-1=1=\lambda_\varepsilon$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x=0$ έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=x-1$.

Είναι $g'(x)=-x^2+1$ και $g'(x)=\lambda_\varepsilon\Leftrightarrow -x^2+1=1\Leftrightarrow x=0$. Επειδή $g(0)=-1=f(0)$ και $g'(0)=1$ η ευθεία ε είναι κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g.

δ) $\frac{1}{3}x^3+x^2+x>\eta\mu x\Leftrightarrow x^2+2x-1-\eta\mu x>-\frac{1}{3}x^3+x-1\Leftrightarrow f(x)>g(x)$

Είναι $g''(x)=-2x<0$ για κάθε $x>0$ άρα $g\cap[0,+\infty)$. Επειδή η g είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $g(x)<x-1$ για κάθε $x>0$. Όμως η ε είναι εφαπτομένη της C_f και η f είναι κυρτή, οπότε βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)>x-1$ για κάθε $x\ne 0$, άρα για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>x-1>g(x)$.

ε) $x^2+2x=1+\eta\mu x\Leftrightarrow f(x)=0$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(2+\frac{2}{x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)\right]=-\infty$ γιατί

$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|=\frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$ και από το κριτήριο παρεμβολής

είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$. Όμοια $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(2+\frac{2}{x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)\right]=+\infty$.

Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)=\mathbb{R}$. Άρα υπάρχει μοναδικό

$x_1 : f'(x_1) = 0$. Για κάθε $x < x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, x_1]$ και για κάθε $x > x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_1) = 0 \Rightarrow f \nearrow [x_1, +\infty)$.

Είναι $f'(0) = 2 - \sigma\upsilon\nu 0 = 1$ και $f'(-1) = -2 + 2 - \sigma\upsilon\nu(-1) = \sigma\upsilon\nu 1 > 0$, λόγω του Θ.Bolzano, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,0)$, όμως το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της f', άρα $x_1 \in (-1,0)$.

Είναι $f(0) = -1 < 0, f(1) = 2 - \eta\mu 1 > 0$, άρα λόγω του Θ.Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1) \subseteq [x_1, +\infty)$. Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, +\infty)$ οπότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική σε αυτό το διάστημα.

Είναι $f(-1) = -2 - \eta\mu(-1) = -2 + \eta\mu 1 < 0$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \pi - 1 + 1 = \frac{\pi^2}{4} - \pi < 0$,

$f(-\pi) = \pi^2 - 2\pi - 1 > 0$, δηλαδή $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) f(-\pi) < 0$ οπότε λόγω του Θ.Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \subseteq (-\infty, x_1]$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_1]$, η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

Τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

90.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -27e^{-x} - 512 \cdot 3(x+1)^2$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-27e^{-x} < 0$, $-512 \cdot 3(x+1)^2 \leq 0$ άρα

$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \mathbb{R} \Rightarrow 1-1$ και αντιστρέφεται.

Έστω $f^{-1}(-485) = \alpha$, τότε $f(\alpha) = -485 = f(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \alpha = 0$, άρα $f^{-1}(-485) = 0$

β) $(x+1)^3 e^x = \frac{27}{512} \Leftrightarrow 512(x+1)^3 e^x = 27 \Leftrightarrow 512(x+1)^3 = \frac{27}{e^x} \Leftrightarrow$

$0 = 27e^{-x} - 512(x+1)^3 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[27e^{-x} - 512(x+1)^3\right] = +\infty - (-\infty) = +\infty$ και

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[27e^{-x} - 512(x+1)^3\right] = 0 - (+\infty) = -\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f, οπότε επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό

$x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Είναι $f(0)=-485$, οπότε στο διάστημα $\Delta=(-\infty,0)$ η f έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta)=(-485,+\infty)$. Επειδή $0 \in f(\Delta)$ είναι $x_0 \in (-\infty,0)$ άρα η ρίζα είναι αρνητική.

γ) Η εφαπτομένη της C_h στο σημείο $A(x_1,h(x_1))$ είναι η ευθεία

$\varepsilon_1 : y-h(x_1)=h'(x_1)(x-x_1) \Leftrightarrow y-e^{-x_1}=-e^{-x_1}(x-x_1) \Leftrightarrow$

$y=-e^{-x_1}x+e^{-x_1}(x_1+1)$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(x_2,g(x_2))$ είναι η ευθεία

$\varepsilon_2 : y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow y+2x_2^4=-8x_2^3(x-x_2) \Leftrightarrow y=-8x_2^3x+6x_2^4$

Οι C_h, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη όταν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να ταυτίζονται και αυτό συμβαίνει όταν:

$$\begin{cases} -e^{-x_1}=-8x_2^3 \\ e^{-x_1}(x_1+1)=6x_2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x_1}=8x_2^3>0 \quad (1) \\ e^{-x_1}(x_1+1)=6x_2^4 \end{cases} \Rightarrow 8\cancel{x_2^3}(x_1+1)=6\cancel{x_2^4} \Leftrightarrow$$

$x_2=\frac{4}{3}(x_1+1)$. Είναι $8x_2^3>0 \Leftrightarrow x_2>0 \Rightarrow \frac{4}{3}(x_1+1)>0 \Leftrightarrow x_1>-1$

Η σχέση (1) γίνεται: $e^{-x_1}=8\left[\frac{4}{3}(x_1+1)\right]^3 \Leftrightarrow e^{-x_1}=8\frac{64}{27}(x_1+1)^3 \Leftrightarrow$

$27e^{-x_1}-512(x_1+1)^3=0 \Leftrightarrow h(x_1)=0 \Leftrightarrow x_1=x_0$.

2ος τρόπος

Η εφαπτομένη της C_h στο σημείο $A(x_1,h(x_1))$ είναι η ευθεία

$\varepsilon_1 : y-h(x_1)=h'(x_1)(x-x_1) \Leftrightarrow y-e^{-x_1}=-e^{-x_1}(x-x_1) \Leftrightarrow$

$y=-e^{-x_1}x+e^{-x_1}(x_1+1)$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(x_2,g(x_2))$ είναι η ευθεία

$\varepsilon_2 : y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow y+2x_2^4=-8x_2^3(x-x_2) \Leftrightarrow y=-8x_2^3x+6x_2^4$

Οι C_h, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη όταν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να ταυτίζονται και αυτό συμβαίνει όταν:

$$\begin{cases} -e^{-x_1}=-8x_2^3 \\ e^{-x_1}(x_1+1)=6x_2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x_1}=8x_2^3>0 \\ e^{-x_1}(x_1+1)=6x_2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1=\ln 8x_2^3 \\ e^{-x_1}(x_1+1)=6x_2^4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=-3\ln 2x_2 \\ e^{3\ln 2x_2}(-3\ln 2x_2+1)=6x_2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-3\ln 2x_2 \\ 8\cancel{x_2^3}(-3\ln 2x_2+1)=6\cancel{x_2^4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} x_1 = -3\ln 2x_2 \\ 6x_2 + 24\ln 2x_2 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3\ln 2x_2 \\ 3x_2 + 12\ln 2x_2 - 4 = 0 \end{cases}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $c(x) = 3x + 12\ln x - 4, x > 0$, h οποία είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $c'(x) = 3 + \dfrac{12}{x} > 0$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Επομένως έχει σύνολο τιμών το $c(A) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} c(x), \lim\limits_{x\to+\infty} c(x)\right) = (-\infty, +\infty)$.

Το $0 \in c(A)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 > 0$ για το οποίο ισχύει $c(x_2) = 0$.

δ) $f(x) = h(x) + g(x) \Leftrightarrow f(x) - h(x) - g(x) = 0$.

Έστω $\varphi(x) = f(x) - h(x) - g(x)$, $x \in [-1, 0]$. Είναι

$\varphi(-1) = f(-1) - h(-1) - g(-1) = 27e - e + 2 = 26e + 2 > 0$,

$\varphi(0) = f(0) - h(0) - g(0) = 27 - 512 - 1 = -486 < 0$, δηλαδή $\varphi(0)\varphi(-1) < 0$

και επειδή η φ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = h(x) + g(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1, 0)$.

ε) $h(x) \geq \lambda x + 1 \Leftrightarrow e^{-x} - \lambda x - 1 \geq 0$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x) = e^{-x} - \lambda x - 1,\ x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $\alpha(0) = 0$, οπότε η (1) γίνεται: $\alpha(x) \geq \alpha(0)$, άρα η α έχει ελάχιστο στο x = 0.

Επειδή η α είναι παραγωγίσιμη με $\alpha'(x) = -e^{-x} - \lambda$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι $\alpha'(0) = 0 \Leftrightarrow -1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$

στ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ η f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-27e^{-x} - 512\cdot 3(x+1)^2\right) = -\infty - \infty = -\infty$,

οπότε η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-27e^{-x} - 512\cdot 3(x+1)^2\right) = 0 - \infty = -\infty$, οπότε η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

91.α) Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα, γιατί αν η f είχε δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 > 0$ με $\rho_1 < \rho_2$, τότε: αν η f

ήταν γνησίως αύξουσα τότε $f(\rho_1) < f(\rho_2) \Leftrightarrow 0 < 0$ άτοπο, ενώ αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα, τότε $f(\rho_1) > f(\rho_2) \Leftrightarrow 0 > 0$ επίσης άτοπο.

- Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, τότε

$(x^2+1)f'(x) = |2xf(x)| \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{|2xf(x)|}{x^2+1} > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Αν υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$ τότε $f'(x) = \dfrac{|2xf(x)|}{x^2+1} > 0$ για κάθε $x \in (0,\rho) \cup (\rho,+\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Επομένως σε κάθε περίπτωση η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 1$, οπότε $(x^2+1)f'(x) = 2xf(x) \Leftrightarrow$

$(x^2+1)f'(x) - 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x^2+1)f'(x) - 2xf(x)}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{f(x)}{x^2+1}\right)' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x^2+1} = c \Leftrightarrow f(x) = c(x^2+1),\ c \in \mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x = 0, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow c = 1$, άρα

$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x > 0 \\ 1 \quad , & x = 0 \end{cases} = x^2+1,\ x \geq 0$

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x) = y \Leftrightarrow x^2+1 = y \Leftrightarrow x^2 = y-1 \overset{y-1\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 1}{\Leftrightarrow} |x| = \sqrt{y-1} \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{y-1}$, άρα

$f^{-1}(y) = \sqrt{y-1},\ y \geq 1$ οπότε $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1},\ x \geq 1$.

δ) Αρκεί η εξίσωση $f(x) = 2e^x - 3 \Leftrightarrow f(x) - 2e^x + 3 = 0$ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Έστω $g(x) = f(x) - 2e^x + 3 = x^2 + 1 - 2e^x + 3 = x^2 - 2e^x + 4$, $x \in [0,1]$. Είναι $g(0) = -2 + 4 = 2 > 0$, $g(1) = 5 - 2e < 0$, δηλαδή $g(0)g(1) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2e^x - 3$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Είναι $g'(x) = 2x - 2e^x$ και $g''(x) = 2 - 2e^x = 2(1-e^x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$, οπότε η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$. Η g' έχει σύνολο τιμών το

$g'((0,1)) = \left(\lim\limits_{x\to 1^-} g'(x), \lim\limits_{x\to 0^+} g'(x)\right) = (2-2e, -2)$, οπότε

$g'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ και η ρίζα του θεωρήματος Bolzano είναι η μοναδική για την g.

ε) Έστω $M(x(t),y(t))$, $x(t)\geq 0$, $t\geq 0$.

Επειδή η τετμημένη του Μ αυξάνεται με ρυθμό 1 μονάδα μήκους το δευτερόλεπτο, είναι $x'(t)=1$ μ.μ / sec. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το Α, τότε $x(t_0)=1$ και $y(t_0)=2$. Η απόσταση του Μ από την αρχή των αξόνων είναι

$d(t)=(OM)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{x^2(t)+\left(x^2(t)+1\right)^2}\Leftrightarrow$

$d(t)=\sqrt{x^2(t)+x^4(t)+2x^2(t)+1}=\sqrt{x^4(t)+3x^2(t)+1}$. Η ταχύτητα απομάκρυνσης του Μ από το Ο είναι το

$d'(t)=\dfrac{\left(x^4(t)+3x^2(t)+1\right)'}{2\sqrt{x^4(t)+3x^2(t)+1}}=\dfrac{4x^3(t)x'(t)+6x(t)x'(t)}{2\sqrt{x^4(t)+3x^2(t)+1}}$. Τη χρονική στιγμή

t_0 είναι $d'(t_0)=\dfrac{4\cdot1\cdot1+6\cdot1\cdot1}{2\sqrt{1+3+1}}=\dfrac{10}{2\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ μ.μ. / sec

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\ln\left[f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}}}\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{f(x)}\ln f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln f(x)}{f(x)}}\underset{u\to0}{\underset{x\to+\infty\Rightarrow}{=}}{}^{\frac{\ln f(x)}{f(x)}=u}\lim\limits_{u\to0}e^u=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln f(x)}{f(x)}\underset{x\to+\infty\Rightarrow u\to+\infty}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{u}}{1}=0$

92.α) Αν $x>0$ τότε $f''(x)>0\Leftrightarrow f'\nearrow(0,+\infty)\Rightarrow f\cup(0,+\infty)$

Αν $x<0$ τότε $f''(x)<0\Leftrightarrow f'\searrow(-\infty,0)\Rightarrow f\cap(-\infty,0)$. Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Η εφαπτομένη της C_f στο $K(x_0,f(x_0))$ με $x_0>0$ έχει εξίσωση:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x-x_0f'(x_0)+f(x_0)$. Είναι

$f(x)\geq f'(x_0)x-x_0f'(x_0)+f(x_0)$ (1) για κάθε $x>0$. Έστω ότι $f'(x_0)>0$ τότε επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(x_0)x-x_0f'(x_0)+f(x_0)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x_0)x=+\infty$, από τη σχέση (1) θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ που είναι άτοπο. Άρα $f'(x)\leq 0$ για κάθε $x>0$. Όμως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0,+\infty)$, άρα $f'(x)<0$ για κάθε

$x\in(0,+\infty)$ ή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\rho)\cup(\rho,+\infty)$,ρ η πιθανή ρίζα της . Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Η εφαπτομένη της C_f στο $M(x_1,f(x_1))$ με $x_1<0$ έχει εξίσωση: $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y=f'(x_1)x-x_1f'(x_1)+f(x_1)$. Είναι $f(x)\le f'(x_1)x-x_1f'(x_1)+f(x_1)$ (2) για κάθε $x<0$. Έστω ότι $f'(x_1)>0$ τότε επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x_1)x-x_1f'(x_1)+f(x_1))=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x_1)x=-\infty$, από τη σχέση (2) θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ που είναι άτοπο. Άρα $f'(x)\le 0$ για κάθε $x<0$. Όμως η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$, οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα αυτό , άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ ή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,\rho')\cup(\rho',0)$,ρ΄ η πιθανή ρίζα της .Επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

β) Έστω ότι στο υπάρχει $\rho_1>0$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1)\le 0$, τότε στο διάστημα $\Delta_1=(\rho_1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(\rho_1)\right)=(0,f(\rho_1))$ που είναι αδύνατο. Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ και $xf(x)>0$ στο $(0,+\infty)$.Έστω ότι στο υπάρχει $\rho_2<0$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_2)\ge 0$, τότε στο διάστημα $\Delta_2=(-\infty,\rho_2)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=\left(f(\rho_2),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(f(\rho_2),0)$ που είναι αδύνατο. Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x<0$ και $xf(x)>0$ στο $(-\infty,0)$.

γ) Για να είναι η f γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της πρέπει για κάθε $x_2,x_3\in\mathbb{R}^*$ με $x_2<x_3$ να είναι $f(x_2)>f(x_3)$. Έστω $x_2<0<x_3$ τότε $f(x_2)<0$, $f(x_3)>0$ άρα $f(x_2)<f(x_3)$ οπότε η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

δ) Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση

$$y-f(\alpha)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\Leftrightarrow y=\lambda_{AB}x-\alpha\lambda_{AB}+f(\alpha)\ .$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x)<\lambda_{AB}x-\alpha\lambda_{AB}+f(\alpha)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Έστω $g(x)=f(x)-\lambda_{AB}x+\alpha\lambda_{AB}-f(\alpha)$, $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι $g'(x)=f'(x)-\lambda_{AB}$.

Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[\alpha,\beta]$, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$

τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\lambda_{AB}$. Για κάθε

$\alpha<x<\xi \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(\xi)=\lambda_{AB} \Leftrightarrow g'(x)<0 \Rightarrow g\searrow[\alpha,\xi]$, οπότε για κάθε $\alpha<x\le\xi$ είναι $g(x)<g(\alpha)=0$.Για κάθε

$\xi<x<\beta \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(\xi)=\lambda_{AB} \Leftrightarrow g'(x)>0 \Rightarrow g\nearrow[\xi,\beta]$, οπότε για κάθε $\xi\le x<\beta$ είναι $g(x)<g(\beta)=0$. Άρα για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ είναι $g(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<\lambda_{AB}x-\alpha\lambda_{AB}+f(\alpha)$

93.α) Αρχικά για x= 0 είναι $f(0)=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^3+x-\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=3x^2+1-\sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $x\ne0$ είναι $3x^2>0$ και $1-\sigma\upsilon\nu x\ge0$, οπότε $g'(x)>0$ για κάθε $x\ne0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα. Για κάθε $x<0$ είναι $g(x)<g(0)=0\Rightarrow f(x)=-x^3-x+\eta\mu x$

και για κάθε $x>0$ είναι $g(x)>g(0)=0\Rightarrow f(x)=x^3+x-\eta\mu x$.

Άρα $f(x)=\begin{cases}-x^3-x+\eta\mu x, & x<0\\ 0, & x=0\\ x^3+x-\eta\mu x, & x>0\end{cases}$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x^3-x+\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\left(-x^2-1+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=0$ και

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3+x-\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2+1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο x = 0 με $f'(0)=0$, οπότε η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα x΄x στην αρχή Ο των αξόνων.

β) Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)=-3x^2-1+\sigma\upsilon\nu x=-g'(x)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=3x^2+1-\sigma\upsilon\nu x=g'(x)>0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=0$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3-x+\eta\mu x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(-x^2-1+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)\right]=+\infty$ γιατί για

$x<0$ είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{-x}\le -\frac{1}{x}\Leftrightarrow \frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le -\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$,

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x-\eta\mu x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(x^2+1-\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right]=+\infty$ γιατί όμοια με

πριν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=(0,+\infty)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=(0,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=(0,+\infty)$.

Για κάθε $\kappa\in f(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=\kappa$. Όμως $\kappa\in f(\Delta_2)$ οπότε υπάρχει μοναδικό $x_2\in\Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=\kappa$. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2), επειδή $f(x_1)=f(x_2)$ εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[x_1,x_2]$. Επειδή το $f(\Delta_1)$ περιέχει άπειρους αριθμούς, υπάρχουν άπειρα x_1 και αντίστοιχα άπειρα x_2. Οπότε υπάρχουν άπειρα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ στα οποία εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f.

δ) Για να δέχεται η C_f παράλληλες εφαπτόμενες πρέπει να υπάρχουν $x_3,x_4\in\mathbb{R}$ με $x_3\ne x_4$ τέτοια, ώστε $f'(x_3)=f'(x_4)$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f''(x)=-6x-\eta\mu x=-5x-x-\eta\mu x$

Είναι $|\eta\mu x|<|x|=-x\Leftrightarrow x<\eta\mu x<-x\Rightarrow -x-\eta\mu x>0$ και $-5x>0$, άρα $f''(x)>0$.

$\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=f'(0)=0$, οπότε η f' είναι συνεχής στο $x=0$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)=6x+\eta\mu x=5x+x+\eta\mu x$

Είναι $|\eta\mu x|<|x|=x\Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x\Rightarrow x+\eta\mu x>0$ και $5x>0$, άρα $f''(x)>0$.

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x\ne0$ και η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x_3,x_4\in\mathbb{R}$ με $x_3\ne x_4$ είναι $f'(x_3)\ne f'(x_4)$ και η γραφική παράσταση της f δεν δέχεται παράλληλες εφαπτόμενες.

ε) $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^2-1+\sigma\upsilon\nu x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\left(-3-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)\right] = -\infty$ γιατί

$\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right| = \dfrac{|\sigma\upsilon\nu x|}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x^2} \le \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ και από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+1-\sigma\upsilon\nu x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(3+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)\right] = +\infty$ γιατί όμοια με πριν είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = 0$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1) = (-\infty, 0)$. Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = (0, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2) = (0, +\infty)$. Για να υπάρχουν εφαπτόμενες της $C_{f'}$ που είναι κάθετες πρέπει να υπάρχουν $x_5, x_6 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_5)f'(x_6) = -1$. Για κάθε $\lambda \in f'(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_5 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f'(x_5) = \lambda$. Τότε

$\lambda f'(x_6) = -1 \Leftrightarrow f'(x_6) = -\dfrac{1}{\lambda}$. $-\dfrac{1}{\lambda} \in f'(\Delta_2)$ οπότε υπάρχει μοναδικό $x_6 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f'(x_6) = -\dfrac{1}{\lambda}$. Επειδή το $f'(\Delta_1)$ περιέχει άπειρους αριθμούς, υπάρχουν άπειρα x_5 και αντίστοιχα άπειρα x_6. Οπότε υπάρχουν άπειρα ζεύγη κάθετων εφαπτομένων της f.

94.α) Επειδή η f είναι άρτια, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x) = f(x)$.

Οπότε $\left(f(-x)\right)' = f'(x) \Leftrightarrow f'(-x)(-x)' = f'(x) \Leftrightarrow$

$-f'(-x) = f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'$ περιττή.

β) Για $x = 0$ είναι $f'(0) = -f'(0) \Leftrightarrow 2f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$.

Για κάθε $x < 0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x > 0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)$.

γ) Επειδή η f' γνησίως αύξουσα, η f είναι κυρτή, οπότε βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους.

Έστω $M\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι η ευθεία ε με εξίσωση:

$y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow y=f'\left(x_0\right)x+f\left(x_0\right)-x_0f'\left(x_0\right)$

Είναι $f\left(x\right)\geq f'\left(x_0\right)x+f\left(x_0\right)-x_0f'\left(x_0\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν $x_0>0$ τότε $f'\left(x_0\right)>0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'\left(x_0\right)x+f\left(x_0\right)-x_0f'\left(x_0\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'\left(x_0\right)x\right)=+\infty$ οπότε και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$. Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(-x\right)\overset{\substack{u=-x\\x\to-\infty,\\u\to+\infty}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}f\left(u\right)=+\infty$.

Αν $x_0<0$ τότε $f'\left(x_0\right)<0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f'\left(x_0\right)x+f\left(x_0\right)-x_0f'\left(x_0\right)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f'\left(x_0\right)x\right)=+\infty$

οπότε και $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=+\infty$.

δ) Είναι $0<1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(0\right)<f\left(1\right)=0$.

Στο διάστημα $\Delta_1=\left(-\infty,0\right)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f\left(\Delta_1\right)=\left(f\left(0\right),+\infty\right)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f\left(\Delta_1\right)$ υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f\left(x_1\right)=0$. Στο διάστημα $\Delta_2=\left(0,+\infty\right)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f\left(\Delta_2\right)=\left(f\left(0\right),+\infty\right)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f\left(\Delta_2\right)$ υπάρχει μοναδικό $x_2\in\Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f\left(x_2\right)=0$. Τελικά η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

ε) Έστω ότι τα σημεία $A\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$, $B\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)$ και $\Gamma\left(x_3,f\left(x_3\right)\right)$ της C_f με $x_1<x_2<x_3$ είναι συνευθειακά. Τότε: $AB\,||\,B\Gamma\Leftrightarrow\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}\Leftrightarrow$ $\dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}=\dfrac{f\left(x_3\right)-f\left(x_2\right)}{x_3-x_2}$ (1). Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[x_1,x_2\right]$, $\left[x_2,x_3\right]$ και παραγωγίσιμη στα $\left(x_1,x_2\right)$ και $\left(x_2,x_3\right)$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχουν $\xi_1\in\left(x_1,x_2\right)$ και $\xi_2\in\left(x_2,x_3\right)$ τέτοια, ώστε: $f'\left(\xi_1\right)=\dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}$ και $f'\left(\xi_2\right)=\dfrac{f\left(x_3\right)-f\left(x_2\right)}{x_3-x_2}$. Από τη σχέση (1) είναι $f'\left(\xi_1\right)=f'\left(\xi_2\right)$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\left[\alpha,\beta\right]$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, οπότε είναι και 1-1. Είναι:

$f'\left(\xi_1\right)=f'\left(\xi_2\right)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}\xi_1=\xi_2$ που είναι άτοπο.

Οπότε δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά σημεία της C_f που να είναι συνευθειακά.

95.α) $f^2(x)=2xf(x)+9 \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+9 \Leftrightarrow$

$\left(f(x)-x\right)^2=x^2+9$ (1). Επειδή $x^2+9>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι

$g(x)=f(x)-x\neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $g(0)=f(0)=3>0$, είναι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η (1)

γίνεται: $f(x)-x=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ x\in\mathbb{R}$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+9}}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$x^2<x^2+9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}<\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow |x|<\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow$

$-\sqrt{x^2+9}<x<\sqrt{x^2+9} \Rightarrow x+\sqrt{x^2+9}>0 \Leftrightarrow f(x)>0$

άρα $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=\frac{f'(x)\sqrt{x^2+9}-f(x)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2}=\frac{\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+9}}\sqrt{x^2+9}-\dfrac{xf(x)}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} \Leftrightarrow$$

$$f''(x)=\frac{\dfrac{f(x)\sqrt{x^2+9}-xf(x)}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}=\frac{f(x)\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)}{\sqrt{x^2+9}\left(x^2+9\right)} \Leftrightarrow$$

$$f''(x)=\frac{f(x)f(-x)}{\sqrt{x^2+9}\left(x^2+9\right)}>0 \Rightarrow f\cup\mathbb{R}.$$

γ) $\sqrt{x^2+9}=\lambda-x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}+x=\lambda \Leftrightarrow f(x)=\lambda$. Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-9}{x-\sqrt{x^2+9}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-9}{x+x\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-9}{x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}\right)}=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=+\infty+\infty=+\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$.

- Αν $\lambda \le 0$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda > 0$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

δ) $x+\sqrt{x^2+9}+\sqrt{\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)^2+9}<9 \Leftrightarrow f(x)+\sqrt{f^2(x)+9}<9 \Leftrightarrow$

$f\left(f(x)\right)<f(4) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<4 \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+9}<4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}<4-x$ (2)

Αν $4-x<0 \Leftrightarrow x>4$ τότε η (2) είναι αδύνατη.

Αν $4-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 4$ η (2) γίνεται: $\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2<(4-x)^2 \Leftrightarrow$

$x^2+9<16-8x+x^2 \Leftrightarrow 8x<7 \Leftrightarrow x<\frac{7}{8}$ που είναι δεκτές τιμές.

ε) Είναι $M\left(x(t),y(t)\right)$, όπου $y(t)=x(t)+\sqrt{x^2(t)+9}$. Είναι $x'(t)=1$ και

$y'(t)=x'(t)+\frac{x(t)x'(t)}{\sqrt{x^2(t)+9}}$. Είναι $(OM)(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$, οπότε

$(OM)'(t)=\frac{2x'(t)x(t)+2y(t)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$. Τη χρονική στιγμή t_0 που είναι

$x(t_0)=4$, $y(t_0)=9$ είναι:

$$(OM)'(t_0)=\frac{x'(t_0)x(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=\frac{1\cdot 4+9\left(1+\frac{4\cdot 1}{\sqrt{16+9}}\right)}{\sqrt{16+81}}=\frac{101}{5\sqrt{97}}\,\text{cm/sec}$$

στ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+9}=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}=y-x$ (3)

Είναι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}>x \Leftrightarrow y-x>0$ οπότε η (3) γίνεται:

$x^2+9=(y-x)^2 \Leftrightarrow x^2+9=y^2-2xy+x^2 \Leftrightarrow 2xy=y^2-9 \Leftrightarrow x=\frac{y^2-9}{2y}$, άρα

$f^{-1}(y)=\frac{y^2-9}{2y}$, $y\in(0,+\infty)$ οπότε $f^{-1}(x)=\frac{x^2-9}{2x}$, $x\in(0,+\infty)$.

ζ) $(AB)=\sqrt{\left(x-f^{-1}(x)\right)^2+\left(f^{-1}(x)-x\right)^2}=\sqrt{2\left(x-f^{-1}(x)\right)^2}=2\left|x-f^{-1}(x)\right|$.

Επειδή $f(x)>x$ η C_f βρίσκεται πάνω από την $y=x$ και λόγω συμμετρίας η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $y=x$. Άρα

$(AB)=2\left(x-f^{-1}(x)\right)=2\left(x-\dfrac{x^2-9}{2x}\right)=\not{2}\dfrac{2x^2-x^2+9}{\not{2}x}=\dfrac{x^2+9}{x}=x+\dfrac{9}{x}$.

Είναι $(AB)'(x)=1-\dfrac{9}{x^2}=\dfrac{x^2-9}{x^2}$.

Για κάθε $x\in(0,3)$ είναι $(AB)'(x)<0\Rightarrow(AB)\searrow(0,3]$ και για κάθε $x>3$ είναι $(AB)'(x)>0\Rightarrow(AB)\nearrow[3,+\infty)$. Η απόσταση AB γίνεται ελάχιστη για $x=3$ με ελάχιστη απόσταση την $(AB)=3+\dfrac{9}{3}=6$.

η) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x^2)\overset{x^2=y}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}f(y)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f^2(x)-\eta\mu^2f(x)\right)=0\overset{u=f(x)}{=}\lim\limits_{u\to0^+}\left(u^2-\eta\mu^2u\right)=0$ και επειδή

$|\eta\mu f(x)|<|f(x)|\Leftrightarrow\eta\mu^2f(x)<f^2(x)\Leftrightarrow f^2(x)-\eta\mu^2f(x)>0$, είναι

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x^2)}{f^2(x)-\eta\mu^2f(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x^2)\cdot\dfrac{1}{f^2(x)-\eta\mu^2f(x)}\right]=+\infty(+\infty)=+\infty$

96.α) $f(x)+f'(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2+\lambda x^2+2\lambda x+x+1\Leftrightarrow$

$e^xf(x)+e^xf'(x)=e^x\dfrac{x^3}{3}+e^xx^2+e^x\lambda x^2+e^x2\lambda x+e^xx+e^x\Leftrightarrow$

$\left(e^xf(x)\right)'=\left(e^x\dfrac{x^3}{3}+e^x\lambda x^2+e^xx\right)'\Leftrightarrow$

$e^xf(x)=e^x\dfrac{x^3}{3}+e^x\lambda x^2+e^xx+c$, $x\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$

Για $x=0:c=0$ άρα

$e^xf(x)=e^x\dfrac{x^3}{3}+e^x\lambda x^2+e^xx\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\lambda x^2+x,x\in\mathbb{R}$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με παράγωγο:

$f'(x)=x^2+2\lambda x+1,x\in\mathbb{R}$

Η παράγωγος της f είναι τριώνυμο με διακρίνουσα:

$\Delta=4\lambda^2-4=4\left(\lambda^2-1\right)=4(\lambda-1)(\lambda+1)$

Αν $\lambda<-1$ τότε $\Delta>0$ και η f' έχει δύο ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{-2\lambda\pm2\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-1)}}{2}$

και τότε η f' θα είναι αρνητική ανάμεσα στις δύο ρίζες άρα θα είναι φθίνουσα σε εκείνο το διάστημα άρα ΑΤΟΠΟ.

Αν $\lambda=-1$ τότε $\Delta=0$ και $f'(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$ στο οποίο η f είναι συνεχής άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Αν $\lambda\in(-1,1)$ τότε $\Delta<0$ και $f'(x)>0$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αν $\lambda=1$ τότε $\Delta=0$ και $f'(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=-1$ στο οποίο η f είναι συνεχής άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αν $\lambda>1$ τότε $\Delta>0$ και η f' έχει δύο ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{-2\lambda\pm 2\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-1)}}{2}$ και τότε η f' θα είναι αρνητική ανάμεσα στις δύο ρίζες άρα θα είναι φθίνουσα σε εκείνο το διάστημα άρα άτοπο.

Άρα τελικά η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αν και μόνον αν $\lambda\in[-1,1]$.

γ) $f'(x)=x^2+2\lambda x+1, x\in\mathbb{R}$ και $f''(x)=2x+2\lambda$. Είναι

$f''(x)>0\Leftrightarrow 2x>-2\lambda\Leftrightarrow x>-\lambda$ και $f''(x)<0\Leftrightarrow 2x<-2\lambda\Leftrightarrow x<-\lambda$.

Επομένως η f είναι κοίλη στο $(-\infty,-\lambda]$ και κυρτή στο $[-\lambda,+\infty)$. Παρουσιάζει καμπή για $x=-\lambda$ και έχει μοναδικό σημείο καμπής.

δ) Επειδή $\lambda=1$ από το γ) ερώτημα η f είναι κυρτή στο $[-1,+\infty)$ και η f' γνησίως αύξουσα. Έστω $-1<\alpha<\beta$ τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$. Οπότε λόγω ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$ και

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}\Leftrightarrow f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Είναι $\alpha<\xi_1<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\xi_2<\beta\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow$

$$\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)<f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\alpha)+f(\beta)$. Όμοια αν $\alpha>\beta$.

Αν $\alpha=\beta$ τότε $f(\alpha)=f(\beta)=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ άρα $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=f(\alpha)+f(\beta)$.

Τελικά προκύπτει $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le f(\alpha)+f(\beta)$ για κάθε $\alpha,\beta\in(-1,+\infty)$.

ε) Είναι $f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2+x$ και $f'(x)=x^2+2x+1$

Η εφαπτομένη στο $x_0=1$ είναι η

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\frac{7}{3}=4x-4\Leftrightarrow y=4x-\frac{5}{3}$$

Επειδή $\lambda=1$ από το γ) ερώτημα η f είναι κυρτή στο $[-1,+\infty)$ άρα η γραφική παράσταση της f στο διάστημα αυτό βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Δηλαδή

$f(x)\ge 4x-\frac{5}{3}\Leftrightarrow f(x)-4x+\frac{5}{3}\ge 0$ για κάθε $x\in[-1,+\infty)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$. Όμως όταν $x\to 1$ είναι $x\ne 1$, δηλαδή

$f(x)-4x+\frac{5}{3}>0$. Άρα είναι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x+1}{|x-1|\left(f(x)-4x+\frac{5}{3}\right)}=+\infty$.

Επίπεδο Δ2

97.α) Έστω ότι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=\lambda x+\beta$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\beta$. Για κάθε $x>0$ είναι

$$f^3(x)+3f(x)+1=x^3\Leftrightarrow\frac{f^3(x)}{x^3}+3\frac{f(x)}{x^3}+\frac{1}{x^3}=\frac{x^3}{x^3}\Leftrightarrow$$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+3\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-1=0$. Άρα και

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+3\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-1\right]=0\Leftrightarrow\lambda^3-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$$

$f^3(x)+3f(x)+1=x^3 \Leftrightarrow f^3(x)-x^3=-3f(x)-1 \Leftrightarrow$

$(f(x)-x)(f^2(x)+xf(x)+x^2)=-3f(x)-1$ (1)

Επειδή το τριώνυμο $\omega^2+x\omega+x^2$ ως προς $\omega=f(x)$ έχει $\Delta=-3x^2<0$, είναι

$f^2(x)+xf(x)+x^2>0$ για κάθε $x>0$, άρα $f(x)-x=\dfrac{-3f(x)-1}{f^2(x)+xf(x)+x^2} \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3f(x)-1}{f^2(x)+xf(x)+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{f^2(x)}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}+1}=0$, άρα

$\beta=0$, οπότε η ευθεία ε: $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-x^2+6x}{f(x)+2x-4}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(f(x)-x+6\right)}{\cancel{x}\left(\dfrac{f(x)}{x}+2-\dfrac{4}{x}\right)}=\dfrac{0+6}{1+2-0}=2$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\dfrac{\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\right)=1\cdot1=1$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\underset{u\to0}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

γ) Για $x=1$ είναι

$f^3(1)+3f(1)+1=1\Leftrightarrow f(1)\left(f^2(1)+3\right)=0\Leftrightarrow f(1)=0$ ή $f^2(1)=-3$ αδύνατο

$f^3(x)+3f(x)+1=x^3 \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right)=x^3-1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^3-1}{f^2(x)+1}$.

Είναι $|f(x)|=\left|\dfrac{x^3-1}{f^2(x)+1}\right|=\dfrac{|x^3-1|}{f^2(x)+1}$. Είναι $1+f^2(x)\geq1\Leftrightarrow\dfrac{1}{f^2(x)+1}\leq1\overset{x\neq1}{\Leftrightarrow}$

$\dfrac{|x^3-1|}{f^2(x)+1}\leq|x^3-1|$ άρα $|f(x)|\leq|x^3-1|\Leftrightarrow-|x^3-1|\leq f(x)\leq|x^3-1|$.Επειδή

$\lim\limits_{x\to1}|x^3-1|=\lim\limits_{x\to1}\left(-|x^3-1|\right)=0$ από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$. Επειδή $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$ η f είναι συνεχής στο $x=1$.

δ) Είναι $f^3(x)+3f(x)=x^3-1(1)$ και για $x=x_0: f^3(x_0)+3f(x_0)=x_0^3-1\,(2)$.

Από $(1)-(2)\Rightarrow f^3(x)-f^3(x_0)+3f(x)-3f(x_0)=x^3-x_0^3\Leftrightarrow$

$\left(f(x)-f(x_0)\right)\left(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right)+3\left(f(x)-f(x_0)\right)=$
$(x-x_0)\left(x^2+xx_0+x_0^2\right)\Leftrightarrow$
$\left(f(x)-f(x_0)\right)\left(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3\right)=(x-x_0)\left(x^2+xx_0+x_0^2\right)$ (3)

Το τριώνυμο $\omega^2+\omega f(x_0)+f^2(x_0)+3$ έχει

$\Delta=f^2(x_0)-4f^2(x_0)-12=-3f^2(x_0)-12<0$ άρα

$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3>0$ για κάθε $x,x_0\in\mathbb{R}$, οπότε για $x\neq x_0$ η (3)

γίνεται: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x^2+xx_0+x_0^2}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3}\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+xx_0+x_0^2}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3}\Rightarrow$

$f'(x_0)=\dfrac{3x_0^2}{3f^2(x_0)+3}$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{3x^2}{3f^2(x)+3}=\dfrac{x^2}{f^2(x)+1}$.

ε) Είναι $f'(x)=\dfrac{x^2}{f^2(x)+1}>0$ για κάθε $x\neq 0$. Η f είναι συνεχής, οπότε είναι γνησίως αύξουσα.

στ) Η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.Έστω ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=\beta$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\beta\in\mathbb{R}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f^3(x)+3f(x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-1\right)\Leftrightarrow\beta^3+3\beta=-\infty$ που είναι αδύνατο.

ζ) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)\notin\mathbb{R}$ θα είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$.

Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ τότε $f(\mathbb{R})=\left(+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$ που είναι αδύνατο, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, οπότε $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

η) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{f^2(x)+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{1+0}=1$

θ) Είναι $f'(1)=\dfrac{1^2}{f^2(1)+1}=1$, οπότε η εφαπτομένη στο $x=1$ είναι η ευθεία ε:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=x-1$ Επειδή $\lambda_\varepsilon=1=\lambda_{\text{ασύμπτωτης}}$, η ε είναι παράλληλη στην $y=x$.

ι) Για να υπάρχει εφαπτομένη της C_f σε σημείο με τετμημένη $x_1\in(0,1)$, παράλληλη στην ευθεία $y=\dfrac{1}{2}x+1821$, αρκεί να υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=\dfrac{1}{2}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x,\ x\in[0,1]$ με $g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{2}$. Είναι $g'(0)=f'(0)-\dfrac{1}{2}=0-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}<0$ και $g'(1)=f'(1)-\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>0$. Επειδή $g'(0)<0$ είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}<0$, οπότε υπάρχει $x_2\in(0,1)$ με x_2 πολύ κοντά στο 0 τέτοιο, ώστε

$$\frac{g(x_2)-g(0)}{x_2}<0\overset{x_2>0}{\Rightarrow}g(x_2)-g(0)<0\Leftrightarrow g(x_2)<g(0)\ (1)$$

Επειδή $g'(1)>0$ είναι $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}>0$, οπότε υπάρχει $x_3\in(0,1)$ με x_3 πολύ κοντά στο 1 τέτοιο, ώστε

$$\frac{g(x_3)-g(1)}{x_3-1}>0\overset{x_3<1}{\Rightarrow}g(x_3)-g(1)<0\Leftrightarrow g(x_3)<g(1)\ (2).$$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ αφού είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό, οπότε θα παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Από τις (1), (2) διαπιστώνουμε ότι η g δεν παρουσιάζει ελάχιστο στα 0 και 1, οπότε υπάρχει $x_1\in(0,1)$ στο οποίο η g παρουσιάζει ελάχιστο. Τότε όμως από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι $g'(x_1)=0\Leftrightarrow f'(x_1)-\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow f'(x_1)=\dfrac{1}{2}$

2ος τρόπος

Επειδή $f'(x)=\dfrac{3x^2}{3f^2(x)+3}=\dfrac{x^2}{f^2(x)+1}$, η f' είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Είναι $f'(0)=0\neq f'(1)=1$, το $\dfrac{1}{2}$ βρίσκεται ανάμεσα στο $f'(0)$ και στο $f'(1)$ άρα από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=\dfrac{1}{2}$.

κ) Αν στη σχέση $f^3(x)+3f(x)=x^3-1$ αντικαταστήσουμε όπου x το ημx προκύπτει: $f^3(\eta\mu x)+3f(\eta\mu x)=\eta\mu^3 x-1$, τότε η εξίσωση $f^3(\eta\mu x)+3f(\eta\mu x)=x^3-1$ γίνεται:

$\eta\mu^3 x-1=x^3-1\Leftrightarrow \eta\mu^3 x=x^3\Leftrightarrow \eta\mu x=x\Leftrightarrow x=0$

98.α) Για κάθε $x<0$ είναι $e^{2x}-\beta x^2-2x-1\geq \alpha x^3\Leftrightarrow \alpha\geq \dfrac{e^{2x}-\beta x^2-2x-1}{x^3}$,

άρα και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha\geq\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-\beta x^2-2x-1}{x^3}$ (1). Όμως

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-\beta x^2-2x-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{2x}}{x^3}-\dfrac{\beta}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)=0$,

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}\dfrac{1}{x^3}=0\cdot 0=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{\beta}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)=0$, οπότε η σχέση (1) γίνεται $\alpha\geq 0$.

β) Για $x\neq 0$ είναι: $e^{2x}-\alpha x^3-2x-1\geq \beta x^2\Leftrightarrow \beta\leq\dfrac{e^{2x}-\alpha x^3-2x-1}{x^2}$ και

$\lim\limits_{x\to0}\beta\leq\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-\alpha x^3-2x-1}{x^2}$ (2). Όμως

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-\alpha x^3-2x-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^{2x}-\alpha x^3-2x-1\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^{2x}-3\alpha x^2-2}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(2e^{2x}-3\alpha x^2-2\right)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4e^{2x}-6\alpha x}{2}=2$, άρα η σχέση (2) γίνεται: $\beta\leq 2$.

γ) $f'(x)=2e^{2x}-3\alpha x^2-2\beta x-2$, $f''(x)=4e^{2x}-6\alpha x-2\beta$, $f^{(3)}(x)=8e^{2x}-6\alpha$

$f''(0)=0\Leftrightarrow 4-2\beta=0\Leftrightarrow\beta=2$ και $f^{(3)}(0)=0\Leftrightarrow 8-6\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{4}{3}$.

Τότε $f''(x)=4e^{2x}-8x-4$, $f^{(3)}(x)=8e^{2x}-8$. Για κάθε $x>0$ είναι $f^{(3)}(x)>0\Rightarrow f''\nearrow[0,+\infty)$ και για $x<0$ είναι $f^{(3)}(x)<0\Rightarrow f''\searrow(-\infty,0]$.

δ) Για $x>0\overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow}f''(x)>f''(0)=0$ και για $x<0\overset{f''\searrow}{\Leftrightarrow}f''(x)>f''(0)$, άρα για κάθε $x\neq 0$ είναι $f''(x)>0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x<0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(0)=0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$ και για

$x>0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0)=0 \Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-\frac{4}{3}x^3-2x^2-2x-1\right)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{3}x^3-2x^2-2x-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{3}x^3\right)=+\infty$.Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3\left(\frac{e^{2x}}{x^3}-\frac{4}{3}-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\right]=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{3x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\frac{4e^{2x}}{6x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\frac{8e^{2x}}{6}=+\infty$. Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0)$ είναι $f(\Delta_1)=(0,+\infty)$ και στο $\Delta_2=(0,+\infty)$ είναι $f(\Delta_2)=(0,+\infty)$. Είναι $f(\Delta_1)=(0,+\infty)=f(\Delta_2)$.Έστω $\alpha\in\Delta_1$ τότε $f(\alpha)\in f(\Delta_1)$ και $f(\alpha)\in f(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $\beta\in\Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(\beta)=f(\alpha)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) εφαρμόζεται γι αυτήν το θεώρημα Rolle στο $[\alpha,\beta]$.

99.α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι $\alpha<\alpha+2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\alpha)<f'(\alpha+2)\Leftrightarrow 3f(\alpha+2)<f(\alpha+2)\Leftrightarrow 2f(\alpha+2)<0\Leftrightarrow f(\alpha+2)<0$.

Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[\alpha,\alpha+2]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\alpha+2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\alpha+2)-f(\alpha)}{\alpha+2-\alpha}=\frac{f(\alpha+2)-f(\alpha)}{2}$.

Είναι $\alpha<\xi<\alpha+2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi)<f'(\alpha+2)\Leftrightarrow \frac{f(\alpha+2)-f(\alpha)}{2}<f(\alpha+2)\Leftrightarrow f(\alpha+2)-f(\alpha)<2f(\alpha+2)\Leftrightarrow f(\alpha)>-f(\alpha+2)>0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\alpha+2]$ και $f(\alpha)f(\alpha+2)<0$, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(\alpha,\alpha+2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

β) Επειδή $f(\alpha+3)=0$, $f(\alpha+2)<0$ και $f(\alpha)>0$, είναι $f(\alpha+2)<f(\alpha+3)<f(\alpha)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\alpha+2]$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_1(\alpha,\alpha+2)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=f(\alpha+3)$ (1). Αν η f ήταν $1-1$, τότε από την (1) θα πρόκυπτε ότι $x_1=\alpha+3$ που είναι αδύνατο αφού

$x_1(\alpha,\alpha+2)$, άρα η f δεν μπορεί να είναι $1-1$.

γ) Επειδή $f(\alpha+2)<f(\alpha+3)<f(\alpha)$ η f θα έχει ακρότατο σε σημείο x_2 του διαστήματος $[\alpha,\alpha+3]$ που θα είναι διαφορετικό από τα άκρα του. Από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι $f'(x_2)=0$, δηλαδή η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

δ) Επειδή $\alpha<x_2<\alpha+3$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$f'(x_2)<f'(\alpha+3)\Leftrightarrow f'(\alpha+3)>0$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x=\alpha+3$, είναι:

$$y-f(\alpha+3)=f'(\alpha+3)(x-\alpha-3)\Leftrightarrow y=xf'(\alpha+3)-(\alpha+3)f'(\alpha+3)+f(\alpha+3)$$

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, άρα

$$f(x)\geq xf'(\alpha+3)-(\alpha+3)f'(\alpha+3)+f(\alpha+3)$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xf'(\alpha+3)-(\alpha+3)f'(\alpha+3)+f(\alpha+3)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xf'(\alpha+3)\right]=+\infty$,

άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

100. α) i. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$

τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}\Leftrightarrow f'(\xi)=f(1)-f(0)\quad(2)$.

ii. Στη σχέση $2(f'(x)-1)\geq f^2(0)+f^2(1)\quad(1)$ θέτουμε $x=\xi$ οπότε γίνεται

$$2(f'(\xi)-1)\geq f^2(0)+f^2(1)\Leftrightarrow 2f'(\xi)-2\geq f^2(0)+f^2(1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$2(f(1)-f(0))-2\geq f^2(0)+f^2(1)\Leftrightarrow$$

$f^2(0)+f^2(1)-2f(1)+2f(0)+1+1\leq 0\Leftrightarrow (f(0)+1)^2+(f(1)-1)^2\leq 0$ όμως

$(f(0)+1)^2+(f(1)-1)^2\geq 0$ άρα $(f(0)+1)^2+(f(1)-1)^2=0$ οπότε $f(0)=-1$

και $f(1)=1$.

iii. Από την (1) έχουμε $2f'(x)-2\geq f^2(0)+f^2(1)\overset{(4)}{\Leftrightarrow}$

$$2f'(x)-2\geq(-1)^2+1^2\Leftrightarrow 2f'(x)\geq 4\Leftrightarrow f'(x)\geq 2\quad(3)$$

β) i. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,x_0]$ οπότε υπάρχει $\xi_1\in(0,x_0)$

τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0}\Leftrightarrow x_0f'(\xi_1)=f(x_0)+1$.

ii. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x_0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi_2\in(x_0,1)$

τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}\Leftrightarrow(x_0-1)f'(\xi_2)=f(x_0)-1$.

γ) Από τη σχέση (3) θα είναι $f'(\xi_1)\geq 2$ και $f'(\xi_2)\geq 2$ δηλαδή

$\dfrac{f(x_0)+1}{x_0}\geq 2\Leftrightarrow f(x_0)\geq 2x_0-1 \quad (4)$ και

$\dfrac{f(x_0)-1}{x_0-1}\geq 2 \overset{x_0-1<0}{\Leftrightarrow} f(x_0)-1\leq 2(x_0-1)\Leftrightarrow f(x_0)\leq 2x_0-1 \quad (5)$

Από $(4),(5)$ είναι $f(x_0)=2x_0-1$ για τυχαίο $x_0\in(0,1)$ άρα

$f(x)=2x-1,\ x\in(0,1)$ και αφού $f(0)=-1,\ f(1)=1$ τότε $f(x)=2x-1,$

$x\in[0,1]$.

101. α) Λόγω του ΘΕΤ υπάρχει $x_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=f(\beta)$ και λόγω του Θ.Rolle υπάρχει $x_0\in(x_1,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0.$

β) Έστω ότι $f(x)<f'(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x)=e^{-x}f(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι

$g'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)>0\Rightarrow g\nearrow[\alpha,\beta]$.

$x_0<\beta\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x_0)<g(\beta)\Leftrightarrow e^{-x_0}f(x_0)<e^{-\beta}f(\beta)\Leftrightarrow 0<0$ αδύνατο, άρα υπάρχει

$\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)\geq f'(\xi)$.

γ) Λόγω του ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right),\ \xi_2\in\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια, ώστε

$f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}>0,\ f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<0$ και λόγω του ΘΜΤ

για την f' υπάρχει $\rho\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\rho)=\dfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0$.

δ) Έστω $h(x)=f(x)+x^3-\alpha^3,\ x\in[\alpha,\beta]$. Είναι

$h(\alpha)=f(\alpha)+\alpha^3-\alpha^3=f(\alpha)<0,\ h(\beta)=f(\beta)+\beta^3-\alpha^3=\beta^3-\alpha^3>0,$ δηλαδή

$h(\alpha)h(\beta)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής, λόγω του Θ.Bolzano, η εξίσωση

$h(x)=0\Leftrightarrow f(x)+x^3-\alpha^3=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).

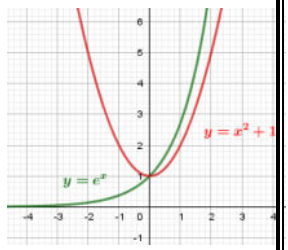
102. α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f(x)\geq e^x-x^2-\lambda x-1\Leftrightarrow f(x)-e^x+x^2+\lambda x+1\geq 0$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^x+x^2+\lambda x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $g(0)=0$, οπότε η σχέση (1) γίνεται: $g(x)\geq g(0)$ και συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=f'(x)-e^x+2x+\lambda$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι $g'(0)=0\Leftrightarrow\lambda=0$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x-x^2-1\leq f(x)\leq e^x-x^2-1\Leftrightarrow f(x)=e^x-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$

β) Είναι $f'(x)=e^x-2x$ και $f''(x)=e^x-2$.

$f''(x)\geq 0\Leftrightarrow e^x-2\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq 2\Leftrightarrow x\geq\ln 2$



Για κάθε $x<\ln 2$ είναι $f''(x)<0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $(-\infty,\ln 2]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>\ln 2$ είναι $f''(x)>0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $[\ln 2,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f' έχει ελάχιστο το $f'(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-\ln 4=\ln e^2-\ln 4>0$, άρα $f'(x)\geq f'(\ln 2)>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

γ) $e^x<x^2+1\Leftrightarrow e^x-x^2-1<0\Leftrightarrow f(x)<0\Leftrightarrow f(x)<f(0)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x<0$.

Δηλαδή η γραφική παράσταση της $y=e^x$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της $y=x^2+1$ στο διάστημα $(-\infty,0)$.

δ) Η εφαπτομένη της C_f στο $x=1$ έχει εξίσωση:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-(e-2)=(e-2)(x-1)\Leftrightarrow y=(e-2)x$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, άρα $f(x)>(e-2)x\Leftrightarrow e^x-x^2-1>ex-2x\Leftrightarrow$

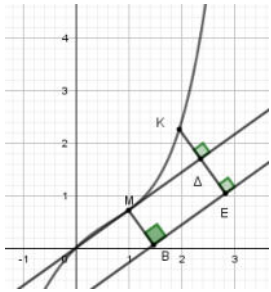
$$e^x-ex>x^2-2x+1\Leftrightarrow e\left(e^{x-1}-x\right)>(x-1)^2\overset{x>1}{\Leftrightarrow}e>\frac{(x-1)^2}{e^{x-1}-x}$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x\geq x+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, οπότε αντικαθιστώντας όπου x το $x-1$ προκύπτει ότι $e^{x-1}>x$ για κάθε $x>1$.

ε) Για κάθε $x\geq 1$ είναι $f(x)\geq(e-2)x>(e-2)x-1$.

Επειδή οι ευθείες $y=(e-2)x$ και $y=(e-2)x-1$ είναι παράλληλες, το σημείο της C_f που είναι πλησιέστερο στην ε είναι το $M(1,e-2)$.

Παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε σημείο Κ της C_f με τετμημένη μεγαλύτερη του 1 ισχύει ότι $(KE)=(K\Delta)+(\Delta E)>(\Delta E)=(MB)$, οπότε η ΜΒ είναι η μικρότερη απόσταση σημείου της C_f με την ευθεία ε. Η ελάχιστη απόσταση είναι η



$$(MB)=d(M,\varepsilon)=\frac{\left|e-2-(e-2)-1\right|}{\sqrt{1+(e-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{e^2-4e+5}}$$

2ος τρόπος

Έστω $M(x,f(x))$ σημείο της C_f. Η απόσταση του Μ από την ε είναι:

$$d(M,\varepsilon)=\frac{\left|(e-2)x-f(x)-1\right|}{\sqrt{1+(e-2)^2}}=\frac{f(x)+1-(e-2)x}{\sqrt{e^2-4e+5}}.$$

Έστω $d(x)=\frac{f(x)+1-(e-2)x}{\sqrt{e^2-4e+5}}=\frac{e^x-x^2-(e-2)x}{\sqrt{e^2-4e+5}}$, $x\geq 1$.

Είναι $d'(x)=\frac{e^x-x^2-(e-2)}{\sqrt{e^2-4e+5}}=\frac{1}{\sqrt{e^2-4e+5}}\left(e^x-2x-(e-2)\right)$,

$d''(x)=\frac{1}{\sqrt{e^2-4e+5}}(e^x-2)=\frac{1}{\sqrt{e^2-4e+5}}f''(x)$ για $x\geq 1$ άρα η d' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Για $x\geq 1 \overset{d'\nearrow}{\Leftrightarrow} d'(x)\geq d'(1)=0$, η d συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα η d είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Για $x\geq 1 \overset{d\nearrow}{\Leftrightarrow} d(x)\geq d(1)$ άρα η d παρουσιάζει ελάχιστο στο 1.

Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη στο x = 1, δηλαδή στο $M(1,e-2)$.

στ) i. Για κάθε $x\in[0,1)$ είναι $f(x)\geq 0$ και

$0\leq x<1\Rightarrow (e-2)x<e-2\Leftrightarrow (e-2)x-1<e-3<0$, άρα

$f(x)>(e-2)x-1$ για κάθε $x\in[0,1)$.

ii. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=(e-2)x-1$ έχει ακριβώς 1 ρίζα x_0 και $f'(x_0)\neq e-2=\lambda_\varepsilon$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\geq 0$ είναι

$f(x)>(e-2)x-1$. Έστω $\varphi(x)=e^x-x^2-1-(e-2)x+1$, $x\leq 0$.

Είναι $\varphi'(x)=e^x-2x-e+2$ και $\varphi''(x)=e^x-2=f''(x)$.

Για κάθε $x<0$ είναι $\varphi''(x)<0$ και επειδή η φ' είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, οπότε

$\varphi'(x)>\varphi'(0)=3-e>0\Rightarrow \varphi\nearrow(-\infty,0]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to=\infty}\left[e^x-x^2-(e-2)x\right]=0-\infty=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2-(e-2)x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$ και $\varphi(0)=1$. Επειδή η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta=(-\infty,0)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $\varphi(\Delta)=(-\infty,1)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $(-\infty,1)$, υπάρχει μοναδικό $x_0<0$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0$, οπότε η ε έχει μοναδικό κοινό σημείο με την C_f. Επειδή η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ είναι:

$x_0<0\Leftrightarrow f'(x_0)>f'(0)=1>e-2$, άρα

$f'(x_0)\neq\lambda_\varepsilon$ και η ε τέμνει την C_f στο x_0.

103. α) Έστω $\varphi(x)=\dfrac{e^{f(x)}+f(x)-1}{x}$, $x\neq0$ με $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=0$. Είναι

$e^{f(x)}+f(x)-1=x\varphi(x)$ και

$\lim\limits_{x\to0}\left[e^{f(x)}+f(x)-1\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[x\varphi(x)\right]\Leftrightarrow e^{f(0)}+f(0)-1=0$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $a(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $a(0)=0$. Είναι $a'(x)=e^x+1>0\Rightarrow a\nearrow\mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται

$a(f(0))=a(0)\Leftrightarrow f(0)=0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, το κρίσιμο σημείο της θα είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$, οπότε αρκεί $f'(0)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{f(x)}+f(x)-1}{x}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{f(x)}-1}{x}+\dfrac{f(x)}{x}\right)=0$ (2)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x= 0 είναι

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x)=e^{f(x)},\ x\in\mathbb{R}$. Η t είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $t'(x)=e^{f(x)}f'(x)$. Είναι

$t'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{t(x)-t(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{x}=e^{f(0)}f'(0)=f'(0)$.

Η σχέση (2) γίνεται: $f'(0)+f'(0)=0\Leftrightarrow2f'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)=0$, οπότε η f έχει κρίσιμο σημείο το x = 0.

β) Έστω $g(x)=f'(x)-f(x),\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=f''(x)-f'(x)<0\Rightarrow g\searrow\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\geq0$ είναι $g(x)\leq g(0)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)\leq0\Leftrightarrow f'(x)\leq f(x)$.

Για κάθε $x<0$ είναι $g(x)>g(0)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)>0\Leftrightarrow f'(x)>f(x)$.

γ) Είναι $f'(x)\le f(x)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)\le 0\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)\le 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{-x}f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι

$h'(x)=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)$

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)<f(x)\Rightarrow h'(x)<0$ και επειδή h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)>f(x)\Rightarrow h'(x)>0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$.

Για κάθε $x<0\overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}h(x)<h(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)<0\Leftrightarrow f(x)<0$ και

για κάθε $x>0\overset{h\searrow}{\Leftrightarrow}h(x)<h(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)<0\Leftrightarrow f(x)<0$.

δ) Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)<0\Rightarrow f''(x)<f'(x)<f(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$,είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

ε) Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο αυτό (υπάρχει το $f'(0)$), αν ήταν σημείο καμπής το Ο τότε $f''(0)=0$. Τότε όμως από τη σχέση $f''(x)<f'(x)$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, για $x=0$ προκύπτει $f''(0)<f'(0)\Leftrightarrow 0<0$ άτοπο.

Άρα η f δεν έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$.

104. α) Έστω $\varphi(x)=f'(x)-\ln x$, $x>0$. Είναι $\varphi(x)\neq 0$ και η φ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, οπότε η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Έστω ότι $\varphi(x)<0\Leftrightarrow f(x)<\ln x$ για κάθε $x>0$. Επειδή η f' είναι συνεχής στο $x=0$, ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\le\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\Leftrightarrow f(0)\le-\infty$ που είναι άτοπο, άρα $f'(x)>\ln x$ για κάθε $x>0$.

β) Επειδή η f έχει κρίσιμο σημείο το $x_0>0$ και είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, είναι $f''(x_0)=0$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε: $x_0>0\Leftrightarrow f'(x_0)>\ln x_0\Leftrightarrow\ln x_0<0\Leftrightarrow x_0<1$, άρα $0<x_0<1$.

γ) Για κάθε $0<x<x_0\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,x_0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x>x_0\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_0)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο στο x_0.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x(\ln x-1)-2$, $x\ge 1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$g'(x)=f'(x)-(\ln x-1)-x\cdot\frac{1}{x}=f'(x)-\ln x$.

Για κάθε $x>1$ είναι $g'(x)>0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>1$ είναι $g(x)>g(1)\Leftrightarrow$

$f(x)-x(\ln x-1)-2>f(1)+1-2=0\Leftrightarrow f(x)>x(\ln x-1)+2$.

ε) Για κάθε $x>1$ είναι $f(x)<f'(x)(x-1)+1\Leftrightarrow f(x)-1<f'(x)(x-1)\Leftrightarrow$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}<f'(x)$. Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[1,x]$, $x>1$, οπότε

υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Είναι

$1<\xi<x\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(1)}{x-1}<f'(x)$.

105. α) Είναι $e^{f(x)-x}=e^{-x}\left(1-f'(x)\right)\Leftrightarrow\frac{e^{f(x)-x}}{e^{-x}}=1-f'(x)$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\frac{e^{f(x)-x}}{e^{-x}}>0\Leftrightarrow1-f'(x)>0\Leftrightarrow f'(x)<1=\varepsilon\varphi45^{\circ}$.

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο της

$(x,f(x))$, τότε $\varepsilon\varphi\omega=f'(x)$, άρα $\varepsilon\varphi\omega<\varepsilon\varphi45^{\circ}\Leftrightarrow\omega<45^{\circ}$. Οπότε δεν μπορεί να υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία μεγαλύτερη από 45°.

β) $e^{f(x)-x}=e^{-x}\left(1-f'(x)\right)\Leftrightarrow\frac{1}{e^{-x}}=\frac{1-f'(x)}{e^{f(x)-x}}\Leftrightarrow e^{x}=\left(1-f'(x)\right)e^{x-f(x)}\Leftrightarrow$

$\left(e^{x-f(x)}\right)'=\left(e^{x}\right)'\Leftrightarrow e^{x-f(x)}=e^{x}+c,\ c\in\mathbb{R}$ (1)

Για $x=0$ είναι $e^{-f(0)}=1+c\Leftrightarrow2=1+c\Leftrightarrow c=1$, οπότε

$e^{x-f(x)}=e^{x}+1\Leftrightarrow x-f(x)=\ln\left(e^{x}+1\right)\Leftrightarrow x-\ln\left(e^{x}+1\right)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) $e^{f(2f'(x))}<e^{\ln\frac{e}{e+1}}\Leftrightarrow f\left(2f'(x)\right)<1-\ln(e+1)=f(1)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}2f'(x)<1$ (1)

Είναι $f'(x)=1-\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=\frac{1}{e^{x}+1}$, οπότε η (1) γίνεται

$2\frac{1}{e^{x}+1}<1\Leftrightarrow2<e^{x}+1\Leftrightarrow e^{x}>1\Leftrightarrow x>0$

δ) Είναι $f''(x)=-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}<0 \Rightarrow f' \searrow \mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{1}{0+1}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x+1}=0$.

Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f'(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\right)=(0,1)$.

Επειδή $\theta\in(0,\pi)$, είναι $0<\eta\mu\theta<1$, οπότε για κάθε $\theta\in(0,\pi)$, το ημθ ανήκει στο σύνολο τιμών της f, επομένως η εξίσωση $f'(x)=\eta\mu\theta$ έχει μοναδική λύση. Επειδή το θ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός του διαστήματος $(0,\pi)$, υπάρχουν άπειρες εξισώσεις $\eta\mu\theta=f'(x)$, οπότε η εξίσωση αυτή αληθεύει για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$.

ε) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-\ln\left(e^x+1\right)\right]=-\infty-0=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln\left(e^x+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to1}}{\overset{\frac{e^x}{e^x+1}=u}{=}}\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(-\infty,0)$, άρα $A_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=(-\infty,0)$.

$f(x)=y\Leftrightarrow x-\ln\left(e^x+1\right)=y\Leftrightarrow \ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)=y\Leftrightarrow \ln\dfrac{e^x}{e^x+1}=y\Leftrightarrow$

$\dfrac{e^x}{e^x+1}=e^y\Leftrightarrow e^x=e^ye^x+e^y\Leftrightarrow e^x-e^ye^x=e^y\Leftrightarrow e^x(1-e^y)=e^y\overset{y\in(0,1)}{\Leftrightarrow}$

$e^x=\dfrac{e^y}{1-e^y}>0\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{e^y}{1-e^y}$.

Άρα $f^{-1}(y)=\ln\dfrac{e^y}{1-e^y}$, $y\in(-\infty,0)$, οπότε $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{e^x}{1-e^x}$, $x\in(-\infty,0)$.

στ) Έστω $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)=\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}-\ln\dfrac{e^x}{1-e^x}\Leftrightarrow$

$g(x)=\ln\dfrac{\frac{\cancel{e^x}}{1-e^x}}{\frac{\cancel{e^x}}{e^x+1}}=\ln\dfrac{1-e^x}{e^x+1}$, $x\in(-\infty,0)$.

Είναι $\left[f(x)-f^{-1}(x)\right]^2=x^2 \Leftrightarrow g^2(x)=x^2 \Leftrightarrow |g(x)|=|x|$ και επειδή $x\in(-\infty,0)$, είναι $|g(x)|=-x$ (2). Είναι

$-e^x<e^x \Leftrightarrow 1-e^x<1+e^x \Leftrightarrow \frac{1-e^x}{1+e^x}<1 \Leftrightarrow \ln\frac{1-e^x}{1+e^x}<0 \Leftrightarrow g(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$, οπότε η (2)γίνεται: $-g(x)=-x \Leftrightarrow \ln\frac{1-e^x}{e^x+1}=x \Leftrightarrow \frac{1-e^x}{e^x+1}=e^x \Leftrightarrow$

$1-e^x=e^{2x}+e^x \Leftrightarrow e^{2x}+2e^x-1=0$ (3)

Θέτουμε $e^x=\omega>0$ και η (3) γίνεται $\omega^2+2\omega-1=0 \Leftrightarrow$

$\omega=\sqrt{2}+1$ ή $\omega=-\sqrt{2}-1$ απορρίπτεται. Άρα $e^x=\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow x=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)<0$

106. α) 1ος τρόπος

$2f'(x)+xf''(x)+\eta\mu x=0 \Leftrightarrow f'(x)+f'(x)+xf''(x)+\eta\mu x=0 \Leftrightarrow$

$\left(f(x)+xf'(x)-\sigma\upsilon\nu x\right)'=0 \Leftrightarrow f(x)+xf'(x)-\sigma\upsilon\nu x=c,\ c\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ είναι $f(0)+0\cdot f'(0)-\sigma\upsilon\nu 0=c \Leftrightarrow 1-1=c \Leftrightarrow c=0$,

άρα

$f(x)+xf'(x)-\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \left(xf(x)-\eta\mu x\right)'=0 \Leftrightarrow xf(x)-\eta\mu x=c',\ c'\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ είναι $c'=0$ οπότε $xf(x)-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow xf(x)=\eta\mu x \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ είναι και συνεχής σ' αυτό, οπότε

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.

2ος τρόπος: $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow xf(x)=\eta\mu x \Leftrightarrow xf(x)-\eta\mu x=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=xf(x)-\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $h'(x)=f(x)+xf'(x)-\sigma\upsilon\nu x$ και

$h''(x)=f'(x)+f'(x)+xf''(x)+\eta\mu x \Leftrightarrow$

$h''(x)=2f'(x)+xf''(x)+\eta\mu x=0 \Leftrightarrow h'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$.

Είναι $h'(0)=c \Leftrightarrow f(0)-\sigma\upsilon\nu 0=c \Leftrightarrow c=0$, άρα $h'(x)=0 \Leftrightarrow h(x)=c',\ c'\in\mathbb{R}$.

Είναι $h(0)=0 \Leftrightarrow c'=0$ οπότε $h(x)=0 \Leftrightarrow xf(x)-\eta\mu x=0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ είναι και συνεχής σ' αυτό, οπότε

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.

β) Για κάθε $x \in (-\pi,0)$ είναι $\eta\mu x < 0,\ x < 0$, άρα $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x} > 0$.

Για κάθε $x \in (0,\pi)$ είναι $\eta\mu x > 0,\ x > 0$, άρα $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x} > 0$.Επειδή $f(0) = 1 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\pi,\pi)$.

γ) Για κάθε $x \in A_f = \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(-x) = \dfrac{\eta\mu(-x)}{-x} = \dfrac{-\eta\mu x}{-x} = \dfrac{\eta\mu x}{x} = f(x)$, οπότε η f είναι άρτια. Έστω $\alpha > 0$. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$.

Επειδή $f(-\alpha) = f(\alpha)$ εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[-\alpha,\alpha]$.

δ) $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu x}{x} = 2 - \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \eta\mu x = 2x - 1 \Leftrightarrow \eta\mu x - 2x + 1 = 0$.

Έστω $t(x) = \eta\mu x - 2x + 1,\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Είναι

$t(0) = 1,\ t\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\dfrac{\pi}{2} - 2\cdot\dfrac{\pi}{2} + 1 = 2 - \pi < 0$, οπότε $t(0)t\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$. Επειδή η t είναι συνεχής στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $t(\rho_1) = 0$. Έστω ότι η t έχει και δεύτερη ρίζα $\rho_2 \neq \rho_1$. Η t είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ή $[\rho_2,\rho_1]$, και παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) ή (ρ_2,ρ_1) με $t'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 2$.

Επειδή $t(\rho_1) = t(\rho_2)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\rho_3 \in (\rho_1,\rho_2)$ ή (ρ_2,ρ_1) τέτοιο, ώστε $t'(\rho_3) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\rho_3 - 2 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\rho_3 = 2$ αδύνατο. Άρα η t έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

ε) Για $x \neq 0$ είναι $g(x) = xf(x) = \cancel{x}\dfrac{\eta\mu x}{\cancel{x}} = \eta\mu x$ και για $x = 0$ είναι

$g(0) = 0\cdot f(0) = 0$, άρα $g(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \eta\mu x,\ x \in \mathbb{R}$. Έστω $x_1 < x_2$.

Η g είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $g'(x) = \sigma\upsilon\nu x$, οπότε από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$g'(\xi)=\dfrac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$ (1). Γνωρίζουμε ότι ισχύει : $|συνξ|\le 1$, άρα

$|g'(\xi)|\le 1\Leftrightarrow\left|\dfrac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}\right|\le 1\Leftrightarrow\dfrac{|g(x_1)-g(x_2)|}{|x_1-x_2|}\le 1\Leftrightarrow|g(x_1)-g(x_2)|\le|x_1-x_2|$.

Ομοίως αν $x_2<x_1$. Τέλος αν $x_1=x_2$,τότε ισχύει η ισότητα

$|ημx_1-ημx_1|=|x_1-x_1|$.

στ) $g\left(\dfrac{x}{2}\right)=x\Leftrightarrow ημ\dfrac{x}{2}-x=0$. Έστω $\varphi(x)=ημ\dfrac{x}{2}-x,\ x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $\varphi(0)=ημ0-0=0$. Έστω ότι η φ έχει και άλλη ρίζα $\rho\neq 0$.

Η φ είναι συνεχής στο $[0,\rho]$ ή $[\rho,0]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,\rho)$ ή $(\rho,0)$ με

$\varphi'(x)=συν\dfrac{x}{2}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)'-1=\dfrac{1}{2}συν\dfrac{x}{2}-1$.

Επειδή $\varphi(0)=\varphi(\rho)$ σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi\in(0,\rho)$ ή $(\rho,0)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}συν\dfrac{\xi}{2}-1=0\Leftrightarrow συν\dfrac{\xi}{2}=2$ αδύνατο.

Άρα η φ δεν έχει άλλη ρίζα, οπότε η x = 0 είναι η μοναδική της ρίζα.

ζ) $g\left(\dfrac{7\pi}{18}\right)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{36}\Leftrightarrow ημ\dfrac{7\pi}{18}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{36}\Leftrightarrow ημ\dfrac{7\pi}{18}-ημ\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{36}\Leftrightarrow$

$ημ\dfrac{7\pi}{18}-ημ\dfrac{6\pi}{18}<\dfrac{\pi}{36}$. Η g είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{6\pi}{18},\dfrac{7\pi}{18}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\dfrac{6\pi}{18},\dfrac{7\pi}{18}\right)$, με $g'(x)=συνx$, οπότε λόγω του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in\left(\dfrac{6\pi}{18},\dfrac{7\pi}{18}\right)$

τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f\left(\dfrac{7\pi}{18}\right)-f\left(\dfrac{6\pi}{18}\right)}{\dfrac{7\pi}{18}-\dfrac{6\pi}{18}}\Leftrightarrow συνξ=\dfrac{ημ\dfrac{7\pi}{18}-ημ\dfrac{6\pi}{18}}{\dfrac{\pi}{18}}$.

Είναι $\dfrac{6\pi}{18}<\xi<\dfrac{7\pi}{18}$ και η συνάρτηση $συνx$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

$\left[\dfrac{6\pi}{18},\dfrac{7\pi}{18}\right]\subseteq\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, οπότε: $συν\dfrac{6\pi}{18}>συνξ>συν\dfrac{7\pi}{18}$.

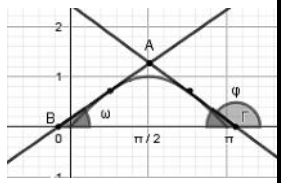
Άρα, $συνξ < συν\frac{6\pi}{18} \Leftrightarrow \frac{ημ\frac{7\pi}{18} - ημ\frac{6\pi}{18}}{\frac{\pi}{18}} < συν\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow ημ\frac{7\pi}{18} - ημ\frac{6\pi}{18} < \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{36}$.

η) i. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη $x_1, x_2 \in (0,\pi)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)+f'(x_2)=0$. Είναι $f'(x)=συνx$. Επειδή για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x)>0$, ενώ για $x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ είναι $f'(x)<0$, θα είναι $0 < x_1 < \frac{\pi}{2} < x_2 < \pi$.

Είναι $f'(x_2) = -f'(x_1) \Leftrightarrow συνx_2 = -συνx_1 = συν(\pi - x_1) \Leftrightarrow x_2 = \pi - x_1$

Άρα για κάθε $x_1 \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ οι εφαπτομένες της C_k στο $x = x_1$ και στο $x = \pi - x_1$ έχουν αντίθετες κλίσεις.

ii. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_k στο x_1 με τον άξονα x΄x και φ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_k στο $x_2 = \pi - x_1$ με τον άξονα x΄x .Είναι $k'(x_1) = εφω$ και $k'(x_2) = εφφ$



Έστω ότι οι εφαπτομένες τέμνονται στο Α. Είναι $k'(x_2) = -k'(x_1) \Leftrightarrow εφφ = -εφω = εφ(180° - φ) \Leftrightarrow$ $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

107. α) $f'(x)f(x) - f(x) = x\left(f'(x) + 3x^4 - 1\right) \Leftrightarrow$

$f'(x)f(x) - f(x) = xf'(x) + 3x^5 - x \Leftrightarrow$

$f'(x)f(x) - f(x) - xf'(x) = 3x^5 - x^2 \Rightarrow$

$\left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)' - \left(f(x) + xf'(x)\right) = \left(\frac{3}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^2\right)' \Leftrightarrow$

$\left(\frac{1}{2}f^2(x) - xf(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^2\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{2}f^2(x) - xf(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^2 + c,\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$f^2(x) - 2xf(x) = x^6 - x^2 + 2c$. Για $x = 2$ είναι $f^2(2) - 4f(2) = 64 - 4 + 2c \Leftrightarrow$

$100 - 40 = 60 + 2c \Leftrightarrow c = 0$ άρα

$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^6 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^6 \Leftrightarrow |f(x) - x| = |x^3|$ (1).

Είναι $|x^3| > 0$ για κάθε $x \neq 0$, άρα και $h(x) = f(x) - x \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Επειδή η h είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα

διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$. Είναι $h(2)=f(2)-2=8>0$ άρα $h(x)>0$ για κάθε $x>0$ και η (1) γίνεται: $f(x)-x=x^3 \Leftrightarrow f(x)=x^3+x,\ x>0$.

Είναι $h(-2)=f(-2)+2=-f(2)+2=-8<0$ άρα $h(x)<0$ για κάθε $x<0$ και η (1) γίνεται: $-f(x)+x=-x^3 \Leftrightarrow f(x)=x^3+x,\ x<0$.

Από τη σχέση (1) για $x=0$ προκύπτει ότι $f(0)=0$, οπότε $f(x)=x^3+x,\ x\in\mathbb{R}$.

β) $x^4+1+f(x)=4x \Leftrightarrow$

1	1	0	-3	1	1
	1	2	2	-1	
1	2	2	-1	0	

$x^4+1+x^3+x-4x=0 \Leftrightarrow$

$x^4+x^3-3x+1=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x^3+2x^2+2x-1)=0 \Leftrightarrow$

$x=1$ ή $x^3+2x^2+2x-1=0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=x^3+2x^2+2x-1,\ x\in[0,1]$.

Είναι $\varphi(0)=-1,\ \varphi(1)=4,$ δηλαδή $\varphi(0)\varphi(1)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής ως πολυωνυμική, σύμφωνα με το Θ.Bolzano, η εξίσωση $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow x^3+2x^2+2x-1=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $\varphi'(x)=3x^3+4x+2$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $\varphi'(x)>0$ άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

γ) $(x^3+x)^3+x^3+x-10=0 \Leftrightarrow f^3(x)+f(x)=10 \Leftrightarrow f(f(x))=f(2)$ (2)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2+1$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και 1-1, οπότε η (2) γίνεται: $f(x)=2 \Leftrightarrow f(x)=f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

δ) Επειδή η f είναι 1-1 αντιστρέφεται. Επειδή $f(1)=2$ είναι $1=f^{-1}(2)$.

Είναι $f^{-1}(f(x))=x \Rightarrow (f^{-1}(x^3+x))'=(x)' \Rightarrow (f^{-1})'(x^3+x)(3x^2+1)=1$.

Για $x=1$ είναι $(f^{-1})'(2)\cdot 4=1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(2)=\frac{1}{4}$.

Η εφαπτομένη **(ε)** της $C_{f^{-1}}$ στο $x=2$ είναι η ευθεία ε:

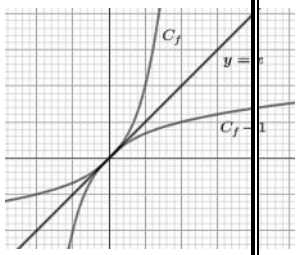
$$y-f^{-1}(2)=(f^{-1})'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-1=\frac{1}{4}(x-2) \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$$

ε) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y=x$. Είναι $f(x)=x \Leftrightarrow x^3+x=x \Leftrightarrow x^3=0 \Leftrightarrow x=0$.

Επειδή $f(0)=0$ είναι και $f^{-1}(0)=0$ άρα κοινό σημείο των $C_f, C_{f^{-1}}$ το $O(0,0)$. Θα δείξουμε τώρα ότι το σημείο αυτό είναι μοναδικό.

Έστω $M(\alpha,\beta)$ κοινό σημείο των C_f , $C_{f^{-1}}$, τότε $f(\alpha)=f^{-1}(\alpha)=\beta$. Αν $f(\alpha)>\alpha$ τότε και $f^{-1}(\alpha)>\alpha$ αλλά επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f\left(f^{-1}(\alpha)\right)>f(\alpha)\Leftrightarrow \alpha>f(\alpha)$ που είναι άτοπο. Όμοια αν $f(\alpha)<\alpha$ ισχύει: $f^{-1}(\alpha)<\alpha\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(\alpha)\right)<f(\alpha)\Leftrightarrow \alpha<f(\alpha)$ που είναι άτοπο.

Οπότε τελικά $f(\alpha)=\alpha$ και το M ανήκει στην ευθεία $y=x$. Όμως μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία $y=x$ είναι το O, άρα το O είναι το μοναδικό κοινό σημείο των $C_f, C_{f^{-1}}$.



στ) σχήμα

ζ) $g^3(x)-e^{3x}=e^x-g(x)\Leftrightarrow$

$g^3(x)+g(x)=e^{3x}+e^x\Leftrightarrow$

$f\left(g(x)\right)=f\left(e^x\right)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} g(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$

η) $f(x)+126x=6g(x)-3x^2\Leftrightarrow x^3+3x^2+x+126x=6e^x\Leftrightarrow$

$x^3+3x^2+127x-6e^x=0$.

Έστω $h(x)=x^3+3x^2+127x-6e^x,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι

$h'(x)=3x^2+6x+127-6e^x,\ h''(x)=6x+6-6e^x$ και $h^{(3)}(x)=6-6e^x$.

Για κάθε $x>0$ είναι $h^{(3)}(x)<0$ άρα $h''\searrow[0,+\infty)$ και για κάθε $x<0$ είναι $h^{(3)}(x)>0$ άρα $h''\nearrow(-\infty,0]$. Η h'' έχει μέγιστο το $h''(0)=0$ άρα $h''(x)<0$ για κάθε $x\neq 0$ και επειδή η h' είναι συνεχής στο $x=0$, η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}3x^2+6x+127=\lim\limits_{x\to-\infty}3x^2=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}h'(x)=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}h'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(3+\frac{6}{x}+\frac{127}{x^2}-6\frac{e^x}{x^2}\right)\right]=+\infty(-\infty)=-\infty \text{ γιατί}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$. Επειδή η h' είναι συνεχής έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ οπότε υπάρχει μοναδικός ρ τέτοιος ώστε $h'(\rho)=0$.

Για κάθε $x<\rho$ είναι $h'(x)>h'(\rho)=0\Rightarrow h\nearrow(-\infty,\rho]$ και για κάθε $x>\rho$ είναι

$h'(x)<h'(\rho)=0\Rightarrow h\searrow[\rho,+\infty)$, οπότε η h έχει μέγιστο στο ρ. Παρατηρούμε ότι $h'(1)=136-6e>0,\ h'(2)=151-6e^2>0,\ h'(3)=172-6e^3>0,$ $h'(4)=199-6e^4<199-6\cdot 2,5^4=199-6\cdot 6,25\cdot 6,25=199-37,5\cdot 6,25<0$.

Άρα $3<\rho<4$.Είναι $h'(\rho)=3\rho^2+6\rho+1-6e^{\rho}=0\Leftrightarrow 6e^{\rho}=3\rho^2+6\rho+1$, άρα $h(\rho)=\rho^3+3\rho^2+127\rho-3\rho^2-6\rho-1=\rho^3+121\rho-1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(\rho)=\rho^3+121\rho-1,\ \rho>1$. Είναι $\alpha'(\rho)=3\rho^2+121>0$. Άρα η α είναι γνησίως αύξουσα.

$3<\rho<4\Rightarrow\alpha(3)<\alpha(\rho)<\alpha(4)\Rightarrow 390<\alpha(\rho)$, άρα $h(\rho)>0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x^2+127x-6e^x\right)=-\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{127}{x^2}-6\frac{e^x}{x^3}\right)\right]=+\infty(-\infty)=-\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty .$$

Στο $\Delta_1=(-\infty,\rho)$ η h έχει σύνολο τιμών το $h(\Delta_1)=\left(-\infty,h(\rho)\right)$ και στο $\Delta_2=[\rho,+\infty)$ η h έχει σύνολο τιμών το $h(\Delta_2)=\left(-\infty,h(\rho)\right]$. Επειδή το 0 ανήκει και στα δύο διαστήματα, η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

θ) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\eta\mu x}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+x}{x^3}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1\cdot 0=0 \text{ γιατί}$$

για κάθε $x>0$ είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$, οπότε από το Κ.Π. είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.

ι) $g\left(x^2+\lambda x\right)\ge f(x)+1\Leftrightarrow e^{x^2+\lambda x}-x^3-x-1\ge 0$ (3).

Έστω $b(x)=e^{x^2+\lambda x}-x^3-x-1,\ x\in\mathbb{R}$, τότε η (3) γίνεται $b(x)\ge b(0)$, δηλαδή η b έχει ελάχιστο στο $x=0$ που είναι στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η b είναι παραγωγίσιμη με $b'(x)=(2x+\lambda)e^{x^2+\lambda x}-3x^2-1$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $b'(0)=0\Leftrightarrow\lambda=1$

108. α) Θα δείξουμε ότι για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι $f'(x_1)<f'(x_2)$. Θεωρούμε τις εφαπτόμενες της C_f στα x_1,x_2 .

$\varepsilon_1 : y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ και

$\varepsilon_2 : y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$

Επειδή η f βρίσκεται πάνω από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εκτός του σημείου επαφής τους, ισχύει ότι $f(x) \geq f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ (1) και $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$ (2)

Η (1) για $x = x_2$ γίνεται:

$$f(x_2) > f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) \overset{x_1 < x_2}{\Leftrightarrow} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > f'(x_1) \quad (3)$$

Η (2) για $x = x_1$ γίνεται: $f(x_1) > f'(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow$

$$f(x_1) - f(x_2) > f'(x_2)(x_1 - x_2) \overset{x_1 < x_2}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < f'(x_2) \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'(x_2) \quad (4)$$

Από τις (3),(4) $\Rightarrow$ $f'(x_1) < f'(x_2) \Leftrightarrow f' \nearrow [0, +\infty) \Leftrightarrow f \cup [0, +\infty)$

β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x}$. Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0, x]$, $x > 0$, οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (0, x)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x}$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $0 < \xi_1 < x \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow$

$f(x) < xf'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) > 0$, άρα $g'(x) > 0$ και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) Για κάθε $1 \leq x \leq 2$ είναι $g(1) \leq g(x) \leq g(2) \Leftrightarrow$

$$f(1) \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(2)}{2} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 4 \Leftrightarrow x \leq f(x) \leq 4x \quad (1).$$

δ) Έστω ότι τα σημεία

$A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ με $x_1 < x_2 < x_3$ είναι συνευθειακά,

τότε $AB // B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f, υπάρχουν $\xi_2 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_3 \in (x_2, x_3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ και $f'(\xi_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$. Άρα

$f'(\xi_2) = f'(\xi_3)$ και επειδή η f' είναι 1-1 (αφού είναι γνησίως αύξουσα ως κυρτή)

είναι $\xi_2 = \xi_3$ που είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχουν τρία σημεία της C_f που να είναι συνευθειακά.

ε) 1ος τρόπος: Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, x]$, $x \in (\alpha, \beta]$ υπάρχει $\xi_5 \in (\alpha, x) : f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$.

Επειδή $\xi < x < \beta$ και $f' \nearrow$ έχουμε: $f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < f'(\beta) \Leftrightarrow$ $f(x) - f(\alpha) < f'(\beta)(x - \alpha)$. Αν $x = \alpha$ ισχύει η ισότητα. Οπότε για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $f(x) - f(\alpha) \le f'(\beta)(x - \alpha)$

2ος τρόπος: $f(x) - f(\alpha) \le f'(\beta)(x - \alpha) \Leftrightarrow f(x) - f(\alpha) - f'(\beta)(x - \alpha) \le 0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - f(\alpha) - f'(\beta)(x - \alpha)$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $h'(x) = f'(x) - f'(\beta)$.

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα διαδοχικά έχουμε:
$\alpha < x < \beta \Rightarrow f'(x) < f'(\beta) \Leftrightarrow f'(x) - f'(\beta) < 0$ άρα $h'(x) < 0$ και h γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.

Για κάθε $\alpha \le x \le \beta$ είναι $h(\alpha) \ge h(x) \Leftrightarrow 0 \ge f(x) - f(\alpha) - f'(\beta)(x - \alpha)$.

στ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi_5 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_5) = f(1) - f(0) = 1$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x = \xi_5$ έχει εξίσωση $y - f(\xi_5) = f'(\xi_5)(x - \xi_5) \Leftrightarrow y = x - \xi_5 + f(\xi_5)$.

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο $[0, +\infty)$, οπότε $f(x) \ge x - \xi_5 + f(\xi_5)$ για κάθε $x \ge 0$.

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \xi_5 + f(\xi_5)) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.

ζ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[x, x+1]$, οπότε υπάρχει $\xi_6 \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_6) = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{x + 1 - x} = f(x+1) - f(x)$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα έχουμε: $x < \xi_6 < x + 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi_6) < f'(x+1) \Leftrightarrow$ $f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$.

η) 1ος τρόπος: $(g(x) - x^2)(g(x) + x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow$
$(g(x) - x^2)(g(x) + x^2) + 2(g(x) - x^2) = 0 \Leftrightarrow$

$g^2(x)-x^4+2g(x)-2x^2=0 \Leftrightarrow g^2(x)-2g(x)+1=x^4+2x^2+1 \Leftrightarrow$

$(g(x)+1)^2=(x^2+1)^2$ (3)

Επειδή $(x^2+1)^2>0$ για κάθε $x>0$ είναι $(g(x)+1)^2>0 \Leftrightarrow g(x)+1\neq 0$.

Η συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)+1,\ x>0$ είναι συνεχής και $\varphi(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$

και $\varphi(2)=g(2)+1=\dfrac{f(2)}{2}+1=5>0$, άρα $\varphi(x)>0$ για κάθε $x>0$, οπότε η

(3) γίνεται: $g(x)+1=x^2+1 \Leftrightarrow g(x)=x^2 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}=x^2 \Leftrightarrow f(x)=x^3,\ x>0$.

Άρα $f(x)=\begin{cases} x^3,\ x>0 \\ 0,\ x=0 \end{cases}$. Επειδή ο τύπος $y=x^3$ ικανοποιεί και το $(0,f(0))$,

τελικά $f(x)=x^3,\ x\geq 0$.

2ος τρόπος: Επειδή $(g(x)-x^2)(g(x)+x^2+2)=0$ (3) οι τιμές της g θα είναι της μορφής $g(x)=x^2$ ή $g(x)=-x^2-2$.

Έστω ότι υπάρχει $x_1\in\mathbb{R}$ για το οποίο $g(x_1)=x_1^2\geq 0$ και $x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_2)=-x_2^2-2\leq -2$. Τότε επειδή η g είναι συνεχής και $g(x_1)<-1<g(x_2)$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=-1$. Τότε για $x=x_0$ η σχέση (3) γίνεται

$(g(x_0)-x_0^2)(g(x_0)+x_0^2+2)=0 \Leftrightarrow (-1-x_0^2)(-1+x_0^2+2)=0 \Leftrightarrow -(x_0^2+1)^2=0$

αδύνατη. Άρα $g(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$ ή $g(x)=-x^2-2, x\in\mathbb{R}$. Επειδή $g(1)=1$ είναι $g(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$.

109. α) Έστω ότι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε επειδή η f' είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε η f είναι γνησίως μονότονη. Τότε όμως επειδή είναι συνεχής θα έχει σύνολο τιμών το:

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(+\infty,+\infty)$ που είναι αδύνατο. Άρα υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$, δηλαδή η f έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο.Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε το x_0 είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

β) Για κάθε $x>x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_0)=0 \Rightarrow f\nearrow[x_0,+\infty)$ και για κάθε $x<x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_0)=0 \Rightarrow f\searrow(-\infty,x_0]$, οπότε η f έχει ελάχιστο στο x_0 .

γ) Επειδή η ε είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=5$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x-5\right)=0$.

Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το $f'(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)$. Επειδή το $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ υπάρχει, ισχύει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to+\infty}f'(x),\ \text{άρα}\ \lim_{x\to+\infty}f'(x)=2.$$

$$5=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{f(x)}{x}-2\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-2}{\dfrac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^{\cancel{2}}}}{-\dfrac{1}{x^{\cancel{2}}}}=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-xf'(x)\right)$$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+3x-xe^{-x}}{xf(x)-2x^2+\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(\dfrac{f(x)}{x}+3-e^{-x}\right)}{\cancel{x}\left(f(x)-2x+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)}=\dfrac{2+3-0}{5+0}=1$ γιατί για

$x>0$ είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{x}\le\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)$,

οπότε από Κ.Π είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

ε) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$. Είναι

$x<\xi<x+1\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(\xi)<f'(x+1)\Leftrightarrow f'(x)<f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x+1)\overset{x+1=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}f'(u)=2$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=2$.

στ) Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει σύνολο τιμών το $f'(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x),2\right)$, άρα $f'(x)<2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-2x-5,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=f'(x)-2<0\Rightarrow g\searrow\mathbb{R}$. Επειδή

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x-5\right)=0$ η

g έχει σύνολο τιμών το $g(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}g(x),\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right)=\left(0,\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right)$, άρα

$g(x)>0\Leftrightarrow f(x)-2x-5>0\Leftrightarrow f(x)>2x+5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ζ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x-5\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(-x)-2x-5\right)=0$ (1)

Θέτουμε $-x=u$. Όταν $x\to+\infty$ τότε $u\to-\infty$ και η (1) γίνεται:

$\lim\limits_{u\to-\infty}\left(f(u)+2u-5\right)=0$ ή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x-5\right)=0$, άρα η ευθεία $y=-2x+5$

είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

η) Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα

$\left(f(-x)\right)'=f'(x)\Rightarrow -f'(-x)=f'(x)$ και για $x=0$ είναι

$-f'(0)=f'(0)\Leftrightarrow 2f'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)=0$, άρα το κρίσιμο σημείο της f είναι το

$x_0=0$. Επειδή η f από το σκέλος 2 έχει ελάχιστο στο $x_0=0$, ισχύει ότι

$f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

θ) $h(x)=f(x)-x\ln x,\ x\geq 1$. Είναι $h(1)=f(1)>2\cdot 1+5=7>0$ (είναι

$f(x)>2x+5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$) και

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{f(x)}{x}-\ln x\right)\right]=+\infty(2-\infty)=-\infty$$

οπότε υπάρχει $\alpha>1$ όπου ο α είναι πολύ μεγάλος αριθμός, τέτοιος ώστε

$h(\alpha)<0$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $[1,\alpha]$, σύμφωνα με το Θ.Bolzano η

εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x\ln x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα μεγαλύτερη από

το 1.

ι) Επειδή η $y=-2x+5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ ισχύει ότι

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$. Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f'(x)}{1}$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-2$.

Από το σκέλος 6 η f' έχει σύνολο τιμών το

$f'(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x),2\right)=(-2,2)$, άρα $-2<f'(x)<2\Leftrightarrow|f'(x)|<2$ για κάθε

$x\in\mathbb{R}$.Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχει $\xi_1\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-6\ .$$

Είναι $\left|f'(\xi_1)\right|<2\Leftrightarrow\left|f(1)-6\right|<2\Leftrightarrow 4<f(1)<8$. Όμως από το 6ο ερώτημα είναι $f(1)>7$, άρα $7<f(1)<8$.

110. α) Για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ είναι $\left|f(x)\right|=\sqrt{x\eta\mu x}$ (1). Για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f^2(x)=0\Leftrightarrow x\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=0$ ή $\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=0$. Για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f^2(x)>0\Leftrightarrow f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ και $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Επειδή $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, οπότε η (1) γίνεται $f(x)=\sqrt{x\eta\mu x}$. Επειδή η f είναι άρτια, ισχύει ότι $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}>0$, οπότε η (1) γίνεται $f(x)=\sqrt{x\eta\mu x}$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$.

Άρα $f(x)=\sqrt{x\eta\mu x}$ για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ και επειδή $f(0)=0=\sqrt{0\cdot\eta\mu 0}$, είναι $f(x)=\sqrt{x\eta\mu x}$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

β) Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=\frac{(x\eta\mu x)'}{2\sqrt{x\eta\mu x}}=\frac{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x\eta\mu x}}$.

Στο $x=-\frac{\pi}{2}$ είναι $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\frac{f(x)-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{x+\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sqrt{x\eta\mu x}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{x+\frac{\pi}{2}}\overset{\text{DLH}}{=}\left(\frac{0}{0}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\frac{\frac{\eta\mu x+x\eta\mu x}{2\sqrt{x\eta\mu x}}}{1}=\frac{-1+\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}(\pi-2)}{2\sqrt{2}}$ Στο $x=\frac{\pi}{2}$ είναι

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sqrt{x\eta\mu x}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{x-\frac{\pi}{2}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\eta\mu x+x\eta\mu x}{2\sqrt{x\eta\mu x}}}{1}=\frac{1+\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}(\pi+2)}{2\sqrt{2}}$$

Στο x = 0 είναι

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x\eta\mu x}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x\eta\mu x}}{-\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to0^-}\left(-\sqrt{\frac{x\eta\mu x}{x^2}}\right)=-1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x\eta\mu x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x\eta\mu x}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to0^-}\sqrt{\frac{x\eta\mu x}{x^2}}=1,$$ οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x = 0.

γ) Είναι $f'(x)=\frac{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x\eta\mu x}}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\eta\mu x>0$, $x>0$, $\sigma\upsilon\nu x>0$, $\sqrt{x\eta\mu x}>0$, άρα

$f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ είναι

$\eta\mu x<0$, $x<0$, $\sigma\upsilon\nu x>0$, $x\sigma\upsilon\nu x<0$, $\sqrt{x\eta\mu x}>0$, άρα $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$ και τοπικά μέγιστα τα

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

δ) $E=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\eta\mu x\,dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx=-\left[x\sigma\upsilon\nu x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu x\,dx=\left[\eta\mu x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=2$

ε) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(x)\,dx\le1+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(x)\,dx\le2+\pi\Leftrightarrow$

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f^2(x)\,dx-2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(x)\,dx+\pi\ge0\Leftrightarrow\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(f^2(x)-2f(x)\right)dx+\pi\ge0\Leftrightarrow$

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(f^2(x)-2f(x)+1-1\right)dx+\pi\ge0\Leftrightarrow$

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(f(x)-1\right)^2dx-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1dx+\pi\ge0\Leftrightarrow$

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(f(x)-1\right)^2dx-\pi+\pi\ge0\Leftrightarrow\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(f(x)-1\right)^2dx\ge0$ ισχύει αφού

$\left(f(x)-1\right)^2 \geq 0$

111. α) Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα.
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και έχει ακρότατο στο x = 1 εφαρμόζεται το θεώρημα Fermat, οπότε $f'(1)=0$. Για κάθε $x<1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(1)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(1)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο στο Α.

β) Για $x = 1$ είναι $f'(1)(1-1)\geq f(1) \Leftrightarrow 0 \geq f(1)$ και ισχύει η ισότητα.

Για $x > 1$ είναι $f'(x)(x-1)\geq f(x) \Leftrightarrow f'(x)\geq \dfrac{f(x)}{x-1} \Leftrightarrow f'(x)\geq \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[1,x]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Είναι

$1<\xi<x \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi)<f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<f'(x)$.

Για $x < 1$ είναι $f'(x)(x-1)\geq f(x) \Leftrightarrow f'(x)\leq \dfrac{f(x)}{x-1} \Leftrightarrow f'(x)\leq \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[x,1]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(x,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x}=\dfrac{-(f(x)-f(1))}{-(x-1)}=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Είναι $x<\xi<1 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi)>f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>f'(x)$.

γ) Για κάθε $x\neq 1$ η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\dfrac{f'(x)(x-1)-f(x)}{(x-1)^2}$

Από το προηγούμενο σκέλος είναι $f'(x)(x-1)>f(x)$ για κάθε $x\neq 1$, άρα $g'(x)>0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

δ) Για κάθε $x>1$: $xf(x)<(x-1)f(x+1) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x-1}<\dfrac{f(x+1)}{x} \Leftrightarrow$

$g(x)<g(x+1) \overset{g\nearrow(1,+\infty)}{\Leftrightarrow} x<x+1$ ισχύει

ε) $(3\rho-5)f(2\rho)=(\rho^2-3)f(3\rho) \Leftrightarrow (3\rho-5)f(2\rho)-(\rho^2-3)f(3\rho)=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=(3x-5)f(2x)-(x^2-3)f(3x),\ x\in[1,2]$.

Είναι $h(1)=-2f(2)+2f(3)=2(f(3)-f(2))$.

Είναι $2<3 \overset{f\nearrow(1,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(2)<f(3)\Leftrightarrow f(3)-f(2)>0\Leftrightarrow h(1)>0$

Είναι $h(2)=f(4)-f(6)<0$ γιατί $4<6 \overset{f\nearrow(1,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(4)<f(6)\Leftrightarrow f(4)-f(6)<0$.

Επειδή $h(1)h(2)<0$ και η h είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho)=0\Leftrightarrow(3\rho-5)f(2\rho)=(\rho^2-3)f(3\rho)$

112. α) Έστω $\varphi(x)=g(x)-xh(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Είναι

$\varphi'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x=x\eta\mu x$.

Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\varphi'(x)>0$ και για $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ είναι $\eta\mu x<0\Rightarrow x\eta\mu x>0$

άρα $\varphi'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ είναι $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)\le\varphi(x)\le\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow-1\le\varphi(x)\le1\Leftrightarrow|\varphi(x)|\le1$.

β) $\beta g(\alpha)>\alpha g(\beta)\Leftrightarrow\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}>\frac{\eta\mu\beta}{\beta}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x)=\frac{\eta\mu x}{x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο: $t'(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}=\frac{-\varphi(x)}{x^2}$.

Για κάθε $0<x<\frac{\pi}{2}$ είναι $\varphi(x)>\varphi(0)=0\Rightarrow t(x)<0\Rightarrow t\searrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Είναι $\alpha<\beta\Leftrightarrow t(\alpha)>t(\beta)\Leftrightarrow\frac{\eta\mu\alpha}{\alpha}>\frac{\eta\mu\beta}{\beta}\Leftrightarrow\beta\eta\mu\alpha>\alpha\eta\mu\beta$.

γ) Έχουμε

$$D_{g\circ h}=\{x\in D_h/\ h(x)\in D_g\}=\left\{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]/\ \sigma\upsilon\nu x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}\overset{-1\le\sigma\upsilon\nu x\le1}{=}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

και επίσης

$$D_{h\circ g}=\left\{x\in D_g/\,g(x)\in D_h\right\}=\left\{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]/\,\eta\mu x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}\overset{-1\le\eta\mu x\le1}{=}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

Άρα $f(x)=(g\circ h)(x)+(h\circ g)(x)=g(h(x))+h(g(x))=$

$$\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)+\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x),x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

δ) 1ος τρόπος (Χωρίς παραγώγους): Για κάθε $x_1,x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2\Rightarrow$

$$\overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Rightarrow}\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2\overset{\eta\mu x\nearrow}{\Rightarrow}\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x_1)>\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x_2)\ \ \textbf{(3)}\ \text{γιατί}$$

$$0\le\sigma\upsilon\nu x_2<\sigma\upsilon\nu x_1\le1<\frac{\pi}{2}$$

$$\overset{\eta\mu x\nearrow}{\Rightarrow}\eta\mu x_1<\eta\mu x_2\overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Rightarrow}\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_1)>\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_2)\ \ \textbf{(4)}\ \text{γιατί}$$

$$0\le\eta\mu x_1<\eta\mu x_2\le1<\frac{\pi}{2}$$

$(3)+(4):f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Για κάθε $x_1,x_2\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ με

$$x_1<x_2\Rightarrow-x_1>-x_2\underset{-x_1,-x_2\in[0,\pi/2]}{\overset{f\searrow}{\Rightarrow}}f(-x_1)<f(-x_2)\overset{\text{Άρτια}}{\Rightarrow}f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$$

και επειδή είναι συνεχής στο μηδέν τότε το $f(0)=\eta\mu1+1$ είναι ολικό μέγιστο.

2ος τρόπος (Με παραγώγους):

Η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο: $f'(x)=-\eta\mu x\cdot(\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x))-\sigma\upsilon\nu x\cdot(\eta\mu(\eta\mu x)),x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε ότι $\eta\mu x,\sigma\upsilon\nu x\in(0,1)\subseteq\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και

$\eta\mu(\eta\mu x),\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)\in(0,1)\subseteq\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ άρα $\sigma\upsilon\nu(\eta\mu(\eta\mu x)),\eta\mu(\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x))>0$

αφού μέσα στους τριγωνομετρικούς αριθμούς έχουμε γωνίες 1ου τεταρτημορίου

άρα ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο

$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Για κάθε $x_1,x_2\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

με

$$x_1<x_2\Rightarrow-x_1>-x_2\underset{-x_1,-x_2\in[0,\pi/2]}{\overset{f\searrow}{\Rightarrow}}f(-x_1)<f(-x_2)\overset{\text{Άρτια}}{\Rightarrow}f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$$

Επίσης το πρόσημο της παραγώγου θα μπορούσε να δειχτεί και με την παρακάτω πιο χρονοβόρα διαδικασία:

Για κάθε $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ είναι $-1 < \eta\mu x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le -\eta\mu x < 1$,

$0 < \sigma\upsilon x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -\sigma\upsilon x < 0, -1 < \eta\mu x \le 0 \overset{\eta\mu x \nearrow}{\Leftrightarrow} \eta\mu(\eta\mu x) \le 0$,

$0 < \sigma\upsilon x \le 1 \overset{\sigma\upsilon x \searrow}{\Leftrightarrow} 0 < \sigma\upsilon(1) \le \sigma\upsilon(\sigma\upsilon x) < 1$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $0 \le \eta\mu x < 1 \Leftrightarrow -1 < -\eta\mu x \le 0$,

$0 < \sigma\upsilon x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -\sigma\upsilon x < 0, 0 \le \eta\mu x < 1 \overset{\eta\mu x \nearrow}{\Leftrightarrow} \eta\mu(\eta\mu x) \ge 0$,

$0 < \sigma\upsilon x \le 1 \overset{\sigma\upsilon x \searrow}{\Leftrightarrow} 0 < \sigma\upsilon(1) \le \sigma\upsilon(\sigma\upsilon x) < 1$

Άρα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

x	$-\infty$ $-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$ $+\infty$
$-\eta\mu x$			$+$	$-$	
$-\sigma\upsilon x$			$-$	$-$	
$\sigma\upsilon(\sigma\upsilon x)$			$+$	$+$	
$\eta\mu(\eta\mu x)$			$-$	$+$	
$-\eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon(\sigma\upsilon x))$			$+$	$-$	
$-\sigma\upsilon x \cdot (\eta\mu(\eta\mu x))$			$+$	$-$	
$f'(x)$			$+$	$-$	
$f(x)$			$\nearrow$	$\searrow$	

ε) $\ln\left(\frac{\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon(\eta\mu x))}{\sigma\upsilon(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon x))}\right) + f(x) = 1 \Leftrightarrow$

$\ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon(\eta\mu x))) - \ln(\sigma\upsilon(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon x))) + f(x) - 1 = 0$. Έστω η συνάρτηση

$g(x) = \ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon(\eta\mu x))) - \ln(\sigma\upsilon(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon x))) + f(x) - 1, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Θα βρούμε την μονοτονία της g με δύο τρόπους:

1ος τρόπος (Χωρίς Παραγώγους):

Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow$

- $\overset{\eta\mu x \nearrow}{\Rightarrow} 0 \le \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \le 1 < \frac{\pi}{2} \overset{\sigma\upsilon x \searrow}{\Rightarrow} 0 < \sigma\upsilon(\eta\mu x_2) < \sigma\upsilon(\eta\mu x_1) \le 1 \overset{\varepsilon\varphi x \nearrow}{\Rightarrow}$

$$\overset{\varepsilon\varphi x\nearrow}{\Rightarrow} 0<\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu x_2\right)\right)<\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu x_1\right)\right)\le\varepsilon\varphi 1<\frac{\pi}{2}\overset{\ln x\nearrow}{\Rightarrow}$$

$$\ln\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu x_2\right)\right)\right)<\ln\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu x_1\right)\right)\right)\Rightarrow$$

$$\ln\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu x_1\right)\right)\right)>\ln\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu x_2\right)\right)\right)\quad\textbf{(5)}$$

$$-\overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Rightarrow} 0\le\sigma\upsilon\nu x_2<\sigma\upsilon\nu x_1\le 1<\frac{\pi}{2}\overset{\varepsilon\varphi\nearrow}{\Rightarrow}0\le\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu x_2\right)<\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu x_1\right)\le\varepsilon\varphi 1<\frac{\pi}{2}\overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Rightarrow}$$

$$\overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Rightarrow} 0<\sigma\upsilon\nu\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu x_1\right)\right)<\sigma\upsilon\nu\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu x_2\right)\right)\le 1\overset{\ln x\nearrow}{\Rightarrow}$$

$$\ln\left(\sigma\upsilon\nu\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu x_1\right)\right)\right)<\ln\left(\sigma\upsilon\nu\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu x_2\right)\right)\right)\Rightarrow$$

$$\ln\left(\sigma\upsilon\nu\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu x_1\right)\right)\right)>\ln\left(\sigma\upsilon\nu\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu x_2\right)\right)\right)\quad\textbf{(6)}$$

$$-\overset{f\searrow}{\Rightarrow} f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)\Rightarrow f\left(x_1\right)-1>f\left(x_2\right)-1\quad\textbf{(7)}$$

$$(5)+(6)+(7):g\left(x_1\right)>g\left(x_2\right)\Rightarrow g\searrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

2ος τρόπος (Με Παραγώγους):

$$g'\left(x\right)=\frac{\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu x\right)\right)\right)'}{\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu x\right)\right)}-\frac{\left(\sigma\upsilon\nu\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu x\right)\right)\right)'}{\sigma\upsilon\nu\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu x\right)\right)}+f'\left(x\right)=$$

$$=\frac{\frac{-\eta\mu\left(\eta\mu x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu x\right)\right)}}{\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu x\right)\right)}-\frac{-\eta\mu\left(\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu x\right)\right)\right)\frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\sigma\upsilon\nu x\right)}}{\sigma\upsilon\nu\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu x\right)\right)}-$$

$$\eta\mu x\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sigma\upsilon\nu x\right)\right)-\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu\left(\eta\mu x\right)\right)=$$

$$=-\frac{\eta\mu\left(\eta\mu x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu x\right)\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu x\right)\right)}-\frac{\eta\mu\left(\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu x\right)\right)\right)\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu x\right)\right)\cdot\sigma\upsilon\nu^2\left(\sigma\upsilon\nu x\right)}-$$

$$\eta\mu x\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sigma\upsilon\nu x\right)\right)-\sigma\upsilon\nu x\left(\eta\mu\left(\eta\mu x\right)\right)$$

Ισχύει $g'\left(x\right)<0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ επειδή $x,\eta\mu x,\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu x\right),\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu x\right)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ άρα επειδή η g είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τότε η g είναι γνησίως φθίνουσα. Η g είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

$$g\left(0\right)=\ln\left(\varepsilon\varphi 1\right)-\ln\left(\sigma\upsilon\nu\left(\varepsilon\varphi 1\right)\right)+\eta\mu 1=\ln\left(\frac{\varepsilon\varphi 1}{\sigma\upsilon\nu\left(\varepsilon\varphi 1\right)}\right)+\eta\mu 1>0\quad\text{γιατί}$$

$\varepsilon\varphi 1 > \sigma\upsilon\nu\left(\varepsilon\varphi 1\right) \Leftrightarrow \dfrac{\varepsilon\varphi 1}{\sigma\upsilon\nu\left(\varepsilon\varphi 1\right)} > 1 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{\varepsilon\varphi 1}{\sigma\upsilon\nu\left(\varepsilon\varphi 1\right)}\right) > 0$ και $\eta\mu 1 > 0$

$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \ln\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu 1\right)\right) + \sigma\upsilon\nu 1 - 1 < 0$ γιατί

$0 < \sigma\upsilon\nu 1 < \dfrac{\pi}{4} \overset{\varepsilon\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu 1\right) < 1 \Leftrightarrow \ln\left(\varepsilon\varphi\left(\sigma\upsilon\nu 1\right)\right) < 0$ και $\sigma\upsilon\nu 1 < 1$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) : g\left(x_0\right) = 0$ όμως η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ άρα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης στο διάστημα αυτό.

113. α) $x^2 f^2\left(x\right) - \ln^2\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow f^2\left(x\right) = \dfrac{\left(-\ln x\right)^2}{x^2} \Leftrightarrow$

$f^2\left(x\right) = \dfrac{\ln^2 x}{x^2} \Leftrightarrow \left|f\left(x\right)\right| = \left|\dfrac{\ln x}{x}\right| (1)$

$\left|f\left(x\right)\right| = 0 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\ln x}{x}\right| = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Για κάθε $x \in \left(0,1\right) \cup \left(1, +\infty\right)$ είναι $f\left(x\right) \neq 0$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0,1\right)$ και $\left(1, +\infty\right)$.

Είναι $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -2\ln 2 < 0$ άρα $f\left(x\right) < 0$ για κάθε $x \in \left(0,1\right)$, οπότε η (1) γίνεται: $-f\left(x\right) = -\dfrac{\ln x}{x} \Leftrightarrow f\left(x\right) = \dfrac{\ln x}{x}$. Είναι $f\left(e\right) = \dfrac{1}{e} > 0$ άρα $f\left(x\right) > 0$ για κάθε $x \in \left(1, +\infty\right)$, οπότε η (1) γίνεται: $f\left(x\right) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Για $x = 1 : f\left(1\right) = \ln 1 = 0$ άρα είναι $f\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x} & , 0 < x \neq 1 \\ 0 & , x = 1 \end{cases} = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο: $f'\left(x\right) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}, x > 0$ και έχουμε

$f'\left(x\right) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq e$. Η f είναι συνεχής στο e άρα έχουμε για $x \in \left(0, e\right) : f'\left(x\right) > 0 \Rightarrow f\nearrow\left(0, e\right]$ και επίσης έχουμε ότι για

$x \in (e,+\infty): f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [e,+\infty)$. Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x = e το $f(e) = \frac{1}{e}$.

γ) Η f′ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1-\ln x)2x}{x^4} = \frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4} = \frac{2\ln x-3}{x^3}, x>0$$ και έχουμε ότι: $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x-3}{x^3} \geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ln x-3 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{e^3}$

Αφού η f′ είναι συνεχής στο $x = \sqrt{e^3}$ τότε για $x > \sqrt{e^3} \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow \left[\sqrt{e^3}, +\infty\right)$.

Εφαρμόζουμε στο διάστημα $[\alpha,\beta] \subseteq \left[\sqrt{e^3}, +\infty\right)$ το ΘΜΤ για την συνάρτηση f και έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{\frac{\ln\beta}{\beta}-\frac{\ln\alpha}{\alpha}}{\beta-\alpha} = \frac{\frac{\alpha\ln\beta-\beta\ln\alpha}{\alpha\beta}}{\beta-\alpha} = \frac{\alpha\ln\beta-\beta\ln\alpha}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}$$

Για $\sqrt{e^3} < \alpha < \xi < \beta \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow \frac{1-\ln\alpha}{\alpha^2} < \frac{\alpha\ln\beta-\beta\ln\alpha}{\alpha\beta(\beta-\alpha)} < \frac{1-\ln\beta}{\beta^2}$

δ) Αν $\gamma \in (0,e)$ έχουμε: $\gamma < \gamma+1 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(\gamma) < f(\gamma+1) \Leftrightarrow \frac{\ln\gamma}{\gamma} < \frac{\ln(\gamma+1)}{\gamma+1} \Leftrightarrow$

$(\gamma+1)\ln\gamma < \gamma\ln(\gamma+1) \Leftrightarrow \gamma^{\gamma+1} < (\gamma+1)^{\gamma}$. Αν $\gamma \in (e,+\infty)$ έχουμε:

$\gamma < \gamma+1 \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(\gamma) > f(\gamma+1) \Leftrightarrow \frac{\ln\gamma}{\gamma} > \frac{\ln(\gamma+1)}{\gamma+1} \Leftrightarrow (\gamma+1)\ln\gamma > \gamma\ln(\gamma+1) \Leftrightarrow$

$\gamma^{\gamma+1} > (\gamma+1)^{\gamma}$. Αν γ = e, τότε επειδή η f έχει μέγιστο στο x = e, είναι

$f(e+1) < f(e) \Leftrightarrow \frac{\ln(e+1)}{e+1} < \frac{\ln e}{e} \Leftrightarrow e\ln(e+1) < (e+1)\ln e \Leftrightarrow$

$\ln(e+1)^e < \ln e^{(e+1)} \Leftrightarrow (e+1)^e < e^{(e+1)}$

ε) Είναι $e^x > x^{\lambda-e} \Leftrightarrow x > (\lambda-e)\ln x$ (1)

Είναι $e \leq \lambda < 2e \Leftrightarrow 0 < \lambda-e \leq e$

Αν $\lambda = e$ τότε η (1) ισχύει αφού $x > 0$.

Αν $e<\lambda<2e$ τότε η (1) γίνεται $\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{\lambda-e}\Leftrightarrow f(x)<\frac{1}{\lambda-e}$ (2)

Η f έχει μέγιστο το $\frac{1}{e}$ άρα για να ισχύει η (2) πρέπει

$\frac{1}{e}<\frac{1}{\lambda-e}\Leftrightarrow e>\lambda-e\Leftrightarrow \lambda<2e$ ισχύει.

στ) $\left(\sqrt[\nu]{\nu}\right)^x=x\Leftrightarrow \nu^x=x^\nu\Leftrightarrow \ln\nu^x=\ln x^\nu\Leftrightarrow x\ln\nu=\nu\ln x\Leftrightarrow$.

$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln\nu}{\nu}\Leftrightarrow f(x)=f(\nu)$. Αν ν = 2 τότε η εξίσωση έχει μοναδική και προφανή ρίζα στο $(0,e]$ την $x=2$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και $f(e)=\frac{1}{e}$.

Στο διάστημα $[e,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα:

$f([e,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(e)\right]=\left(0,\frac{1}{e}\right]$. Θα εξετάσουμε αν το

$\frac{\ln 2}{2}\in f([e,+\infty))$:

Είναι $2<e\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(2)<f(e)\Leftrightarrow\frac{\ln 2}{2}<\frac{1}{e}$ και επειδή επίσης $\frac{\ln 2}{2}>0$ υπάρχει

$\rho\in f([e,+\infty)):g(\rho)=\frac{\ln 2}{2}$ άρα στο διάστημα $[e,+\infty)$ η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=\rho$ άρα έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0,+\infty)$ σε αυτήν την περίπτωση.

Αν $\nu>2$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική και προφανή ρίζα στο $[e,+\infty)$ την $x=\nu$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)=-\infty$, $f(e)=\frac{1}{e}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,e]$ τότε έχουμε: $f((0,e])=(-\infty,e]$.

Θα εξετάσουμε αν το $\frac{\ln\nu}{\nu}\in f((0,e])$: Είναι $\nu>e\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(\nu)<f(e)\Leftrightarrow f(\nu)<\frac{1}{e}$

άρα υπάρχει $\rho\in f((0,e]):f(\rho)=\frac{\ln\nu}{\nu}$ άρα στο διάστημα $(0,e]$ η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=\rho$ άρα έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0,+\infty)$ σε αυτήν την περίπτωση.

114. α) Έστω $M\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ και η εφαπτομένη της f στο M είναι $y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$. Επειδή διέρχεται από το $\left(0,0\right)$ είναι $-f\left(x_0\right)=-x_0f'\left(x_0\right)\Leftrightarrow x_0f'\left(x_0\right)-f\left(x_0\right)=0$.

Αφού ισχύει για όλες τις εφαπτόμενες τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $xf'\left(x\right)-f\left(x\right)=0$.

Για $x\neq0$ είναι $\dfrac{xf'\left(x\right)-f\left(x\right)}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{f\left(x\right)}{x}\right)'=0\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=\begin{cases}c_1\ ,\ x<0\\c_2\ ,\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow$

$f\left(x\right)=\begin{cases}xc_1\ ,\ x<0\\xc_2\ ,\ x>0\end{cases}$. Επειδή η f περιττή τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$. Για $x=0:f\left(0\right)=-f\left(0\right)\Leftrightarrow2f\left(0\right)=0\Leftrightarrow f\left(0\right)=0$ και για $x=1:f\left(-1\right)=-f\left(1\right)=-1$.

Για $x=1:c_1=1$ και για $x=-1:c_2=1$ άρα τελικά

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x\ ,\ x<0\\0\ ,\ x=0\\x\ ,\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow f\left(x\right)=x\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Άρα είναι $g\left(x\right)=\sqrt{4f\left(x\right)-4}=\sqrt{4\left(x-1\right)}=2\sqrt{x-1}$, $x\geq1$.

β) Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left(1,+\infty\right)$ με $g'\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}>0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to1^+}g\left(x\right)=g\left(1\right)$ η g είναι συνεχής στο 1 και $g\nearrow\left[1,+\infty\right)$ είναι 1-1 και αντιστρέφεται. $g\nearrow\left[1,+\infty\right)$ και συνεχής άρα

$g\left(\left[1,+\infty\right)\right)=\left[g\left(1\right),\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(x\right)\right)=\left[0,+\infty\right)$. Άρα για $x\in\left[1,+\infty\right)$ και $y\in\left[0,+\infty\right)$:

$g\left(x\right)=y\Leftrightarrow2\sqrt{x-1}=y\Leftrightarrow4\left(x-1\right)=y^2\Leftrightarrow x-1=\dfrac{y^2}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{y^2+4}{4}\Leftrightarrow$

$g^{-1}\left(y\right)=\dfrac{y^2+4}{4}$, $y\geq0$ άρα τελικά $g^{-1}\left(x\right)=\dfrac{x^2+4}{4}$, $x\geq0$.

γ) Ισχύουν $g\left(x\right)=g^{-1}\left(y\right)\Leftrightarrow g\left(g\left(x\right)\right)=y$ και $g\left(y\right)=g^{-1}\left(x\right)\Leftrightarrow g\left(g\left(y\right)\right)=x$

Αν $x<y\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g\left(x\right)<g\left(y\right)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g\left(g\left(x\right)\right)<g\left(g\left(y\right)\right)\Leftrightarrow y<x$ Άτοπο.

Ομοίως αν $x>y$ καταλήγουμε σε άτοπο άρα τελικά $x=y$.

Άρα αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $g\left(x\right)=g^{-1}\left(x\right)$

$$g\left(x\right)=g^{-1}\left(x\right)\Leftrightarrow2\sqrt{x-1}=\frac{x^2+4}{4}\Leftrightarrow8\sqrt{x-1}-x^2-4=0$$

Έστω η συνάρτηση $h(x)=8\sqrt{x-1}-x^2-4$, $x\geq 1$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $h'(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x-1}}-2x=\dfrac{4-2x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$.

Είναι $h'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{4-2x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=0\Leftrightarrow 4-2x\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow x\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow$

$x^2(x-1)=4\Leftrightarrow x^3-x^2-4=0\Leftrightarrow (x-2)(x^2+x+2)=0\Leftrightarrow x=2$ γιατί

$x^2+x+2>0$ αφού $\Delta=-7<0$. Επίσης $\sqrt{x-1}>0$ για κάθε $x>1$ και

$4-2x\sqrt{x-1}>0\Leftrightarrow (x-2)(x^2+x+2)>0\Leftrightarrow x>2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}h(x)=h(1)$ άρα η h συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα $h\nearrow[1,2]$, $h\searrow[2,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=2$ το $h(2)=0$.

Επομένως μοναδική ρίζα το 2 άρα $x=y=2$.

δ) Είναι $y(t)=g(x(t))=2\sqrt{x(t)-1}$, $x'(t)=1\ m/sec$, $x(t_0)=2$ και $y(t_0)=2$.

i) Το τρίγωνο έχει βάση $(AB)=1$ και ύψος $y(t)=2\sqrt{x(t)-1}$

Άρα είναι $E(t)=\dfrac{1}{2}|AB|\left|2\sqrt{x(t)-1}\right|=\dfrac{1}{2}(AB)\left(2\sqrt{x(t)-1}\right)=\sqrt{x(t)-1}$

Είναι $E'(t)=\dfrac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)-1}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x(t)-1}}$. Για

$t=t_0: E'(t_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x(t_0)-1}}=\dfrac{1}{2}\ m^2/sec$

ii) Η ταχύτητα απομάκρυνσης του Μ από την αρχή των αξόνων είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του Μ από την αρχή των αξόνων. Είναι

$(OM)=d(t)=\sqrt{x^2(t)+4x(t)-4}$ και

$d'(t)=\dfrac{2x(t)x'(t)+4x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+4x(t)-4}}=\dfrac{x(t)x'(t)+2x'(t)}{\sqrt{x^2(t)+4x(t)-4}}=\dfrac{x(t)+2}{\sqrt{x^2(t)+4x(t)-4}}$

Για $t=t_0: d'(t_0)=\dfrac{x(t_0)+2}{\sqrt{x^2(t_0)+4x(t_0)-4}}=\dfrac{2+2}{\sqrt{4+8-4}}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ m/sec$

34 Επαναληπτικά διαγωνίσματα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$, οπότε

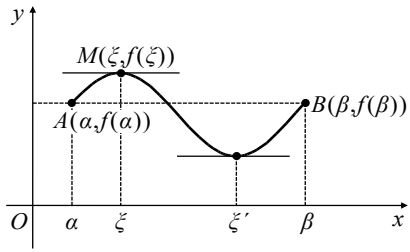
$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=$$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2. Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$



Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Α3. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.

Α4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Η f' είναι συνεχής και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο., οπότε η f είναι γνησίως μονότονη.

Β2. Για $x=1$ είναι $f(1)=-f(2-1)\Leftrightarrow 2f(1)=0\Leftrightarrow f(1)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Β3. $g(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{f'(x)}=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=1$. Είναι $g(1)=\dfrac{f(1)}{f'(1)}=0$ και

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{x-1}\cdot\frac{1}{f'(x)}\right)=f'(1)\cdot\frac{1}{f'(1)}=1\ .$$

Είναι $g'(1)=1$ άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^o .

Β4. Για $x=0$ η σχέση $f(x)=-f(2-x)$ γίνεται $f(0)=-f(2)=1$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f, υπάρχει $\xi_1\in(0,1)$ και $\xi_2\in(1,2)$ τέτοια, ώστε

$f'(\xi_1)=f(1)-f(0)=-1$ και $f'(\xi_2)=f(2)-f(1)=-1$. Επειδή $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ και η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2), σύμφωνα με το θ.Rolle, η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (ξ_1,ξ_2).

Θέμα Γ

Γ1. Έστω $g(x)=f'(x)f(x)-x^2,\ x\in[-1,1]$. Είναι $g(-1)=g(1)=-1$ και g συνεχής στο $[-1,1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με

$g'(x)=f''(x)f(x)+(f'(x))^2-2x$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Rolle, υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε: $g'(\xi)=0\Leftrightarrow f''(\xi)f(\xi)=2\xi-(f'(\xi))^2$.

Γ2. Επειδή $f(-1)=f(1)$, λόγω του Θ.Rolle για την f, υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$. Είναι $f\cup\mathbb{R}\Leftrightarrow f'\nearrow\mathbb{R}$.Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f, υπάρχει $\xi_1\in(-1,0)$ και $\xi_2\in(0,1)$ τέτοια, ώστε

$f'(\xi_1)=f(0)-f(-1)=f(0)$ και $f'(\xi_2)=f(1)-f(0)=-f(0)$.

Είναι $\xi_1<\xi_2\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow f(0)<-f(0)\Leftrightarrow 2f(0)<0\Leftrightarrow f(0)<0$.

Γ3. $f^2(x_0)+x_0(x_0-1)=0\Leftrightarrow\frac{f(x_0)}{x_0-1}f(x_0)+x_0=0$. Έστω

$h(x)=\frac{f(x)}{x-1}f(x)+x,\ x\in[0,1)$.Είναι $h(0)=-f^2(0)<0$ και

$\lim_{x\to 1^-}h(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{f(x)}{x-1}f(x)+x\right)=f'(1)f(1)+1=1>0$, οπότε υπάρχει $\alpha\in(0,1)$ το οποίο βρίσκεται πολύ κοντά στο 1, τέτοιο, ώστε $h(\alpha)>0$.

Επειδή $h(0)h(\alpha)<0$ και η h είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$, λόγω του Θ.Bolzano, υπάρχει $x_0\in(0,\alpha)\subseteq(0,1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f^2(x_0)+x_0^2-x_0=0$

Γ4. Η εφαπτομένη της C_f στο $x=1$ έχει εξίσωση

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=f'(1)x-f'(1)$.

Είναι $1>x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(1)>f'(x_0)=0$. Επειδή η f είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\geq f'(1)x-f(1)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(1)x-f(1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(1)x=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Γ5. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x-2h)-2f(x)+f(x+2h)}{4h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-2f'(x-2h)+2f'(x+2h)}{8h}=$

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(x)-f'(x-2h)+f'(x+2h)-f'(x)}{4h}=$

$\lim\limits_{h\to0}\left[-\dfrac{f'(x-2h)-f'(x)}{4h}+\dfrac{f'(x+2h)-f'(x)}{4h}\right]=-\left(-\dfrac{2}{4}f''(x)\right)+\dfrac{2}{4}f''(x)=f''(x)$

γιατί $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(x+kh)-f'(x)}{h}\overset{kh=u}{=}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f'(x+u)-f'(x)}{\frac{u}{k}}=kf''(x)$

Θέμα Δ

Δ1. Λόγω Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=f(2)-f(1)=f(2)+1$. Είναι $f'(\xi)>2\Leftrightarrow f(2)+1>2\Leftrightarrow f(2)>1>0$.

Επειδή $f(1)f(2)<0$ και η f είναι συνεχής στο $[1,2]$, λόγω του θ.Bolzano, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$. Επειδή $f'(x)>2>0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$ οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

Δ2. $f(x)+1=f'(x)-e^x\Leftrightarrow e^x+1=f'(x)-f(x)\Leftrightarrow$

$e^{-x}\left(e^x+1\right)=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)\Leftrightarrow 1+e^{-x}=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)\Leftrightarrow$

$\left(x-e^{-x}\right)'=\left[e^{-x}f(x)\right]'\Leftrightarrow e^{-x}f(x)=x-e^{-x}+c\Leftrightarrow f(x)=xe^x-1+ce^x,\ c\in\mathbb{R}$

Για $x=1$ είναι $f(1)=e-1+ce\Leftrightarrow c=-1$, οπότε $f(x)=(x-1)e^x-1$

Δ3. $x=(\lambda+1)e^{-x}+1\Leftrightarrow x-1=(\lambda+1)e^{-x}\Leftrightarrow(x-1)e^x=\lambda+1\Leftrightarrow f(x)=\lambda$

Είναι $f'(x)=e^x+(x-1)e^x=e^x(1+x-1)=xe^x$.

Αν $x<0$ τότε $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$ και αν $x>0: f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f(0)=-2$.

Στο διάστημα $A_1=(-\infty,0)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1)=(-2,-1)$. Στο διάστημα $A_2=(0,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2)=(-2,+\infty)$.Αν $\lambda<-2$ τότε το λ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη. Αν $\lambda=-2$ τότε $\lambda\notin f(A_1),f(A_2)$, άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στα διαστήματα A_1,A_2 . Επειδή $f(0)=-2$, η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το $x=0$.

Αν $-2<\lambda<-1$ τότε $\lambda\in f(A_1),f(A_2)$, άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα σε

καθένα από τα διαστήματα A_1,A_2 , οπότε έχει συνολικά δύο ρίζες.

Αν $\lambda\geq -1$ τότε $\lambda\notin f(A_1)$, $\lambda\in f(A_2)$ οπότε η εξίσωση έχει μία ρίζα στο A_2 .

Δ4. Έστω $g(x)=(x-2)e^x-x-4,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=(x-1)e^x-1=f(x)$.

Έστω $x_1>0$ η ρίζα της f με βάση το προηγούμενο σκέλος $(\lambda=0\geq -1)$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f(x)<0\Rightarrow g'(x)<0\Rightarrow g\searrow(-\infty,0]$.

Για κάθε $0<x<x_1$ είναι $f(x)<0\Rightarrow g'(x)<0\Rightarrow g\searrow[0,x_1]$. Επειδή η g είναι συνεχής στο $x=0$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,x_1]$.

Για κάθε $x>x_1$ είναι $f(x)>0\Rightarrow g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow[x_1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{e^{-x}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$.

Επειδή $f(1)=-1<0,\ f(2)=e^2-1>0$, είναι $x_1\in(1,2)$, οπότε $g(x_1)=(x_1-2)e^{x_1}-x_1-4<0$. Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,x_1)$ είναι $g(\Delta_1)=(g(x_1),+\infty)$ και $0\in g(\Delta_1)$, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1 . $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\left(1-\dfrac{2}{x}\right)e^x-1-\dfrac{4}{x}\right)\right]=+\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_2=(x_1,+\infty)$ είναι $g(\Delta_2)=(g(x_1),+\infty)$ και $0\in g(\Delta_1)$, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_2 .Τελικά η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Δ5. α) Είναι $f''(x)=e^x+xe^x>0$ για κάθε $x\geq 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

β) Παρατηρούμε ότι $f'(1)=e$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x=1$ είναι η ευθεία ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+1=ex-e\Leftrightarrow y=ex-e-1$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα
$f(x)\geq ex-e-1\Leftrightarrow (x-1)e^x-1\geq ex-e-1\Leftrightarrow (x-1)e^x\geq ex-e$ για κάθε $x\geq 0$.

1ο Διαγώνισμα μέχρι τις παραγώγους

Α1. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Επομένως,

- αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, οπότε θα έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$ (2)

- αν $x\in(x_0,x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$, οπότε θα έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$. (3)

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

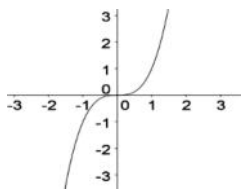
Α2. α) Η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$, ενώ

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x}=-1$.

β) $f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ x+1, & x\geq 0\end{cases}$

γ) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3$.

Είναι $f'(x)=3x^2$, και $f'(0)=0$. Η εφαπτομένη της C_f στο $(0,0)$, που είναι το σημείο καμπής της, είναι ο άξονας x΄x.



Α3. Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:
1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Α4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0 = f(0)$

άρα f συνεχής στο 0.

Β2. Είναι $f'(x) = \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. Για κάθε $0 < x < \dfrac{1}{e}$ είναι

$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left(0, \dfrac{1}{e}\right]$ και για κάθε $x > \dfrac{1}{e}$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$.

Η f έχει ελάχιστο το $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e}\ln e^{-1} = -\dfrac{1}{e}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x = +\infty$. Στο διάστημα $A_1 = \left(0, \dfrac{1}{e}\right]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1) = \left[-\dfrac{1}{e}, 0\right)$.Στο διάστημα $A_2 = \left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2) = \left[-\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$.

Είναι $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[-\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$.

Β3. $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x = \dfrac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x\ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$.

- Αν $\alpha < -\dfrac{1}{e}$ τότε $\alpha \notin f(A)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη.

- Αν $\alpha = -\dfrac{1}{e}$ τότε για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{1}{e}\right) \cup \left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$ είναι $f(x) > -\dfrac{1}{e}$, οπότε η $x = \dfrac{1}{e}$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης στη περίπτωση αυτή.

- Αν $\alpha \in \left(-\dfrac{1}{e}, 0\right)$, τότε $\alpha \in f(A_1), \alpha \in f(A_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει

μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ και $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

- Αν $\alpha\in[0,+\infty)$ τότε $\alpha\notin f(A_1)$ και $\alpha\in f(A_2)$, οπότε η εξίσωση έχει μία ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

Β4. Λόγω του Θ.Μ.Τ. για την f, υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$. Είναι $f''(x)=\frac{1}{x}>0\Rightarrow f'\nearrow(0,+\infty)$.

$\xi<x+1\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi)<f'(x+1)\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$

Θέμα Γ

Γ1. $f\cup[0,+\infty)\Leftrightarrow f'\nearrow[0,+\infty)$. Για κάθε

$x>0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(0)>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$

Για κάθε $x\geq 0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)\geq f(0)=0$

Γ2. $f\nearrow[0,+\infty)\Rightarrow f\ 1-1\Rightarrow f$ αντιστρέφεται. Η εφαπτομένη της C_f στο $x=0$ είναι η ευθεία $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=x$. Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\geq x$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

Επειδή οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$, επειδή $f(x)>x$, είναι $f^{-1}(x)<x$ για κάθε $x>0$. Άρα $f(x)>f^{-1}(x)$ για κάθε $x>0$.

Γ3. Για κάθε $x\geq 0$ είναι $f(x)\geq x$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f^{-1}(y)=\lim\limits_{f(x)\to+\infty}x=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

Γ4. $x(f'(x)-f(x))=f(x)\Leftrightarrow xf'(x)-xf(x)=f(x)\Leftrightarrow$

$xf'(x)-f(x)=xf(x)\Leftrightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow$

$\frac{f(x)}{x}=ce^x\Leftrightarrow f(x)=xce^x,\ c\in\mathbb{R},\ x>0$. Είναι $f(1)=e\Leftrightarrow c=1$ άρα

$f(x)=xe^x,\ x>0$

Γ5. $g(x)=\frac{x^{2\alpha}e^{\left(-\alpha^2+\alpha\right)x}}{f^{\alpha}(x)}=\frac{x^{2\alpha}e^{\left(-\alpha^2+\alpha\right)x}}{x^{\alpha}e^{\alpha x}}=x^{\alpha}e^{-\alpha^2x}$.Η g είναι παραγωγίσιμη στο

$(0+\infty)$ με $g'(x)=\alpha x^{\alpha-1}e^{-\alpha^2 x}(1-\alpha x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \frac{1}{\alpha}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{\alpha}\right)$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow\left(0,\frac{1}{\alpha}\right]$ και για κάθε $x>\frac{1}{\alpha}$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\searrow\left[\frac{1}{\alpha},+\infty\right)$. Η g έχει μέγιστο το $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha^{-\alpha}e^{-\alpha}$. Έστω $h(\alpha)=\alpha^{-\alpha}e^{-\alpha}=e^{-\alpha\ln\alpha}e^{-\alpha}=e^{-\alpha\ln\alpha-\alpha}$, $\alpha>0$.

$h'(\alpha)=e^{-\alpha\ln\alpha-\alpha}(-\ln\alpha-2)\geq 0\Leftrightarrow \ln\alpha\leq -2\Leftrightarrow \alpha\leq e^{-2}$. Για κάθε $0<x<e^{-2}$ είναι $h'(\alpha)>0\Rightarrow h\nearrow\left(0,e^{-2}\right]$ και για κάθε $x>e^{-2}$ είναι $h'(\alpha)<0\Rightarrow h\searrow\left[e^{-2},+\infty\right)$. Η h έχει μέγιστο για $\alpha=e^{-2}$.

Θέμα Δ

Δ1. $f^2(x)=x\ln x-\ln x=(x-1)\ln x$ (1)

Για κάθε $x>1$ είναι $x-1>0$, $\ln x>0$ άρα $(x-1)\ln x>0$ και για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $x-1<0$, $\ln x<0$ άρα $(x-1)\ln x>0$. Δηλαδή $(x-1)\ln x>0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.Είναι

$f(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)=0\Leftrightarrow (x-1)\ln x=0\Leftrightarrow x=1$. Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι $f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Οπότε για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f(x)=\sqrt{(x-1)\ln x}$ ή $f(x)=-\sqrt{(x-1)\ln x}$ και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f(x)=\sqrt{(x-1)\ln x}$ ή $f(x)=-\sqrt{(x-1)\ln x}$

Άρα $f(x)=\begin{cases}\sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(0,1)\\ 0, & x=1\\ \sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}=\sqrt{(x-1)\ln x},\ x>0$ ή

$f(x)=\begin{cases}\sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(0,1)\\ 0, & x=1\\ -\sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$ ή $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(0,1)\\ 0, & x=1\\ \sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$ ή

$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(0,1)\\ 0, & x=1\\ -\sqrt{(x-1)\ln x}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}=-\sqrt{(x-1)\ln x},\ x>0$

Δ2. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $t(x)=\sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $t'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, οπότε: Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x)=\dfrac{\left[(x-1)\ln x\right]'}{2\sqrt{(x-1)\ln x}}=\dfrac{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}{2\sqrt{(x-1)\ln x}}=\dfrac{x\ln x+x-1}{2x\sqrt{(x-1)\ln x}}$. Στο $x=1$ είναι

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{(x-1)\ln x}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{(x-1)\ln x}}{\sqrt{(x-1)^2}}=\lim_{x\to1^+}\sqrt{\frac{\cancel{(x-1)}\ln x}{(x-1)^{\cancel{2}}}}=$$

$\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{\dfrac{\ln x}{x-1}}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x,\ x>0$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\varphi'(1)=1$, οπότε

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\sqrt{\varphi'(1)}=1\quad(1)$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{(x-1)\ln x}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{(x-1)\ln x}}{-\sqrt{(x-1)^2}}=\lim_{x\to1^-}\left(-\sqrt{\frac{\cancel{(x-1)}\ln x}{(x-1)^{\cancel{2}}}}\right)=$$

$$\lim_{x\to1^-}\left(-\sqrt{\frac{\ln x}{x-1}}\right)=\;=-\sqrt{\varphi'(1)}=-1\quad(2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$.

Δ3. Για να βρούμε το πρόσημο της $f'(x)=\dfrac{x\ln x+x-1}{2x\sqrt{(x-1)\ln x}}$, αρκεί να βρούμε το πρόσημο της παράστασης $x\ln x+x-1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x\ln x+x-1,\ x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\ln x+\cancel{x}\dfrac{1}{\cancel{x}}+1=\ln x+2$

$g'(x)\geq0\Leftrightarrow\ln x+2\geq0\Leftrightarrow\ln x\geq-2\Leftrightarrow x\geq e^{-2}$. Για κάθε $x\in\left(0,e^{-2}\right)$ είναι $g'(x)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\left(0,e^{-2}\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα

στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in \left(e^{-2}, +\infty\right)$ είναι $g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\left[e^{-2}, +\infty\right)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Παρατηρούμε ότι $g(1) = 0$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[e^{-2}, +\infty\right)$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο διάστημα αυτό. Για κάθε

$$e^{-2} \le x < 1 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left[e^{-2}, 1\right]$$

Για κάθε $x > 1 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left[1, +\infty\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x \ln x + x - 1\right) = -1$ και

$$g\left(e^{-2}\right) = e^{-2} \ln e^{-2} + e^{-2} - 1 = -\frac{2}{e^2} + \frac{1}{e^2} - 1 = -\frac{1}{e^2} - 1 < 0 .$$

Στο διάστημα $\Delta = \left(0, e^{-2}\right)$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta) = \left(-\frac{1}{e^2} - 1, -1\right)$, άρα για κάθε $x \in \left(0, e^{-2}\right)$ είναι $g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left(0, e^{-2}\right]$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = e^{-2}$,είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, οπότε έχει ελάχιστο το $f(1) = 0$.

Δ4. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$, για κάθε $0 < \alpha < \beta < 1$ είναι $f(\alpha) > f(\beta)$. Για κάθε $1 < \alpha < \beta \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\alpha) < f(\beta)$. Άρα σε κανένα από τα διαστήματα $(0,1), (1, +\infty)$ δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f. Αν τώρα επιλέξουμε $\alpha \in (0,1)$ και $\beta \in (1, +\infty)$, τότε επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1, δεν θα είναι παραγωγίσιμη στο (α, β), οπότε και πάλι δεν εφαρμόζεται
το θεώρημα Rolle για την f.

Δ5. $f^2(x) = 4 - x^2$

Αν $4 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x > 2$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν $4 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \le 4 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x \le 2$, έχουμε:

$$f^2(x) = 4 - x^2 \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 4 - x^2 \Leftrightarrow (x-1)\ln x + x^2 - 4 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (x-1)\ln x + x^2 - 4,\ x \in (0,2]$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,4)$ με

$$h'(x) = \ln x + (x-1)\frac{1}{x} + 2x = \ln x + 1 - \frac{1}{x} + 2x \text{ και}$$

$h''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+2>0\Rightarrow h'\nearrow(0,2]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}h'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x+1-\frac{1}{x}+2x\right)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 2^-}h'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\ln x+1-\frac{1}{x}+2x\right)=\ln 2+1-\frac{1}{2}+4=\ln 2+\frac{9}{2}>0$

Η h' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει σύνολο τιμών το $h'((0,2))=\left(-\infty,\ln 2+\frac{9}{2}\right)$. Επειδή το μηδέν περιέχεται στο σύνολο τιμών της h', υπάρχει μοναδικό $\rho\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $h'(\rho)=0$.

Για κάθε $0<x<\rho\Rightarrow h'(x)<h'(\rho)=0\Rightarrow h\searrow(0,\rho]$ και για κάθε $\rho<x<2\Rightarrow h'(x)>h'(\rho)=0\Rightarrow h\nearrow[\rho,2]$. Η h έχει ελάχιστο στο ρ.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x+x^2-4\right]=-1(-\infty)+0-4=+\infty$ και $h(2)=\ln 2>0$. Θα αναζητήσουμε τώρα το πρόσημο του ελαχίστου.

Είναι $h'(1)=2>0$, και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}h'(x)=-\infty$, στο διάστημα $(0,1)$ είναι $h'((0,1))=(-\infty,2)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $(-\infty,2)$, η h' έχει ρίζα στο $(0,1)$. Όμως το ρ είναι η μοναδική της ρίζα, άρα $\rho\in(0,1)$. Είναι $h(1)=-3<0$ και $\rho<1\overset{h\nearrow[\rho,4]}{\Leftrightarrow}h(\rho)<h(1)<0$. Στο διάστημα $\Delta_1=(0,\rho)$ η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $h(\Delta_1)=(h(\rho),+\infty)$. Επειδή $0\in h(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο, ώστε $h(x_1)=0$.

Στο διάστημα $\Delta_2=(0,2)$ η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $h(\Delta_2)=(h(\rho),\ln 2)$. Επειδή $0\in h(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό $x_2\in\Delta_2$ τέτοιο, ώστε $h(x_2)=0$.

Τελικά η h έχει ακριβώς δύο ρίζες.

2ο Διαγώνισμα μέχρι τις παραγώγους

Θέμα Α

Α1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του

θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1). Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

• Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι. $f(x_1) = f(x_2)$.Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2. Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:
1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται και είναι συνεχής ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

Α3. α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Είτε ορίσουμε την $f \circ g$ είτε την $g \circ f$ και οι δύο έχουμε πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει $(f \circ g)(x) = g^2(x) = |x|^2 = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $(g \circ f)(x) = |f(x)| = |x^2| = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Και η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση όμως η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν.

Α4. Ο μαθητής κάνει λάθος καθώς ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ τότε είναι $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 0 = 0$ και δεν έχουμε απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Θέμα Β

Β1. Η f ορίζεται όταν $x > 0$ και $x - \ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \ln x$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $\ln x \leq x - 1 < x \Leftrightarrow x - \ln x > 0$, οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{x - \ln x - x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{\cancel{x} - \ln x - \cancel{x} + 1}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}.$$

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$.

Για κάθε $x \in (0,e)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,e]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (e,+\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[e,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει μέγιστο το $f(e) = \dfrac{e}{e-1}$.

Β3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^2(x)}{f'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{x^2}{\cancel{(x-\ln x)^2}}}{\dfrac{1-\ln x}{\cancel{(x-\ln x)^2}}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\ln x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \dfrac{1}{1-\ln x}\right) = 0\cdot 0 = 0$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1-\ln x} \underset{\substack{x\to 0 \Rightarrow \\ u\to +\infty}}{\overset{1-\ln x = u}{=}} \lim\limits_{u\to +\infty} \dfrac{1}{u} = 0$

Β4. Είναι $f(1) = \dfrac{1}{1-\ln 1} = 1$. Αρχικά η ε διέρχεται από το σημείο Α οπότε $1 = \alpha + \beta$ (1). Επειδή η ε εφάπτεται της C_f στο Α, είναι $f'(1) = \lambda_\varepsilon = \alpha \Leftrightarrow 1 = \alpha$, τότε από τη σχέση (1) προκύπτει β=0.

Β5. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x \cdot \dfrac{1}{x-\ln x}\right) = 0\cdot 0 = 0$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = (0,e)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta) = \left(0, \dfrac{e}{e-1}\right)$. Είναι $\dfrac{2}{3} < \dfrac{e}{e-1} \Leftrightarrow 2e-2 < 3e \Leftrightarrow e > -2$ ισχύει Επειδή το 2/3 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f, η εξίσωση $f(x) = \dfrac{2}{3}$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα (0,e).

Θέμα Γ

Γ1. Για $x > 0$:

$f'(x) - f(x) = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = \dfrac{1-2\sqrt{x}^2}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = e^{-x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - e^{-x}\sqrt{x} \Leftrightarrow \left(e^{-x}f(x)\right)' = \left(e^{-x}\sqrt{x}\right)' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-x}f(x) = e^{-x}\sqrt{x} + c \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x} + ce^x$ και για $x = 1$ είναι

$f(1) = \sqrt{1} + ce \Leftrightarrow ce = 0 \Leftrightarrow c = 0$

Άρα $f(x) = \sqrt{x}$ για κάθε $x > 0$. Επειδή η f συνεχής στο $[0,+\infty)$ είναι

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$. Άρα $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\ , & x > 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x}\ ,\ x \geq 0$.

Γ2. Πρέπει $\begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$ και είναι

$$g(x) = \frac{x+1}{f(x)} = \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}^2+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\ ,\ x > 0$$

Είναι $\sqrt{\kappa} + \sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \leq 4 \Leftrightarrow g(\kappa) + g(\lambda) \leq 4$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$$g'(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1\ .$$

Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(0,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (1,+\infty)$ είναι $g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Η g έχει ελάχιστο το $g(1) = 2$. Επειδή η g έχει ελάχιστο το 2, ισχύει ότι

$g(x) \geq 2$ για κάθε $x > 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα

$g(\kappa) \geq 2,\ g(\lambda) \geq 2$ και $g(\kappa) + g(\lambda) \geq 4$ (1)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι

$g(\kappa) + g(\lambda) = 4 \Leftrightarrow g(\kappa) = g(\lambda) = 2 \Leftrightarrow \kappa = \lambda = 1$

Γ3. Έστω $M(x(t), y(t))$ με $y(t) = g(x(t))$ το υλικό σημείο. Είναι

$x'(t) = 0{,}5\,\text{cm/sec}$. Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ είναι

$y'(t) = \left(g(x(t))\right)' = g'(x(t))x'(t)$.

Έστω $t = t_0$ η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το Α, τότε $x(t_0) = 4$,

οπότε $y'(t_0) = g'(x(t_0))x'(t_0) = g'(4)\cdot 0{,}5 = \frac{4-1}{2\cdot 4\sqrt{4}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{32}\,\text{cm/sec}$

Γ4. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=e^x$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\alpha,f(\alpha))$ με $\alpha>0$ έχει εξίσωση:

$\varepsilon_1: y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=f'(\alpha)x-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)$

Η εφαπτομένη της C_h στο σημείο $B(\beta,h(\beta))$ με $\beta\in\mathbb{R}$ έχει εξίσωση:

$\varepsilon_2: y-h(\beta)=h'(\beta)(x-\beta)\Leftrightarrow y=h'(\beta)x-\beta h'(\beta)+h(\beta)$

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη πρέπει:

$$\begin{cases} f'(\alpha)=h'(\beta) \\ -\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)=-\beta h'(\beta)+h(\beta)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}=e^{\beta} \\ -\dfrac{\alpha}{2\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\alpha}=-\beta e^{\beta}+e^{\beta}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \sqrt{\alpha}=\dfrac{1}{2e^{\beta}} \\ -\dfrac{\cancel{\alpha}\sqrt{\alpha}}{2\cancel{\alpha}}+\dfrac{1}{2e^{\beta}}=-\beta e^{\beta}+e^{\beta}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{2e^{2\beta}} \\ -\dfrac{1}{4e^{\beta}}+\dfrac{1}{2e^{\beta}}=-\beta e^{\beta}+e^{\beta}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{2e^{2\beta}} \\ -1+2=-4\beta e^{2\beta}+4e^{2\beta}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{2e^{2\beta}} \\ 4e^{2\beta}-4\beta e^{2\beta}-1=0\end{cases}$$

Έστω η συνάρτηση $k(\beta)=4e^{2\beta}-4\beta e^{2\beta}-1$, $\beta\in\mathbb{R}$

Η k είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$k'(\beta)=8e^{2\beta}-4e^{2\beta}-8\beta e^{2\beta}=4e^{2\beta}(1-2\beta)$, $\beta\in\mathbb{R}$

Είναι $k'(\beta)\geq 0\Leftrightarrow 4e^{2\beta}(1-2\beta)\geq 0\overset{4e^{2\beta}>0}{\Leftrightarrow}1-2\beta\geq 0\Leftrightarrow\beta\leq\dfrac{1}{2}$

Για κάθε $\beta<\dfrac{1}{2}$ είναι $k'(\beta)>0$ και η k συνεχής άρα $k\nearrow\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$.

Για κάθε $\beta>\dfrac{1}{2}$ είναι $k'(\beta)<0$ και η k συνεχής άρα $k\searrow\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

Η k είναι συνεχής και $k\nearrow\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ άρα

$k\left(\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\right)=\left(\lim\limits_{\beta\to-\infty}k(\beta),k\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]=(-1,1]$ και $k\searrow\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ άρα

$k\left(\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)\right)=\left(\lim\limits_{\beta\to+\infty}k(\beta),k\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=(-\infty,1)$ γιατί

- $\lim\limits_{\beta\to-\infty}\left(4\beta e^{2\beta}\right)=\lim\limits_{\beta\to-\infty}\dfrac{4\beta}{e^{-2\beta}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{\beta\to-\infty}\dfrac{4}{-2e^{-2\beta}}=0$

- $\lim\limits_{\beta\to+\infty}k(\beta)=\lim\limits_{\beta\to+\infty}\left(4e^{2\beta}-4\beta e^{2\beta}-1\right)=\lim\limits_{\beta\to+\infty}\left[4e^{2\beta}(1-\beta)-1\right]=-\infty$

Το $0\in k\left(\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\right)$ και $0\in k\left(\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)\right)$ άρα η εξίσωση

$k(\beta)=0\Leftrightarrow 4e^{2\beta}-4\beta e^{2\beta}-1=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες (λόγω μονοτονίας) μία στο διάστημα $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ και μία στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

Άρα έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.

Θέμα Δ

Δ1. Για $x=1$ είναι

$\ln 1+\left(f\left(e^2\right)-2f(e)\right)(1-1)\le f(1)\le f(e)\ln 1+\left(f(e)-1\right)(1-1)^2\Leftrightarrow$

$0\le f(1)\le 0\Leftrightarrow f(1)=0$

Δ2. $\ln x+\left(f\left(e^2\right)-2f(e)\right)(x-1)\le f(x)\le f(e)\ln x+\left(f(e)-1\right)(x-1)^2\Leftrightarrow$

$\left(\ln x+\left(f\left(e^2\right)-2f(e)\right)(x-1)\le f(x)\Leftrightarrow \ln x+\left(f\left(e^2\right)-2f(e)\right)(x-1)-f(x)\le 0\right)$ (1) και

$\left(f(x)\le f(e)\ln x+\left(f(e)-1\right)(x-1)^2\Leftrightarrow f(x)-f(e)\ln x-\left(f(e)-1\right)(x-1)^2\le 0\right)$ (2). Έστω $b(x)=\ln x+\left(f\left(e^2\right)-2f(e)\right)(x-1)-f(x),\ x>0$.

Από τη σχέση (1) ισοδύναμα έχουμε: $b(x)\le 0\Leftrightarrow b(x)\le b(1)$, δηλαδή η συνάρτηση b έχει μέγιστο στο $x=1$ που βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η b είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$b'(x)=\dfrac{1}{x}+f\left(e^2\right)-2f(e)-f'(x)$, λόγω του θεωρήματος Fermat είναι

$b'(1)=0\Leftrightarrow 1+f\left(e^2\right)-2f(e)-f'(1)=0\Leftrightarrow f\left(e^2\right)=2f(e)$ (3)

Έστω $d(x)=f(x)-f(e)\ln x-\left(f(e)-1\right)(x-1)^2,\ x>0$.

Από τη σχέση (2) ισοδύναμα έχουμε: $d(x)\le 0\Leftrightarrow d(x)\le d(1)$, δηλαδή η συνάρτηση d έχει μέγιστο στο $x=1$ που βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η d είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$d'(x)=f'(x)-f(e)\dfrac{1}{x}-2\left(f(e)-1\right)(x-1)$, λόγω του θεωρήματος Fermat είναι

$d'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)-f(e)=0\Leftrightarrow f(e)=1$ και από την (3): $f\left(e^2\right)=2$.

Τότε η σχέση $\ln x+\left(f\left(e^2\right)-2f\left(e\right)\right)\left(x-1\right)\le f\left(x\right)\le f\left(e\right)\ln x+\left(f\left(e\right)-1\right)\left(x-1\right)^2$ γίνεται: $\ln x\le f\left(x\right)\le \ln x \Leftrightarrow f\left(x\right)=\ln x,\ x>0$

Δ3. $f^2\left(x\right)=2xf\left(x\right)-1\Leftrightarrow \ln^2 x-2x\ln x+1=0$

Έστω $h\left(x\right)=\ln^2 x-2x\ln x+1,\ x\in\left(0,+\infty\right)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ με: $h'\left(x\right)=2\dfrac{\ln x}{x}-2\ln x-2$ και $h''\left(x\right)=2\dfrac{1-\ln x}{x^2}-\dfrac{2}{x}=2\dfrac{1-\ln x-x}{x^2}$.

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της h'' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $1-\ln x-x$.

Έστω $\varphi\left(x\right)=1-\ln x-x$, $x\in\left(0,+\infty\right)$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ με: $\varphi'\left(x\right)=-\dfrac{1}{x}-1$. Είναι $\varphi'\left(x\right)<0$ άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,+\infty\right)$. Παρατηρούμε ότι $\varphi\left(1\right)=0$. Για κάθε $x>1$ είναι $\varphi\left(x\right)<\varphi\left(1\right)=0$, άρα $h''\left(x\right)<0$ και η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[1,+\infty\right)$. Άρα $h'\left(x\right)<h'\left(1\right)=-2<0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[1,+\infty\right)$. Για κάθε $0<x<1$ είναι $\varphi\left(x\right)>\varphi\left(1\right)=0$, άρα $h''\left(x\right)>0$ και η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,1\right]$. Άρα $h'\left(x\right)<h'\left(1\right)=-2<0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,1\right]$.Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left(0,+\infty\right)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln^2 x-2x\ln x+1\right)=+\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln^2 x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x\right)=0$.

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{\ln^2 x}{x}-2\ln x+\dfrac{1}{x}\right)\right]=-\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2\ln x}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$. Για το σύνολο τιμών της h έχουμε:

$h\left(\left(0,+\infty\right)\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}h\left(x\right),\lim\limits_{x\to 0^+}h\left(x\right)\right)=\left(-\infty,+\infty\right)=\mathbb{R}$.

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της h και η h είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,+\infty\right)$ τέτοιο, ώστε $h\left(x_0\right)=0$.

Δ4. Έστω $f\left(t\right)=\ln t,\ t\in\left[x,x+1\right],\ x>0$.

Η f είναι συνεχής στο $[x,x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$ με $f'(t)=\frac{1}{t}$, οπότε λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}=\ln(x+1)-\ln x.$$

Είναι $x<\xi<x+1$ άρα $\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x}\Leftrightarrow\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$.

Δ5. α) Είναι : $g'(x)=\ln(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}-\ln x-\frac{x+1}{x}\Leftrightarrow$

$$g'(x)=\left(\ln(x+1)-\ln x\right)+\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x}=-\frac{1}{x+1}<0,$$ άρα

$g\searrow(0,+\infty)$.

β) $(x+1)^x=x^{x+1}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln(x+1)^x=\ln x^{x+1}\Leftrightarrow x\ln(x+1)-(x+1)\ln x=0\Leftrightarrow g(x)=0$

Είναι : $g(x)=x\ln(x+1)-x\ln x-\ln x=x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)-\ln x\Leftrightarrow$

$$g(x)=x\ln\frac{x+1}{x}-\ln x=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln x.$$

Είναι : $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=0$

και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=+\infty$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

Για το σύνολο τιμών της g, έχουμε

$$g(A)=g\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}g(x),\lim_{x\to0^+}g(x)\right)=\mathbb{R}.$$

Επειδή $0\in g(A)$ και $g\searrow(0,+\infty)$ υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $g(x_1)=0$.

8. α) $F(x)=2x^3+x^2+3x+c$ **β)** $F(x)=-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu 2x+c$

γ) $F(x)=-e^{-x}+e^{2x}+c$

δ) $F'(x)=f(x)=e^x+4x+\dfrac{2}{x}\Leftrightarrow$

$F'(x)=\left(e^x+2x^2+2\ln x\right)'\Leftrightarrow F(x)=e^x+2x^2+2\ln x+c$

ε) $F(x)=\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x+c$

στ) $F'(x)=f(x)=\dfrac{4x^2-4x+1}{x^2}\Leftrightarrow F'(x)=4-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow$

$F'(x)=\left(4x-4\ln x-\dfrac{1}{x}\right)'\Leftrightarrow F(x)=4x-4\ln x-\dfrac{1}{x}+c$

ζ) $F'(x)=f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^3x+1-\sigma\upsilon\nu^2x+3}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\sigma\upsilon\nu x-1+4\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}\Leftrightarrow$

$F'(x)=\left(\eta\mu x+4\varepsilon\varphi x-x\right)'\Leftrightarrow F(x)=\eta\mu x+4\varepsilon\varphi x-x+c$

η) $F'(x)=f(x)=3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{2}}=\left(3\dfrac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+6\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)'\Leftrightarrow$

$F(x)=3\cdot\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+6\cdot\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c=\dfrac{9}{4}\sqrt[3]{x^4}+4\sqrt{x^3}+c=\dfrac{9}{4}x\sqrt[3]{x}+4x\sqrt{x}+c$

9. α) $F'(x)=f(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(x)'e^{-x}+x\left(e^{-x}\right)'\Leftrightarrow F(x)=xe^{-x}+c$

β) $F'(x)=f(x)=(x)'\eta\mu x+x(\eta\mu x)'\Leftrightarrow F(x)=x\eta\mu x+c$

γ) $F'(x)=f(x)=(x)'\ln x+x(\ln x)'\Leftrightarrow F(x)=x\ln x+c$

δ) $F'(x)=f(x)=\dfrac{(\eta\mu x)'\cdot x+\eta\mu x(x)'}{x^2}=\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)'\Leftrightarrow F(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}+c$

10. α) $F'(x)=f(x)=4\left(x^2+4x-1\right)^3\left(x^2+4x-1\right)'\Leftrightarrow F(x)=\left(x^2+4x-1\right)^4+c$

β) $F'(x)=f(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x=\frac{1}{2}(\eta\mu x)'\eta\mu x=\left(\frac{1}{2}\eta\mu^2 x\right)'\Leftrightarrow F(x)=\frac{\eta\mu^2 x}{2}+c$

γ) $F'(x)=f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{3x^2+6x+8}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6x+6}{\sqrt{3x^2+6x+8}}=\frac{1}{3}\frac{\left(3x^2+6x+8\right)'}{2\sqrt{3x^2+6x+8}}\Leftrightarrow$

$F'(x)=\left(\frac{\sqrt{3x^2+6x+8}}{3}\right)'\Leftrightarrow F(x)=\frac{\sqrt{3x^2+6x+8}}{3}+c$

δ) $F'(x)=f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}=\ln^2 x\cdot(\ln x)'=\frac{1}{3}\cdot 3\ln^2 x\cdot(\ln x)'=\left(\frac{1}{3}\ln^3 x\right)'\Leftrightarrow$

$F(x)=\frac{\ln^3 x}{3}+c$

ε) $F'(x)=f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}=e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)'=\left(e^{\sqrt{x}}\right)'\Leftrightarrow F(x)=e^{\sqrt{x}}+c$

στ) $F'(x)=f(x)=\frac{\left(x^2+4\right)'}{x^2+4}=\left(\ln\left(x^2+4\right)\right)'\Leftrightarrow F(x)=\ln\left(x^2+4\right)+c$

ζ) $F'(x)=f(x)=f(x)=(\alpha x+\beta)'\,\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)=\left(\eta\mu(\alpha x+\beta)\right)'\Leftrightarrow$

$F(x)=\eta\mu(\alpha x+\beta)+c$

η) $F'(x)=f(x)=2^x-\frac{(3x+1)'}{3x+1}=\left(\frac{2^x}{\ln 2}-\ln(3x+1)\right)'\Leftrightarrow$

$F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}-\ln(3x+1)+c$

θ) $F'(x)=f(x)=\sigma\varphi x=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x}=\left(\ln|\eta\mu x|\right)'\Leftrightarrow$

$F(x)=\ln|\eta\mu x|+c$

ι) $F'(x)=f(x)=\frac{1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{1}{\frac{1+e^x}{e^x}}=\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}=\left(\ln\left|e^x+1\right|\right)'\Leftrightarrow$

$F(x)=\ln\left(e^x+1\right)+c$

11. α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+1)=1=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^x=1$ άρα

η f είναι συνεχής στο 0 και επειδή είναι συνεχής στα $(-\infty,0]$, $(0,+\infty)$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έστω F αρχική της f. Για $x\le 0$ είναι $F(x)=x^2+x+c_1$, $c_1\in\mathbb{R}$ ενώ για $x>0$ $F(x)=e^x+c_2$, $c_2\in\mathbb{R}$. Άρα $F(x)=\begin{cases}x^2+x+c_1, & x\le 0\\ e^x+c_2, & x>0\end{cases}$ Όμως η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)\Leftrightarrow$

$c_1=1+c_2\Leftrightarrow c_2=c_1-1$. Άρα $F(x)=\begin{cases}x^2+x+c_1, & x\le 0\\ e^x-1+c_1, & x>0\end{cases}$, $c_1\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ άρα η f είναι συνεχής στο 0 και επειδή είναι συνεχής στα $(-\infty,0]$, $(0,+\infty)$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έστω F αρχική της f. Για $x\le 0$ είναι $F'(x)=\eta\mu x+x=\left(-\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{x^2}{2}\right)'\Leftrightarrow$

$F(x)=-\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{x^2}{2}+c_1$, $c_1\in\mathbb{R}$ ενώ για $x>0$

$F'(x)=\sigma\upsilon\nu x-1=(\eta\mu x-x)'\Leftrightarrow F(x)=\eta\mu x-x+c_2$, $c_2\in\mathbb{R}$.

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)\Leftrightarrow -1+c_1=c_2$.

Άρα $F(x)=\begin{cases}-\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{x^2}{2}+c_1, & x\le 0\\ \eta\mu x-x-1+c_1, & x>0\end{cases}$, $c_1\in\mathbb{R}$.

γ) Είναι $f(x)=\begin{cases}-x+2, & x<2\\ x-2, & x\ge 2\end{cases}$, οπότε ανάλογα βρίσκουμε

$F(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+2x+c_1, & x<2\\ \dfrac{x^2}{2}-2x+c_1+4, & x\ge 2\end{cases}$, $c_1\in\mathbb{R}$.

δ) Έχουμε $f(x)=\left|2x\left(2x^2+1\right)\right|=2|x|\cdot\left(2x^2+1\right)$ οπότε

$f(x)=\begin{cases}-4x^3-2x, & x<0\\ 4x^3+2x, & x\ge 0\end{cases}$ και βρίσκουμε $F(x)=\begin{cases}-x^4-x^2+c_1, & x<0\\ x^4+x^2+c_1, & x\ge 0\end{cases}$, $c_1\in\mathbb{R}$.

12.α) Θα εργαστούμε με την εις άτοπο απαγωγή.
Υποθέτουμε ότι η f έχει παράγουσα την F. Τότε η F θα είναι παράγουσα της f σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $(0,+\infty)$.

Άρα η F έχει μορφή $F(x)=\begin{cases} c_1 & , x\le 0 \\ x+c_2 & , x>0 \end{cases}$ με $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

1ος τρόπος: (Χρήση μόνον της παραγωγισιμότητας)

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ επομένως και στο μηδέν άρα πρέπει:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{c_1}-\cancel{c_1}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+c_2-c_1}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{c_2-c_1}{x}\right)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{c_2-c_1}{x}\right)=0$$ όμως είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{c_2-c_1}{x}\right)=\begin{cases} 1 & , \text{αν } c_1=c_2 \\ +\infty & , \text{αν } c_1<c_2 \\ -\infty & , \text{αν } c_1>c_2 \end{cases}$$ άρα σε καμία περίπτωση δεν είναι

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{c_1-c}{x}\right)=0$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα η f δεν έχει παράγουσα.

2ος τρόπος: (Χρήση συνέχειας και παραγωγισιμότητας)

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής.

Αφού F συνεχής στο μηδέν τότε:

$$\lim_{x\to 0^-}F(x)=\lim_{x\to 0^+}F(x)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}(c_1)=\lim_{x\to 0^+}(x+c_2)\Leftrightarrow c_1=c_2$$

Άρα $F(x)=\begin{cases} c_1 & , x\le 0 \\ x+c_1 & , x>0 \end{cases}$ και λόγω της παραγωγισιμότητας στο μηδέν θα

ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{c_1}-\cancel{c_1}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+\cancel{c_1}-\cancel{c_1}}{x}\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}\Leftrightarrow 0=1$$ πράγμα άτοπο

άρα η f δεν έχει παράγουσα.

β) Θα εργαστούμε με την εις άτοπο απαγωγή.

Υποθέτουμε ότι η g έχει παράγουσα την G. Τότε η G θα είναι παράγουσα της g σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $(1,+\infty)$.

Άρα η G έχει μορφή $G(x)=\begin{cases} x^4-x+c_1 & , x\le 1 \\ x^2-x+c_2 & , x>1 \end{cases}$ με $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

1ος τρόπος: (Χρήση μόνον της παραγωγισιμότητας)

Η G είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ επομένως και στο $x_0=1$ άρα πρέπει:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{G(x)-G(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{G(x)-G(1)}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{x^4-x+c_1-c_1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x+c_2-c_1}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{x(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x(x-1)}{x-1}+\frac{c_1-c_2}{x-1}\right)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[x(x^2+x+1)\right]=3$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x+\frac{c_2-c_1}{x-1}\right)=\begin{cases}1 & ,\ \text{αν } c_1=c_2\\ +\infty & ,\ \text{αν } c_1<c_2\\ -\infty & ,\ \text{αν } c_1>c_2\end{cases}$ άρα σε

καμία περίπτωση δεν είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x+\frac{c_2-c_1}{x-1}\right)=3$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα η g δεν έχει παράγουσα.

Αυξημένης δυσκολίας

13. Είναι $F'(x)=f(x)$.

$$F'(x)=1+\frac{1}{\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right)^2}\cdot 2\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right)\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right)'=1+\frac{4\alpha}{x^2-\alpha^2}=\frac{x^2-\alpha^2+4\alpha}{x^2-\alpha^2}$$

Πρέπει $\frac{x^2-\alpha^2+4\alpha}{x^2-\alpha^2}=\frac{x^2+3}{x^2-9}\Leftrightarrow$

$x^4+(4\alpha-\alpha^2-9)x^2+9\alpha^2-36\alpha=x^4+(3-\alpha^2)x^2-3\alpha^2$, οπότε

$$\begin{cases}4\alpha-\alpha^2-9=3-\alpha^2\\ 9\alpha^2-36\alpha=-3\alpha^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=3\\ 12\alpha^2-36\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=3\\ 12\alpha(\alpha-3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=3\\ \alpha=0\ \text{ή}\ 3\end{cases}.$$

Άρα $\alpha=3$.

14. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει $F'(x)=f(x)$. Είναι

$$F'(x)=2(\alpha x+\beta)e^{2x}+e^{2x}\alpha=e^{2x}(2\alpha x+2\beta+\alpha)$$

Οπότε $e^{2x}(2\alpha x+2\beta+\alpha)=e^{2x}(2x+3)\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha=2\\ 2\beta+\alpha=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\end{cases}$

Αρχική συνάρτηση και γραφική παράσταση

15.α) Έστω ότι η C παριστάνει την f τότε $M(x_1,y_1)\equiv M(x_1,1)$ αφού

$f(x_1)=1$ και η (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=\frac{y_1}{x_1}=\frac{1}{x_1}$.

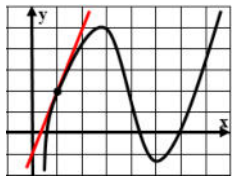
Άρα $f'(x_1)=\frac{1}{x_1}\Leftrightarrow G''(x_1)=\frac{1}{x_1}\Leftrightarrow x_1 G''(x_1)=1$ πράγμα άτοπο.

Άρα η C παριστάνει την G άρα η (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=G'(x_1)=f(x_1)=1$ και επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι $(\varepsilon): y=x$. Επομένως $M(x_1,y_1)\equiv M(x_1,x_1)$ άρα $G(x_1)=x_1$, άρα η εξίσωση $G(x)=x$ έχει ρίζα.

β) Έστω ότι η C_f έχει εφαπτομένη την (ε), δηλαδή ότι οι f και G έχουν κοινή εφαπτομένη την (ε) σε κοινό τους σημείο έστω $N(x_0,x_0)$ αφού είναι και σημείο της (ε). Θα ισχύει ότι $G'(x_0)=f'(x_0)=1$ και $G(x_0)=f(x_0)=x_0$. Όμως $G'(x_0)=f(x_0)$ και $G''(x_0)=f'(x_0)$ άρα $G'(x_0)=G''(x_0)=f(x_0)=f'(x_0)=1=x_0$ και τότε για $x=x_0=1$ στην αρχική σχέση έχουμε $x_0G''(x_0)\neq 1\Leftrightarrow 1\cdot 1\neq 1$ πράγμα άτοπο.

16. Αν F είναι μία αρχική της f τότε όλες οι αρχικές της f είναι της μορφής $F(x)+c$ με $c\in\mathbb{R}$. Άρα οι γραφικές τους παραστάσεις προκύπτουν από κατακόρυφη μετατόπιση μεταξύ τους και δεν έχουν κοινά σημεία. Το μόνο ζευγάρι που προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση μεταξύ τους είναι για τις C_1, C_2. Επίσης θα είναι $-f(x)=(-F(x))'$ άρα οι αρχικές της $-f$ είναι της μορφής $-F(x)+c$ με $c\in\mathbb{R}$, επομένως είναι η F συμμετρική ως προς τον x΄x άξονα και μετατοπισμένη κατακόρυφα κατά c. Μόνον η C_3 το ικανοποιεί.

17. Μία πιθανή λύση του μαθητή είναι να σχεδίασε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της αρχικής στο 1 όπως στο διπλανό σχήμα. Παρατήρησε ότι εκτός από το σημείο Α(1,2) διέρχεται και από το σημείο Β(2,5) άρα έχει κλίση $\lambda_\varepsilon=\frac{5-2}{2-1}=3$ άρα η παράγωγος της αρχικής στο 1, δηλαδή το $f(1)$ ισούται με 3. Η λύση του μαθητή είναι τυχαία και δεν θα μπορούσε να βγαίνει σωστή πάντα, καθώς η σχεδίαση της εφαπτομένης δεν μπορεί να γίνει με ακρίβεια. Δεν θα μπορούσε να γνωρίζει ότι διέρχεται από το Β(2,5).



18. Έστω ότι η f έχει παράγουσα F, τότε θα είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $F'(x)=f(x)$. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1^-}F'(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1=f(1)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1^+}F'(x)=1=F'(1)$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 1^+}F'(x)=1$ και

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}F'(x)=0$ άρα η F δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1, πράγμα άτοπο

Θεωρητικές ασκήσεις

19. Είναι $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=g(x)$ οπότε

$\Phi'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-g(x)=h(x)$

20. Γνωρίζουμε ότι (1) $\left.\begin{matrix}f(-x)=f(x)\\ F'(x)=f(x)\end{matrix}\right\}$ οπότε $F'(x)=f(-x)$ (2)

Στην (1) θέτουμε όπου $x\to -x$ οπότε $F'(-x)=f(-x)$ (3)

Από (2), (3): $F'(-x)=F'(x)\Leftrightarrow F(-x)=-F(x)+c$. Είναι $F(0)=0$ άρα $c=0$

Αυξημένης δυσκολίας

21.α) Στην (1) $f(x)\cdot F(1-x)=e$ θέτουμε $x=0$ οπότε

$f(0)\cdot F(1)=e\Rightarrow 1\cdot F(1)=e\Leftrightarrow F(1)=e$

β) $g'(x)=F'(x)F(1-x)-F(x)F'(1-x)=$

$f(x)F(1-x)-F(x)f(1-x)=e-e=0$

Γιατί αν στην (1) θέσω $x\to 1-x$ έχουμε $f(1-x)F(x)=e$

Άρα $g(x)=c\Leftrightarrow F(x)\cdot F(1-x)=c$ και για $x=0$

$F(0)\cdot F(1)=c\Leftrightarrow 1\cdot e=c\Leftrightarrow c=e$. Άρα $g(x)=e$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) Από την (1) προκύπτει ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και αφού f συνεχής, διατηρεί πρόσημο. Επειδή $f(0)=1>0$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $F'(x)=f(x)>0$ οπότε $F\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

δ) Είναι $f(x)\cdot F(1-x)=e$ (2).

$F(x)F(1-x)=e$ (3) για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $F(1-x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και από $(2),(3)$ προκύπτει $F(x)=f(x)$ και παραγωγίζοντας $f'(x)=f(x)$. Άρα

$\left.\begin{matrix}f(x)=c\cdot e^x\\ f(0)=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow c=1,$ άρα $f(x)=e^x$.

22.α) Στη σχέση $4\alpha F(x^2)\geq 4\alpha^2+F^2(x)$ θέτουμε $x=0$ και προκύπτει

$\left(F(0)-2\alpha\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow F(0)=2\alpha$, για $x=1$ και προκύπτει

$\left(F(1)-2\alpha\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow F(1)=2\alpha$. Άρα $F(0)=F(1)=2\alpha$

β) Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την F στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$:

$F'(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=0$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σ' ένα σημείο με τετμημένη $x_0=\xi$.

γ) $4\alpha F\left(x^2\right) \ge 4\alpha^2+F^2(x) \Leftrightarrow 4\alpha^2+F^2(x)-4\alpha F\left(x^2\right) \le 0$ (1)

Έστω $g(x)=4\alpha^2+F^2(x)-4\alpha F\left(x^2\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g(0)=g(1)=0$, οπότε η (1) γίνεται: $g(x) \le g(0)$ και $g(x) \le g(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η g έχει μέγιστο στα x = 0 και x = 1.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=2F(x)f(x)-8\alpha x f\left(x^2\right)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι

$g'(0)=0 \Leftrightarrow 2F(0)f(0)=0 \Leftrightarrow 4\alpha f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$ και

$g'(1)=0 \Leftrightarrow 2F(1)f(1)-8\alpha f(1)=0 \Leftrightarrow 4\alpha f(1)-8\alpha f(1)=0 \Leftrightarrow -4\alpha f(1)=0 \Leftrightarrow$

$f(1)=0$. Επομένως η f έχει τουλάχιστον 3 ρίζες..

23. Είναι $F(x)F(1-x)=F\left(x^2\right)$. Παραγωγίζοντας έχουμε:

$F'(x)F(1-x)-F(x)F'(1-x)=F'\left(x^2\right)2x \Leftrightarrow$

$f(x)F(1-x)-F(x)f(1-x)=2xf\left(x^2\right)$ (1) και για $x=0$:

$f(0)F(1)-F(0)f(1)=0 \Leftrightarrow f(0)F(1)=F(0)f(1)$ (2) και για $x=1$:

$f(1)F(0)-F(1)f(0)=2f(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0=2f(1) \Leftrightarrow f(1)=0$

24. Είναι $f(x)=e^{x^2}$ και $F'(x)=f(x)$. Επειδή

$x^2 \ge 0 \Rightarrow e^{x^2} \ge e^0 \Leftrightarrow e^{x^2} \ge 1 \Leftrightarrow f(x) \ge 1$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την F στο $[0,x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0,x)$:

$$F'(\xi)=\frac{F(x)-F(0)}{x} \Leftrightarrow f(\xi)=\frac{F(x)-F(0)}{x} \Leftrightarrow F(x)=xf(\xi)+F(0)$$

Επειδή $f(\xi) \ge 1$ τότε $xf(\xi) \ge x$ και $xf(\xi)+F(0) \ge x+F(0)$ όμως

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+F(0)\right)=+\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(\xi)+F(0)\right)=+\infty$ δηλ. $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.

25. Στην $F(x)G(x)=e^{-2x}$ για $x=0$ έχουμε $F(0)G(0)=1 \Leftrightarrow G(0)=1$. Είναι

$\left(F(x)G(x)\right)' = \left(e^{-2x}\right)' \Leftrightarrow f(x)G(x)+F(x)g(x) = -2e^{-2x}$ (1). Όμως

$f(x)g(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{g(x)}$ και $F(x)G(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow F(x) = \dfrac{e^{-2x}}{G(x)}$,

οπότε η (1) γίνεται: $\dfrac{\cancel{e^{-2x}}}{g(x)}G(x)+\dfrac{\cancel{e^{-2x}}}{G(x)}g(x) = -2\cancel{e^{-2x}} \Leftrightarrow$

$G^2(x)+g^2(x)+2g(x)G(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\left(g(x)+G(x)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow g(x)+G(x) = 0 \Leftrightarrow$

$e^xG'(x)+e^xG(x) = 0 \Leftrightarrow \left(e^xG(x)\right)' = 0 \Leftrightarrow e^xG(x) = c$. Είναι $G(0) = 1$, άρα

$G(x) = e^{-x}$ και $g(x) = G'(x) = -e^{-x}$. Τότε $-e^{-x}f(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow f(x) = -e^{-x}$.

26.α) Θ. Rolle για την $g(x) = F(x)-x^2$ στο $[0,1]$ είναι $\left.\begin{matrix} g(0) = F(0) \\ g(1) = F(1)-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$g(0) = g(1)$ και $g'(x) = F'(x)-2x = f(x)-2x$ οπότε υπάρχει λόγω του

Θ.Rolle υπάρχει $\xi_1 \in (0,1): g'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f(\xi_1) = 2\xi_1$.

β)Για $x \in (0,1)$ είναι $f(x) = \dfrac{F(1)-1-F(x)}{x-1} \Leftrightarrow$

$F'(x)(x-1)+F(x)-F(1)+1 = 0 \Leftarrow \left(F(x)(x-1)-xF(1)+x\right)' = 0$

Θ. Rolle για την $h(x) = F(x)(x-1)-F(0)\cdot x+x$ στο $[0,1]$.

Είναι $h(0) = -F(0)$, $h(1) = -F(1)+1 = -F(0)$ άρα $h(0) = h(1)$ και

$h'(x) = f(x)(x-1)+F(x)-\left(F(1)-1\right)$ άρα υπάρχει $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$h'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow f(\xi_2)(\xi_2-1)+F(\xi_2) = F(1)-1 \overset{\xi_2-1\neq 0}{\Leftrightarrow} f(\xi_2) = \dfrac{F(1)-1-F(\xi_2)}{\xi_2-1}$.

27.α) Είναι $g'(x) = F'(x)-4 = f(x)-4 = \dfrac{4e^x+3}{e^x+4}-4 = \dfrac{-13}{e^x+4} < 0$ άρα $g \searrow$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x)-4x$ ότι είναι γνησίως μονότονη οπότε η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 4x$ θα έχει το πολύ μία ρίζα.

Είναι $h'(x) = f'(x)-4 = ... = \dfrac{-4e^{2x}-19e^x-64}{\left(e^x+4\right)^2} < 0$ οπότε η h είναι $\searrow$.

γ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για F στο $[x, x+1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$:

$F'(\xi) = \dfrac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow (1)\ f(\xi) = F(x+1)-F(x)$. Είναι

$F'(x)=f(x)$ και $F''(x)=f'(x)=\dfrac{13e^x}{(e^x+4)^2}>0\Rightarrow F'\nearrow\mathbb{R}$.Είναι

$x<\xi<x+1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(\xi)<f(x+1)\Leftrightarrow f(x)<F(x+1)-F(x)<f(x+1)$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^x+3}{e^x+4}=4$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+1)\overset{x+1=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=4$ οπότε και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[F(x+1)-F(x)\right]=4$

28.Είναι $f\left(\dfrac{1}{x}\right)F(x)=4x\ \ (1)$

α) Αφού $x>0$ τότε $f\left(\dfrac{1}{x}\right)F(x)=4x>0$ για κάθε $x>0$ οπότε $F(x)\neq 0$ και αφού F συνεχής και $F(1)=2>0$ τότε $F(x)>0$ για κάθε $x>0$.

β) Στην (1) θέτω x το $\dfrac{1}{x}$ και προκύπτει $f(x)F\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{4}{x}\ \ (2)$. Έστω

$g(x)=F\left(\dfrac{1}{x}\right)F(x)$ τότε $g'(x)=F'\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)F(x)+F'(x)F\left(\dfrac{1}{x}\right)=$

$-\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)F(x)+f(x)F\left(\dfrac{1}{x}\right)\overset{(2)}{\underset{(1)}{=}}-\dfrac{1}{x^2}4x+\dfrac{4}{x}=0$ άρα $g(x)=c\Leftrightarrow F\left(\dfrac{1}{x}\right)F(1)=c$

και για $x=1$ είναι $c=F^2(1)=4$ οπότε $F\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot F(x)=4\ \ (3)$

γ) Από (3) είναι $F\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{4}{F(x)}\ \ (4)$. Οπότε από (2) και (4) έχουμε

$f(x)\dfrac{4}{F(x)}=\dfrac{4}{x}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{F(x)}{x}\Leftrightarrow xF'(x)-F(x)=0\Leftrightarrow$

$\dfrac{xF'(x)-F(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{F(x)}{x}\right)'=0\Leftrightarrow\dfrac{F(x)}{x}=c_1$ για $x=1$ προκύπτει $c_1=2$

άρα $F(x)=2x$ οπότε $F'(x)=2$ άρα $f(x)=2$, x> 0.

29.α) Είναι $f(-x)F(x)=4>0\Rightarrow F(x)\neq 0$ και αφού F συνεχής και $F(1)=2>0$ τότε $F(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $f(-x)F(x)=4$ και αντικαθιστώντας όπου x το –x προκύπτει $f(x)F(-x)=4$ (1), άρα $f(x)F(-x)=f(-x)F(x)\Leftrightarrow$

$F'(x)F(-x)+\left(F(-x)\right)'F(x)=0 \Leftrightarrow \left(F(-x)F(x)\right)'=0 \Leftrightarrow F(-x)F(x)=c$.

Είναι $F(0)=2 \Leftrightarrow c=4$ άρα $F(-x)F(x)=4$

γ) $F(-x)F(x)=4 \Leftrightarrow F(-x)=\dfrac{4}{F(x)}$. Τότε η (1) γίνεται:

$f(x)\dfrac{4}{F(x)}=4 \Leftrightarrow F(x)=f(x) \Leftrightarrow F(x)=F'(x) \Leftrightarrow F(x)=c_1e^x$.

$F(0)=2 \Leftrightarrow c_1=2$ άρα $F(x)=2e^x$ και $f(x)=F'(x)=2e^x$.

Προβλήματα

30.α) $K'(x)=3x^2+6x$ ανά προϊόν οπότε είναι

$$\left.\begin{array}{l} K(x)=x^3+3x^2+c \\ K(0)=30.000 \end{array}\right\} \Leftrightarrow c=30.000 \text{, οπότε } K(x)=x^3+3x^2+30.000$$

β) $K(10)=10^3+3\cdot 10^2+30.000=31.300$ €

31.Είναι $P'(t)=\dfrac{1}{5}e^{\frac{t}{5}}=\left(e^{\frac{t}{5}}\right)' \Leftrightarrow P(t)=e^{\frac{t}{5}}+c,\ c\in\mathbb{R}$.

$P(0)=8000 \Leftrightarrow 1+c=8000 \Leftrightarrow c=7999$. Άρα $P(t)=e^{\frac{t}{5}}+7999$.

32.Είναι $f'(t)=350+\dfrac{2}{5}t$ άρα $f(t)=350t+\dfrac{1}{5}t^2+c,\ c\in\mathbb{R}$

$f(0)=0$ οπότε $c=0$ και $f(t)=350t+\dfrac{1}{5}t^2$. Η μέση ημερήσια παραγωγή

είναι $\overline{f}=\dfrac{f(300)-f(0)}{300-0}=\dfrac{350\cdot 300+300\cdot 60}{300}=410$ βιβλία.

33.Έστω $M(x(t),y(t))$ με $x(1)=2$, $x'(t)=1$ και

$y(t)=f(x(t))=(x(t)-2)\left(4(x(t)-1)^2-3(x(t)-1)+1\right)$.

Είναι $x'(t)=1 \Leftrightarrow x'(t)=(t)' \Leftrightarrow x(t)=t+c$ και για $t=1$ είναι $c=1$ άρα

$x(t)=t+1$ άρα $y(t)=(t-1)(4t^2-3t+1)=4t^3-7t^2+4t-1$

Είναι $y'(t)=12t^2-14t+4=4(6t^2-7t+2)$ άρα $y'(t)>0$ για κάθε

$t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$ και $y'(t)<0$ για κάθε $t\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)$. Άρα είναι

$y(t)\nearrow\left[0,\frac{1}{2}\right], y(t)\searrow\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$ και $y(t)\nearrow\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$ άρα η y(t) παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $t=0$ το $y(0)=-1$ και για $t=\frac{2}{3}$ το

$$y\left(\frac{2}{3}\right)=4\frac{8}{27}-7\frac{4}{9}+4\frac{2}{3}-1=\frac{32}{27}-\frac{28}{9}+\frac{8}{3}-1=\frac{32-84+72-27}{27}=-\frac{7}{27}.$$

Είναι $\frac{7}{27}<1\Leftrightarrow -1<-\frac{7}{27}\Leftrightarrow y(0)<y\left(\frac{2}{3}\right)$ άρα η y παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $t=0$. Άρα το κινητό έχει την ελάχιστη τεταγμένη του για $t=0$.

34. Έστω $P(t)$ η τιμή του υπολογιστή. Επειδή η αξία του μειώνεται με ρυθμό ανάλογο της τιμής του είναι $P'(t)=-\alpha P(t)$, $\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} P'(t)+\alpha P(t)=0 \overset{\alpha e^{\alpha t}}{\Leftrightarrow}$

$e^{\alpha t}P'(t)+\alpha e^{\alpha t}P(t)=0\Leftrightarrow\left(e^{\alpha t}P(t)\right)'=0$.

Άρα $e^{\alpha t}P(t)=c$. Αφού $P(0)=1312$ τότε: $e^0P(0)=c\Leftrightarrow c=1312$

Άρα $e^{\alpha t}P(t)=1312$, επίσης $P(2)=820$, άρα

$e^{2\alpha}P(2)=1312\Leftrightarrow e^{2\alpha}820=1312\Leftrightarrow e^{2\alpha}=1,6\Leftrightarrow 2\alpha=\ln 1,6\Leftrightarrow$

$\alpha=\frac{1}{2}\ln 1,6\Leftrightarrow\alpha=\frac{0,47}{2}=0,235$. Οπότε $e^{0,235t}P(t)=1312\Leftrightarrow P(t)=1312e^{-0,235t}$

35. Είναι $Q'(t)=\kappa Q(t)$, $\kappa>0$, τότε: $Q'(t)-\kappa Q(t)=0\Leftrightarrow$

$Q'(t)e^{-\kappa t}-\kappa e^{-\kappa t}Q(t)=0\Leftrightarrow\left(e^{-\kappa t}Q(t)\right)'=0$. Άρα $e^{-\kappa t}Q(t)=c\Leftrightarrow Q(t)=ce^{\kappa t}$.

Είναι $Q(5)=2Q(0)\Leftrightarrow ce^{5\kappa}=2c\Leftrightarrow e^{5\kappa}=2\Leftrightarrow 5\kappa=\ln 2\Leftrightarrow\kappa=\frac{1}{5}\ln 2\ (1)$.

Θέλουμε να βρούμε το χρόνο t όπου

$Q(t)=5Q(0)\Leftrightarrow ce^{\kappa t}=5e\Leftrightarrow e^{\kappa t}=5\Leftrightarrow \kappa t=\ell n5\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\left(\frac{1}{5}\ln 2\right)t=\ln 5\Leftrightarrow t=5\frac{\ln 5}{\ln 2}\Leftrightarrow t=5\cdot 2,32=11,6h$.

Συνδυαστικές ασκήσεις

36. α) Είναι $f'(x)\left(f(x)+1\right)=e^{-f(x)}>0$ άρα τα $f'(x)$ και $f(x)+1$ είναι ομόσημοι. Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$ είναι $f(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)+1\geq 1>0$, οπότε και $f'(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

β) $f'(x)f(x)+f'(x)=e^{-f(x)} \Leftrightarrow$

$f(x)f'(x)e^{f(x)}+f'(x)e^{f(x)}=1 \Leftrightarrow \left(f(x)e^{f(x)}\right)'=(x)' \Leftrightarrow$

$f(x)e^{f(x)}=x+c,\ c\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $f(0)e^{f(0)}=c \Leftrightarrow c=0$, άρα

$f(x)e^{f(x)}=x \Leftrightarrow f(x)=xe^{-f(x)},\ x\geq 0$.

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y,\ y\in[0,+\infty)$, τότε $ye^{y}=x$, $f^{-1}(y)=ye^{y},\ y\in[0,+\infty)$ άρα

$f^{-1}(x)=xe^{x},\ x\geq 0$.

δ) Είναι $f'(x)=\dfrac{e^{-f(x)}}{f(x)+1}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f''(x)=\frac{\left(e^{-f(x)}\right)'\left(f(x)+1\right)-e^{-f(x)}f'(x)}{\left(f(x)+1\right)^2}=\frac{-e^{-f(x)}f'(x)\left(f(x)+1\right)-e^{-f(x)}f'(x)}{\left(f(x)+1\right)^2}$$

Επειδή $e^{-f(x)}>0,\ f(x)+1>0,\ f'(x)>0$, είναι $f''(x)<0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

ε) $f^{-1}(x)\geq 2\alpha ex-2\alpha e+e \Leftrightarrow xe^{x}-2\alpha ex+2\alpha e-e\geq 0$ (1)

Έστω $h(x)=xe^{x}-2\alpha ex+2\alpha e-e,\ x\geq 0$, τότε η (1) γίνεται $h(x)\geq h(1)$, άρα η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $h'(x)=e^{x}+xe^{x}-2\alpha e$ και το $x=1$ βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της g, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι:

$h'(1)=0 \Leftrightarrow e+e-2\alpha e=0 \Leftrightarrow \alpha=1$.

στ) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta=[0,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[0,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$, όμως η f έχει σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-f(x)}}{f(x)+1}\underset{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^{-u}}{u+1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(e^{-u}\dfrac{1}{u+1}\right)=0$, οπότε η C_g έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=0$ δηλαδή τον άξονα x΄x.

$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)}{1}=f'(0)=1$ άρα η C_g δεν έχει κατακόρυφες

ασύμπτωτες.

Τέλος επειδή η C_g έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

ζ) Αρχικά θα εξετάσουμε αν η ευθεία $y=\dfrac{x+e}{2e}=\dfrac{1}{2e}x+\dfrac{1}{2}$ είναι εφαπτομένη της C_f. Είναι $f'(x_0)=\dfrac{1}{2e}\Rightarrow\dfrac{1}{2e}\left(f(x_0)+1\right)=e^{-f(x_0)}\Leftrightarrow 2e^{1-f(x_0)}-f(x_0)-1=0$ (3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=2e^{1-x}-x-1,\ x\geq 0$. Είναι

$\varphi'(x)=-2e^{1-x}-1<0\Rightarrow\varphi\searrow[0,+\infty)$. Η (3) γίνεται:

$\varphi\left(f(x_0)\right)=\varphi(1)\Leftrightarrow f(x_0)=1\Leftrightarrow x_0=f^{-1}(1)=e$ Η εφαπτομένη της A_f στο $x_0=e$ είναι η ευθεία:

$$y-f(e)=f'(e)(x-e)\Leftrightarrow y-1=\frac{1}{2e}(x-e)\Leftrightarrow y=\frac{x-e}{2e}+1=\frac{x+e}{2e}$$

Επειδή η f είναι κοίλη, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\leq\dfrac{x+e}{2e}$ για κάθε $x\geq 0$.

η) Αν $x=0$ είναι $F\left(0+f(0)\right)-F(0)\geq f^2(0)\Leftrightarrow 0\geq 0$ και ισχύει η ισότητα.

Αν $x>0$ τότε λόγω του Θ.Μ.Τ. για την F στο διάστημα $\left[x,x+f(x)\right]$, υπάρχει $\xi\in\left(x,x+f(x)\right)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F\left(x+f(x)\right)-F(x)}{x+f(x)-x}=\frac{F\left(x+f(x)\right)-F(x)}{f(x)}$$

Είναι $F'(x)=f(x)$ και $F''(x)=f'(x)>0$ άρα η F' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε για $x<\xi<x+f(x)$ είναι

$$F'(\xi)>F'(x)\Leftrightarrow\frac{F\left(x+f(x)\right)-F(x)}{f(x)}>f(x)\Leftrightarrow\ F\left(x+f(x)\right)-F(x)>f^2(x).$$

37.α) $F'(x)+xf'(x)=e^x+2e-2\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=e^x+2e-2\Leftrightarrow$

$$\left(xf(x)\right)'=\left(e^x+(2e-2)x\right)'\Leftrightarrow xf(x)=e^x+(2e-2)x+c\Leftrightarrow$$

$f(x)=\dfrac{e^x}{x}+2e-2+\dfrac{c}{x},\ x>0,\ c\in\mathbb{R}$. $f(1)=3e-2\Leftrightarrow c=0$, άρα

$$f(x)=\frac{e^x}{x}+2e-2,\ x>0$$

β) $e^x+2ex=(\alpha+2)x\Leftrightarrow\dfrac{e^x}{x}+2e=\alpha+2\Leftrightarrow f(x)=\alpha$

Είναι $f'(x)=\dfrac{e^x x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=3e-2$, άρα $f(x)\geq 3e-2>4$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ με $\alpha<4$ είναι αδύνατη.

γ) Έστω ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lambda\in\mathbb{R}^*$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xF(x)}{x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)+xf(x)}{1}\Leftrightarrow$$

$\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(F(x)+e^x+(2e-2)x\right)\Leftrightarrow\lambda=+\infty$ αδύνατο. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\pm\infty$.

Έστω $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$, τότε $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F'(x)}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ αδύνατο.

δ) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την F υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$F'(\xi)=F(2)-F(1)\Leftrightarrow f(\xi)=F(2)-F(1)$. Είναι $F(2)+2>3e+F(1)\Leftrightarrow$

$F(2)-F(1)>3e-2\Leftrightarrow f(\xi)>f(1)\overset{f\nearrow[1,+\infty)}{\Leftrightarrow}\xi>1$ που ισχύει.

38.α) $x^2f'(x)=(1-\ln x)f(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\Leftrightarrow\left(\ln f(x)\right)'=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'\Leftrightarrow$

$\ln f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+c,\ c\in\mathbb{R}$. Για $x=1$ είναι $\ln f(1)=\dfrac{\ln 1}{1}+c\Leftrightarrow c=0$ άρα

$\ln f(x)=\dfrac{\ln x}{x}\Leftrightarrow\ln f(x)=\dfrac{1}{x}\ln x=\ln x^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow f(x)=x^{\frac{1}{x}},\ x>0$.

β) Είναι $f(x)=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\frac{\ln x}{x}}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f'(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}}\dfrac{1-\ln x}{x^2}\geq 0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}1-\ln x\geq 0\Leftrightarrow\ln x\leq 1\Leftrightarrow x\leq e$. Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x>e$ είναι $f'(x)<0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

Η f έχει μέγιστο το $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$, οπότε για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\leq f(e)\Leftrightarrow$

$f(x) \le e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}} \le \sqrt[e]{e}$.

γ) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \le e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}} \le e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow \ln x^{\frac{1}{x}} \le \ln e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow$

$e \ln x \le x \Leftrightarrow \ln x^e \le \ln e^x \Leftrightarrow x^e \le e^x$

δ) Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} \underset{\lim\limits_{x \to 0^+} u = -\infty}{\overset{\frac{\ln x}{x} = u}{=}} \lim\limits_{u \to -\infty} e^u = 0$ γιατί

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} \right) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$ άρα η ευθεία $x = 0$ δηλαδή ο

άξονα y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f . Είναι

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \underset{\lim\limits_{x \to +\infty} u = 0}{\overset{\frac{\ln x}{x} = u}{=}} \lim\limits_{u \to 0} e^u = 1$ γιατί

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f .

Επειδή η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

ε) Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, e]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει

αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x \to 0^+} f(x), f(e) \right] = \left(0, e^{\frac{1}{e}} \right]$. Στο διάστημα

$\Delta_2 = (e, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο

σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to e^+} f(x) \right) = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(e) \right) = \left(1, e^{\frac{1}{e}} \right]$.

Είναι $f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2) = \left(1, e^{\frac{1}{e}} \right] \neq \varnothing$ άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$

τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2)$ και η f δεν είναι 1-1. Επειδή η f είναι συνεχής στο

$[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$ και παραγωγίσιμη στα (x_1, x_2) ή (x_2, x_1) , εφαρμόζεται για

την f το θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$.

στ) $\alpha^x - x = 0 \Leftrightarrow \alpha^x = x \Leftrightarrow x \ln \alpha = \ln x \Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1}{x} \ln x \Leftrightarrow \ln \alpha = \ln x^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$

$x^{\frac{1}{x}} = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$. Είναι $f(\Delta_1) = \left(0, e^{\frac{1}{e}} \right]$ και $f(\Delta_2) = \left(1, e^{\frac{1}{e}} \right]$ από

προηγούμενο ερώτημα.

Αν $\alpha \le 0$ τότε το α δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f, οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ είναι αδύνατη.

- Αν $\alpha \in (0,1]$ τότε $\alpha \in f(\Delta_1)$ και $\alpha \notin f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα που βρίσκεται στο Δ_1.
- Αν $\alpha \in \left(1, e^{\frac{1}{e}}\right)$ τότε $\alpha \in f(\Delta_1)$ και $\alpha \in f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1, Δ_2.
- Τέλος αν $\alpha \in \left[e^{\frac{1}{e}}, +\infty\right)$ τότε το $\alpha \in f(\Delta_1)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα που βρίσκεται στο Δ_1 και συγκεκριμένα είναι η $x=e$.

ζ) i. Είναι $F'(x)=f(x)$ και $F''(x)=f'(x)<0$ για κάθε $x>e$, οπότε η F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$. Για την F εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right], \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοια, ώστε

$$F'(\xi_1)=\frac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-F(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-F(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και}$$

$$F'(\xi_2)=\frac{F(\beta)-F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{F(\beta)-F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Είναι $\xi_1<\xi_2 \overset{F'\searrow}{\Leftrightarrow} F'(\xi_1)>F'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-F(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} > \frac{F(\beta)-F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Leftrightarrow$

$F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-F(\alpha)>F(\beta)-F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow 2F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>F(\alpha)+F(\beta)$ για κάθε $e<\alpha<\beta$.

ii. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο $x=e$ έχει εξίσωση:

$$y-F(e)=F'(e)(x-e) \Leftrightarrow y-1=e^{\frac{1}{e}}(x-e) \Leftrightarrow y=x\sqrt[e]{e}-e^{\frac{1}{e}+1}+1=x\sqrt[e]{e}-e^{\frac{e+1}{e}}+1$$

Επειδή $F''(x)=f'(x)<0$ για κάθε $x>e$, η F είναι κοίλη στο διάστημα $[e,+\infty)$, οπότε βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του

σημείου επαφής, δηλαδή $F(x) < x\sqrt[e]{e} + 1 - e^{\frac{e+1}{e}}$ για κάθε $x > e$ και για $x = e$ είναι $F(e) = e \cdot \sqrt[e]{e} + 1 - e^{\frac{e+1}{e}}$. Οπότε η εξίσωση $F(x) = x\sqrt[e]{e} + 1 - e^{\frac{e+1}{e}}$ έχει μοναδική ρίζα την $x = e$ στο διάστημα $[e, +\infty)$.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

24769.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \frac{(x+1)'}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (-1, 0)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-1, 0]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $F'(x) = f(x)$ και $F''(x) = f'(x) > 0$, οπότε η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.

γ) i. ε: $y - F(1) = F'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - \ln 2 = f(1)(x-1) \Leftrightarrow$

$$y - \ln 2 = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)(x-1) \Leftrightarrow$$

$$y = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)x - \ln 2 + \frac{1}{2} + \ln 2 \Leftrightarrow y = \left(\frac{2\ln 2 - 1}{2}\right)x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \left(\frac{\ln 4 - 1}{2}\right)x + \frac{1}{2}.$$

ii. Επειδή η F είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, οπότε για κάθε $x > 0$ ισχύει $F(x) \geq \left(\frac{\ln 4 - 1}{2}\right)x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2F(x) \geq (\ln 4 - 1)x + 1 \Leftrightarrow$

$$2F(x) - 1 \geq (\ln 4 - 1)x \Leftrightarrow \frac{2F(x) - 1}{x} \geq \ln 4 - 1.$$

32694.

α) i.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$F' = f$	$-$	0	$+$ 0 $-$	0	$+$
F	↘	↗	↘	↗	

ii. Η F έχει τοπικό ελάχιστο στο x_1, τοπικό μέγιστο στο 0 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

β) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η C_3 έχει τη μονοτονία και τα ακρότατα της F, οπότε αυτή είναι η γραφική της παράσταση. Επομένως η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f΄.

32693.α) Είναι $F'(x)=f(x)$. Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ είναι $f(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ είναι $f(x)>0$, επειδή η F είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$. Η F έχει τοπικά ελάχιστα τα $F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και τοπικό μέγιστο το $F(0)$.

β) Επειδή η συνάρτηση που αντιπροσωπεύει τη C_3 έχει τη μονοτονία και τα ακρότατα της F, η C_3 είναι η γραφική παράσταση της F και η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f΄.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=12x^2-2$ και

$$F'(x)=f(x)=4x^3-2x\Leftrightarrow F'(x)=\left(x^4-x^2\right)'\Leftrightarrow F(x)=x^4-x^2+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Στο σχήμα βλέπουμε ότι $F(0)=0$, άρα $c=0$, οπότε $F(x)=x^4-x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ τότε

$F'(x)=\alpha\ln x+\beta+x\frac{\alpha}{x}=\alpha\ln x+\beta+\alpha$. Για κάθε $x>0$ είναι

$$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\alpha\ln x+\beta+\alpha=-\ln x\Leftrightarrow(\alpha+1)\ln x=-\alpha-\beta\ (1)$$

Αν $\alpha\neq-1$ τότε η (1) γίνεται $\ln x=\frac{-\alpha-\beta}{\alpha+1}\Leftrightarrow x=e^{\frac{-\alpha-\beta}{\alpha+1}}$ απορρίπτεται γιατί αληθεύει για μία μόνο τιμή του x και όχι για κάθε $x>0$.

Αν $\alpha=1$ η (1) γίνεται $0=1-\beta\Leftrightarrow\beta=1$. **Σωστή απάντηση Γ.**

2. Είναι $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}}{\left(\sqrt{x-3}\right)^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2}\Leftrightarrow$

$F'(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}}{-5}=-\dfrac{1}{5}(x-3)^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{5}(x+2)^{\frac{1}{2}}$

Οπότε $F(x)=\dfrac{1}{5}\dfrac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{5}\dfrac{(x-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{15}\sqrt{(x+2)^3}-\dfrac{2}{15}\sqrt{(x-3)^3}$

Σωστή απάντηση Α.

3. Στη σχέση $f(x)F(x)=-e^{-2x}$ (1) για $x=0$ έχουμε

$f(0)F(0)=-1\Leftrightarrow F(0)=-1$. Από την (1) $\Leftrightarrow F'(x)F(x)=-e^{-2x}\Leftrightarrow$

$2F'(x)F(x)=-2e^{-2x}\Leftrightarrow\left(F^2(x)\right)'=\left(e^{-2x}\right)'\Leftrightarrow F^2(x)=e^{-2x}+c$, για $x=0$ είναι

$F^2(0)=1+c\Leftrightarrow c=0$,συνεπώς $F^2(x)=e^{-2x}$ (2).

Είναι $e^{-2x}\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως $F^2(x)\neq 0\Leftrightarrow F(x)\neq 0$, αφού η F είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο. Είναι $F(0)=-1<0$ άρα από (2)

$F(x)=-e^{-x}$, οπότε $F'(x)=\left(-e^{-x}\right)'\Leftrightarrow f(x)=e^{-x}$. **Σωστή απάντηση Β.**

4. Είναι $f(x)=e^{x-F(x)}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^x}{e^{F(x)}}\Leftrightarrow e^{F(x)}f(x)=e^x\Leftrightarrow$

$\left(e^{F(x)}\right)'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow e^{F(x)}=e^x+c$ (2). Στη σχέση $f(x)=e^{x-F(x)}$ για $x=1$ έχουμε

$f(1)=e^{1-F(1)}\Leftrightarrow 1=e^{1-F(1)}\Leftrightarrow 1-F(1)=0\Leftrightarrow F(1)=1$.

Στην (2) για $x=1$ έχουμε $e^{F(1)}=e+c\Leftrightarrow c=0$. Άρα $e^{F(x)}=e^x\Leftrightarrow F(x)=x$

συνεπώς $F'(x)=1\Leftrightarrow f(x)=1$. **Σωστή απάντηση Γ.**

5. Είναι $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $f'(1)=2$ και $f(1)=0$. Έχουμε

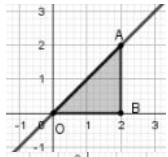
$$\lim_{x\to 1}\frac{F(x)}{(x-1)^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{F'(x)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{2(x-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

Σωστή απάντηση Δ.

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»								
1. Σ	**2.** Λ	**3.** Σ	**4.** Σ	**5.** Σ	**6.** Λ	**7.** Λ	**8.** Σ	**9.** Λ
10. Λ	**11.** Λ	**12.** Λ	**13.** Σ	**14.** Λ	**15.** Σ	**16.** Σ	**17.** Λ	**18.** Σ
19. Λ								

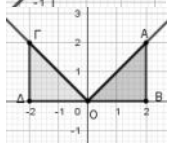
36 Ορισμένο Ολοκλήρωμα

26. Σχεδιάζουμε την ευθεία y= x, τότε



$$\int_0^2 x\,dx = (OAB) = \frac{1}{2}(OB)(OA) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2 .$$

Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$, τότε



$$\int_{-2}^2 |x|\,dx = \int_{-2}^0 |x|\,dx + \int_0^2 |x|\,dx = (O\Gamma\Delta) + (OAB) = 2+2 = 4 .$$

Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

27.α) $\int_7^3 f(x)\,dx = -\int_3^7 f(x)\,dx = -8$.

β) $\int_7^9 f(x)\,dx = \int_7^3 f(x)\,dx + \int_3^9 f(x)\,dx = -8+9 = 1$.

γ) $\int_3^5 f(x)\,dx = \int_3^7 f(x)\,dx + \int_7^5 f(x)\,dx = 8-4 = 4$.

δ) $\int_5^9 f(x)\,dx = \int_5^3 f(x)\,dx + \int_3^9 f(x)\,dx = -4+9 = 5$.

28. $\int_0^3 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx \Leftrightarrow$

$\cancel{\int_0^2 f(x)\,dx} + \int_2^3 f(x)\,dx + \cancel{\int_2^4 f(x)\,dx} = \cancel{\int_0^2 f(x)\,dx} + \int_1^2 f(x)\,dx + \cancel{\int_2^4 f(x)\,dx} \Leftrightarrow$

$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx$.

29. $\int_1^5 f(x)\,dx > \int_2^3 f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)\,dx + \cancel{\int_2^3 f(x)\,dx} + \int_3^5 f(x)\,dx > \cancel{\int_2^3 f(x)\,dx} \Leftrightarrow$

$\int_1^2 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx > 0$ ισχύει γιατί $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$\int_1^2 f(x)\,dx > 0,\ \int_3^5 f(x)\,dx > 0$.

30. $\int_1^2 (f(x) - 2g(x))\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)\,dx - 2\int_1^2 g(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow$

$\int_1^2 f(x)\,dx = 2\int_1^2 g(x)\,dx + 1$ (1).

$\int_2^1 (2f(x) + g(x))\,dx = -7 \Leftrightarrow -\int_1^2 (2f(x) + g(x))\,dx = -7 \Leftrightarrow$

$\int_1^2 (2f(x) + g(x))\,dx = 7 \Leftrightarrow 2\int_1^2 f(x)\,dx + \int_1^2 g(x)\,dx = 7 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$2\left(2\int_1^2 g(x)\,dx + 1\right) + \int_1^2 g(x)\,dx = 7 \Leftrightarrow$

$4\int_1^2 g(x)\,dx + 2 + \int_1^2 g(x)\,dx = 7 \Leftrightarrow 5\int_1^2 g(x)\,dx = 5 \Leftrightarrow \int_1^2 g(x)\,dx = 1$

και από τη σχέση (1) $\Rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx = 3$.

Τότε $\int_1^2 \left(3f(x)-4g(x)\right)dx = 3\int_1^2 f(x)dx - 4\int_1^2 g(x)dx = 9-4=5$.

31. Είναι $\int_{\lambda+3}^{\lambda^2+1} \frac{4x^2-3x-5}{x^2+4}dx + \int_{\lambda^2+1}^{\lambda+3} \frac{3x^2-3x-9}{x^2+4}dx = \int_{-1}^{1} 2dx \Leftrightarrow$

$\int_{\lambda+3}^{\lambda^2+1} \left(\frac{4x^2-3x-5}{x^2+4} - \frac{3x^2-3x-9}{x^2+4}\right)dx = 2(1+1) \Leftrightarrow \int_{\lambda+3}^{\lambda^2+1} \frac{x^2+4}{x^2+4}dx = 4 \Leftrightarrow$

$\int_{\lambda+3}^{\lambda^2+1} 1dx = 4 \Leftrightarrow \lambda^2+1-\lambda-3=4 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-6=0 \Leftrightarrow \lambda=3$ ή $\lambda=-2$

32. $A = \int_3^6 \frac{2-x^2-4x}{x^3-1}dx + \int_3^6 \frac{x}{x-1}dx + \int_3^6 \frac{3}{x^2+x+1}dx \Leftrightarrow$

$A = \int_3^6 \left(\frac{2-x^2-4x}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{\overset{x^2+x+1}{\overline{x}}}{x-1} + \frac{\overset{x-1}{\overline{3}}}{x^2+x+1}\right)dx \Leftrightarrow$

$A = \int_3^6 \frac{2-x^2-4x+x^3+x^2+x+3x-3}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = \int_3^6 \frac{x^3-1}{x^3-1}dx = \int_3^6 1dx = 6-3=3$.

Αυξημένης δυσκολίας

33. Έχουμε

$\int_3^9 \frac{\ln x-2x^2+5}{x^2+x+3}dx - \int_4^5 xdt - \int_1^3 \lambda dx = \int_9^3 \frac{3x^2+x-\ln x-2}{x^2+x+3}dx - x \Leftrightarrow$

$\int_3^9 \frac{\ln x-2x^2+5}{x^2+x+3}dx - x\int_4^5 1dt - \int_1^3 \lambda dx = -\int_3^9 \frac{3x^2+x-\ln x-2}{x^2+x+3}dx - x \Leftrightarrow$

$\int_3^9 \left(\frac{\ln x-2x^2+5}{x^2+x+3} + \frac{3x^2+x-\ln x-2}{x^2+x+3}\right)dx - x(5-4) - \lambda(3-1) = -x \Leftrightarrow$

$\int_3^9 \frac{x^2+x+3}{x^2+x+3}dx - x - 2\lambda = -x \Leftrightarrow \int_3^9 1dx - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow$

$9-3-2\lambda=0 \Leftrightarrow 6=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=3$.

Η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$

34.α) Το τραπέζιο ΟΑΒΔ έχει εμβαδό: $(OAB\Delta) = \frac{((OA)+(B\Delta))\cdot(O\Delta)}{2} = 9$,

άρα $\int_0^3 f(x)dx = 9 \Leftrightarrow F(3)-F(0)=9 \Leftrightarrow F(3)-1=9 \Leftrightarrow F(3)=10$.

β) Είναι $(B\Delta\Gamma)=\frac{(\Delta\Gamma)(B\Delta)}{2}=\frac{3\cdot 4}{2}=6$, άρα

$\int_3^6 f(x)dx=6\Leftrightarrow F(6)-F(3)=6\Leftrightarrow F(6)-10=6\Leftrightarrow F(6)=16$.

Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού

35. $\int_1^5 f(x)dx\int_3^6 f(x)dx-\int_1^6 f(x)dx\int_3^5 f(x)dx=$

$=\left[\int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx\right]\cdot\int_3^6 f(x)dx-\int_1^6 f(x)dx\cdot\int_3^5 f(x)dx=$

$=\int_1^3 f(x)dx\cdot\int_3^6 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx\cdot\int_3^6 f(x)dx-\int_1^6 f(x)dx\cdot\int_3^5 f(x)dx=$

$=\int_1^3 f(x)dx\int_3^6 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx\left(\int_3^6 f(x)dx-\int_1^6 f(x)dx\right)=$

$=\int_1^3 f(x)dx\int_3^6 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx\left(\int_3^6 f(x)dx-\int_1^3 f(x)dx-\int_3^6 f(x)dx\right)$

$=\int_1^3 f(x)dx\int_3^6 f(x)dx-\int_3^5 f(x)dx\int_1^3 f(x)dx=$

$\int_1^3 f(x)dx\left(\int_3^6 f(x)dx-\int_3^5 f(x)dx\right)$

$=\int_1^3 f(x)dx\cdot\left(\int_3^5 f(x)dx+\int_5^6 f(x)dx-\int_3^5 f(x)dx\right)=\int_1^3 f(x)dx\int_5^6 f(x)dx$.

2ος τρόπος: Έστω F αρχική της f.

Τότε : $\int_1^5 f(x)dx\int_3^6 f(x)dx-\int_1^6 f(x)dx\int_3^5 f(x)dx=$

$(F(5)-F(1))(F(6)-F(3))-(F(6)-F(1))(F(5)-F(3))=$

$\cancel{F(5)F(6)}-F(5)F(3)-F(1)F(6)+\cancel{F(3)F(1)}-\cancel{F(5)F(6)}+F(3)F(6)+$

$F(1)F(5)-\cancel{F(1)F(3)}=-F(5)F(3)-F(1)F(6)+F(3)F(6)+F(1)F(5)=$

$F(3)(F(6)-F(5))-F(1)(F(6)-F(5))=$

$(F(3)-F(1))(F(6)-F(5))=\int_1^3 f(x)dx\cdot\int_5^6 f(x)dx$.

36. $I=\frac{1}{2}\int_0^3\left(\left[f'(x)\right]^2\right)'dx=$

$\frac{1}{2}\left[\left[f'(x)\right]^2\right]_0^3=\frac{1}{2}\left(f'(3)\right)^2-\frac{1}{2}\left(f'(0)\right)^2=\frac{e^{18}}{10\sqrt[3]{5}}-\frac{1}{8\sqrt[3]{4}}$.

37. Είναι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f'(x)f^{2\kappa}(x)dx=0\Leftrightarrow\left[\frac{f^{2\kappa+1}(x)}{2\kappa+1}\right]_{-\alpha}^{\alpha}=0\Leftrightarrow$

$\dfrac{f^{2\kappa+1}(\alpha)-f^{2\kappa+1}(-\alpha)}{2\kappa+1}=0\Leftrightarrow f^{2\kappa+1}(\alpha)=f^{2\kappa+1}(-\alpha)\Leftrightarrow f(\alpha)=f(-\alpha)$.

Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[-\alpha,\alpha]$ τότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

38.α) $f'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

β) $I=\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'dx=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Αυξημένης δυσκολίας

39. Έχουμε $\int_0^\alpha 2xe^x dx=\int_\alpha^0 x^2e^x dx+9e^\alpha\Leftrightarrow\int_0^\alpha 2xe^x dx-\int_\alpha^0 x^2e^x dx=9e^\alpha\Leftrightarrow$

$\int_0^\alpha\left(2xe^x+x^2e^x\right)dx=9e^\alpha\Leftrightarrow\int_0^\alpha\left(x^2e^x\right)'dx=9e^\alpha\Leftrightarrow\left[x^2e^x\right]_0^\alpha=9e^\alpha\Leftrightarrow$

$\alpha^2e^\alpha=9e^\alpha\Leftrightarrow\alpha^2=9\Leftrightarrow\alpha=\pm3$.

40.α) Είναι $\int_2^3 f(t)dt=\int_2^3 G'(t)dt=\left[G(t)\right]_2^3=G(3)-G(2)=4$ άρα

$\int_{-1}^2\left(\int_2^3 f(t)dt\right)dx=\int_{-1}^2 4\,dx=4(2+1)=12$.

Είναι $\int_0^2 G(t)f(t)dt=\int_0^2 G(t)G'(t)dt=\dfrac{1}{2}\int_0^2\left(G^2(t)\right)'dt=$

$=\left[G^2(t)\right]_0^2=G^2(2)-G^2(0)=0$ άρα $\int_2^1\left(\int_0^2 G(t)f(t)dt\right)dx=\int_2^1 0\,dx=0$.

Άρα $A=12+0=12$.

β) $B=\int_0^{-1}f(x)dx-\int_1^2 f'(x)dx+\int_{-1}^3 f(x)dx+f(2)-f(1)\int_\alpha^{\alpha+1}dx=$

$=\int_0^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^3 f(x)dx-\left[f(x)\right]_1^2+f(2)-f(1)(\alpha+1-\alpha)=$

$=\int_0^3 f(x)dx-\cancel{f(2)}+\cancel{f(1)}+\cancel{f(2)}-\cancel{f(1)}=\left[G(t)\right]_0^3=G(3)-G(0)=4$

γ) $\Gamma=\int_{-1}^2 f\left(G(x)\right)f(x)dx+\int_1^2\dfrac{f(x)}{G(x)-1}dx=$

$=\int_{-1}^2 G'\left(G(x)\right)G'(x)dx+\int_1^2\dfrac{\left(G(x)-1\right)'}{G(x)-1}dx=$

$= \int_{-1}^{2}\left[G\left(G(x)\right)\right]' dx + \int_{1}^{2}\left(\ln\left|G(x)-1\right|\right)' dx =$

$= \left[G\left(G(x)\right)\right]_{-1}^{2} + \left[\ln\left(1-G(x)\right)\right]_{1}^{2} =$

$= G\left(G(2)\right) - G\left(G(-1)\right) + \ln\left(1-G(2)\right) - \ln\left(1-G(1)\right) =$

$= G(0) - G(2) + \ln 1 - \ln(1+2) = -\ln 3$ γιατί για κάθε $x \in [1,2]$ είναι

$G(x) \le 0 \Leftrightarrow G(x) - 1 \le -1 < 0$.

41. Είναι $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{4f(x)f'(x)}{f(\beta)-f(\alpha)} dx = \frac{2}{f(\beta)-f(\alpha)} \int_{\alpha}^{\beta} 2f(x)f'(x) dx =$

$\frac{2}{f(\beta)-f(\alpha)}\left[f^2(x)\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{2\left(f^2(\beta)-f^2(\alpha)\right)}{f(\beta)-f(\alpha)} = 2\left(f(\beta)+f(\alpha)\right)$.

42. $\int_0^2 xf'(x)dx - \int_2^0 f(x)dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 xf'(x)dx + \int_0^2 f(x)dx = 2 \Leftrightarrow$

$\int_0^2 \left(xf'(x)+f(x)\right)dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 \left(xf(x)\right)' dx = 2 \Leftrightarrow \left[xf(x)\right]_0^2 = 2 \Leftrightarrow$

$2f(2) = 2 \Leftrightarrow f(2) = 1$.

$\int_2^3 \left(\frac{f'(x)}{x} + \frac{1}{6}\right)dx = \int_2^3 \frac{f(x)}{x^2} dx \Leftrightarrow \int_2^3 \frac{f'(x)}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{6} dx - \int_2^3 \frac{f(x)}{x^2} dx = 0 \Leftrightarrow$

$\int_2^3 \left[\frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}\right]dx + \frac{1}{6}(3-2) = 0 \Leftrightarrow \int_2^3 \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} dx = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow$

$\int_2^3 \left(\frac{f(x)}{x}\right)' dx = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]_2^3 = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{f(3)}{3} - \frac{f(2)}{2} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow$

$\frac{f(3)}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{f(3)}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow f(3) = 1$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[2,3]$, παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ και $f(2) = f(3)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2,3)$.

43. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \left[\ln\left(f(x)\right)\right]' dx = 0 \Leftrightarrow \left[\ln\left(f(x)\right)\right]_{\alpha}^{\beta} = 0 \Leftrightarrow$

$\ln\left(f(\beta)\right) - \ln\left(f(\alpha)\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(f(\beta)\right) = \ln\left(f(\alpha)\right) \Leftrightarrow f(\beta) = f(\alpha)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha) = f(\beta)$,

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε , η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2,3)$, δηλαδή η f έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο στο (α,β).

44. $\int_1^2 \frac{f'(x)}{x}dx = \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{x}dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx = 0 \Leftrightarrow$

$\int_1^2 \left(\frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}\right)dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 \left(\frac{f(x)}{x}\right)' dx = 0 \Leftrightarrow$

$\left[\frac{f(x)}{x}\right]_1^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{f(2)}{2} - f(1) = 0 \Leftrightarrow f(2) = 2f(1) = 2$.

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο [1, 2], οπότε υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 1$. Επειδή η ευθεία y = x έχει κλίση λ = 1, είναι $f'(\xi) = \lambda$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο x = ξ είναι παράλληλη στην y = x.

45. Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ τότε αφού η f είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x) > 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ άτοπο. Αν $f(x) < 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx < 0$ άτοπο οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

2ος τρόπος: Έστω F αρχική της f, τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0 \Leftrightarrow F(\beta) - F(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$ $F(\beta) = F(\alpha)$. Για την F ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο [α, β], οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 0$.

46. Έστω F, G αρχικές συναρτήσεις των f, g αντίστοιχα στο $[\alpha,\beta]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = F(x) - G(x),\ x \in [\alpha,\beta]$. Είναι

$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx \Leftrightarrow F(\beta) - F(\alpha) = G(\beta) - G(\alpha) \Leftrightarrow$

$F(\beta) - G(\beta) = F(\alpha) - G(\alpha) \Leftrightarrow h(\beta) = h(\alpha)$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $h'(x) = f(x) - g(x)$, λόγω του Θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = g(\xi)$.

47. Έστω F αρχική της f. Είναι $f(x_1) + f(x_2) = 2\frac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha} = 2\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Για την F εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ , οπότε υπάρχουν $x_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και

$x_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοια, ώστε $F'(x_1) = \frac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - F(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \Leftrightarrow$

$f(x_1) = 2\frac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$ και $F'(x_2) = \frac{F(\beta) - F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \Leftrightarrow$

$f(x_2) = 2\frac{F(\beta) - F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \alpha}$. Είναι

$$f(x_1) + f(x_2) = 2\frac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} + 2\frac{F(\beta) - F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \alpha} = 2\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

48.α) $\int_2^4 f(x)dx + \int_6^8 f(x)dx = \int_6^4 f(x)dx + \int_{10}^8 f(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_2^4 f(x)dx + \int_6^8 f(x)dx = -\int_4^6 f(x)dx - \int_8^{10} f(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_2^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx + \int_6^8 f(x)dx + \int_8^{10} f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_2^{10} f(x)dx = 0$.

β) 1ος τρόπος: Έστω ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [2,10]$, τότε επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό.

Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [2,10]$ τότε $\int_2^{10} f(x)dx > 0$ που είναι άτοπο και αν $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [2,10]$ τότε $\int_2^{10} f(x)dx < 0$ που είναι επίσης άτοπο.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[2,10]$.

2ος τρόπος: Έστω F αρχική της f στο $[2,10]$, τότε

$\int_2^{10} f(x)dx = 0 \Leftrightarrow F(10) - F(2) = 0 \Leftrightarrow F(10) = F(2)$.

Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[2,10]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,10)$ με $F'(x) = f(x)$. Επειδή $F(10) = F(2)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε, η εξίσωση $F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2,10)$ άρα και στο $[2,10]$.

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

49. Έστω $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$. Επειδή η f είναι περιττή θα ισχύει $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε

$\alpha(-x)^3+\beta(-x)^2+\gamma(-x)+\delta=-(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)\Leftrightarrow$

$-\alpha x^3+\beta x^2-\gamma x+\delta=-\alpha x^3-\beta x^2-\gamma x-\delta$ οπότε $\beta=-\beta\Leftrightarrow\beta=0$ και

$\delta=-\delta\Leftrightarrow\delta=0$. Οπότε $f(x)=\alpha x^3+\gamma x$ και $f'(x)=3\alpha x^2+\gamma$.

Επειδή $f'(1)=4\Leftrightarrow 3\alpha+\gamma=4\quad(1)$ και $\int_0^1 f(x)dx=-3\Leftrightarrow$

$$\int_0^1(\alpha x^3+\gamma x)dx=-3\Leftrightarrow\alpha\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\gamma\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=-3\Leftrightarrow\frac{\alpha}{4}+\frac{\gamma}{2}=-3\Leftrightarrow$$

$\alpha+2\gamma=-12\ (2)$. Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}3\alpha+\gamma=4\\ \alpha+2\gamma=-12\end{array}\right\}\Leftrightarrow\alpha=4,\ \gamma=-8 \text{ άρα } f(x)=4x^3-8x.$$

50. Έστω $f(x)=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$, $\alpha\neq 0$. Αφού η f είναι άρτια τότε ισχύει $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε

$\alpha(-x)^4+\beta(-x)^3+\gamma(-x)^2+\delta(-x)+\varepsilon=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon\Leftrightarrow$

$\alpha x^4-\beta x^3+\gamma x^2-\delta x+\varepsilon=\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$ πρέπει $-\beta=\beta\Leftrightarrow\beta=0$ και

$-\delta=\delta\Leftrightarrow\delta=0$. Τότε $f(x)=\alpha x^4+\gamma x^2+\varepsilon$ και $f'(x)=4\alpha x^3+2\gamma x$. Είναι

$$\left.\begin{array}{l}f(2)=-6\Leftrightarrow 16\alpha+4\gamma+\varepsilon=-6\\ f'(2)=0\Leftrightarrow 32\alpha+4\gamma=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{rl}16\alpha-32\alpha+\varepsilon=-6 & \\ 4\gamma=-32\alpha & \end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{ll}\varepsilon=16\alpha-6 & (1)\\ \gamma=-8\alpha & (2)\end{array}$$

Επίσης $\int_0^1 f(x)dx=\frac{113}{15}\Leftrightarrow\int_0^1(\alpha x^4+\gamma x^2+\varepsilon)dx=\frac{113}{15}\Leftrightarrow$

$$\alpha\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1+\gamma\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\varepsilon[x]_0^1=\frac{113}{15}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{5}+\frac{\gamma}{3}+\varepsilon=\frac{113}{15}\Leftrightarrow 3\alpha+5\gamma+15\varepsilon=113\overset{(2)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}}$$

$3\alpha+5(-8\alpha)+15(16\alpha-6)=113\Leftrightarrow-37\alpha+240\alpha-90=113$.

$203\alpha=203\Leftrightarrow\alpha=1$, άρα $\gamma=-8$, $\varepsilon=10$ και $f(x)=x^4-8x^2+10$.

51.α) $e^x-e^{f(x)}=e^{x+f(x)}\Leftrightarrow\frac{e^x-e^{f(x)}}{e^{x+f(x)}}=1\Leftrightarrow e^{-f(x)}-e^{-x}=1\Leftrightarrow e^{-f(x)}=1+e^{-x}\Leftrightarrow$

$-f(x)=\ln(1+e^{-x})\Leftrightarrow f(x)=-\ln(1+e^{-x})=$

$$= -\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) = -\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right) = \ln\frac{e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow f(x) = \ln\frac{e^x}{1+e^x}.$$

β) $I = \int_0^1 e^{f(x)-x}dx = \int_0^1 \frac{e^{f(x)}}{e^x}dx = \int_0^1 \frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{e^x}dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x(1+e^x)}dx$.

Θέτουμε $e^x = u$ οπότε $e^x dx = du$. Άρα

x	0	1
u	1	e

$$I = \int_1^e \frac{du}{u(1+u)} = \int_1^e \frac{1}{u}du - \int_1^e \frac{1}{1+u}du = \left[\ln|u|\right]_1^e - \left[\ln|1+u|\right]_1^e =$$

$$= 1 - \ln(e+1) + \ln 2 = \ln 2 + \ln\frac{e}{e+1}.$$

52.α) $\int_0^1 \left(x^3 - 6x^2 + 4\right)dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - 2\left[x^3\right]_0^1 + 4\left[x\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 2 + 4 = \frac{9}{4}$.

β) $\int_{-1}^1 \left(4x^3 - 2x + 1\right)dx = \left[x^4\right]_{-1}^1 - \left[x^2\right]_{-1}^1 + \left[x\right]_{-1}^1 = 1 - 1 - (1-1) + 1 + 1 = 2$

γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x)dx = -2\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\left[\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$-2(0-1) - 3(1-0) = 2 - 3 = -1$.

δ) $\int_0^{\pi} \left(4e^x - 3\sigma\upsilon\nu x + 1\right)dx = 4\left[e^x\right]_0^{\pi} - 3\left[\eta\mu x\right]_0^{\pi} + \left[x\right]_0^{\pi} =$

$= 4\left(e^{\pi} - 1\right) - 3(0-0) + \pi = 4e^{\pi} + \pi - 4$.

ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 4x)dx = -\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\left[\eta\mu 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$-\frac{1}{2}(-1-1) + \frac{1}{4}(0-0) = 1$.

στ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \eta\mu x\right)dx = \left[\varepsilon\varphi x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ζ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{\eta\mu^2 x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)dx = -3\left[\sigma\varphi x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\varepsilon\varphi x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 2$.

η) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{1}{\eta\mu^2 x}\right)dx =$

$\left[\varepsilon\varphi x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \left[\sigma\varphi x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1 - \sqrt{3} = 2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

θ) $\int_0^{\pi}\left(4\eta\mu 2x-2\sigma\upsilon\nu 2x-5x^4\right)dx=-2\left[\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^{\pi}-\left[\eta\mu 2x\right]_0^{\pi}-\left[x^5\right]_0^{\pi}=-\pi^5.$

ι) $\int_1^2\frac{xe^x+2}{x}dx=\int_1^2\left(e^x+\frac{2}{x}\right)dx=\left[e^x\right]_1^2+2\left[\ln|x|\right]_1^2=e^2-e+2\ln 2\,.$

κ) $\int_1^2\frac{6x^3-8x^2+5x+2}{x}dx=\int_1^2\left(6x^2-8x+5+\frac{2}{x}\right)dx=$

$2\left[x^3\right]_1^2-4\left[x^2\right]_1^2+5\left[x\right]_1^2+2\left[\ln|x|\right]_1^2=7+2\ln 2\,.$

λ) $\int_1^4 x\sqrt{x}dx=\int_1^4 x\cdot x^{\frac{1}{2}}dx=\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}dx=\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^4=$

$\frac{2}{5}\left[\sqrt{x^5}\right]_1^4=\frac{2}{5}\left(\sqrt{4^5}-1\right)=\frac{2}{5}(32-1)=\frac{62}{5}.$

53. $\int_0^1\left(3x^2-8\lambda x+\lambda^2\right)dx<-2\Leftrightarrow$

$\left[x^3-4\lambda x^2+\lambda^2 x\right]_0^1<-2\Leftrightarrow 1-4\lambda+\lambda^2<-2\Leftrightarrow$

$\lambda^2-4\lambda+3<0\Leftrightarrow 1<\lambda<3$ και επειδή ο λ είναι ακέραιος είναι $\lambda=2$.

54.α) Αρχικά εξετάζουμε την συνέχεια της $f(x)=\begin{cases}4x^3-2x^2+1, & x<0\\ 2e^x-1, & x\geq 0\end{cases}$ στο

$x_0=0$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(4x^3-2x^2+1\right)=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2e^x-1\right)=1=f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ οπότε

είναι συνεχής και στο $[-2,2]$, άρα

$\int_{-2}^2 f(x)dx=\int_{-2}^0\left(4x^3-2x^2+1\right)dx+\int_0^2\left(2e^x-1\right)dx=$

$\left[x^4\right]_{-2}^0-\frac{2}{3}\left[x^3\right]_{-2}^0+2+2\left[e^x\right]_0^2-2=2e^2-\frac{70}{3}.$

β) $\int_0^2|x-1|dx=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx=1-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2-1=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$

γ) $\int_0^1\sqrt{x^2-8x+16}dx=\int_0^1\sqrt{(x-4)^2}dx=\int_0^1|x-4|dx=$

$=-\int_0^1(x-4)dx=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+4\left[x\right]_0^1=-\frac{1}{2}+4=\frac{7}{2}.$

55. Επειδή η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,3]$, θα είναι και

συνεχής στο $[0,3]$, άρα θα είναι και συνεχής στο $x_0=1$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3+\beta\sqrt{x}\right)=1+\beta=f(1)$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\alpha x+\beta)=\alpha+\beta$,

οπότε $1+\beta=\alpha+\beta\Leftrightarrow\alpha=1$.

Επίσης $I=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1\left(x^3+\beta\sqrt{x}\right)dx+\int_1^3(\alpha x+\beta)dx=$

$\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\frac{2\beta}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^1+\alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3+\beta[x]_1^3=\frac{1}{4}+\frac{2\beta}{3}+4\alpha+2\beta=$

$\frac{49}{4}\Leftrightarrow\frac{2\beta}{3}+4+2\beta=\frac{48}{4}\Leftrightarrow\frac{8\beta}{3}=8\Leftrightarrow\beta=3$.

Αυξημένης δυσκολίας

56.α) $\int_{-1}^0\frac{x^3-1}{x-1}dx=\int_{-1}^0\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)}dx=\int_1^0\left(x^2+x+1\right)dx=$

$\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0+[x]_{-1}^0=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{6}$.

β) $\int_2^3\frac{2x^3-x^2+x-2}{x-1}dx=\int_2^3\frac{\cancel{(x-1)}\left(2x^2+x+2\right)}{\cancel{x-1}}dx=\int_2^3\left(2x^2+x+2\right)dx=$

$=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3+\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3+2[x]_2^3=\frac{38}{3}+\frac{5}{2}+6=\frac{103}{6}$.

γ) $\int_4^9\left(\sqrt{x}-2\right)dx=\int_4^9\left(x^{\frac{1}{2}}-2\right)dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^9-2[x]_4^9=\frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_4^9-2(9-4)=\frac{8}{3}$.

δ) $\int_1^9 5\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2dx=\int_1^9 5\sqrt{x}\left(1-2\sqrt{x}+x\right)dx=\int_1^9\left(5x^{\frac{1}{2}}-10x+5x^{\frac{3}{2}}\right)dx$

$=5\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^9-10\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^9+5\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^9=\frac{10}{3}\left(9\sqrt{9}-1\right)-10\frac{81-1}{2}+2\left(9^2\sqrt{9}-1\right)$

$=\frac{260}{3}-400+484=\frac{512}{3}$.

ε) $\int_0^{16}\left(4\sqrt{x}-5\sqrt[3]{x}\right)dx=4\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{16}-5\left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_0^{16}=\frac{8}{3}16\sqrt{16}-\frac{15}{4}\sqrt[3]{16^4}=\frac{512}{3}-120\sqrt[3]{2}$.

στ) $\int_8^{64}\frac{x-\sqrt[3]{x}}{x^3}dx=\int_8^{64}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^3}\right)dx=-\left[\frac{1}{x}\right]_8^{64}-\int_8^{64}x^{-\frac{8}{3}}dx=$

$=-\left(\frac{1}{64}-\frac{1}{8}\right)-\left[\frac{x^{-\frac{5}{3}}}{-\frac{5}{3}}\right]_8^{64}=\frac{7}{64}+\frac{3}{5}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right]_8^{64}=\frac{467}{5120}$.

ζ) $\int_0^4\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)dx=\int_0^4\left(x-\sqrt{x}-2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4-\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4-2\left[x\right]_0^4=-\frac{16}{3}$.

η) $\int_1^2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2-2\left[\sqrt{x}\right]_1^2=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)-2\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

θ) $\int_0^1\sqrt{x\sqrt{x^3}}dx=\int_0^1\sqrt{\sqrt{x^2x^3}}dx=\int_0^1\sqrt[4]{x^5}dx=\int_0^1x^{\frac{5}{4}}dx=\left[\frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}}\right]_0^1=\frac{4}{9}(1-0)=\frac{4}{9}$.

ι) $\int_1^2\left(\frac{3}{3x+4}+\frac{2}{2x-1}\right)dx=\left[\ln|3x+4|\right]_1^2+\left[\ln|2x-1|\right]_1^2=\ln10-\ln7+\ln3=\ln\frac{30}{7}$.

κ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\varepsilon\varphi^2x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}dx=\left[\varepsilon\varphi x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1$.

λ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}dx=$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)dx=$

$-\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-(0-1)+(1-0)=2$.

57.α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2\eta\mu x\right)'dx=\left[x^2\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$.

β) $\int_1^e\left(2x\ln x+x\right)dx=\int_1^e\left(x^2\ln x\right)'dx=\left[x^2\ln x\right]_1^e=e^2$.

γ) $\int_1^e\left(1+\ln x\right)dx=\int_1^e\left(x\ln x\right)'dx=\left[x\ln x\right]_1^e=e$.

δ) $\int_1^2 \frac{(x-1)e^x}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{xe^x - e^x}{x^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{e^x}{x}\right)' dx = \left[\frac{e^x}{x}\right]_1^2 = \frac{e^2}{2} - e = \frac{e^2-2e}{2}$.

ε) $\int_1^e \frac{1-\ln x}{x^2}dx = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)' dx = \left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^e = \frac{1}{e}$.

στ) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^x}{\eta\mu x}\right)' dx = \left[\frac{e^x}{\eta\mu x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} - 2e^{\frac{\pi}{6}}$.

ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' dx = \left[\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3}$.

58.α) $I_1 = \int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx$ Θέτουμε $u = \ln x$ οπότε $du = \frac{1}{x}dx$.

x	1	e
u	0	1

$I_1 = \int_0^1 2udu = \left[u^2\right]_0^1 = 1$.

β) $I_2 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$ Θέτουμε $u = \ln x$ οπότε $du = \frac{1}{x}dx$.

x	e	e^2
u	1	2

$I_2 = \int_1^2 \frac{1}{u}du = \left[\ln|u|\right]_1^2 = \ln 2$.

γ) $I_3 = \int_{-1}^0 \left(3x^2 - 2x\right)e^{x^3-x^2}dx$ Θέτουμε $u = x^3 - x^2$ οπότε

x	−1	0
u	-2	0

$du = \left(3x^2 - 2x\right)dx$. $I_3 = \int_{-2}^0 e^u du = \left[e^u\right]_{-2}^0 = 1 - e^{-2}$.

δ) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x dx$ Θέτουμε $u = \eta\mu x$ οπότε

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

$du = \sigma\upsilon\nu x dx$, άρα $I_4 = \int_0^1 3u^2 du = \left[u^3\right]_0^1 = 1$.

ε) $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu x dx$ Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$ οπότε

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	1	0

$du = -\eta\mu x dx$ άρα $I_5 = -\int_1^0 4u^3 du = \int_0^1 4u^3 du = -\left[u^4\right]_0^1 = -1$.

στ) $I_6 = \int_0^1 \frac{e^x + 2x}{e^x + x^2}dx$ Θέτουμε $u = e^x + x^2$ οπότε

x	0	1
u	1	e+1

$du = \left(e^x + 2x\right)dx$ άρα $I_6 = \int_1^{e+1} \frac{du}{u} = \left[\ln|u|\right]_1^{e+1} = \ln(e+1)$.

ζ) $I_7 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu(\sigma\varphi x)}{\eta\mu^2 x}dx$ Θέτουμε $u = \sigma\varphi x$ οπότε $du = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}dx$ άρα

$I_7 = \int_1^0 \eta\mu u(-du) = \int_0^1 \eta\mu u du = -\left[\sigma\upsilon\nu u\right]_0^1 = -\sigma\upsilon\nu 1 + 1$.

η) $I_8=\int_0^1 10(2x-1)^4\,dx$ Θέτουμε $u=2x-1$ οπότε $du=2dx$

x	0	1
u	-1	1

άρα $I_8=\int_{-1}^{1}5u^4du=\left[u^5\right]_{-1}^{1}=1+1=2$.

θ) $I_9=\int_1^2\frac{2x-1}{\left(x^2-x+1\right)^4}dx$ Θέτουμε $u=x^2-x+1$ οπότε

x	1	2
u	1	3

$du=(2x-1)dx$ άρα

$$I_9=\int_1^3\frac{du}{u^4}=\int_1^3u^{-4}du=\left[\frac{u^{-3}}{-3}\right]_1^3=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{u^3}\right]_1^3=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{27}-1\right)=\frac{26}{81}.$$

ι) $I_{10}=\int_0^1\left(3x^2-2\right)\left(x^3-2x\right)^4dx$ Θέτουμε $u=x^3-2x$ οπότε

x	0	1
u	0	-1

$du=\left(3x^2-2\right)dx$ άρα $I_{10}=\int_0^{-1}u^4du=\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^{-1}=-\frac{1}{5}$.

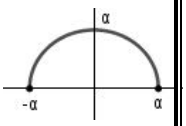
κ) $I_{11}=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\left[\ln\left|e^x+1\right|\right]_0^1=\ln(e+1)-\ln 2=\ln\frac{e+1}{2}$.

x	0	π/2
u	0	1

λ) $I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x e^{\eta\mu x}dx$ Θέτουμε $u=\eta\mu x$ οπότε $du=\sigma\upsilon\nu x dx$

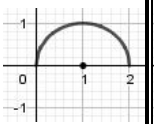
άρα $I_{12}=\int_0^1e^udu=\left[e^u\right]_0^1=e-1$.

59.α) $\sqrt{\alpha^2-x^2}=y\ge 0\Leftrightarrow\alpha^2-x^2=y^2\Leftrightarrow\alpha^2=x^2+y^2$

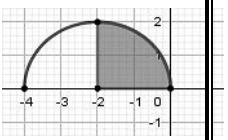


Πρόκειται για το εμβαδόν του ημικυκλίου του διπλανού σχήματος, άρα $\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}dx=\frac{\pi\alpha^2}{2}$.

β) $\sqrt{2x-x^2}=y\ge 0\Leftrightarrow 2x-x^2=y^2\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=1\Leftrightarrow$ $(x-1)^2+y^2=1$.Πρόκειται για το εμβαδόν του ημικυκλίου του διπλανού σχήματος, άρα $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx=\frac{\pi\cdot 1^2}{2}=\frac{\pi}{2}$.



γ) $\sqrt{-x^2-4x}=y\ge 0\Leftrightarrow(x+2)^2+y^2=4$.Πρόκειται για το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου του διπλανού σχήματος, άρα $\int_{-2}^{0}\sqrt{-x^2-4x}dx=\frac{\pi\cdot 2^2}{4}=\pi$.



60.α) Έστω $f(x)=x-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Είναι

$f'(x)=1-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x>0\Rightarrow f\nearrow\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Για κάθε $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f\left(\frac{\pi}{2}\right)\le f(x)\Leftrightarrow f(x)\ge\frac{\pi}{2}-1>0$.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|x-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\right|dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{3\pi^2}{8}.$$

β) Έστω $h(x)=e^x-xe$, $x\in\mathbb{R}$ είναι $h'(x)=e^x-e$ Η h έχει ελάχιστο στο $x=1$ άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h(x)\ge h(1)\Leftrightarrow e^x-xe\ge 0$ άρα $h(x)\ge 0$ οπότε

$$\int_0^1\left|e^x-xe\right|dx=\int_0^1\left(e^x-xe\right)dx=\left[e^x\right]_0^1-e\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=e-1-\frac{e}{2}=\frac{e-2}{2}.$$

Ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης

61.α) $\int_0^{e-1}\frac{x}{x+1}dx=\int_0^{e-1}\frac{x+1-1}{x+1}dx=\int_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=$

$\left[x\right]_0^{e-1}-\left[\ln|x+1|\right]_0^{e-1}=e-2$.

β) $\int_2^3\frac{x+2}{x-1}dx=\int_2^3\frac{x-1+3}{x-1}dx=\int_2^3\left(1+\frac{3}{x-1}\right)dx=1+3\left[\ln|x-1|\right]_2^3=1+3\ln 2$.

γ) $\int_0^1\frac{2x+1}{x-2}dx=\int_0^1\frac{2x-4+5}{x-2}dx=\int_0^1\frac{2(x-2)+5}{x-2}dx=$

$\int_0^1\left(2+\frac{5}{x-2}\right)dx=\left[2x+5\ln|x-2|\right]_0^1=2-5\ln 2$.

δ) $I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x-4}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1+\frac{-5}{2x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{5}{2}\ln|2x+1|\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\ln 3$.

ε) $\int_0^1\frac{6x+7}{3x+2}dx=\int_0^1\frac{6x+4+3}{3x+2}dx=\int_0^1\frac{2(3x+2)+3}{3x+2}dx=$

$=\int_0^1\left(2+\frac{3}{3x+2}\right)dx=2\left[x\right]_0^1+\left[\ln|3x+2|\right]_0^1=2+\ln\frac{5}{2}$.

$3x^2+x+1$ | $x+2$

$-3x^2-6x$ | $3x-5$

$-5x+1$

$+5x+10$

11

στ) $I=\int_0^1\frac{3x^2+x+1}{x+2}dx=\int_0^1(3x-5)dx+\int_0^1\frac{11}{x+2}dx$

$=3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-5\left[x\right]_0^1+11\left[\ln|x+2|\right]_0^1=$

$\frac{3}{2}-5+11\ln\frac{3}{2}$

ζ) $I=\int_0^1\frac{4x^3+7x^2+5x+2}{x^2+x+1}dx=$

$4x^3+7x^2+5x+2$ | x^2+x+1

$-4x^3-4x^2-4x$ | $4x+3$

$3x^2+x+2$

$-3x^2-3x-3$

$-2x-1$

$$\int_0^1 (4x+3)dx + \int_0^1 \frac{-2x-1}{x^2+x+1}dx =$$

$$= 2\left[x^2\right]_0^1 + 3 - \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = 2+3-\left[\ln\left|x^2+x+1\right|\right]_0^1 = 5-\ln 3 .$$

η) $I = \int_2^3 \frac{x^3-2x-2}{x-1}dx$

$$I = \int_2^3 \left(x^2+x-1\right)dx + \int_2^3 \frac{-3}{x-1}dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 - 1 - 3\left[\ln|x-1|\right]_2^3 = \frac{47}{6} - 3\ln 2 .$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x - 2 & x-1 \\ \hline -x^3 + x^2 & x^2+x- \\ \hline x^2 - 2x - 2 & \\ -x^2 + x & \\ \hline -x - 2 & \\ +x - 1 & \\ \hline -3 & \end{array}$$

62.α) $I = \int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}dx$. Είναι

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \Leftrightarrow 2x+1 = A(x+2) + B(x+1) \Leftrightarrow$$

$2x+1 = (A+B)x + 2A + B$, οπότε $\left.\begin{array}{l} A+B=2 \\ 2A+B=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} A=-1 \\ B=3 \end{array}$

$$I = \int_2^3 \frac{-1}{x+1}dx + \int_2^3 \frac{3}{x+2}dx = -\left[\ln|x+1|\right]_2^3 + 3\left[\ln|x+2|\right]_2^3 = 3\ln 5 + \ln 3 - 4\ln 4 .$$

β) $\int_0^1 \frac{4x-1}{2x^2-x+3}dx = \int_0^1 \frac{\left(2x^2-x+3\right)'}{2x^2-x+3}dx = \left[\ln\left|2x^2-x+3\right|\right]_0^1 = \ln\frac{4}{3}$.

γ) $I = \int_{-1}^0 \frac{2x+1}{x^2-4x+3}dx$. Είναι

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+3} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} \Leftrightarrow 2x+1 = A(x-3) + B(x-1) \Leftrightarrow$$

$2x+1 = (A+B)x + (-3A-B)$ οπότε $\left.\begin{array}{l} A+B=2 \\ -3A-B=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} A=-\frac{3}{2} \\ B=\frac{7}{2} \end{array}$, άρα

$$I = \int_{-1}^0 \frac{-\frac{3}{2}}{x-1}dx + \int_{-1}^0 \frac{\frac{7}{2}}{x-3}dx = -\frac{3}{2}\left[\ln|x-1|\right]_{-1}^0 + \frac{7}{2}\left[\ln|x-3|\right]_{-1}^0 = \frac{7\ln 3 - 11\ln 2}{2} .$$

δ) $I = \int_1^2 \frac{x+2}{x^2+x}dx$. Είναι $\frac{x+2}{x^2+x} = \frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow$

$x+2 = A(x+1) + Bx \Leftrightarrow x+2 = (A+B)x + A \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ A=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} A=2 \\ B=-1 \end{array}$ οπότε

$I=\int_1^2\frac{2}{x}dx+\int_1^2\frac{-1}{x+1}dx=2\left[\ln|x|\right]_1^2-\left[\ln|x+1|\right]_1^2=$

$2\ln 2-\ln 3+\ln 2=3\ln 2-\ln 3$

ε) $I=\frac{5x-13}{x^2-5x+6}dx$. Είναι

$\frac{5x-13}{x^2-5x+6}=\frac{5x-13}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\Leftrightarrow 5x-13=A(x-3)+B(x-2)\Leftrightarrow$

$5x-13=(A+B)x-3A-2B$ οπότε $\left.\begin{matrix}A+B=5\\-3A-2B=-13\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}A=3\\B=2\end{matrix}$ άρα

$I=\int_0^1\frac{3}{x-2}dx+\int_0^1\frac{2}{x-3}dx=3\left[\ln|x-2|\right]_0^1+2\left[\ln|x-3|\right]_0^1=-\ln 18$

στ) $I=\int_2^3\frac{4}{x^2-1}dx$. Είναι $\frac{4}{x^2-1}=\frac{4}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\Leftrightarrow$

$4=A(x+1)+B(x-1)\Leftrightarrow 4=(A+B)x+A-B\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}A+B=0\\A-B=4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}A=2\\B=-2\end{matrix}$

οπότε $I=\int_2^3\frac{2}{x-1}dx+\int_2^3\frac{-2}{x+1}dx=2\left[\ln|x-1|\right]_2^3-2\left[\ln|x+1|\right]_2^3=2\ln\frac{3}{2}$.

Αυξημένης δυσκολίας

63.α) $I=\int_2^3\frac{x^3+2x+5}{x^2-1}dx=$

$\int_2^3 xdx+\int_2^3\frac{3x+5}{x^2-1}dx$.

$\begin{array}{r|l}x^3+2x+5 & x^2-1\\ -x^3+x & x\\ \hline 3x+5 & \end{array}$

$\frac{3x+5}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\Leftrightarrow$

$3x+5=A(x+1)+B(x-1)\Leftrightarrow 3x+5=(A+B)x+A-B\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}A+B=3\\A-B=5\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$

$\begin{matrix}A=4\\B=-1\end{matrix}$ οπότε $I=\int_2^3 xdx+\int_2^3\frac{4}{x-1}dx+\int_2^3\frac{-1}{x+1}dx=$

$\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3+4\left[\ln|x-1|\right]_2^3-\left[\ln|x+1|\right]_2^3=\frac{5}{2}+4\ln 2-\ln 4+\ln 3=\frac{5}{2}+\ln 12$.

β) $I=\int_0^1\frac{x^3-2x}{x^2+3x+2}dx$ οπότε

$I=\int_0^1(x-3)dx+\int_0^1\frac{5x+6}{x^2+3x+2}dx$ είναι

$\begin{array}{r|l}x^3-2x & x^2+3x+2\\ -x^3-3x^2-2x & x-3\\ \hline -3x^2-4x & \\ +3x^2+9x+6 & \\ \hline 5x+6 & \end{array}$

$$\frac{5x+6}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}\Leftrightarrow 5x+6=A(x+1)+B(x+2)\Leftrightarrow$$

$$5x+6=(A+B)x+A+2B\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}A+B=5\\ A+2B=6\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \begin{matrix}A=4\\ B=1\end{matrix}$$ άρα

$$I=\int_0^1(x-3)dx+\int_0^1\frac{4}{x+2}dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-3+4\left[\ln|x+2|\right]_0^1+\left[\ln|x+1|\right]_0^1=-\frac{5}{2}+4\ln 3-3\ln 2\,.$$

64.α) $I=\int_{-2}^{-1}\frac{4-x}{x^3-3x^2+2x}dx$ είναι

$$\frac{4-x}{x^3-3x^2+2x}=\frac{4-x}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{x-2}\Leftrightarrow$$

$$4-x=A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+\Gamma x(x-1)\Leftrightarrow$$

$$-x+4=(A+B+\Gamma)x^2+(-3A-2B-\Gamma)x+2A\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}A+B+\Gamma=0\\ -3A-2B-\Gamma=-1\\ 2A=4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$A=2,\ B=-3,\ \Gamma=1$ οπότε $I=\int_{-2}^{-1}\frac{2}{x}dx+\int_{-2}^{-1}\frac{-3}{x-1}dx+\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x-2}dx=$

$$-2\left[\ln|x|\right]_{-2}^{-1}-3\left[\ln|x-1|\right]_{-2}^{-1}+\left[\ln|x-2|\right]_{-2}^{-1}=4\ln 3-3\ln 2\,.$$

β) $I=\int_2^3\frac{6x^2+x-3}{x^3-x^2}dx$. Είναι $\frac{6x^2+x-3}{x^3-x^2}=\frac{6x^2+x-3}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{\Gamma}{x-1}\Leftrightarrow$

$$6x^2+x-3=Ax(x-1)+B(x-1)+\Gamma x^2\Leftrightarrow$$

$$6x^2+x-3=(A+\Gamma)x^2+(-A+B)x-B\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}A+\Gamma=6\\ -A+B=1\\ -B=-3\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}A=2\\ B=3\\ \Gamma=4\end{matrix}\text{ οπότε}$$

$$\int_2^3\frac{2}{x}dx+\int_2^3\frac{3}{x^2}dx+\int_2^3\frac{4}{x-1}dx=2\left[\ln|x|\right]_2^3-3\left[\frac{1}{x}\right]_2^3+4\left[\ln|x-1|\right]_2^3=$$

$$=2\ln 3-2\ln 2-3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+4\ln 2=2\ln 6+\frac{1}{2}\,.$$

γ) $I=\int_2^3\frac{4x^2+7x-20}{(x+2)^2(x-1)}dx$. Είναι $\frac{4x^2+7x-20}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{\Gamma}{x-1}\Leftrightarrow$

$$4x^2+7x-20=A(x+2)(x-1)+B(x-1)+\Gamma(x+2)^2\Leftrightarrow$$

$4x^2+7x-20=(A+\Gamma)x^2+(A+B+4\Gamma)x+(-2A-B+4\Gamma)$

$$\begin{cases} A+\Gamma=4 \\ A+B+4\Gamma=7 \\ -2A-B+4\Gamma=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A=5 \\ B=6 \\ \Gamma=-1 \end{matrix} \text{ οπότε}$$

$$I=\int_2^3\frac{5}{x+2}dx+\int_2^3\frac{6}{(x+2)^2}dx-\int_2^3\frac{1}{x-1}dx=$$

$$5\left[\ln|x+2|\right]_2^3-6\left[\frac{1}{x+2}\right]_2^3-\left[\ln|x-1|\right]_2^3=5\ln\frac{4}{5}+\frac{3}{10}-\ln 2\,.$$

δ) $I=\int_2^3\frac{x^2+1}{x^3-x^2}dx$, είναι $\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{\Gamma}{x-1}\Leftrightarrow$

$x^2+1=Ax(x-1)+B(x-1)+\Gamma x^2\Leftrightarrow x^2+1=(A+\Gamma)x^2+(-A+B)x-B\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix} A+\Gamma=1 \\ -A+B=0 \\ -B=1 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \begin{matrix} A=-1 \\ B=-1 \\ \Gamma=2 \end{matrix} \text{ οπότε } I=\int_2^3\frac{-1}{x}dx+\int_2^3\frac{-1}{x^2}dx+\int_2^3\frac{2}{x-1}dx=$$

$$-\left[\ln|x|\right]_2^3+\left[\frac{1}{x}\right]_2^3+2\left[\ln|x-1|\right]_2^3=3\ln 2-\ln 3-\frac{1}{6}.$$

ε) $I=\int_2^3\frac{x-3}{x^3-x}dx$. Είναι $\frac{x-3}{x(x^2-1)}=\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{x+1}\Leftrightarrow$

$x-3=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+\Gamma x(x-1)\Leftrightarrow$

$$x-3=(A+B+\Gamma)x^2+(B-\Gamma)x-A\Leftrightarrow\left.\begin{matrix} A+B+\Gamma=0 \\ B-\Gamma=1 \\ -A=-3 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \begin{matrix} A=3 \\ B=-1 \\ \Gamma=-2 \end{matrix}$$

οπότε $I=\int_2^3\frac{3}{x}dx+\int_2^3\frac{-1}{x-1}dx+\int_2^3\frac{-2}{x+1}dx=$

$$3\left[\ln|x|\right]_2^3-\left[\ln|x-1|\right]_2^3-2\left[\ln|x+1|\right]_2^3=5\ln 3-8\ln 2$$

στ) $I=\int_{-3}^{-2}\frac{x^3-3}{x^3-x}=\int_{-3}^{-2}1dx+\int_{-3}^{-2}\frac{-x-3}{x^3-x}dx$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3}-3 & x^3-x \\ \cancel{-x^3}-x & \hline & 1 \\ \hline -x-3 & \end{array}$$

είναι

$\frac{-x-3}{x^3-x}=\frac{-x-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{x+1}\Leftrightarrow$

$-x-3=A(x^2-1)+Bx(x+1)+\Gamma x(x-1)\Leftrightarrow$

$$-x-3=(A+B+\Gamma)x^2+(B-\Gamma)x-A \Leftrightarrow \begin{cases} -A=-3 & A=3 \\ A+B+\Gamma=0 \Leftrightarrow & B=-2 \text{ οπότε} \\ B-\Gamma=-1 & \Gamma=-1 \end{cases}$$

$$I=\int_{-3}^{-2}1dx+\int_{-3}^{-2}\frac{3}{x}dx-\int_{-3}^{-2}\frac{2}{x-1}dx-\int_{-3}^{-2}\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=1+3\left[\ln|x|\right]_{-3}^{-2}-2\left[\ln|x-1|\right]_{-3}^{-2}-\left[\ln|x+1|\right]_{-3}^{-2}=1+8\ln 2-6\ln 3$$

65.α) $\int_0^6 f(x)dx=6 \Leftrightarrow \int_0^6\left(x^2+\lambda x+1\right)dx=6 \Leftrightarrow \left[\frac{x^3}{3}+\frac{\lambda}{2}x^2+x\right]_0^6=6 \Leftrightarrow$

$72+18\lambda+6=6 \Leftrightarrow 18\lambda=-72 \Leftrightarrow \lambda=-4$.

β) Είναι $f(x)=x^2-4x+1,\ f'(x)=2x-4$.

$$\int_4^5\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int_4^5\left[\ln f(x)\right]'dx=\left[\ln f(x)\right]_4^5=\ln f(5)-\ln f(4)=\ln 6.$$

$$\int_3^4\frac{f(x)}{f'(x)}dx=\int_3^4\frac{x^2-4x+1}{2x-4}dx=\int_3^4\frac{(2x-4)\left(\frac{1}{2}x-1\right)-3}{2x-4}dx=$$

$$\int_3^4\left(\frac{1}{2}x-1-\frac{3}{2x-4}\right)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{2}x-1-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-2}\right)dx=$$

$$\left[\frac{x^2}{4}-x-\frac{3}{2}\ln|x-2|\right]_3^4=4-4-\frac{3}{2}\ln 2-\left(\frac{9}{4}-3\right)=-\frac{3}{2}\ln 2+\frac{3}{4}$$

66.α) $\frac{x-1}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2-x+1} \Leftrightarrow$

$x-1=A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+\Gamma)(x+1) \Leftrightarrow$

$x-1=Ax^2-Ax+A+Bx^2+Bx+\Gamma x+\Gamma \Leftrightarrow$

$$x-1=(A+B)x^2+(-A+B+\Gamma)x+A+\Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+\Gamma=1 \Leftrightarrow \\ A+\Gamma=-1 \end{cases}$$

$A=-\frac{2}{3},\ B=\frac{2}{3},\ \Gamma=-\frac{1}{3}$.

β) $\int_0^1\frac{x-1}{x^3+1}dx=\int_0^1\frac{x-1}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}dx=\int_0^1\frac{-\frac{2}{3}}{x+1}dx+\int_0^1\frac{\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2-x+1}dx=$

$$=-\frac{2}{3}\left[\ln|x+1|\right]_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=-\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\left[\ln|x^2-x+1|\right]_0^1=$$

$$-\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}(\ln 1-\ln 1)=-\frac{2}{3}\ln 2.$$

Παραγοντική ολοκλήρωση

67.α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\eta\mu x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(-\sigma\upsilon\nu x\right)'dx=-\left[x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x dx$

$$=0+\left[\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\eta\mu 2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\left(-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x\right)'dx=$

$$-\frac{1}{2}\left[(x-1)\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x\right)dx=\frac{\pi}{4}-1+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 2x dx=$$

$$\frac{\pi}{4}-1+\frac{1}{4}\left[\eta\mu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-1.$$

γ) $\int_0^1(x^2+1)e^{2x}dx=\int_0^1(x^2+1)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx=\frac{1}{2}\left[e^{2x}(x^2+1)\right]_0^1-\int_0^1 2x\frac{1}{2}e^{2x}dx=$

$$=\frac{1}{2}(2e^2-1)-\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx=e^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx=$$

$$=e^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(e^2-1)=\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{4}.$$

δ) $\int_0^1(x-3)e^{-x}dx=\int_0^1(x-3)\left(-e^{-x}\right)'dx=-\left[(x-3)e^{-x}\right]_0^1-\int_0^1\left(-e^{-x}\right)dx=$

$$=\frac{2}{e}-3+\int_0^1 e^{-x}dx=\frac{2}{e}-3-\left[e^{-x}\right]_0^1=\frac{2}{e}-3-\frac{1}{e}+1=\frac{1}{e}-2.$$

ε) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}3x^2\sigma\upsilon\nu 2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3x^2\left(\frac{1}{2}\eta\mu 2x\right)'dx=\left[\frac{3}{2}x^2\eta\mu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}6x\frac{1}{2}\eta\mu 2x dx$

$$=-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\eta\mu 2x dx=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\sigma\upsilon\nu 2x\right)'dx=$$

$$\frac{3}{2}\left[x\sigma\upsilon\nu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 2x dx=-\frac{3\pi}{4}-\frac{3}{4}\left[\eta\mu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{3\pi}{4}.$$

στ) $\int_1^e x^3\ln x dx=\int_1^e\left(\frac{x^4}{4}\right)'\ln x dx=\left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx=$

$$\frac{e^4}{4}\ln e-\frac{1}{4}\int_1^e x^3dx=\frac{e^4}{4}-\frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^e=\frac{e^4}{4}-\frac{e^4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{3e^4+1}{16}.$$

ζ) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx = -\int_1^2 \ln x\left(\frac{1}{x}\right)' dx = -\left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln 2}{2} + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx =$

$= -\frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1-\ln 2}{2}.$

η) $\int_1^e \ln x dx = \int_1^e (x)' \ln x dx = \left[x\ln x\right]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx = e\ln e - (e-1) = e - e + 1 = 1$

.

θ) $\int_1^{e^2} \ln^2 x dx = \int_1^e (x)' \ln^2 x dx = \left[x\ln^2 x\right]_1^e - \int_1^e x\cdot 2\frac{\ln x}{x}dx =$

$e - 2\int_1^e (x)' \ln x dx = = e - 2\left[x\ln x\right]_1^e + 2\int_1^e x\frac{1}{x}dx = e - 2e + 2e - 2 = e - 2.$

ι) $\int_0^1 \frac{x-2}{e^x}dx = \int_0^1 (x-2)e^{-x}dx = \int_0^1 (x-2)\left(-e^{-x}\right)' dx =$

$-\left[(x-2)e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = = \frac{1}{e} - 2 - \left[e^{-x}\right]_0^1 = \frac{1}{e} - 2 - \frac{1}{e} + 1 = -1.$

κ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 3x + 1)\eta\mu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 3x + 1)(-\sigma\upsilon\nu x)' dx =$

$= -\left[(x^2 - 3x + 1)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 3)\sigma\upsilon\nu x dx =$

$= -(0-1) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-3)(\eta\mu x)' dx = 1 + \left[(2x-3)\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\eta\mu x dx = 1 +$

$= 1 + \left(2\frac{\pi}{2} - 3\right) + 2\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2 - 2 = \pi - 4$

λ) $\int_1^e (x^2 - 2x)\ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)' \ln x dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\ln x\right]_1^e -$

$\int_1^e \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\frac{1}{x}dx = = \frac{e^3}{3} - e^2 - \int_1^e \left(\frac{x^2}{3} - x\right)dx = \frac{e^3}{3} - e^2 - \frac{1}{9}\left[x^3\right]_1^e + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e =$

$= \frac{e^3}{3} - e^2 - \frac{e^3 - 1}{9} + \frac{e^2 - 1}{2} = \frac{4e^3 - 9e^2 - 7}{9}.$

68.α) $I_1 = \int_0^1 e^x \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^1 e^x (\eta\mu x)' dx = \left[e^x \eta\mu x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \eta\mu x dx =$

$= e\eta\mu 1 - \int_0^1 e^x (-\sigma\upsilon\nu x)' dx = e\eta\mu 1 + \left[e^x \sigma\upsilon\nu x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \sigma\upsilon\nu x dx \Leftrightarrow$

$I_1 = e\eta\mu 1 + e\sigma\upsilon\nu 1 - 1 - I_1 \Leftrightarrow I_1 = \frac{e(\eta\mu 1 + \sigma\upsilon\nu 1) - 1}{2}.$

β) $I_2=\int_0^{\pi}e^x\eta\mu4xdx=\int_0^{\pi}\left(e^x\right)'\eta\mu4xdx=\left[e^x\eta\mu4x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x4\sigma\upsilon4xdx=$

$=-4\int_0^{\pi}\left(e^x\right)'\sigma\upsilon4xdx=-4\left[e^x\sigma\upsilon4x\right]_0^{\pi}+4\int_0^{\pi}e^x\left(-4\eta\mu4x\right)dx=$

$=-4e^{\pi}+4-16\int_0^1e^x\eta\mu4xdx\Leftrightarrow I_2=-4e^{\pi}+4-16I_2\Leftrightarrow I_2=\dfrac{-4e^{\pi}+4}{17}.$

γ) $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sigma\upsilon2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)'\sigma\upsilon2xdx=$

$\left[\dfrac{1}{2}e^{2x}\sigma\upsilon2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}e^{2x}\left(-2\eta\mu2x\right)dx=-\dfrac{e^{\pi}}{2}-\dfrac{1}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\eta\mu2xdx=$

$-\dfrac{e^{\pi}}{2}-\dfrac{1}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)'\eta\mu2xdx=$

$=-\dfrac{e^{\pi}}{2}-\dfrac{1}{2}+\left[\dfrac{1}{2}e^{2x}\eta\mu2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}e^{2x}2\sigma\upsilon2xdx\Leftrightarrow$

$I_3=-\dfrac{e^{\pi}}{2}-\dfrac{1}{2}+0-I_3\Leftrightarrow I_3=\dfrac{-e^{\pi}-1}{4}.$

δ) $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\eta\mu3xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-e^{-x}\right)'\eta\mu3xdx=$

$-\left[e^{-x}\eta\mu3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\left(3\sigma\upsilon3x\right)dx=e^{-\frac{\pi}{2}}+3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-e^{-x}\right)'\sigma\upsilon3xdx=$

$e^{-\frac{\pi}{2}}-3\left[-e^{-x}\sigma\upsilon3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-e^{-x}\right)\left(-3\eta\mu3x\right)dx=$

$=e^{-\frac{\pi}{2}}-3\left(0-1\right)-9\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\eta\mu3xdx\Leftrightarrow I_4=e^{-\frac{\pi}{2}}+3-9I_4\Leftrightarrow I_4=\dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}}+3}{10}.$

ε) $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2x}\sigma\upsilon3xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\right)'\sigma\upsilon3xdx=$

$-\dfrac{1}{2}\left[e^{-2x}\sigma\upsilon3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\right)\left(-3\eta\mu3x\right)dx=-\dfrac{1}{2}\left(0-1\right)-\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2x}\eta\mu3xdx=$

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\right)'\eta\mu3xdx=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\left[-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\eta\mu3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+$

$\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\right)3\cdot\sigma\upsilon3xdx=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}e^{-\pi}-\dfrac{9}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2x}\sigma\upsilon3xdx\Leftrightarrow$

$I_5=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}e^{-\pi}-\dfrac{9}{4}I_5\Leftrightarrow 4I_5=2-3e^{-\pi}-9I_5\Leftrightarrow I_5=\dfrac{2-3e^{-\pi}}{13}.$

στ) $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-3x}\eta\mu 3x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)' \eta\mu 3x dx$

$= -\frac{1}{3}\left[e^{-3x}\eta\mu 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)(3\sigma\upsilon 3x)dx =$

$= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-3x}\sigma\upsilon 3x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)' \sigma\upsilon 3x dx =$

$= -\frac{1}{3}\left[e^{-3x}\sigma\upsilon 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)(-3\eta\mu 3x)dx =$

$-\frac{1}{3}\left(-e^{-\pi}-1\right) - \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-3x}\eta\mu 3x dx \Leftrightarrow I_6 = \frac{e^{\pi}+1}{3} - I_6 \Leftrightarrow I_6 = \frac{e^{\pi}+1}{6}$.

69. Το λάθος είναι στο ότι $[1]_1^2 = 1$ ενώ είναι $[1]_1^2 = 1-1 = 0$.

Αυξημένης δυσκολίας

70. $\int_0^1 xf''(x)dx = \left[xf'(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f'(x)dx = f'(1) - \left[f(x)\right]_0^1 = f'(1)$.

71. Είναι $\int_\alpha^\beta xf''(x)dx = \left[xf'(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)dx =$

$\beta f'(\beta) - \alpha f'(\alpha) - \left[f(x)\right]_\alpha^\beta = \beta\alpha - \alpha\beta - \left[f(\beta) - f(\alpha)\right] = 0$.

72. $\int_0^\pi \left(f(x) + f''(x)\right)\sigma\upsilon x dx = 2\pi \Leftrightarrow$

$\int_0^\pi f(x)\sigma\upsilon x dx + \int_0^\pi \left(f'(x)\right)' \sigma\upsilon x dx = 2\pi \Leftrightarrow$

$\int_0^\pi f(x)\sigma\upsilon x dx + \left[f'(x)\sigma\upsilon x\right]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)(-\eta\mu x)dx = 2\pi \Leftrightarrow$

$\int_0^\pi f(x)\sigma\upsilon x dx + f'(\pi)\sigma\upsilon\pi - f'(0)\sigma\upsilon 0 + \int_0^\pi f'(x)\eta\mu dx = 2\pi \Leftrightarrow$

$\int_0^\pi f(x)\sigma\upsilon x dx - f'(\pi) - f'(0) + \left[f(x)\eta\mu x\right]_0^\pi - \int_0^\pi f(x)\sigma\upsilon x dx = 2\pi \Leftrightarrow$

$\pi - f'(0) = 2\pi \Leftrightarrow f'(0) = -\pi$.

73. Είναι $\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx + \int_0^\pi \left(f'(x)\right)' \eta\mu x dx = 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx + \left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon x dx = 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx + 0 - \left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi + \int_0^\pi f(x)(-\eta\mu x)dx = 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx - f(\pi)(-1) + f(0) - \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx = 0 \Leftrightarrow$

$f(\pi) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(\pi) = -f(0) \quad (1)$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και $f(0)\cdot f(\pi) = -f^2(0) \le 0$

• Αν $f(0)\cdot f(\pi) < 0$ τότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

• Αν $f(0)\cdot f(\pi) = 0 \Leftrightarrow f^2(0) = 0$ άρα $f(0) = 0$ και από την (1) θα είναι και $f(\pi) = 0$ οπότε $x_0 = 0$ ή $x_0 = \pi$ θα είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Τελικά υπάρχει $x_0 \in [0,\pi]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

74. Επειδή η f είναι άρτια στο $[-3,3]$ ισχύει $f(-x) = f(x) \quad (1)$

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε $-f'(-x) = f'(x) \quad (2)$ και

$I = \int_{-3}^3 \left[xf''(x) - f'(x)\right]dx = \int_{-3}^3 x\left[f'(x)\right]'dx - \int_{-3}^3 f'(x)dx =$

$= \left[xf'(x)\right]_{-3}^3 - \int_{-3}^3 f'(x)dx - \int_{-3}^3 f'(x)dx = 3f'(3) + 3f'(-3) - 2\int_{-3}^3 f'(x)dx =$

$= 3\left(f'(3) + f'(-3)\right) - 2\left(f(3) - f(-3)\right)$

Από (1) για $x = 3$ προκύπτει $f(-3) = f(3) \Leftrightarrow f(3) - f(-3) = 0 \quad (3)$ και

στην (2) για $x = 3$ έχουμε $-f'(-3) = f'(3) \Leftrightarrow f'(3) + f'(-3) = 0 \quad (4)$

Άρα από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι $I = 0$.

Αναγωγικοί τύποι ολοκληρωμάτων

75.α) $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^2 \frac{e^{\nu x}}{1+e^x}dx + \int_0^2 \frac{e^{(\nu+1)x}}{1+e^x}dx = \int_0^2 \frac{e^{\nu x} + e^{\nu x}e^x}{1-e^x}dx =$

$\int_0^2 \frac{e^{\nu x}\left(1+e^x\right)}{1+e^x}dx = \int_0^2 e^{\nu x}dx = \frac{1}{\nu}\left[e^{\nu x}\right]_0^2 = \frac{1}{\nu}\left(e^{2\nu} - 1\right).$

β) Για $\nu = 1$ είναι $I_1 + I_2 = e^2 - 1 \Leftrightarrow I_2 = e^2 - 1 - I_1 \Leftrightarrow I_2 = e^2 - 1 - \int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx =$

$= e^2 - 1 - \left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^2 = e^2 - 1 - \ln\left(1+e^2\right) + \ln 2 = e^2 - 1 - \ln\frac{1+e^2}{2}$

76.α) $I_\nu + I_{\nu+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon\varphi^{\nu+2}x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\varepsilon\varphi^\nu x + \varepsilon\varphi^{\nu+2}x\right)dx =$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^{\nu}x\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)dx$ Θέτω $u=\varepsilon\varphi x$ οπότε $du=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)dx$ και

$I_\nu + I_{\nu+2} = \int_0^1 u^{\nu}du = \left[\frac{u^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\nu+1}$.

β) Για $\nu=2$ θα έχουμε $I_2+I_4=\frac{1}{3}\Leftrightarrow I_4=\frac{1}{3}-I_2=\frac{1}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varepsilon\varphi^2 xdx=$

$=\frac{1}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\frac{1}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=\frac{1}{3}-\left[\varepsilon\varphi x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$.

77.α) $I_\nu=\int_1^e \ln^{\nu}x dx=\int_1^e (x)'\ln^{\nu}x dx=\left[x\ln^{\nu}x\right]_1^e-\int_1^e x\nu\ln^{\nu-1}x\frac{1}{x}dx=$

$=e-0-\nu\int_1^e \ln^{\nu-1}x dx\Leftrightarrow I_\nu=e-\nu I_{\nu-1}\quad(1)$.

β) Για $\nu=3$ στην (1) έχουμε $I_3=e-3I_2\quad(2)$ και για $\nu=2$ στην (1) έχουμε

$I_2=e-2I_1\quad(3)$. Άρα από (2) και (3): $I_3=e-3(e-2I_1)=6I_1-2e=$

$6\int_1^e \ln x dx-2e=6\left(\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e x\frac{1}{x}dx\right)-2e=6-2e$

Μέθοδος αντικατάστασης

78.α) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{(1+2\sigma\upsilon\nu x)}dx$.

x	0	π/2
u	3	1

Θέτουμε $u=1+2\sigma\upsilon\nu x$ οπότε $du=-2\eta\mu x dx$ και

άρα $I_1=\int_3^1\frac{-\frac{1}{2}du}{u^2}=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{u}\right]_1^3=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{1}{3}$

β) $I_2=\int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.Θέτουμε $u=\sqrt{x}$ οπότε $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

x	1	4
u	1	2

οπότε $I_2=\int_1^2 e^u 2du=2\left[e^u\right]_1^2=2\left(e^2-e\right)$.

x	0	π/2
u	1	0

γ) $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\eta\mu x)^4\sigma\upsilon\nu x dx$ Θέτουμε $u=1-\eta\mu x$ οπότε

$du=-\sigma\upsilon\nu x dx$ και $I_3=\int_1^0 u^4(-du)=\int_0^1 u^4 du=\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{5}$.

δ) $I_4=7\int_0^2\left(x^2-3x\right)^6(2x-3)dx$.

x	0	2
u	0	-2

Θέτουμε $u=x^2-3x$ οπότε $du=(2x-3)dx$

οπότε $I_4 = 7\int_0^{-2} u^6 du = \left[u^7\right]_0^{-2} = (-2)^7 = -128$.

ε) $I_5 = 12\int_0^1 (3x+1)^3\, dx$. Θέτουμε $u = 3x+1$ και

x	0	1
u	1	4

$du = 3dx$ οπότε $I_5 = 4\int_1^4 u^3 du = \left[u^4\right]_1^4 = \left(4^4 - 1\right) = 255$.

στ) $I = \int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x} dx$.Θέτουμε $u = x^2 + x$ οπότε

x	0	1
u	0	2

$du = (2x+1)dx$ και $I = \int_0^2 e^u du = e^2 - 1$.

ζ) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu x dx$.Θέτουμε $u = \eta\mu x$ οπότε

x	0	π/2
u	0	1

$du = \sigma\upsilon\nu x dx$ και $I = \int_0^1 4u^3 du = \left[u^4\right]_0^1 = 1$.

η) $I = \int_0^1 e^{2x+1} dx$.

Θέτουμε $u = 2x+1$ οπότε $du = 2dx$ και

x	0	1
u	1	3

$I = \frac{1}{2}\int_1^3 e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(e^3 - e\right)$.

θ) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sigma\upsilon\nu 2x dx$. Θέτουμε $u = 2x$ οπότε

x	0	π/4
u	0	π/2

$du = 2dx$ και $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu u du = \frac{1}{2}\left[\eta\mu u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$.

ι) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x 2^{\eta\mu x} dx$. Θέτουμε $u = \eta\mu x$ οπότε $du = \sigma\upsilon\nu x dx$ και

$I = \int_0^1 2^u du = \left[\frac{2^u}{\ln 2}\right]_0^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$.

κ) $I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$.Θέτουμε $u = \ln x$ οπότε $du = \frac{1}{x}dx$ και

x	1	e
u	0	1

$I = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

λ) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) dx$ Θέτουμε $u = \eta\mu x$ οπότε

x	0	π/2
u	0	1

$du = \sigma\upsilon\nu x dx$ και $I = \int_0^1 \sigma\upsilon\nu u du = \left[\eta\mu u\right]_0^1 = \eta\mu 1$.

79.α) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^2 x} dx$ Θέτουμε $u = 1 + \eta\mu^2 x$ οπότε

x	0	π/2
u	1	2

$du = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx$ και

$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{2}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\left[\ln|u|\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2$

β) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x - \eta\mu x}{x^2 + \sigma\upsilon\nu x}dx$

x	0	$\frac{\pi}{3}$
u	1	$\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2}$

Θέτουμε $u = x^2 + \sigma\upsilon\nu x$ οπότε $du = (2x - \eta\mu x)dx$

και $I_2 = \int_1^{\frac{\pi^2}{9}+\frac{1}{2}} \frac{du}{u} = \left[\ln|u|\right]_1^{\frac{\pi^2}{9}+\frac{1}{2}} = \ln\left(\frac{\pi^2}{9}+\frac{1}{2}\right)$

γ) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx.$

x	0	$\frac{\pi}{3}$
u	1	$\frac{1}{2}$

Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$ οπότε $du = (-\eta\mu x)dx$ και

$I_3 = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u}dx = -\left[\ln|u|\right]_1^{\frac{1}{2}} = \ln 2.$

δ) $I_4 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}dx.$

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
u	$\frac{1}{2}$	1

Θέτουμε $u = \eta\mu x$ οπότε $du = \sigma\upsilon\nu x dx$ και

$I_3 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{u}dx = \left[\ln|u|\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \ln 2.$

Αυξημένης δυσκολίας

x	e	e^2
u	1	2

80.α) $I_1 = \int_e^{e^2} \frac{\ln x + 1}{x\ln x}dx$. Θέτουμε $u = \ln x$ οπότε

$du = \frac{1}{x}dx$ και $I_1 = \int_1^2 \frac{u+1}{u}du = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{u}\right)du = \left[u\right]_1^2 + \left[\ln|u|\right]_1^2 = 1 + \ln 2.$

β) $I_2 = \int_1^2 \frac{6x^5}{\left(x^6+1\right)\ln\left(x^6+1\right)}dx$. Θέτουμε

x	1	2
u	$\ln 2$	$\ln 65$

$u = \ln\left(x^6+1\right)$ οπότε $du = \frac{6x^5}{x^6+1}dx$ και

$I_2 = \int_{\ln 2}^{\ln 65} \frac{du}{u} = \left[\ln|u|\right]_{\ln 2}^{\ln 65} = \ln\frac{\ln 65}{\ln 2}.$

γ) $I_3 = \int_0^1 \frac{e^x}{\left(e^x+2\right)\ln\left(e^x+2\right)}dx$.Θέτουμε

x	0	1
u	$\ln 3$	$\ln(e+2)$

$u = \ln\left(e^x+2\right)$ οπότε $du = \frac{e^x}{e^x+2}dx$ και

$I_3 = \int_{\ln 3}^{\ln(e+2)} \frac{du}{u} = \left[\ln|u|\right]_{\ln 3}^{\ln(e+2)} = \ln\frac{\ln(e+2)}{\ln 3}$.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
u	$-\ln 2$	0

δ) $I_4 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi x \cdot \ln(\eta\mu x)\,dx$. Θέτουμε $u = \ln(\eta\mu x)$

οπότε $du = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}dx = \sigma\varphi x dx$ και $I_4 = \int_{-\ln 2}^{0} u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-\ln 2}^{0} = -\frac{\ln^2 2}{2}$.

81.α) $I_1 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int_0^1 \frac{e^x \cdot e^x}{1+e^x}dx$.Θέτουμε $u = 1+e^x$

x	0	1
u	2	$1+e$

οπότε $e^x = u-1$ και $du = e^x dx$,

άρα $I_1 = \int_2^{1+e} \frac{(u-1)du}{u} = \int_2^{1+e}\left(1-\frac{1}{u}\right)du =$

$= \left[u\right]_2^{1+e} - \left[\ln|u|\right]_2^{1+e} = 1+e-2-\left(\ln(1+e)-\ln 2\right) = e-1-\ln\frac{1+e}{2}$.

β) $I_2 = \int_0^1 \frac{2x-3}{(4x-7)^3}dx$. Θέτουμε $u = 4x-7$ οπότε

x	0	1
u	–7	–3

$du = 4dx$ και $x = \frac{u+7}{4}$.

$I_2 = \int_{-7}^{-3} \frac{2\frac{u+7}{4}-3}{u^3}\frac{1}{4}du = \int_{-7}^{-3}\frac{u+1}{8u^3}du = \frac{1}{8}\int_{-7}^{-3}\left(u^{-2}+u^{-3}\right)du =$

$= \frac{1}{8}\left[\frac{u^{-1}}{-1}\right]_{-7}^{-3} + \frac{1}{8}\left[\frac{u^{-2}}{-2}\right]_{-7}^{-3} = \frac{-1}{8}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{49}\right) = \frac{1}{42} - \frac{5}{882} = \frac{10}{441}$.

γ) $I_3 = \int_0^1 x^2(x+1)^u\,dx$. Θέτουμε $u = x+1$ οπότε

x	0	1
u	1	2

$x = u-1$ και $dx = du$ άρα

$I_3 = \int_1^2 (u-1)^2 u^4 du = \int_1^2 \left(u^6 - 2u^5 + u^4\right)du =$

$\left[\frac{u^7}{7}\right]_1^2 - 2\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^2 + \left[\frac{u^5}{5}\right]_1^2 = \frac{127}{7} - \frac{63}{3} + \frac{31}{5} = \frac{1351}{105}$.

δ) $I_4 = \int_1^2 5(2x-3)(x-1)^4\,dx$. Θέτουμε $u = x-1$ οπότε

x	1	2
u	0	1

$du = dx$ και $x = u+1$οπότε

$I_4 = \int_0^1 5\left[2(u+1)-3\right]u^4 du = \int_0^1 5(2u-1)u^4 du =$

$= \int_0^1 \left(10u^5 - 5u^4\right) du = 10\left[\frac{u^6}{6}\right]_0^1 - \left[u^5\right]_0^1 = \frac{10}{6} - 1 = \frac{2}{3}$.

ε) Θέτουμε $\sqrt{x} = u \Leftrightarrow x = u^2$ και $dx = 2udu$. Για x = 0 είναι u=0 και για x=1 είναι u=1. Τότε $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} dx = \int_0^1 \frac{u+2}{u+1} \cdot 2udu = \int_0^1 \frac{2u^2+4u}{u+1} du =$

$\int_0^1 \left(\frac{2(u+1)^2 - 2}{u+1} \right) du = \int_0^1 2(u+1) du - \int_0^1 \frac{2}{u+1} du = \left[(u+1)^2\right]_0^1 - \left[2\ln(u+1)\right]_0^1 =$

$4 - 1 - 2\ln 2 = 3 - 2\ln 2$.

στ) $I = \int_0^4 \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} dx$. Θέτουμε $u = \sqrt{x} \Leftrightarrow u^2 = x$ οπότε $2udu = dx$. Για x=0 είναι u=0 και για x=4 είναι u=2, οπότε: $I = \int_0^2 \frac{u+2}{u+3} 2udu = \int_0^2 \frac{2u^2+4u}{u+3} du \Leftrightarrow$

$I = \int_0^2 (2u-2) du + \int_0^2 \frac{6}{u+3} du$

$= \left[u^2\right]_0^2 - 2\left[u\right]_0^2 + 6\left[\ln|u+3|\right]_0^2 = 6\ln\frac{5}{3}$.

$2u^2+4u$	$u+3$
$-2u^2-6u$	$2u-2$
$-2u$	
$2u+6$	
6	

ζ) $I = \int_0^4 \frac{x - 2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}+1} dx$. Θέτουμε $u = \sqrt{x}$, οπότε

x	0	4
u	0	2

$u^2 = x$, $2udu = dx$ άρα

$I = \int_0^2 \frac{u^2 - 2u + 2}{u+1} 2udu =$

$\int_0^2 \frac{2u^3 - 4u^2 + 4u}{u+1} du$

$2u^3-4u^2+4u$	$u+1$
$-2u^3-2u^2$	$2u^2-6u+10$
$-6u^2+4u$	
$+6u^2+6u$	
$10u$	
$-10u-10$	
-10	

άρα $I = \int_0^2 \left(2u^2 - 6u + 10\right) du - \int_0^2 \frac{10}{u+1} du =$

$2\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^2 - 3\left[u^2\right]_0^2 + 20 - 10\left[\ln|u+1|\right]_0^2 = \frac{40}{3} - 10\ln 3$.

x	0	1
u	1	e

η) $I = \int_0^1 \frac{e^x - 2}{e^x + 3} dx = \int_0^1 \frac{(e^x - 2)e^x}{e^x(e^x+3)} dx$. Θέτουμε $u = e^x + 3$ οπότε $du = e^x dx$

άρα $I = \int_1^e \frac{u-2}{u(u+3)} du$ και είναι $\frac{u-2}{u(u+3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+3} \Leftrightarrow$

$u - 2 = A(u+3) + Bu \Leftrightarrow u - 2 = (A+B)u + 3A \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ 3A = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$A=-\frac{2}{3}$, $B=\frac{5}{3}$ οπότε

$$I=\int_1^e \frac{-\frac{2}{3}}{u}du+\int_1^e \frac{\frac{5}{3}}{u+3}du=-\frac{2}{3}\Big[\ln|u|\Big]_1^e+\frac{5}{3}\Big[\ln|u+3|\Big]_1^e=-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\ln(e+3)-\frac{5}{3}\ln 4\,.$$

82.α) $I_1=\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$. Θέτουμε $u=e^x+1$ οπότε

x	0	1
u	2	e+1

$du=e^x dx$ και

$$I_1=\int_2^{e+1}\frac{du}{\sqrt{u}}=2\Big[\sqrt{u}\Big]_2^{e+1}=2\left(\sqrt{e+1}-\sqrt{2}\right).$$

β) $I_2=\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx$. Θέτουμε $u=x^2+5$ οπότε

x	0	2
u	5	9

$du=2xdx$ άρα $I_2=\int_5^9\frac{du}{2\sqrt{u}}=\Big[\sqrt{u}\Big]_5^9=3-\sqrt{5}$.

γ) $I_3=\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx$. Θέτουμε $u=x^2+16$ οπότε

x	0	3
u	16	25

$du=2xdx$ οπότε $I_3=\int_{16}^{25}\frac{du}{2\sqrt{u}}=\Big[\sqrt{u}\Big]_{16}^{25}=5-4=1$.

δ) $I_4=\int_2^6 \frac{4x+3}{\sqrt{2x+4}}dx$. Θέτουμε $u=2x+4$ οπότε

x	2	6
u	8	16

$du=2dx$, $x=\frac{u-4}{2}$ και

$$I_4=\int_8^{16}\frac{4\frac{u-4}{2}+3}{\sqrt{u}}\frac{du}{2}=\int_8^{16}\frac{2u-5}{2\sqrt{u}}du=\int_8^{16}u^{\frac{1}{2}}du-5\int_8^{16}\frac{1}{2\sqrt{u}}du=$$

$$=\frac{2}{3}\Big[\sqrt{u^3}\Big]_8^{16}-5\Big[\sqrt{u}\Big]_8^{16}=\frac{2}{3}\left(64-16\sqrt{2}\right)-5\left(4-2\sqrt{2}\right)=\frac{68}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}\,.$$

ε) $I_5=\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx$. Θέτουμε $u=4-x^2$ άρα

x	0	2
u	4	0

$-2xdx=du$ και

$$I_5=\int_4^0\sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}du\right)=-\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{u}du=-\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4=-\frac{1}{3}\Big[\sqrt{u^3}\Big]_0^4=-\frac{8}{3}\,.$$

x	0	3
u	1	4

στ) $I_6=\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$. Θέτουμε $u=x+1$ οπότε $du=dx$, $x=u-1$ και

$I_6=\int_1^4 (u-1)\sqrt{u}du=\int_1^4 u^{\frac{3}{2}}du-\int_1^4 u^{\frac{1}{2}}du=$

$\frac{2}{5}\left[\sqrt{u^5}\right]_1^4-\frac{2}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_1^4=\frac{2}{5}(32-1)-\frac{2}{3}(8-1)=\frac{62}{5}-\frac{14}{3}=\frac{116}{15}$.

ζ) $I_7=\int_2^5 x^2\sqrt{x-1}dx$. Θέτουμε $u=x-1$ οπότε $du=dx$,

x	2	5
u	1	4

$x=u+1$ οπότε

$I_7=\int_1^4 (u+1)^2\sqrt{u}du=\int_1^4\left(u^2\sqrt{u}+2u\sqrt{u}+\sqrt{u}\right)du=$

$=\int_1^4\left(u^{\frac{5}{2}}+2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}}\right)du=\frac{2}{7}\left[\sqrt{u^7}\right]_1^4+2\frac{2}{5}\left[\sqrt{u^5}\right]_1^4+\frac{2}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_1^4=\frac{6904}{105}$.

η) $I_8=\int_3^{11}\frac{x+2}{\sqrt{x-2}}dx$. Θέτουμε $u=x-2$ οπότε $du=dx$,

x	3	11
u	1	9

$x=u+2$ οπότε $I_8=\int_1^9\frac{u+4}{\sqrt{u}}du=\int_1^9\left(\sqrt{u}+\frac{4}{\sqrt{u}}\right)du=$

$\frac{2}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_1^9+8\left[\sqrt{u}\right]_1^9=\frac{52}{3}+16=\frac{100}{3}$.

θ) $\int_1^{64}\frac{3x+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}}dx=\int_1^{64}\left(\frac{3x}{\sqrt{x}}+\frac{x^{1/3}}{x^{1/2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_1^{64}\left(3x^{1/2}+x^{-1/6}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=$

$=3\frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_1^{64}+\frac{6}{5}\left[\sqrt[6]{x^5}\right]_1^{64}+2\left[\sqrt{x}\right]_1^{64}=2(512-1)+\frac{6}{5}(32-1)+2(8-1)=$

$=1036+\frac{186}{5}=\frac{5366}{5}$

ι) $I=\int_0^{63}\frac{x-\sqrt{x+1}-3}{\sqrt[3]{x+1}}dx$. Θέτουμε $u=\sqrt[6]{x+1}\Leftrightarrow x=u^6-1$,

$dx=6u^5du$ οπότε $I_{12}=\int_1^2\frac{u^6-1-u^3-3}{u^2}du=\int_1^2\left(u^4-\frac{4}{u^2}-u\right)du$

$\left[\frac{u^5}{5}\right]_1^2+\left[\frac{4}{u}\right]_1^2-\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2=\frac{31}{5}-2-\frac{3}{2}=\frac{27}{10}$.

x	0	63
u	1	2

83.α) Ο μαθητής κάνει λάθος που εμφανίζει τον όρο $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ στο αρχικό ολοκλήρωμα ο οποίος δεν ορίζεται για $x=-1$.

β) Θέτουμε $\sqrt{x+1}=u \Leftrightarrow x+1=u^2 \Leftrightarrow x-1=u^2-2$ άρα $dx=2u\,du$. Για $x=-1$ είναι $u=0$ και για $x=3$ είναι $u=2$.

Άρα $I=\int_0^2\left(\left(u^2-2\right)u\cdot 2u\right)du=2\int_0^2\left(u^2-2\right)u^2du=2\left[\frac{u^5}{5}-\frac{2u^3}{3}\right]_0^2=$

$=2\left(\frac{32}{5}-\frac{16}{3}\right)=2\frac{96-80}{15}=2\frac{16}{15}=\frac{32}{15}$.

84.α) $I_1=\int_0^1\frac{e^{3x}-2e^{2x}-5e^x+6}{e^x+2}dx=\int_0^1\frac{\left(e^{3x}-2e^{2x}-5e^x+6\right)e^x}{e^x\left(e^x+2\right)}dx$

Θέτουμε $u=e^x$ άρα $du=e^xdx$ οπότε

x	0	1
u	1	e

$I_1=\int_1^e\frac{u^3-2u^2-5u+6}{u(u+2)}du=$

$\int_1^e\frac{u^3-2u^2-5u+6}{u^2+2u}du\Leftrightarrow$

u^3-2u^2-5u+6 | u^2+2u

$-u^3-2u^2$ | $u-4$

$-4u^2-5u+6$

$+4u^2+8u$

$3u+6$

$I_1=\int_1^e(u-4)du+\int_1^e\frac{3u+6}{u^2+2u}du=$

$=\int_1^e(u-4)du+\int_1^e\frac{3\cancel{(u+2)}}{u\cancel{(u+2)}}du=$

$=\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^e-4(e-1)+3\left[\ln|u|\right]_1^e=\frac{e^2-1}{2}-4(e-1)+3=\frac{e^2-8e+9}{2}$

β) $I_2=\int_{\ln 3}^{\ln 4}\frac{e^{2x}+4e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx=\int_{\ln 3}^{\ln 4}\frac{\left(e^x+4\right)e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx$.

Θέτουμε $e^x=u$ οπότε $e^xdx=du$ άρα $I_2=\int_3^4\frac{u+4}{u^2-3u+2}du$

x	ln 3	ln 4
u	3	4

$\frac{u+4}{(u-1)(u-2)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u-2}\Leftrightarrow u+4=A(u-2)+B(u-1)\Leftrightarrow$

$u+4=(A+B)u-2A-B\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=1\\-2A-B=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}A=-5\\B=6\end{matrix}$ συνεπώς

$I_2=\int_3^4\frac{-5}{u-1}du+\int_3^4\frac{6}{u-2}du=-5\left[\ln|u-1|\right]_3^4+6\left[\ln|u-2|\right]_3^4=$

$11\ln 2-5\ln 3$.

x	0	1
u	1	e

γ) $I_3 = \int_0^1 \frac{e^{4x} - e^x}{e^x + 3} dx = \int_0^1 \frac{\left(e^{3x} - 1\right)e^x}{e^x + 3} dx$.

$u^3 - 1$	$u + 3$
$-u^3 - 3u^2$	$u^2 - 3u + 9$
$-3u^2 - 1$	
$+3u^2 + 9u$	
$9u - 1$	
$-9u - 27$	
-28	

Θέτουμε $e^x = u$ οπότε $e^x dx = du$ άρα

$I_3 = \int_1^e \frac{u^3 - 1}{u + 3} du$

$I_3 = \int_1^e \left(u^2 - 3u + 9\right) du - \int_1^e \frac{28}{u + 3} du =$

$\left[\frac{u^3}{3}\right]_1^e - \frac{3}{2}\left[u^2\right]_1^e + 9(e - 1) - 28\left[\ln|u + 3|\right]_1^e =$

$= \frac{e^3 - 1}{3} - \frac{3}{2}\left(e^2 - 1\right) + 9(e - 1) - 28\ln\frac{e + 3}{4}$.

δ) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x - 7\eta\mu x + 10} dx$. Θέτουμε $u = \eta\mu x$ οπότε

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

$du = \sigma\upsilon\nu x dx$ και $I_4 = \int_0^1 \frac{3}{u^2 - 7u + 10} du$.

$\frac{3}{u^2 - 7u + 10} = \frac{A}{u - 2} + \frac{B}{u - 5} \Leftrightarrow 3 = Au - 5A + Bu - 2B \Leftrightarrow$

$3 = (A + B)u + (-5A - 2B) \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -5A - 2B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A = -1 \\ B = 1 \end{matrix}$

άρα $I_4 = \int_0^1 \frac{-1}{u - 2} du + \int_0^1 \frac{1}{u - 5} du = -\left[\ln|u - 2|\right]_0^1 + \left[\ln|u - 5|\right]_0^1 = 3\ln 2 - \ln 5$

ε) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\frac{e^x + 1}{e^x}} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx =$

$\int_0^{\ln 2} \frac{\left(e^x + 1\right)'}{e^x + 1} dx = \left[\ln\left(e^x + 1\right)\right]_0^{\ln 2} = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$

στ) $I_6 = \int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^x dx}{e^x\sqrt{e^x + 4}}$. Θέτουμε $u = \sqrt{e^x + 4} \Leftrightarrow u^2 - 4 = e^x$ και $e^x dx = 2udu$

άρα $I_6 = \int_3^4 \frac{2udu}{\left(u^2 - 4\right) \cdot u} = \int_3^4 \frac{2}{u^2 - 4} du = \int_3^4 \frac{\frac{1}{2}}{u - 2} du - \int_3^4 \frac{\frac{1}{2}}{u + 2} du =$

$= \frac{1}{2}\left[\ln|u - 2|\right]_3^4 - \frac{1}{2}\left[\ln|u + 2|\right]_3^4 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$.

85.α) $I_3 = \int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$. Θέτουμε $u = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = u^2$ οπότε

x	1	4
u	1	2

$dx = 2udu$. Άρα

$I_3 = \int_1^2 e^u 2udu = \left[2ue^u\right]_1^2 - \int_1^2 2e^u du = 4e^2 - 2e - 2\left(e^2 - 1\right) = 2e^2 - 2e + 2$.

β) $I_4 = \int_0^{\ln\pi} e^{2x}\sigma\upsilon\nu\left(e^x\right)dx$. Θέτω $e^x = u$ οπότε $e^x dx = du$.

x	0	$\ln\pi$
u	1	π

Άρα $I_4 = \int_1^\pi u\sigma\upsilon\nu udu = \int_1^\pi u\left(\eta\mu u\right)' du =$

$= \left[u\eta\mu u\right]_1^\pi - \int_1^\pi \eta\mu udu = -\eta\mu 1 + \left[\sigma\upsilon\nu u\right]_1^\pi = -\eta\mu 1 - 1 - \sigma\upsilon\nu 1$.

γ) $I_5 = \int_1^{e^\pi} \eta\mu\left(\ln x\right)dx$. Θέτουμε $u = \ln x \Leftrightarrow x = e^u$ και

x	1	e^π
u	0	π

$dx = e^u du$ οπότε

$I_5 = \int_0^\pi \eta\mu u \cdot e^u du = \left[e^u \eta\mu u\right]_0^\pi - \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu u \cdot e^u du =$

$0 - \left[e^u \sigma\upsilon\nu u\right]_0^\pi + \int_0^\pi \left(-\eta\mu u\right)\cdot e^u du = -\left(-e^\pi - 1\right) - \int_0^\pi \eta\mu u \cdot e^u du \Leftrightarrow$

$I_5 = e^\pi + 1 - I_5 \Leftrightarrow I_5 = \dfrac{e^\pi + 1}{2}$.

δ) $I_6 = \int_0^{\pi^2} \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}dx$. Θέτουμε $u = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = u^2$ και

x	0	π^2
u	0	π

$dx = 2udu$ οπότε $I_6 = \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu u \cdot 2udu = \int_0^\pi \left(\eta\mu u\right)' 2udu =$

$\left[2u\eta\mu u\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2\eta\mu udu = 0 + 2\left[\sigma\upsilon\nu u\right]_0^\pi = 2\left(-2\right) = -4$.

86.α) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \dfrac{2\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^3}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \dfrac{2x\eta\mu x - x^2\sigma\upsilon\nu x}{x^4}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\dfrac{\eta\mu x}{x^2}\right)' dx =$

$\left[\dfrac{\eta\mu x}{x^2}\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = -\dfrac{1}{\dfrac{\pi^2}{4}} + \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\pi^2}{36}} = -\dfrac{14}{\pi^2}$

β) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + 1}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx =$

$\int_0^{\pi/4} \sqrt{\left(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right)^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \left(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right)dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\right]_0^{\pi/4} = 1$.

γ) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu^2 x}dx$.

Θέτουμε $u = \eta\mu x$

x	0	$\pi/3$
u	0	1/2

οπότε $du=\sigma\upsilon\nu x dx$ άρα $I=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{du}{1-u^2}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\frac{1}{2}}{1-u}du+\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\frac{1}{2}}{1+u}du=$

$=\frac{1}{2}\left[-\ln|1-u|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{2}\left[\ln|1+u|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

δ) $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\eta\mu x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\eta\mu x}{1-\eta\mu^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=$

x	0	π/3
u	1	1/2

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\left[\varepsilon\varphi x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$. Θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$

οπότε $du=-\eta\mu x dx$ άρα $I=\sqrt{3}+\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{du}{u^2}=\sqrt{3}-\left[\frac{1}{u}\right]_1^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}-(2-1)=\sqrt{3}-1$

ε) $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx=$

x	π/6	π/2
u	1/2	1

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\eta\mu^2 x}dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx=-\left[\sigma\varphi x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx$

Θέτουμε $u=\eta\mu x$ οπότε $du=-\sigma\upsilon\nu x dx$ άρα

$I=-\left(0-\sqrt{3}\right)+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{du}{u^2}=\sqrt{3}-\left[\frac{1}{u}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\sqrt{3}-(1-2)=\sqrt{3}+1$.

87.α) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^3 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 x\cdot\eta\mu x dx=\int_0^{2}\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\eta\mu x dx$

Θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$ οπότε $du=-\eta\mu x dx$.

Για x=0 είναι u=1 και για x=π/2 είναι u=0.

x	0	π/2
u	1	0

$I_1=\int_1^0\left(1-u^2\right)(-du)=\int_0^1\left(1-u^2\right)du=1-\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$.

β) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^3 x\eta\mu x dx$. Θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$ οπότε $du=-\eta\mu x dx$ άρα

$I_2=\int_1^0 u^3(-du)=\int_0^1 u^3 du=\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$

γ) $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x dx$

Θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$ οπότε $du=-\eta\mu x dx$ άρα

x	0	π/2
u	1	0

$I_3=\int_1^0\left(1-u^2\right)u^2(-du)=\int_0^1\left(u^2-u^4\right)du=\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1-\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^1=\frac{2}{15}$.

δ) $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^5 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^4 x\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\eta\mu^2 x\right)^2\sigma\upsilon\nu x dx$.

Θέτουμε $u=\eta\mu x$ οπότε $du=\sigma\upsilon\nu x dx$. Άρα

x	0	π/2
u	0	1

$I_4=\int_0^1\left(1-u^2\right)^2 du=\int_0^1\left(1-2u^2+u^4\right)du=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$.

ε) $I_5=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$. Θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$ οπότε

x	0	$\frac{\pi}{3}$
u	1	$\frac{1}{2}$

$du=-\eta\mu x dx$ άρα $I_5=\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{-du}{u^2}=\left[\frac{1}{u}\right]_1^{\frac{1}{2}}=2-1=1$

στ) $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu^5 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^5 x\eta\mu x dx=$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)\sigma\upsilon\nu^5 x\eta\mu x dx$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	1	0

Θέτουμε $u=\sigma\upsilon\nu x$ οπότε $du=-\eta\mu x dx$ άρα

$I_6=\int_1^0\left(1-u^2\right)u^5\left(-du\right)=\int_0^1\left(u^5-u^7\right)du=\left[\frac{u^6}{6}\right]_0^1-\left[\frac{u^8}{8}\right]_0^1=\frac{1}{24}$.

ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 2x dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\left[\eta\mu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

η) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^4 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\eta\mu^2 x\right)^2 dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^2 dx=$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-2\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu^2 2x}{4}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 2x dx+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 4x}{2}dx=$

$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\left[\eta\mu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{32}\left[\eta\mu 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{16}=\frac{3\pi}{16}$.

θ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^4 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\cdot\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^2 dx=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\cdot\frac{1+2\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu^2 2x}{4}dx=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+2\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu^2 2x-\sigma\upsilon\nu 2x-2\sigma\upsilon\nu^2 2x-\sigma\upsilon\nu^3 2x}{8}dx=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}dx+\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 2x dx-\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2 2x dx-\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^3 2x dx=$

$=\frac{1}{8}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{16}\left[\eta\mu 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 4x}{2}dx-\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2 2x\sigma\upsilon\nu 2x dx=$

$$=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx-\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu 4xdx-\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\eta\mu^2 2x\right)\sigma\upsilon\nu 2xdx=$$

$$=\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{32}-\frac{1}{64}\left[\eta\mu 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\eta\mu^2 2x\right)2\sigma\upsilon\nu 2xdx=$$

$$\frac{\pi}{32}-\frac{1}{16}\int_0^0\left(1-u^2\right)du=\frac{\pi}{32}$$

Θέτουμε $u=\eta\mu 2x$ οπότε $du=2\sigma\upsilon\nu 2xdx$ άρα

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	0

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\eta\mu^2 2x\right)2\sigma\upsilon\nu 2xdx=\int_0^0\left(1-u^2\right)du=0\ .)$$

88.α) Για το ολοκλήρωμα $I_1=\int_0^{\frac{\beta}{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2}}dx$ θέτουμε

$x=\frac{\beta}{\alpha}\varepsilon\varphi u$, $u\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και είναι $dx=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2u}du$. Για $x=0$ είναι

$$\frac{\beta}{\alpha}\varepsilon\varphi u=0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi u=0\overset{u\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}u=0$$ και για $x=\frac{\beta}{\alpha}$ είναι

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}\varepsilon\varphi u\Leftrightarrow\varepsilon\varphi u=1\overset{u\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}u=\frac{\pi}{4}$$. Άρα $I_1=\int_0^{\frac{\beta}{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2}}dx=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cancel{\alpha^2}\frac{\beta^2}{\cancel{\alpha^2}}\varepsilon\varphi^2u+\beta^2}}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2u}du=\frac{\beta}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\beta^2\left(\varepsilon\varphi^2u+1\right)}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2u}du=$$

$$=\frac{\beta}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\beta\sqrt{\frac{\eta\mu^2u}{\sigma\upsilon\nu^2u}+1}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2u}du=\frac{\beta}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\beta\sqrt{\frac{\eta\mu^2u+\sigma\upsilon\nu^2u}{\sigma\upsilon\nu^2u}}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2u}du=$$

$$=\frac{\beta}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\beta\frac{1}{|\sigma\upsilon\nu u|}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2u}du\overset{\substack{|\sigma\upsilon\nu u|=\sigma\upsilon\nu u\\ u\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)}}{=}\frac{\cancel{\beta}}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{\sigma\upsilon\nu u}}{\cancel{\beta}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{\cancel{2}}u}du=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu u}du$$

Το ολοκλήρωμα $I_2=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ είναι το I_2 με $\alpha=\beta=1$ άρα ισχύει ότι

$$I_2=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu u}du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu u}du$$

Άρα είναι $A=I_1+I_2=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx=\frac{1+\alpha}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx$

β) Για το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\alpha^2x^2+\beta^2}dx$ θέτουμε $x=\frac{\beta}{\alpha}\varepsilon\varphi u$, $u\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και

είναι $dx=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2u}du$. Για $x=0$ είναι $\frac{\beta}{\alpha}\varepsilon\varphi u=0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi u=0\Leftrightarrow \overset{u\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} u=0$

και για $x=\frac{\beta}{\alpha}$ είναι $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}\varepsilon\varphi u\Leftrightarrow\varepsilon\varphi u=1 \overset{u\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} u=\frac{\pi}{4}$.

Άρα $\int_0^{\frac{\beta}{\alpha}}\frac{1}{\alpha^2x^2+\beta^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cancel{\alpha^2}\frac{\beta^2}{\cancel{\alpha^2}}\varepsilon\varphi^2u+\beta^2}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2u}du=$

$=\frac{\cancel{\beta}}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cancel{\beta^2}\left(\varepsilon\varphi^2u+1\right)}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2u}du=\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(\frac{\eta\mu^2u}{\sigma\upsilon\nu^2u}+1\right)}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2u}du=$

$=\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\frac{\eta\mu^2u+\sigma\upsilon\nu^2u}{\sigma\upsilon\nu^2u}}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2u}du=\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2u}}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2u}du=$

$=\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,du=\frac{\pi}{4\alpha\beta}$. Το ολοκλήρωμα $\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$ είναι ίδιο με το

$\int_0^{\frac{\beta}{\alpha}}\frac{1}{\alpha^2x^2+\beta^2}dx$ με $\alpha=\beta=1$ άρα $\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4\alpha\beta}=\frac{\pi}{4}$.

Άρα $\int_0^{\frac{\beta}{\alpha}}\frac{1}{\alpha^2x^2+\beta^2}dx+\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4\alpha\beta}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi(1+\alpha\beta)}{4\alpha\beta}$.

Σύνθετες ασκήσεις

89.α) Έχουμε $f'(x)f(-x)=f(x)f'(-x)\Leftrightarrow f'(x)\cdot f(-x)-f(x)f'(-x)=0\Leftrightarrow$

$\left[f(x)f(-x)\right]'=0$ οπότε $f(x)\cdot f(-x)=c$ και για $x=0$ είναι

$f(0)\cdot f(0)=c\Leftrightarrow c=1$ άρα $f(x)\cdot f(-x)=1$.

β) Επειδή $f(x)\cdot f(-x)=1\neq 0$ είναι $f(x)\neq 0$ και αφού η f είναι συνεχής, θα διατηρεί πρόσημο. Είναι $f(0)=1>0$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in[-2,2]$.

γ) Έστω $I=\int_{-2}^2\frac{1}{1+f(x)}dx=\int_{-2}^2\frac{1}{1+\frac{1}{f(-x)}}dx=\int_{-2}^2\frac{f(-x)}{1+f(-x)}dx$.

Θέτω $-x=u$ οπότε $dx=-du$ για x=-2 είναι u=2 και για x=2 είναι u=-2,

οπότε $I=\int_{-2}^{2}\frac{f(u)}{1+f(u)}(-du)=\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{1+f(x)}dx=J$

$I+J=\int_{-2}^{2}\frac{1}{1+f(x)}dx+\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{1+f(x)}dx=\int_{-2}^{2}\frac{1+f(x)}{1+f(x)}dx=\int_{-2}^{2}dx=4$

αφού $I=J$ τότε $2I=4\Leftrightarrow I=2$.

90.α) Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την $g(x)=f(x)-x$ στο $[1,2]$ είναι

$\begin{cases}g(1)=f(1)-1=0\\ g(2)=f(2)-2=0\end{cases}$ και $g'(x)=f'(x)-1$ οπότε υπάρχει

$\xi\in(1,2):g'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=1$.

β) Θεωρούμε $h(x)=f(x)-3+x$, η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$,

$h(1)=f(1)-2=-1<0$ και $h(2)=f(2)-1=1>0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0\in(1,2):h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=3-x_0$.

γ) Σύμφωνα με το ΘΜΤ στο $[1,x_0],[x_0,2]$ υπάρχουν $\xi_1\in(1,x_0)$, $\xi_2\in(x_0,2)$

τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=\frac{3-x_0-1}{x_0-1}=\frac{2-x_0}{x_0-1}$ και

$f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(x_0)}{2-x_0}=\frac{2-3+x_0}{2-x_0}=\frac{x_0-1}{2-x_0}$ οπότε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$.

δ) Είναι $\int_1^2 xf''(x)dx=0\Leftrightarrow\left[xf'(x)\right]_1^2-\int_1^2 f'(x)dx=0$

$2f'(2)-f'(1)-\left[f(x)\right]_1^2=0\Leftrightarrow$

$2f'(2)-f'(1)-f(2)+f(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=2f'(2)-1$.

Θεωρούμε την $\varphi(x)=xf'(x)-x$.

$\left.\begin{aligned}\varphi(1)&=f'(1)-1=2f'(2)-2\\ \varphi(2)&=2f'(2)-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi(1)=\varphi(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του

θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\rho\in(1,2)$:

$\varphi'(p)=0\Leftrightarrow f'(p)+pf''(p)-1=0\Leftrightarrow f'(p)+pf''(p)=1$.

91.α) Είναι $f(x)=\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}=\lambda\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}+\kappa\Leftrightarrow$

$\eta\mu x=\lambda(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)+\kappa(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)\Leftrightarrow\eta\mu x=(\kappa-\lambda)\eta\mu x+(\kappa+\lambda)\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{cases}\kappa-\lambda=1\\ \kappa+\lambda=0\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\kappa=\frac{1}{2}\\ \lambda=-\frac{1}{2}\end{vmatrix}\ \text{Οπότε}\ f(x)=-\frac{1}{2}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}+\frac{1}{2}\ .$$

β) i. $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\left(-\frac{1}{2}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}+\frac{1}{2}\right)dx=$

$$-\frac{1}{2}\left[\ln\left(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)-\ln\left(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha\right)\right]+\frac{\pi}{4}-\alpha=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln\left(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha\right)-\ln\left(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha\right)\right]+\frac{\pi}{4}-\alpha=\frac{\pi}{4}-\alpha\ .$$

ii. Η συνάρτηση $I(\alpha)=\frac{\pi}{4}-\alpha$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ με $I'(\alpha)=-1<0$

άρα $I(\alpha)\searrow$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι $\left[I\left(\frac{\pi}{4}\right),I(0)\right]=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

92.α) Για $x\neq 0$ είναι $f(x)=\int_0^1 e^{tx^2}dt=\frac{1}{x^2}\int_0^1 e^{tx^2}\cdot x^2dt=$

$$=\frac{1}{x^2}\int_0^1\left[e^{tx^2}\right]'dt=\frac{1}{x^2}\left[e^{tx^2}\right]_0^1=\frac{1}{x^2}\left(e^{x^2}-1\right)=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\ .$$

Για $x=0\quad f(0)=\int_0^1 e^0dt=[t]_0^1=1$. Άρα $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} & ,\ x\neq 0\\ 1 & ,\ x=0\end{cases}$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\underset{x^2=y\to 0}{\overset{\text{θέτω}}{=}}\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\frac{e^y}{1}=1=f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και αφού η f είναι συνεχής για $x\neq 0$ ως πηλίκο συνεχών τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-2x}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2x}{3}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right]=0\cdot 1=0\ ,\ \text{οπότε}\ f'(0)=0\ .$$

δ) Είναι $f'(x)=\dfrac{2xe^{x^2}\cdot x^2-2x\left(e^{x^2}-1\right)}{x^4}=\dfrac{2x\left(e^{x^2}x^2-e^{x^2}+1\right)}{x^4}$

$=\dfrac{2\left(e^{x^2}x^2-e^{x^2}+1\right)}{x^3}$ Έστω $g(x)=e^{x^2}\cdot x^2-e^{x^2}+1$,

$g'(x)=2x\cdot e^{x^2}\cdot x^2+2xe^{x^2}-2xe^{x^2}=2x^3e^{x^2}$. Αν $x>0$ τότε $g'(x)>0\Rightarrow$

$g\nearrow[0,+\infty)$, $x>0\Leftrightarrow g(x)>g(0)=0$, οπότε $f'(x)>0$, άρα $f\nearrow$ στο $[0,+\infty)$.

Αν $x<0$, $g'(x)<0$ οπότε $g\searrow$,

$x<0\Leftrightarrow g(x)>g(0)=0$, όμως $x^3<0$ άρα $f'(x)<0$, άρα $f\searrow$ στο $(-\infty,0]$.

ε) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^3}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2xe^{x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}}{3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\cdot x\cdot e^{x^2}}{3}=+\infty$ οπότε

δεν έχει πλάγια ή οριζόντια στο $(+\infty)$. Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ οπότε δεν έχει

ασύμπτωτες η γραφική παράσταση της f.

93.α) Είναι $f^3(x)-f^2(x)+f(x)=1-\eta\mu x\ (1)$. (1). Με παραγώγιση της

σχέσης (1) έχουμε $3f^2(x)f'(x)-2f(x)f'(x)+f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow$

$f'(x)\left(3f^2(x)-2f(x)+1\right)=-\sigma\upsilon\nu x\quad(2)$.

Είναι $3f^2(x)-2f(x)+1>0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$ (f(x)=ω, Δ=-8<0) και

$\sigma\upsilon\nu x>0$ αν $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\sigma\upsilon\nu x<0$ αν $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$. Άρα η f είναι γνησίως

φθίνουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$. Στην (1) για $x=0$

προκύπτει $f^3(0)-f^2(0)+f(0)-1=0\Leftrightarrow\left(f(0)-1\right)\left(f^2(0)+1\right)=0\Leftrightarrow f(0)=1$.

Όμοια και $f(\pi)=1$. Επίσης στην (1) για $x=\dfrac{\pi}{2}$ έχουμε

$f^3\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-f^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left[f^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+1\right]=0\Leftrightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

Άρα η f έχει μέγιστο το 1 για $x=0$ ή $x=\pi$ και ελάχιστο το 0 για $x=\dfrac{\pi}{2}$.

β) $f([0,\pi])=[0,1]$.

γ) Θεώρημα Rolle για την $g(x)=\pi f(x)+2x$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.$\left(g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi\right)$

δ) Είναι $f(0)=f(\pi)=1$ οπότε εφαρμόζουμε Rolle για την f στο $[0,\pi]$ υπάρχει $x_0\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$. Οπότε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0,f(x_0))$ είναι παράλληλη με τον $x'x$ άρα και με την $y=1$.

ε) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf''(x)dx=\left[xf'(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)dx=\frac{\pi}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left[f(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$

$\frac{\pi}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(0)=\frac{\pi}{2}\cdot 0-0+1=1$ γιατί από τη σχέση (2) είναι $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

94.α) $x>0$, $\ln x-1>0\Leftrightarrow x>e$ άρα $D_f=(e,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{1}{\ln x-1}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln x-x}$.

$f''(x)=-\frac{(x\ln x-x)'}{(x\ln x-x)^2}=-\frac{\ln x+1-1}{(x\ln x-x)^2}=-\frac{\ln x}{(x\ln x-x)^2}<0$, όταν $x\in(e,+\infty)$

άρα η f είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

β) ΘΜΤ για την f στα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right],\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και

$\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$,

$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$. Επειδή $\xi_1<\xi_2$ και $f'\searrow$, τότε $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow$

$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>f(\alpha)+f(\beta)\Leftrightarrow 2\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)>\ln(\ln\alpha-1)+\ln(\ln\beta-1)\Leftrightarrow$

$\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)^2>\ln\left[(\ln\alpha-1)(\ln\beta-1)\right]\Leftrightarrow\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)^2>(\ln\alpha-1)(\ln\beta-1)$,

οπότε $\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)>\sqrt{(\ln\alpha-1)(\ln\beta-1)}$.

γ) $I=\int_{e^2}^{e^3}\frac{f(x)}{x}=\int_{e^2}^{e^3}\frac{\ln(\ln x-1)}{x}dx$. Θέτουμε $u=\ln x-1$

g	e^2	e^3
u	1	2

οπότε $du=\frac{1}{x}dx$ άρα

$I=\int_1^2\ln u\,du=\int_1^2(u)'\ln u\,du=\left[u\ln u\right]_1^2-\int_1^2 u\frac{1}{u}du=2\ln 2-1$.

95.α) $f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$ οπότε η $f\nearrow$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$, άρα

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-1,1)$.

β) $1-f^2(x)=1-\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}=2f'(x)\Leftrightarrow f^2(x)+2f'(x)-1=0$.

γ) Επειδή $f^2(x)=1-2f'(x)$ τότε $I=\int_0^1 f^2(x)dx=$

$\int_0^1\left[1-2f'(x)\right]dx=1-2\left[f(1)-f(0)\right]=1-2\frac{e-1}{e+1}=\frac{3-e}{e+1}$

Επίσης $1-f^2(x)=2f'(x)$ οπότε $J=\int_0^1 x\left[1-f^2(x)\right]dx=\int_0^1 x\,2f'(x)dx=$

$=\left[2xf(x)\right]_0^1-2\int_0^1 f(x)dx=2f(1)-2\int_0^1 f(x)dx$.

Όμως $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{e^x-1}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx-\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx=$

$=\left[\ln(e^x+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx\underset{\substack{x=0\to u=1,\\ x=1\to u=e,}}{\overset{u=e^x}{=}}\ln(e+1)-\ln 2-\int_1^e\frac{du}{u(u+1)}du=$

$=\ln(e+1)-\ln 2-\int_1^e\frac{1}{u}du+\int_1^e\frac{1}{u+1}du=$

$\ln(e+1)-\ln 2-\left[\ln|u|\right]_1^e+\left[\ln|u+1|\right]_1^e=\ln\frac{(e+1)^2}{4e}$.

Άρα $J=2\frac{e-1}{e+1}-\ln\frac{(e+1)^2}{4e}$.

δ) Αφού $f\nearrow$ θα είναι και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται και έχουμε

$f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{e^x-1}{e^x+1}=y \Leftrightarrow e^x y+y=e^x-1 \Leftrightarrow e^x=\dfrac{1+y}{1-y}$, οπότε

$\dfrac{1+y}{1-y}>0 \Leftrightarrow y\in(-1,1)$ και $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

ε) Είναι $f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)=f(0) \Leftrightarrow x=0$.

στ) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\dfrac{1+x}{1-x}\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x)'\ln\dfrac{1+x}{1-x}\,dx=$

$\left[x\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{2x}{1-x^2}\,dx=\left(\dfrac{1}{2}\ln 3-\dfrac{1}{2}\ln 3\right)+\left[\ln\left|x^2-1\right|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=0.$

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

26366.α) Η κλίση της f στο $x_0=2$ είναι το $f'(2)=1$.

β) Για κάθε $x\in(0,3)$ είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής στο [0, 3], είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

γ) $1<2 \overset{f\nearrow[0,3]}{\Leftrightarrow} f(1)<f(2)$.

δ) $\int_0^3 f''(x)\,dx=f'(3)-f'(0)=0-2=-2$.

33593.α) $\int_3^2 f(x)\,dx=-\int_2^3 f(x)\,dx=-2$.

β) $\int_3^7 f(x)\,dx=\int_3^1 f(x)\,dx+\int_1^7 f(x)\,dx=-4+10=6$

γ) $\int_7^2 f(x)\,dx=\int_7^3 f(x)\,dx+\int_3^2 f(x)\,dx=-6-2=-8$

δ) $\int_1^3 \left(f(x)-x\right)dx=\int_1^3 f(x)\,dx-\int_1^3 x\,dx=4-\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_1^3=4-\left(\dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=4-4=0$.

23957.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $g(x)=e^x$, $h(x)=x^2$ και $\varphi(x)=\ln x$ με

$f'(x)=e^{\ln^2 x}\left(\ln^2 x\right)'=f(x)\cdot 2\ln x(\ln x)'=2\dfrac{\ln x}{x}f(x)$.

β) Είναι $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2\dfrac{\ln x}{x}f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$, για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0$, η f είναι συνεχής, οπότε γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=1$.

γ) $I=\int_1^e \frac{2\ln x\cdot f(x)+xe^x}{x\left(f(x)+e^x\right)}dx=\int_1^e \frac{\frac{2\ln x\cdot f(x)}{x}+\frac{xe^x}{x}}{\frac{x\left(f(x)+e^x\right)}{x}}dx=$

$\int_1^e \frac{f'(x)+e^x}{f(x)+e^x}dx=\int_1^e \frac{\left(f(x)+e^x\right)'}{f(x)+e^x}dx=\left[\ln\left|f(x)+e^x\right|\right]_1^e=.$

$\ln\left(f(e)+e^e\right)-\ln\left(f(1)+e\right)=\ln\frac{e+e^e}{1+e}.$

24770.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}+1$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η f ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f''(x)=\frac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\cdot e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=-\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}.$

Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)<0$ άρα η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

β) i. Είναι

$f(\ln 2)=\ln\left(e^{\ln 2}-1\right)+\ln 2-1=\ln(2-1)+\ln 2-1=\ln 1+\ln 2-1=\ln 2-1$ και

$f'(\ln 2)=\frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}-1}+1=\frac{2}{2-1}+1=3$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_o=\ln 2$ έχει εξίσωση ε: $y-f(\ln 2)=f'(\ln 2)(x-\ln 2)\Leftrightarrow y=3x-2\ln 2-1$.

ii. Επειδή η f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x>0$ είναι

$f(x)\le 3x-2\ln 2-1\Leftrightarrow \ln\left(e^x-1\right)+x-1\le 3x-2\ln 2-1\Leftrightarrow$

$\ln\left(e^x-1\right)\le 2x-\ln 4$.

γ) $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2-e^{-x}}{e^{-x}-1}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2-\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}-1}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\frac{2e^x-1}{\cancel{e^x}}}{\frac{1-e^x}{\cancel{e^x}}}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2e^x-1}{1-e^x}dx\Leftrightarrow$

$I=-\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2e^x-1}{e^x-1}dx=-\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x-1+e^x}{e^x-1}dx=-\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(1+\frac{e^x}{e^x-1}\right)dx=-\int_{\ln 2}^{\ln 3}f'(x)dx\Leftrightarrow$

$I=-\left[f(x)\right]_{\ln 2}^{\ln 3}=-f(\ln 3)+f(\ln 2)\Leftrightarrow$

$I=-\ln\left(e^{\ln 3}-1\right)-\ln 3+1+\ln 2-1=-\ln 2-\ln 3+\ln 2=-\ln 3$

24771.α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\left(x^2+1\right)f'(x)+\dfrac{2x}{x^2+1}=0\Leftrightarrow$

$\left(x^2+1\right)f'(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}\Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=-\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}\Leftrightarrow$

$f'(x)=\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)'\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(0)=1\Leftrightarrow 1+c=1\Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1}=f(x)$, άρα η f είναι άρτια, οπότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.

Είναι $B\left(\alpha,f(\alpha)\right)$ και λόγω συμμετρίας $\Gamma\left(-\alpha,f(\alpha)\right),\ \Delta(-\alpha,0)$.

γ) Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει εμβαδό

$E(\alpha)=(A\Delta)(AB)=2\alpha f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1},\ \alpha>0$.

Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$E'(\alpha)=\dfrac{2\left(\alpha^2+1\right)-2\alpha\cdot 2\alpha}{\left(\alpha^2+1\right)^2}=\dfrac{2-2\alpha^2}{\left(\alpha^2+1\right)^2}=\dfrac{2(1-\alpha)(1+\alpha)}{\left(\alpha^2+1\right)^2}$.

Είναι $E'(\alpha)\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{2(1-\alpha)(1+\alpha)}{\left(\alpha^2+1\right)^2}\ge 0\Leftrightarrow 1-\alpha\ge 0\Leftrightarrow\alpha\le 1$.

Για κάθε $\alpha\in(0,1)$ είναι $E'(\alpha)>0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $(0,1]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $\alpha\in(1,+\infty)$ είναι $E'(\alpha)<0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η Ε παρουσιάζει μέγιστο για α = 1.

δ) $\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 x'\cdot F(x)dx=\left[xF(x)\right]_0^1-\int_0^1 xF'(x)dx=F(1)-\int_0^1 xf(x)dx\Leftrightarrow$

$\int_0^1 F(x)dx=\ln 2-\int_0^1\dfrac{x}{x^2+1}dx=\ln 2-\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx\Leftrightarrow$

$\int_0^1 F(x)dx=\ln 2-\dfrac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\ln 2-\dfrac{1}{2}\ln 2=\dfrac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$.

26184.α) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right) = -\infty(+\infty) = -\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \overset{\sqrt{x}=u}{=} \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{1}{u} = +\infty$, άρα η ευθεία $x = 0$, δηλαδή ο άξονας y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = 0$, άρα η ευθεία $y = 0$, δηλαδή ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

Είναι $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} \ge 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x \ge 0 \Leftrightarrow \ln x \le 2 \Leftrightarrow x \le e^2$.

Για κάθε $x \in (0, e^2)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (e^2, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e^2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e^2, +\infty)$. Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = e^2$.

γ) $I = \int_1^{e^2} f(x)dx = \int_1^{e^2} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \int_1^{e^2} \ln x \left(2\sqrt{x}\right)' dx = \left[\ln x \cdot 2\sqrt{x}\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \dfrac{1}{x}\cdot 2\sqrt{x}dx \Leftrightarrow$

$$I = 2\cdot 2\sqrt{e^2} - 2\int_1^{e^2} \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}dx = 4e - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^{e^2} = 4e - 4e + 4 = 4.$$

27321. α) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \alpha e^{-\beta x} - \alpha\beta x e^{-\beta x} = \alpha e^{-\beta x}(1-\beta x)$

$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow \alpha e^{-\beta x}(1-\beta x) \ge 0 \Leftrightarrow 1-\beta x \ge 0 \Leftrightarrow x \le \dfrac{1}{\beta}$.

Για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{1}{\beta}\right)$ είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \left(\dfrac{1}{\beta}, +\infty\right)$ είναι $f'(x) < 0$, η f είναι συνεχής οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \dfrac{1}{\beta}\right]$ και γνησίως φθίνουσα

στο $\left[\frac{1}{\beta},+\infty\right)$. Ο πληθυσμός την επόμενη χρονιά γίνεται μέγιστος

όταν ο σημερινός πληθυσμός είναι $x=\frac{1}{\beta}$. Η μέγιστή τιμή του είναι $f\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\alpha}{\beta e}$.

β) Όταν ο πληθυσμός των ψαριών είναι απεριόριστα μεγάλος, τότε $x\to+\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha x e^{-\beta x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha x}{e^{\beta x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha}{\beta e^{\beta x}}=0$, δηλαδή την

αμέσως επόμενη χρονιά ο πληθυσμός των ψαριών πρακτικά θα εξαφανιστεί.

γ) Είναι $F(\beta)-F(2\beta)=\int_{2\beta}^{\beta} f(x)dx=\alpha\int_{2\beta}^{\beta} xe^{-\beta x}dx=\alpha\int_{2\beta}^{\beta} x\left(-\frac{1}{\beta}e^{-\beta x}\right)dx=$

$\alpha\left[-x\frac{1}{\beta}e^{-\beta x}\right]_{2\beta}^{\beta}+\alpha\int_{2\beta}^{\beta} e^{-\beta x}dx=-\alpha\left(e^{-\beta^2}-2e^{-2\beta^2}\right)-\alpha\left[-\frac{1}{\beta}e^{-\beta x}\right]_{2\beta}^{\beta}=\ldots=$

$\frac{\alpha}{\beta^2}\cdot\frac{2\beta^2+1-\left(1+\beta^2\right)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}$.

27322.α) $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[E+\left(T_0-E\right)e^{-kt}\right]\underset{\substack{t\to+\infty\Rightarrow\\ x\to-\infty}}{\overset{-kt=x}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left[E+\left(T_0-E\right)e^{x}\right]=$

$E+\left(T_0-E\right)\cdot 0=E$.

β) Η συνάρτηση Τα είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$T'(t)=\left(E+\left(T_0-E\right)e^{-kt}\right)'=-k\left(T_0-E\right)e^{-kt}$ (1)

Είναι $T(t)=E+\left(T_0-E\right)e^{-kt}\Leftrightarrow T(t)-E=\left(T_0-E\right)e^{-kt}\Leftrightarrow$

$-\left(T_0-E\right)e^{-kt}=E-T(t)$ (2).

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $T'(t)=k\left[E-T(t)\right]$.

γ) Είναι $I=\int_0^1\left(E-T(t)\right)\cdot\ln\left(T(t)\right)dt=\int_0^1\frac{1}{k}T'(t)\cdot\ln\left(T(t)\right)dt$

Θέτουμε $T(t)=x$ οπότε $T'(t)dt=dx$. Για t=0 είναι x=T(0)= e^4 και για t=1

είναι x=T(1)= e^3, οπότε:

$I=\frac{1}{k}\int_{e^4}^{e^3}\ln x dx=\frac{1}{k}\int_{e^4}^{e^3}\ln x\cdot(x)'dx=\frac{1}{k}\left[x\ln x\right]_{e^4}^{e^3}-\frac{1}{k}\int_{e^4}^{e^3}\frac{1}{x}\cdot x dx\Leftrightarrow$

$I=\frac{1}{k}\left(3e^3-4e^4\right)-\frac{1}{k}\left(e^3-e^4\right)=\frac{2e^3-3e^4}{k}$.

29549.α) $\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx = \int_0^{\pi} \left(f'(x)\right)' \eta\mu x dx =$

$\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx =$

$f'(\pi)\eta\mu\pi - f'(0)\eta\mu 0 - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = -\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx$.

β) $\int_0^{\pi} \left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + \int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx = 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi} f(x)\left(-\sigma\upsilon\nu x\right)' dx - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 0 \Leftrightarrow$

$-\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 0 \Leftrightarrow$

$f(\pi)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(\pi)=0$.

γ) Επειδή $f(\pi)=f(0)$, για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο [0,π], οπότε υπάρχει $x_1 \in (0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=0$. Επειδή $f'(x_1)=f'(0)$, για την f ΄εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[0,x_1]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (0,x_1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ το σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι πιθανό σημείο καμπής της f.

29837.α) Για κάθε $x_1, x_2 \neq 1$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι

$\frac{1}{1-x_1} = \frac{1}{1-x_2} \Leftrightarrow 1-x_2 = 1-x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Για κάθε $x \neq 1$ είναι $f(x)=y \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} = y$ (1) .

Είναι $\frac{1}{1-x} \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$ και η (1) γίνεται: $1-x = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = 1-\frac{1}{y} = \frac{y-1}{y}$.

Είναι $x \neq 1 \Leftrightarrow \frac{y-1}{y} \neq 1 \Leftrightarrow y-1 \neq y$ ισχύει. Άρα $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y}$, $y \neq 0$, οπότε

$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}$, $x \neq 0$.

β) $D_{f\circ f} = \left\{x \in D_f / f(x) \in D_f\right\} = \left\{x \neq 1 / \frac{1}{1-x} \neq 1\right\} = \left\{x \neq 1 / 1-x \neq 1\right\} \Leftrightarrow$

$D_{f\circ f} = \left\{x \neq 1 / x \neq 0\right\} = \mathbb{R} - \{0,1\}$,

$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$.

γ) Επειδή οι συναρτήσεις $f\circ f$ και f^{-1} δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού δεν

είναι ίσες οπότε δεν συμφωνούμε με τον ισχυρισμό του μαθητή.

δ) $\int_2^3 \varphi(x)dx = \int_2^3 \frac{x-1}{x}dx = \int_2^3 \left(1-\frac{1}{x}\right)dx = \left[x-\ln|x|\right]_2^3 = 1+\ln\frac{2}{3}$.

33998.α) $\int_0^2 5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln\frac{4}{5}dt = 5\int_0^2 \left[\left(\frac{4}{5}\right)^t\right]' dt = 5\left[\left(\frac{4}{5}\right)^t\right]_0^2 = 5\left(\frac{16}{25}-1\right) = -\frac{9}{5}$.

β) Επειδή το δοχείο είναι 5 λίτρων, ισχύει ότι $g(0)=5$.

Είναι $\int_0^2 5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln\frac{4}{5}dt = -\frac{9}{5} \Leftrightarrow \int_0^2 g'(t)dt = -\frac{9}{5} \Leftrightarrow g(2)-g(0) = -\frac{9}{5} \Leftrightarrow$

$g(2)-5 = -\frac{9}{5} \Leftrightarrow g(2) = 5-\frac{9}{5} = \frac{16}{5}$.

γ) Είναι $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t = 0$, άρα καθώς ο χρόνος αυξάνεται απεριόριστα η βενζίνη τείνει να μηδενιστεί, άρα θα υπάρχει μόνο μυρωδιά της βενζίνης στο δοχείο.

34565.α) Είναι $\lambda = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Η g είναι συνεχής στο [α, β] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = \frac{f'(x)x-\left(f(x)+\lambda\alpha-f(\alpha)\right)}{x^2}$.

Είναι $g(\alpha) = \frac{\cancel{f(\alpha)}+\lambda\alpha-\cancel{f(\alpha)}}{\alpha} = \lambda$,

$g(\beta) = \frac{f(\beta)+\lambda\alpha-f(\alpha)}{\beta} = \frac{f(\beta)-f(\alpha)+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\alpha}{\beta} \Leftrightarrow$

$g(\beta) = \frac{\beta f(\beta)-\cancel{\alpha f(\beta)}-\beta f(\alpha)+\cancel{\alpha f(\alpha)}+\cancel{\alpha f(\beta)}-\cancel{\alpha f(\alpha)}}{\beta-\alpha}}{\beta} \Leftrightarrow$

$g(\beta) = \frac{\beta\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}}{\beta} = \lambda$. Επειδή επιπλέον $g(\alpha)=g(\beta)$, η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [α,β].

β) Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε

$$g'(c)=0\Leftrightarrow \frac{f'(c)c-\big(f(c)+\lambda\alpha-f(\alpha)\big)}{c^2}=0\Leftrightarrow cf'(c)-f(c)-\lambda\alpha+f(\alpha)=0.$$

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση

$$y-f(c)=f'(c)(x-c)\Leftrightarrow y=xf'(c)-cf'(c)+f(c).$$

Για x = 0 είναι $y=-cf'(c)+f(c)$, δηλαδή η εφαπτομένη τέμνει τον y΄y στο $K\big(0,-cf'(c)+f(c)\big)$. Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $y-f(\alpha)=\lambda(x-\alpha)$ και για x = 0 είναι $y=f(\alpha)-\lambda\alpha$. Η ΑΒ τέμνει τον y΄y στο σημείο $\Lambda\big(0,f(\alpha)-\lambda\alpha\big)$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M\big(c,f(c)\big)$ και η ευθεία ΑΒ τέμνονται σε σημείο του άξονα y΄y, αν και μόνο αν τα σημεία Κ, Λ ταυτίζονται, δηλαδή όταν $-cf'(c)+f(c)=f(\alpha)-\lambda\alpha\Leftrightarrow$

$cf'(c)-f(c)-\lambda\alpha+f(\alpha)=0$ που ισχύει από το β σκέλος.

δ) Θέτουμε $x^2+1=u\Rightarrow 2xdx=du$. Για $x=\sqrt{\alpha-1}$ είναι $u=\alpha$ και για $x=\sqrt{\beta-1}$ είναι $u=\beta$. Τότε

$$I=\int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}}\frac{x\cdot f'\left(x^2+1\right)}{f\left(x^2+1\right)}dx=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}}\frac{f'\left(x^2+1\right)}{f\left(x^2+1\right)}2xdx=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f'(u)}{f(u)}du=\frac{1}{2}\Big[\ln\big|f(u)\big|\Big]_{\alpha}^{\beta}\Leftrightarrow$$

$$I=\frac{1}{2}\big(\ln f(\beta)-\ln f(\alpha)\big)=\frac{1}{2}\ln\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}=\frac{1}{2}\ln e^{-2}=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1.$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Θέτουμε $x^2=\omega$ οπότε $2xdx=d\omega$, για $x=0\Rightarrow\omega=0$ ενώ για $x=1\Rightarrow\omega=1$. Οπότε

$$I=\int_0^1 x^2f''\left(x^2\right)xdx=\int_0^1\frac{1}{2}\omega f''(\omega)d\omega=\frac{1}{2}\Big[\omega f'(\omega)\Big]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{2}\big(f'(1)-0\big)-\frac{1}{2}\big(f(1)-f(0)\big)=\frac{1}{2}2-\frac{1}{2}(2-0)=0.$$ **Σωστή απάντηση Γ.**

2. Είναι $\int_0^1\frac{f'(x)-f(x)}{f(x)+e^x}dx=\int_0^1\frac{f'(x)+e^x-e^x-f(x)}{f(x)+e^x}dx=$

$$=\int_0^1\frac{\big(f(x)+e^x\big)'}{f(x)+e^x}dx-1=\Big[\ln\big(f(x)+e^x\big)\Big]_0^1-1=\ln\big(f(1)+e\big)-\ln\big(f(0)+1\big)-1=$$

$\ln(1+e)-\ln e=\ln\dfrac{1+e}{e}$. **Σωστή απάντηση Δ.**

3. Είναι $f'(x)=f^2(x)\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=f(x)$ άρα

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\Big[\ln|f(x)|\Big]_\alpha^\beta=\ln|f(\beta)|-\ln|f(\alpha)|=\ln\frac{|f(\beta)|}{|f(\alpha)|}=\ln 2\,.$$

Σωστή απάντηση Γ.

4. Είναι $\int_0^1\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}dx=\int_0^1\left(f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}\right)dx=$

$$=\int_0^1\left(f(x)e^{-x}\right)'dx=\Big[f(x)e^{-x}\Big]_0^1=f(1)\frac{1}{e}-f(0)=0\,.$$ **Σωστή απάντηση Β.**

5. Είναι $\kappa=\int_\pi^{2\pi}\ln x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=\int_\pi^{2\pi}\ln x\cdot(\eta\mu x)'dx\Leftrightarrow$

$$\kappa=\Big[\ln x\cdot\eta\mu x\Big]_\pi^{2\pi}-\int_\pi^{2\pi}\frac{1}{x}\cdot\eta\mu x dx\Leftrightarrow\kappa=0-\int_\pi^{2\pi}\frac{\eta\mu x}{x}dx\Leftrightarrow\int_\pi^{2\pi}\frac{\eta\mu x}{x}dx=-\kappa$$

Σωστή απάντηση Α.

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος								
1. Σ	**2.**Σ	**3.** Σ	**4.** Σ	**5.** Σ	**6.** Λ	**7.** Λ	**8.** Σ	**9.** Λ
10.Λ	**11.** Λ	**12.** Λ	**13.**Σ	**14.** Λ	**15.** Σ	**16.**Λ	**17.**Σ	**18.**Σ
19.Λ	**20.** Λ	**21.** Λ	**22.**Σ	**23.** Λ	**24.** Σ	**25.**Λ	**26.**Σ	**27.**Λ
28.Λ	**29.** Σ	**30.** Σ	**31.**Λ	**32.** Λ	**33.** Σ	**34.**Σ	**35.**Σ	**36.**Σ
37.Σ								

37 Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως αριθμός

12. Έστω $\int_2^3 f(x)dx = \lambda \in \mathbb{R}$. Είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [2,3]$ οπότε $\int_2^3 f(x)dx < 0$. Η σχέση $\int_2^3 f(x)\left(\int_2^3 f(x)dx\right)dx = 16$ γίνεται $\int_2^3 f(x)\cdot\lambda\cdot dx = 16 \Leftrightarrow \lambda\int_2^3 f(x)dx = 16 \Leftrightarrow \lambda\cdot\lambda = 16 \Leftrightarrow \lambda^2 = 16 \Rightarrow \lambda = -4$ (αφού $\lambda < 0$).

13. Είναι $\int_\alpha^\beta\left(\int_\alpha^x (1+t)dz\right)dx = \int_\alpha^\beta\left((1+t)\int_\alpha^x dz\right)dx = \int_\alpha^\beta (1+t)(x-\alpha)dx =$

$(1+t)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)dx = = (1+t)\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta - \alpha[x]_\alpha^\beta\right) = (1+t)\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} - \alpha(\beta-\alpha)\right) =$

$= (1+t)(\beta-\alpha)\left(\frac{\beta+\alpha}{2} - \alpha\right) = (1+t)(\beta-\alpha)\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{(1+t)(\beta-\alpha)^2}{2}$.

14. Αφού $f(x) > 0$ τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$. Τότε η σχέση $\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)f(t)dx\right]dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$ γίνεται $\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[f(t)\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx\right]dt = \lambda \Leftrightarrow$

$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[f(t)\cdot\lambda\right]dt = \lambda \Leftrightarrow \lambda\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt = \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 = \lambda \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0)$ (απορρίπτεται) ή $(\lambda = 1)$.

15. Έστω $\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx = c \in \mathbb{R}$. Τότε η σχέση (1) $\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx = f(x) + e^x$ γίνεται $c = f(x) + e^x \Leftrightarrow f(x) = c - e^x$ (2).

Άρα (1) $\Rightarrow \int_0^1 e^{1-x}\left(c - e^x\right)dx = c \Leftrightarrow \int_0^1 ce^{1-x}dx - \int_0^1 e^{1-x}\cdot e^x dx = c \Leftrightarrow$

$-c\left[e^{1-x}\right]_0^1 - e = c \Leftrightarrow -c(1-e) - e = c \Leftrightarrow ce - 2c = e \Leftrightarrow c = \frac{e}{e-2}$. Άρα

$f(x) = \frac{e}{e-2} - e^x$.

16. Είναι $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x f(x)dx = c \in \mathbb{R}$ οπότε η σχέση (1)

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x f(x)dx = f(x) + \sigma\upsilon\nu x$ γίνεται $c = f(x) + \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow f(x) = c - \sigma\upsilon\nu x$.

Οπότε $(1) \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x\left(c-\sigma\upsilon\nu x\right)dx = c \Leftrightarrow c\int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x\,dx = c \Leftrightarrow$

$-c\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[\frac{\eta\mu^2 x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = c \Leftrightarrow -c\left(\frac{1}{2}-1\right) - \frac{3}{8} = c \Leftrightarrow \frac{c}{2} - \frac{3}{8} = c \Leftrightarrow$

$4c-3 = 8c \Leftrightarrow c = -\frac{3}{4}$. Άρα $f(x) = -\frac{3}{4} - \sigma\upsilon\nu x$.

17. $\int_0^1 \left(x^2 + f(t)\right)dt = \int_0^1 \left(f(t)+1\right)x\,dt \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 dt + \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 x f(t)\,dt + \int_0^1 x\,dt \Leftrightarrow$

$x^2(1-0) + \int_0^1 f(t)\,dt = x\int_0^1 f(t)\,dt + x(1-0) \Leftrightarrow$

$x^2 + \int_0^1 f(t)\,dt = x\int_0^1 f(t)\,dt + x \Leftrightarrow x^2 - x\left(\int_0^1 f(t)\,dt + 1\right) + \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \quad (1)$.

Έστω $\int_0^1 f(t)\,dt = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε η (1) γίνεται:

$x^2 - (\lambda+1)x + \lambda = 0 \Leftrightarrow x^2 - \lambda x - x + \lambda = 0 \Leftrightarrow x(x-\lambda) - (x-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$(x-\lambda)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left(x = \lambda = \int_0^1 f(x)\,dx\right)$ ή $(x=1)$.

18.α) Έστω $\int_0^1 f(x)\,dx = \lambda$ (1), τότε $f(x) = 3x^2 + 2\lambda$ και η (1) γίνεται:

$\int_0^1 \left(3x^2 + 2\lambda\right)dx = \lambda \Leftrightarrow \left[x^3 + 2\lambda x\right]_0^1 = \lambda \Leftrightarrow 1 + 2\lambda = \lambda \Leftrightarrow \lambda = -1$ οπότε

$f(x) = 3x^2 - 2$.

β) Έστω $\int_0^1 f(t)\,dt = \lambda$ (1), τότε: $f(x) = xe^x - \int_0^1 2x f(t)\,dt = xe^x - 2\lambda x$ και η (1)

γίνεται: $\int_0^1 \left(xe^x - 2\lambda x\right)dx = \lambda \Leftrightarrow \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx - \lambda\left[x^2\right]_0^1 = \lambda \Leftrightarrow$

$e - e + 1 - \lambda = \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ οπότε $f(x) = xe^x - x$.

19. Έστω ότι $\int_0^2 f(x)\,dx = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$f'(x) = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda x + c,\ c \in \mathbb{R}$. $f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$, άρα $f(x) = \lambda x + 1$.

$\int_0^2 f(x)\,dx = \lambda \Leftrightarrow \int_0^2 (\lambda x + 1)\,dx = \lambda \Leftrightarrow \left[\lambda\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = \lambda \Leftrightarrow$

$2\lambda + 2 = \lambda \Leftrightarrow \lambda = -2$, οπότε $f(x) = -2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma x+\delta)dx$, f άγνωστη

20. Με ολοκλήρωση της σχέσης $2f(x)+3f(-x)=30x^2$ έχουμε:

$2\int_{-1}^{1} f(x)dx+3\int_{-1}^{1} f(-x)dx=30\int_{-1}^{1} x^2dx$. Θέτουμε $-x=u$ οπότε $dx=-du$

και $2\int_{-1}^{1} f(x)dx+3\int_{-1}^{1} f(u)(-du)=30\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} \Leftrightarrow$

$2\int_{-1}^{1} f(x)dx+3\int_{-1}^{1} f(u)du=10\cdot 2 \Leftrightarrow 5\int_{-1}^{1} f(x)dx=20 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx=4$.

21.α) Είναι $f(-x)=-f(x)$ οπότε $I=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=-\int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)dx$.

Θέτουμε $x=-u$ οπότε $dx=-du$ και για $x=-\alpha \Rightarrow u=\alpha$ ενώ για $x=\alpha$ θα είναι $u=-\alpha$, οπότε $I=-\int_{\alpha}^{-\alpha} f(u)(-du)=-\int_{-\alpha}^{\alpha} f(u)du \Leftrightarrow 2I=0 \Leftrightarrow I=0.$

β) Η συνάρτηση $f(x)=x^{1821}\sigma\upsilon\nu x$ είναι περιττή οπότε με βάση το ερώτημα (α) είναι $\int_{-1453}^{1453} x^{1821}\sigma\upsilon\nu x dx=0$.

22.α) Είναι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$.

$I=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$. Θέτουμε $x=-u$ και $dx=-du$ άρα

$I=\int_{\alpha}^{0} f(-u)(-du)+\int_{0}^{\alpha} f(x)dx=\int_{0}^{\alpha} f(-u)du+\int_{0}^{\alpha} f(x)dx=$

$=\int_{0}^{\alpha} f(u)du+\int_{0}^{\alpha} f(x)dx=2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$.

β) Η συνάρτηση $f(x)=x^8\sigma\upsilon\nu x$ είναι άρτια οπότε με βάση το (α) ερώτημα

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^8\sigma\upsilon\nu x dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^8\sigma\upsilon\nu x dx$.

γ) $I=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=\int_{-\alpha}^{0}\frac{f(x)}{e^x+1}dx+\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^x+1}dx$. Θέτω $x=-u$ και $dx=-du$ και

οπότε $I=\int_{\alpha}^{0}\frac{f(-u)}{e^{-u}+1}(-du)+\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=$

$\int_{0}^{\alpha}\frac{f(u)}{\frac{1}{e^u}+1}du+\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^x+1}=$

x	$-\alpha$	0
u	α	0

$$=\int_0^{\alpha}\frac{f(x)\cdot e^x}{e^x+1}dx+\int_0^{\alpha}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=\int_0^{\alpha}\frac{f(x)e^x+f(x)}{e^x+1}dx=\int_0^{\alpha}f(x)dx\ .$$

Αυξημένης δυσκολίας

23.α) Είναι $\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2 4dx\Leftrightarrow$

$\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(2-x)dx=8$ (1).

Θέτουμε $2-x=u$ οπότε $dx=-du$ και η (1) γίνεται

$\int_0^2 f(x)dx+\int_2^0 f(u)(-du)=8\Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)dx=8\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx=4$ (2).

Η σχέση $f(x)+f(2-x)=4$ για x=0 γίνεται $f(0)+f(2)=4$ (3) και για x= 1 γίνεται $f(1)+f(1)=4\Leftrightarrow 2f(1)=4$ (3).

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι $\int_0^2 f(x)dx=f(0)+f(2)=2f(1)$.

β) Επειδή η f είναι κοίλη, η f΄είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε 1-1 στο [0, 2].Είναι $\left(f(x)+f(2-x)\right)'=(4)'\Rightarrow f'(x)-f'(2-x)=0\Leftrightarrow$

$f'(x)=f'(2-x)\overset{f'1-1}{\Leftrightarrow}x=2-x\Leftrightarrow 2x=2\Leftrightarrow x=1$.

Για κάθε 0<x<1 είναι $f'(x)>f'(1)=0$ και για κάθε 1<x<2 είναι $f'(x)<f'(1)=0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1] και γνησίως φθίνουσα στο [1, 2], οπότε έχει μέγιστο το $f(1)=2$, άρα $f(x)\le 2$ για κάθε $x\in[0,2]$.

24.α) $f(1-x)=\ln\frac{e^{1-x}+e}{e^{1-x}+1}=\ln\frac{\frac{e}{e^x}+e}{\frac{e}{e^x}+1}=\ln\frac{e\frac{1+e^x}{e^x}}{\frac{e+e^x}{e^x}}=\ln\left(e\frac{1+e^x}{e+e^x}\right)\Leftrightarrow$

$f(1-x)=\ln e+\ln\frac{1+e^x}{e+e^x}=1+\ln\left(\frac{e+e^x}{1+e^x}\right)^{-1}=1-\ln\frac{e+e^x}{1+e^x}=1-f(x)$.

β) Από τη σχέση $f(1-x)=1-f(x)$, προκύπτει:

$\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1 f(x)dx\quad(1)$. Θέτουμε $1-x=u$, τότε $-dx=du\Leftrightarrow dx=-du$. Για $x=0$ είναι $u=1$, ενώ για $x=1$ είναι $u=0$.

Η σχέση (1) γίνεται: $-\int_1^0 f(u)du=\int_0^1 1dx-\int_0^1 f(x)dx\Leftrightarrow$

$\int_0^1 f(x)dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

25.α) $u = -x \Rightarrow du = -dx$. Για x= α είναι u= -α και για x= -α είναι u= α.

$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)dx = -\int_{\alpha}^{-\alpha} f(u)du = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) = f(x) + f(-x)$, άρα

$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)dx \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx = 2\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx$.

γ) Έστω $f(x) = \frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

$f(x) + f(-x) = \frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{(-x)^3 - \eta\mu^5(-x)}{(-x)^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2(-x) \Leftrightarrow$

$f(x) + f(-x) = \frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{-x^3 + \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow$

$f(x) + f(-x) = \frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + 2\sigma\upsilon\nu 2x - \frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} \Leftrightarrow$

$f(x) + f(-x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$.Αν θέσουμε $g(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$ από το β) ερώτημα

έχουμε : $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx$, άρα

$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x\right)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma\upsilon\nu 2x dx = \left[\frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$.

26.α) $u = \alpha + \beta - x \Rightarrow du = -dx$. Για x= α είναι u= β και για x= β είναι u= α..

$\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(u)du = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

β) Θέτουμε $u = 1 + 0 - x = 1 - x$, οπότε $dx = -du$.Για x= 0 είναι u= 1 και για x= 1 είναι u= 0. Αν $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{\ln(x+3) + \ln(4-x)}$ τότε

$f(1-x) = \frac{\ln(1-x+3)}{\ln(1-x+3) + \ln(4-1+x)} = \frac{\ln(4-x)}{\ln(4-x) + \ln(x+3)}$.

Είναι $2\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \overset{\alpha)}{=} \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(1-x)dx =$

$\int_0^1 \frac{\ln(x+3)}{\ln(x+3)+\ln(4-x)}dx + \int_0^1 \frac{\ln(4-x)}{\ln(x+3)+\ln(4-x)}dx \Leftrightarrow$

$2\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{\ln(x+3)+\ln(4-x)}{\ln(x+3)+\ln(4-x)}dx \Leftrightarrow$

$2\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 1dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{\ln(x+3)}{\ln(x+3)+\ln(4-x)}dx = \frac{1}{2}$.

γ) i. $f(x)+f(-x) = \frac{x^2+1}{e^x+1} + \frac{x^2+1}{e^{-x}+1} = \frac{x^2+1}{e^x+1} + \frac{x^2+1}{\frac{1}{e^x}+1} = \frac{x^2+1}{e^x+1} + \frac{x^2+1}{\frac{1+e^x}{e^x}} \Leftrightarrow$

$f(x)+f(-x) = \frac{x^2+1}{e^x+1} + \frac{e^x(x^2+1)}{e^x+1} = \frac{x^2+1+e^x(x^2+1)}{e^x+1} =$

$\frac{(x^2+1)\cancel{(e^x+1)}}{\cancel{e^x+1}} = x^2+1$.

ii.Με ολοκλήρωση της σχέσης του γ) i. έχουμε:

$\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_{-1}^1 f(-x)dx = \int_{-1}^1 (x^2+1)dx \Leftrightarrow$

$2\int_{-1}^1 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}+1-\left(-\frac{1}{3}-1\right) = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{4}{3}$.

($u=-x \Rightarrow du=-dx$. Για x= 1 είναι u= -1 και για x= -1 είναι u= 1.

$\int_{-1}^1 f(-x)dx = -\int_1^{-1} f(u)du = \int_{-1}^1 f(x)dx$.)

27.Είναι $f(x) = f(\alpha+\beta-x) \quad (1)$.

α) Έστω $I_1 = \int_\alpha^\beta xf(x)dx$. Θέτουμε $x = \alpha+\beta-u$ οπότε $dx = -du$, οπότε

$I_1 = \int_\beta^\alpha (\alpha+\beta-u)f(\alpha+\beta-u)(-du) \overset{(1)}{=} \int_\alpha^\beta (\alpha+\beta-u)f(u)du =$

$= (\alpha+\beta)\int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta xf(x)dx \Leftrightarrow$

$I_1 = (\alpha+\beta)\int_\alpha^\beta f(x)dx - I_1 \Leftrightarrow I_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

β) Έστω $I_2 = \int_0^\pi xf(\eta\mu x)dx$. Θέτουμε $x = \pi-u$ άρα $dx = -du$ οπότε

$I_2 = \int_\pi^0 (\pi-u)f(\eta\mu(\pi-u))(-du) = \int_0^\pi (\pi-u)f(\eta\mu u)du =$

$= \pi\int_\pi^0 f(\eta\mu x)dx - \int_0^\pi xf(\eta\mu x)dx = \pi\int_0^\pi f(\eta\mu x)dx - I_2 \Leftrightarrow$

x	0	π
u	π	0

$I_2 = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$.Αν θέσουμε $f(x) = \frac{x}{3+x^2}$ τότε

$I = \int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx = \int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx \Leftrightarrow$

$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu x}{4-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$. Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$ οπότε

$du = -\eta\mu x dx$ άρα $I = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-1}{4-u^2}du = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{u^2-4}du =$

$= \frac{\pi}{2}\left[\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{4}}{u-2}du - \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{4}}{u+2}du\right] = \frac{\pi}{8}\left[\ln|u-2|\right]_{-1}^{1} - \frac{\pi}{8}\left[\ln|u+2|\right]_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{4}\ln 3$.

28.α) $I_1 = \int_0^1 2f(2x+1)dx$. Θέτουμε $u = 2x+1$ οπότε

x	0	1
u	1	3

$du = 2dx$ οπότε $I_1 = \int_1^3 f(u)du = \int_1^3 f(x)dx$.

β) $I_2 = \int_2^5 \left[f(x)+f(x+3)\right]dx = \int_2^5 f(x)dx + \int_2^5 f(x+3)dx$.

x	2	5
u	5	8

Θέτουμε $u = x+3$ οπότε $du = dx$ άρα

$I_2 = \int_2^5 f(x)dx + \int_5^8 f(u)du = \int_2^8 f(x)dx$.

γ) $I_3 = \int_{\kappa\alpha}^{\kappa\beta} f\left(\frac{x}{\kappa}\right)dx$. Θέτουμε $\frac{x}{\kappa} = \omega \Leftrightarrow x = \kappa\omega$, οπότε

x	κα	κβ
ω	α	β

$dx = \kappa d\omega$ και $I_3 = \int_{\alpha}^{\beta} f(\omega)\kappa d\omega = \int_{\alpha}^{\beta} \kappa f(x)dx$.

δ) $I_4 = \int_{\alpha}^{0} f(\alpha-x)dx + \int_0^{\beta} f(\beta-x)dx$ Θέτουμε $u_1 = \alpha - x$ οπότε $dx = -du_1$ και

$u_2 = \beta - x$ οπότε $dx = -du_2$ και

x	0	β
u_2	β	0

$I_4 = \int_0^{\alpha} f(u_1)(-du_1) + \int_{\beta}^{0} f(u_2)(-du_2) =$

$\int_{\alpha}^{0} f(u_1)du_1 + \int_0^{\beta} f(u_2)du_2 = \int_{\alpha}^{0} f(x)dx + \int_0^{\beta} f(x)dx =$

x	0	α
u_1	α	0

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

29.Είναι $f''(x)+f''(4-x) = 2$ οπότε $f'(x)-f'(4-x) = 2x+c$.

Για $x = 2$ είναι $f'(2)-f'(2) = 4+c \Leftrightarrow c = -4$. Οπότε

$f'(x)-f'(4-x) = 2x-4 \Leftrightarrow f(x)+f(4-x) = x^2-4x+c_1$. Για $x = 2$:

$f(2)+f(2) = 4-8+c_1 \Leftrightarrow c_1 = 6$.Οπότε $f(x)+f(4-x) = x^2-4x+6$ και

$\int_1^3 f(x)dx+\int_1^3 f(4-x)dx=\int_1^3 (x^2-4x+6)dx$.Θέτουμε $4-x=u$ οπότε

$dx=-du$ και $\int_1^3 f(x)dx+\int_3^1 f(u)(-du)=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3-2\left[x^2\right]_1^3+6\left[x\right]_1^3 \Leftrightarrow$

$\int_1^3 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx=\frac{26}{3}-16+12 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)dx=\frac{14}{3}$ οπότε

$\int_1^3 f(x)dx=\frac{7}{3}$.

30.α) $f''(x)=-4f''(2x-1)\Leftrightarrow f'(x)=-2f'(2x-1)+c_1$. Για $x=1$ είναι

$f'(1)=-2f'(1)+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$ και $f'(x)=-2f'(2x-1)\Leftrightarrow f(x)=-f(2x-1)+c_2$.

Για $x=1$ είναι $f(1)=-f(1)+c_2 \Leftrightarrow c_2=1$, άρα $f(x)+f(2x-1)=1$ για κάθε

$x\in\mathbb{R}$.Οπότε και $\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(2x-1)dx=\int_0^1 1dx=1$.

Θέτουμε $2x-1=u\Leftrightarrow x=\frac{u+1}{2}$ και $dx=\frac{1}{2}du$. Για $x=0$ είναι $u=-1$ και για

$x=1$ είναι $u=1$, τότε

$\int_0^1 f(x)dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(u)du=1\Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx=2$.

β) Έστω $g(x)=f(x)+f(2x-1)-e+2x=1-e+2x$, $x\in[0,1]$.

$g(0)=1-e<0$, $g(1)=3-e>0$ και g συνεχής στο $[0,1]$, άρα ισχύουν οι

υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$g(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)+f(2\xi-1)=e-2\xi$.

31.Επειδή τα $\int_{2\pi}^{4\pi} f(t)dt$, $\int_{-2\pi}^{0} f(t)dt$ είναι αριθμοί τότε η g είναι σταθερή σε

καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $(0,+\infty)$. Για να είναι η g σταθερή στο

$\mathbb{R}$ αρκεί να δείξουμε ότι $\int_{2\pi}^{4\pi} f(t)dt=\int_{-2\pi}^{0} f(t)dt$.

Επειδή η f είναι άρτια τότε $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για το ολοκλήρωμα $\int_{-2\pi}^{0} f(t)dt$ θέτουμε $u=-t$, οπότε $du=-dt$ ΄.Για $t=-2\pi$

είναι $u=2\pi$ ενώ για $t=0$ είναι $u=0$. Άρα $\int_{-2\pi}^{0} f(t)dt=$

$=-\int_{2\pi}^{0} f(-u)du=\int_0^{2\pi} f(u)du=\int_0^{2\pi} f(t)dt$.

Επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο $T=2\pi$ τότε ισχύει ότι

$f(x)=f(x+2\pi)=f(x-2\pi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1ος τρόπος: Θέτουμε λοιπόν $u=t-2\pi$ και τότε είναι $du=dt$. Επίσης για $t=2\pi$ είναι $u=0$ ενώ για $t=4\pi$ είναι $u=2\pi$.

Άρα $\int_{2\pi}^{4\pi}f(t)dt=\int_{0}^{2\pi}f(u+\pi)du=\int_{0}^{2\pi}f(u)du=\int_{0}^{2\pi}f(t)dt=\int_{-2\pi}^{0}f(t)dt$.

2ος τρόπος: Θέτουμε $u=t+2\pi$ οπότε $du=dt$. Επίσης για $t=0$ είναι $u=2\pi$ ενώ για $t=2\pi$ είναι $u=4\pi$.

Άρα $\int_{-2\pi}^{0}f(t)dt=\int_{0}^{2\pi}f(t)dt=\int_{2\pi}^{4\pi}f(u-\pi)du=\int_{2\pi}^{4\pi}f(u)du=\int_{2\pi}^{4\pi}f(t)dt$.

32. Επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο $T>0$ τότε είναι $f(x)=f(x+T)=f(x-T)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) 1ος τρόπος: Για το ολοκλήρωμα $\int_{T}^{\alpha+T}f(x)dx$ θέτουμε $u=x-T$ άρα $du=dx$ και για $x=T$ είναι $u=0$ ενώ για $x=\alpha+T$ είναι $u=\alpha$. Άρα $\int_{T}^{\alpha+T}f(x)dx=\;=\int_{0}^{\alpha}f(u+T)du=\int_{0}^{\alpha}f(u)du=\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$.

2ος τρόπος: Για το ολοκλήρωμα $\int_{0}^{\alpha}f(x)dx$ θέτουμε $u=x+T$ άρα $du=dx$ και για $x=0$ είναι $u=T$ ενώ για $x=\alpha$ είναι $u=\alpha+T$. Άρα $\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=\int_{T}^{\alpha+T}f(u-T)du=\int_{T}^{\alpha+T}f(u)du=\int_{T}^{\alpha+T}f(x)dx$.

β) Είναι $\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x)dx=\int_{\alpha}^{T}f(x)dx+\int_{T}^{\alpha+T}f(x)dx\overset{\text{α) ερώτημα}}{=}$

$=\int_{\alpha}^{T}f(x)dx+\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=\int_{0}^{\alpha}f(x)dx+\int_{\alpha}^{T}f(x)dx=\int_{0}^{T}f(x)dx$.

Ολοκλήρωμα αντίστροφης

33.α) $f(x)=x^5+2x^3-3,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=5x^4+6x^2>0$ για κάθε $x\neq 0$ οπότε $f\nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ άρα $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

β) $I=\int_{-3}^{0}f^{-1}(x)dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$

Για $x=-3$ είναι $f(u)=-3=f(0)$ άρα $u=0$ και για $x=0$ είναι $f(u)=0=f(1)$ άρα $u=1$ οπότε $I=\int_{0}^{1}uf'(u)du=\int_{0}^{1}u\left(5u^4+6u^2\right)du=$

$\left[5\frac{u^6}{6}+6\frac{u^4}{4}\right]_0^1=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$.

34. $f(x)=e^{x}-e^{-2x}+3x-2$.

α) Είναι $f'(x)=e^{x}+2e^{-2x}+3>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ 1−1, οπότε αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ άρα $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

β) $I=\int_{-2}^{\frac{e^3+e^2-1}{e^2}}f^{-1}(x)dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$

Για $x=-2$: $f(u)=-2=f(0)$ άρα $u=0$.

Για $x=\dfrac{e^3+e^2-1}{e^2}$ είναι $f(u)=\dfrac{e^3+e^2-1}{e^2}=f(1)$ άρα $u=1$, 0πότε

$$I=\int_0^1 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=f(1)-\int_0^1\left(e^{u}-e^{-2u}+3u-2\right)du=$$

$$=\frac{e^3+e^2-1}{e^2}-(e-1)-\frac{1}{2}\left[e^{-2u}\right]_0^1-3\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1+2=3-\frac{3}{2e^2}.$$

35.α) Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+1>0\Rightarrow f\nearrow(-1,+\infty)\Rightarrow f$ 1−1 οπότε αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x\to-1^{+}}f(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.Η f είναι συνεχής οπότε έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

β) $I=\int_0^2\left(\ln(x+1)+x\right)dx=\int_0^2\ln(x+1)(x+1)'dx+\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^2=$

$$=\left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^2-\int_0^2\frac{1}{x+1}(x+1)dx+2=3\ln3-\int_0^2dx+2=3\ln3.$$

Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$. Για $x=0$ είναι

$f(u)=0\Leftrightarrow f(u)=f(0)\Leftrightarrow u=0$ και για $x=f(2)$ είναι $f(u)=f(2)\Leftrightarrow u=2$.

Είναι $J=\int_0^{f(2)}f^{-1}(x)dx=\int_0^2 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_0^2-\int_0^2 f(u)du=$

$2f(2)-I=2\ln3-3\ln3=-\ln3$. Άρα $I+J=3\ln3-\ln3=2\ln3$.

Αυξημένης δυσκολίας

36.Για κάθε x > 0 είναι

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^4+1}\right)'=\left[\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{3}}\right]'=\frac{1}{3}\left(x^4+1\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot4x^3=\frac{4x^3}{3\left(\sqrt[3]{x^4+1}\right)^2}.$$

Είναι $f'(x)>0$ για κάθε x > 0 και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4+1\right)=+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^4+1}=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=[0,+\infty)$, έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$. Άρα

$A_{f^{-1}}=f(A)=[1,+\infty)$.Για κάθε $x\geq 0$ και $y\geq 1$ είναι

$f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^4+1}=y\Leftrightarrow x^4+1=y^3\Leftrightarrow x^4=y^3-1\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow}$

$x=\sqrt[4]{y^3-1}$, άρα $f^{-1}(y)=\sqrt[4]{y^3-1},\ y\geq 1$, οπότε $f^{-1}(x)=\sqrt[4]{x^3-1},\ x\geq 1$.

β) Είναι $I=\int_0^1\sqrt[3]{x^4+1}dx+\int_1^{\sqrt[3]{2}}\sqrt[4]{x^3-1}dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{\sqrt[3]{2}}f^{-1}(x)dx$.

Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$.Για $x=1$ είναι

$f(u)=1=f(0)\Leftrightarrow u=0$ και για $x=\sqrt[3]{2}$ είναι $f(u)=\sqrt[3]{2}=f(1)\Leftrightarrow u=1$. Τότε

$I=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 uf'(u)du=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 xf'(x)dx\Leftrightarrow$

$I=\int_0^1\left(f(x)+xf'(x)\right)dx=\int_0^1\left(xf(x)\right)'dx=\left[xf(x)\right]_0^1=f(1)=\sqrt[3]{2}$.

37.α) Παραγωγίζουμε στη σχέση (1) $\ln f(x)+e^{f(x)}=x$ οπότε

$\frac{f'(x)}{f(x)}+e^{f(x)}f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)\left(\frac{1}{f(x)}+e^{f(x)}\right)=1$, οπότε $f'(x)>0$ αφού

$\frac{1}{f(x)}+e^{f(x)}>0$, άρα $f\nearrow\!\!1\!\!-\!\!1$ οπότε $1-1$, συνεπώς αντιστρέφεται. Θέτουμε

$f(x)=y>0$ τότε $\ln y+e^y=x$, άρα $f^{-1}(x)=\ln x+e^x,\ x>0$.

β) Είναι $I=\int_1^e f^{-1}(x)dx+\int_e^{e^e+1}f(x)dx$. Θέτουμε $f(x)=u$ οπότε $x=f^{-1}(u)$

και $dx=\left(f^{-1}(u)\right)'du$. Για $x=e$: $f^{-1}(u)=e=f^{-1}(1)$ άρα $u=1$ ενώ για

$x=e^e+1$ $f^{-1}(u)=e^e+1=f^{-1}(e)$ άρα $u=e$, συνεπώς

$I=\int_1^e f^{-1}(x)dx+\int_1^e u\left(f^{-1}(u)\right)'du=\int_1^e f^{-1}(x)dx+\left[uf^{-1}(u)\right]_1^e-\int_1^e f^{-1}(u)du=$

$ef^{-1}(e)-1f^{-1}(1)=e\left(e^e+1\right)-e=e^{e+1}$.

($\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{x}+e^x>0$ οπότε f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται)

38.Είναι $8f^3(x)+4f(x)-x+10=0\quad(1)$.

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $8f^3(x_1) = 8f^3(x_2)$ και $4f(x_1) = 4f(x_2)$, οπότε

$8f^3(x_1) + 4f(x_1) = 8f^3(x_2) + 4f(x_2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_1 - 10 = x_2 - 10 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, οπότε η f είναι $1-1$ άρα αντιστρέφεται. Στην (1) θέτω $f(x) = y$ και $x = f^{-1}(y)$ οπότε $8y^3 + 4y - f^{-1}(y) + 10 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = 8y^3 + 4y + 10,\ y \in \mathbb{R}$. Άρα $f^{-1}(x) = 8x^3 + 4x + 10,\ x \in \mathbb{R}$

β) Θέτουμε $f(x) = u$ οπότε $x = f^{-1}(u)$ και $dx = \left(f^{-1}(u)\right)' du$. Για $x = -2$ $f^{-1}(u) = -2 = f^{-1}(-1)$ άρα $u = -1$ ενώ για $x = 10$: $f^{-1}(u) = 10 = f^{-1}(0)$ άρα $u = 0$ οπότε $I = \int_{-1}^{0} u\left(f^{-1}(u)\right)' du = \left[uf^{-1}(u)\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} f^{-1}(u)du =$

$f^{-1}(-1) - \int_{-1}^{0}\left(8u^3 + 4u + 10\right)du = -2 - 2\left[u^4\right]_{-1}^{0} - 2\left[u^2\right]_{-1}^{0} - 10\left[u\right]_{-1}^{0} = -8.$

$\left(\left(f^{-1}\right)'(x) = 24x^2 + 4 > 0\right.$ οπότε f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται)

γ) Είναι $I_1 = \int_{-2}^{10} xf'(x)dx = \left[xf(x)\right]_{-2}^{10} - \int_{-2}^{10} f(x)dx = 10f(10) + 2f(-2) - (-8)$

Όμως $f^{-1}(0) = 10 \Leftrightarrow f(10) = 0$ και $f^{-1}(-1) = -2 \Leftrightarrow f(-2) = -1$ άρα $I_1 = 0 - 2 + 8 = 6$.

39. Θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u)$, οπότε $dx = f'(u)du$.

Για $x = \alpha$ είναι $f(u) = \alpha \Leftrightarrow u = f^{-1}(\alpha)$ και για $x = \beta$ είναι $f(u) = \beta \Leftrightarrow u = f^{-1}(\beta)$. Άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx = \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} uf'(u)du =$

$= \left[uf(u)\right]_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(u)du =$

$= f^{-1}(\beta)f\left(f^{-1}(\beta)\right) - f^{-1}(\alpha)f\left(f^{-1}(\alpha)\right) - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(u)du =$

$= f^{-1}(\beta)\beta - f^{-1}(\alpha)\alpha - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(u)du = = \beta f^{-1}(\beta) - \alpha f^{-1}(\alpha) - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(x)dx.$

40.α) $I = \int_4^6 \frac{x}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}dx$. Θέτω $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u)du$

για $x = 4$ είναι $f(u) = 4 = f(2)$ άρα $u = 2$ ενώ για $x = 6$ είναι $f(u) = 6 = f(3)$ άρα $u = 3$. Επομένως

$I=\int_2^3 \frac{f(u)\cdot f'(u)du}{f'(u)}=\int_2^3 f(u)du=\int_2^3 f(x)dx$.

β) $I_1=\int_4^6 f^{-1}(x)dx$. Με βάση το (α) ερώτημα και κάνοντας τις ίδιες αντικαταστάσεις έχουμε: $I_1=\int_2^3 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_2^3-\int_2^3 f(u)du=9$.

41. $f^5(x)+4f(x)=5x \quad (1)$.

α) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$.Τότε $f^5(x_1)=f^5(x_2)$ και $4f(x_1)=4f(x_2)$ άρα $f^5(x_1)+4f(x_1)=f^5(x_2)+4f(x_2)$. Όποτε από την $(1)\Rightarrow 5x_1=5x_2$, άρα $x_1=x_2$ επομένως η f αντιστρέφεται. Αν $f(x)=y$ τότε $x=f^{-1}(y)$ άρα από την (1) $y^5+4y=5f^{-1}(y)$ άρα $f^{-1}(x)=\frac{x^5+4x}{5}, x\in\mathbb{R}$.

β) Στην (1) για $x=0$: $f^5(0)+4f(0)=0\Leftrightarrow f(0)\left[f^4(0)+4\right]=0\Leftrightarrow f(0)=0$ και στην (1) για $x=1$: $f^5(1)+4f(1)-5=0$. Θεωρούμε την $g(x)=x^5+4x-5$ η οποία είναι $\nearrow\mathbb{R}$ και έχει μοναδική ρίζα $x=1$ άρα $f(1)=1$.

2ος τρόπος: $f^{-1}(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0, f^{-1}(1)=1\Leftrightarrow f(1)=1$.

γ) $I=\int_0^1\left(f(x)+f^{-1}(x)\right)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f^{-1}(x)dx$. Θέτω $u=f^{-1}(x)$ $\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$ Για x=0 είναι $u=f^{-1}(0)=0$ και για x=1 είναι $u=f^{-1}(1)=1$, οπότε

$I=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 uf'(u)du=\int_0^1 f(x)dx+\left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=f(1)=1$.

δ) Έστω $f(x)\le x$ τότε $f^5(x)\le x^5$ και $4f(x)\le 4x$, οπότε

$f^5(x)+4f(x)\le x^5+4x\overset{(1)}{\Leftrightarrow}5x\le x^5+4x\Leftrightarrow x^5-x\ge 0\Leftrightarrow x\in[-1,0]\cup[1,+\infty)$ άτοπο, αφού $x\in(0,1)$ άρα $f(x)>x$ για κάθε $x\in(0,1)$.

42.α) Είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$ αφού $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $e^x\ge x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.
Επειδή η f είναι συνεχής τότε $f\nearrow\mathbb{R}$ άρα η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.
Είναι $x\ge 0\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)\ge 0\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)\ge f(\rho)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f^{-1}(x)\ge\rho>0$.
Άρα ορίζεται το $f'\left(f^{-1}(x)\right)$ για κάθε $x\ge 0$. Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$

και $f^{-1}(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$, τότε $f'\left(f^{-1}(x)\right)>0$ για κάθε $x\geq 0$.

β) Για κάθε $x\geq 0$ είναι $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ (1) .Με παραγώγιση της σχέσης (1)

κατά μέλη έχουμε $f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)=1 \overset{f'\left(f^{-1}(x)\right)>0}{\Leftrightarrow} \left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}\Leftrightarrow$

$\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{e^{f^{-1}(x)}-f^{-1}(x)-1}{e^{f^{-1}(x)}}\Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(x)=1-\dfrac{f^{-1}(x)+1}{e^{f^{-1}(x)}}$.

Άρα $\int_0^{\alpha}\left(1-\dfrac{f^{-1}(x)+1}{e^{f^{-1}(x)}}\right)dx=\int_0^{\alpha}\left(f^{-1}\right)'(x)dx=\left[f^{-1}(x)\right]_0^{\alpha}=f^{-1}(\alpha)-\rho$ γιατί

$f(\rho)=0\Leftrightarrow f^{-1}(0)=\rho$.

Σύνθετες ασκήσεις

43.α) Έστω ότι $\int_0^1 f(x)dx=\lambda\in\mathbb{R}$, τότε $\int_0^1\left(3\int_0^1 f(x)dx\right)dt=3\Leftrightarrow$

$\int_0^1 3\lambda dt=3\Leftrightarrow 3\lambda(1-0)=3\Leftrightarrow\lambda=1$, άρα $\int_0^1 f(x)dx=1$.

β) 1ος τρόπος: Έστω ότι $f(x)\neq 1$ για κάθε $x\in[0,1]$, τότε επειδή η συνάρτηση $g(x)=f(x)-1$ είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,1]$. Αν $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$, τότε

$\int_0^1 g(x)dx>0\Leftrightarrow\int_0^1\left(f(x)-1\right)dx>0\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx-(1-0)>0\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx>1$

άτοπο. Αν $g(x)<0$ για κάθε $x\in[0,1]$, τότε

$\int_0^1 g(x)dx<0\Leftrightarrow\int_0^1\left(f(x)-1\right)dx<0\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx-(1-0)<0\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx<1$

άτοπο.Άρα υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=1$.

2ος τρόπος: Είναι $\int_0^1 f(x)dx=1\Leftrightarrow F(1)-F(0)=1$, όπου F αρχική της f.

Η F είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $F'(x)=f(x)$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(0,1)\subseteq[0,1]$ τέτοιο, ώστε

$F'(\xi)=\dfrac{F(1)-F(0)}{1-0}\Leftrightarrow f(\xi)=1$.

γ) Έστω $h(x)=F(x)-x,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $h'(x)=F'(x)-1=f(x)-1$.

Για κάθε $x<\xi$ είναι $f(x)<f(\xi)=1\Rightarrow h'(x)<0$ και για κάθε $x>\xi$ είναι $f(x)>f(\xi)=1\Rightarrow h'(x)>0$. Επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi,+\infty)$.

Η h έχει ελάχιστο το $h(\xi)=F(\xi)-\xi$, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$h(x)\geq h(\xi)\Leftrightarrow F(x)-x\geq F(\xi)-\xi\Leftrightarrow F(x)-F(\xi)\geq x-\xi$

δ) $\int_0^1 xf'(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx=f(1)-1$.

44.α) Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ για τα οποία να ισχύει $f(x_1)\geq f(x_2)$ τότε $f^3(x_1)\geq f^3(x_2)$ και $2f(x_1)\geq 2f(x_2)$ οπότε $f^3(x_1)+2f(x_1)\geq f^3(x_2)+2f(x_2)\Leftrightarrow x_1+3\geq x_2+3\Leftrightarrow x_1\geq x_2$ άτοπο, άρα για κάθε $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε $f\nearrow\mathbb{R}$.

β) $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f\ 1-1\Rightarrow f$ αντιστρέφεται. Αν $f(x)=y$ τότε $x=f^{-1}(y)$ και από τη σχέση $f^3(x)+2f(x)=x+3$ (1) προκύπτει $f^{-1}(y)=y^3+2y-3$, $y\in\mathbb{R}$ άρα $f^{-1}(x)=x^3+2x-3, x\in\mathbb{R}$.

γ) Αρχικά θα βρούμε τα διαστήματα στα οποία η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται πάνω από την $y=x$. Είναι $f^{-1}(x)>x\Leftrightarrow x^3+2x-3-x>0\Leftrightarrow x^3+x-3>0$.

Έστω $g(x)=x^3+x-3$ είναι $g'(x)=3x^2+1>0\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$ και

$g(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=(-\infty,+\infty)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_1\in\mathbb{R}$

τέτοιο, ώστε $g(x_1)=0$. Για κάθε $x<x_1\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(x_1)=0\Leftrightarrow f^{-1}(x)<x$ και

λόγω συμμετρίας $f(x)>x$, ενώ για $x>x_1\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(x_1)=0\Leftrightarrow f^{-1}(x)>x$

και λόγω συμμετρίας $f(x)<x$. Άρα η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) $I=\int_{-3}^{0}f(x)dx$. Έστω $f(x)=u$ οπότε $x=f^{-1}(u)\Leftrightarrow x=u^3+2u-3$ και

$dx=(3u^2+2)du$. Για $x=-3$ είναι $f^{-1}(u)=-3=f^{-1}(0)$ άρα $u=0$ ενώ για

$x=0$ είναι $f^{-1}(u)=0=f^{-1}(1)$ άρα $u=1$ οπότε

$$I=\int_0^1 u(3u^2+2)du=\left[\frac{3u^4}{4}+u^2\right]_0^1=\frac{7}{4}.$$

ε) Έχουμε $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^3(x)}{f^{-1}(x)+x}$. Είναι $f^{-1}(x)=x^3+2x-3$ η οποία είναι $\nearrow\mathbb{R}$

και με σύνολο τιμών $f^{-1}(A)=A_f=(-\infty,+\infty)$. Έστω $f(x)=u\Leftrightarrow x=f^{-1}(u)$

Όταν $x\to+\infty$ τότε $f(x)\to+\infty$ άρα $u\to+\infty$ και

$$L=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{(u^3+2u-3)^3+2(u^3+2u-3)-3+(u^3+2u-3)}=0.$$

στ) Παραγωγίζουμε στην (1) και έχουμε: $3f^2(x)f'(x)+2f'(x)=1 \quad (2)$ και $6f(x)(f'(x))^2+3f^2(x)f''(x)+2f''(x)=0$.

Για $x=x_0$ έχουμε $6f(x_0)(f'(x_0))^2=0$, αφού $f''(x_0)=0$, οπότε $f(x_0)=0$ ή $f'(x_0)=0$, (άτοπο από (2)). Οπότε στην (1) για $x=x_0$ έχουμε $0=x_0+3 \Leftrightarrow x_0=-3$.

ζ) Η εξίσωση είναι $x^3+2x-3=e^{1-x} \Leftrightarrow x^3+2x-3-e^{1-x}=0$. Έστω $h(x)=x^3+2x-3-e^{1-x}$.Είναι $h'(x)=3x^2+2+e^{1-x}>0$ οπότε η h είναι $\nearrow$.

Είναι $h(1)=-1<0$, $h(2)=9-\frac{1}{e}>0$, η h είναι συνεχής στο $[1,2]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$, οποία είναι μοναδική αφού η h είναι γνησίως αύξουσα.

45.α) Έστω ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $[1,3]$.

• Αν ήταν $f(x_0)>0$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,3]$, οπότε $\int_1^3 f(x)dx>0$ (άτοπο)

• Αν ήταν $f(x_0)<0$ τότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in[1,3]$, οπότε $\int_1^3 f(x)dx<0$ (άτοπο). Οπότε η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $[1,3]$, δηλαδή υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in[1,3]$ με $f(\xi_1)\cdot f(\xi_2)<0$ οπότε αφού f συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\rho\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq[1,3]$ ώστε $f(\rho)=0$.

β) Έστω ότι η f'' διατηρεί πρόσημο στο $(1,3)$ Αν $f''(x)>0$ τότε $f'\nearrow[1,3]$ οπότε και $1-1$. Επειδή $f(1)=f(3)=f(\rho)=0$ τότε από Θ. Rolle υπάρχουν $\theta_1\in(1,\rho)$ και $\theta_2\in(\rho,3)$ ώστε $f'(\theta_1)=0$ και $f'(\theta_2)=0$, οπότε $f'(\theta_1)=f'(\theta_2)=0$ και αφού f' είναι $1-1$ τότε $\theta_1=\theta_2$ (άτοπο).

Όμοια αν $f''(x)<0$.Συνεπώς η f'' δεν διατηρεί πρόσημο στο $(1,3)$ άρα υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,3)$ με $f''(x_1)\cdot f''(x_2)<0$.

46.α) i. Στην (1) $f(x+2)=f(x)+4x$ για $x=0$ προκύπτει $f(0)=f(2)$ οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0 \quad (3)$.

ii. Παραγωγίζουμε την (1), οπότε $f'(x+2)=f'(x)+4 \quad (4)$ και για $x=0$: $f'(2)-f'(0)=4$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για f' στο $[0,2]$ οπότε υπάρχει

$x_0 \in (0,2)$ ώστε $f''(x_0) = \dfrac{f'(2)-f'(0)}{2-0} = \dfrac{4}{2} = 2$.

iii. $\int_{\xi}^{\xi+2} xf''(x)dx = \left[xf'(x)\right]_{\xi}^{\xi+2} - \int_{\xi}^{\xi+2} f'(x)dx = (\xi+2)f'(\xi+2) - \xi f'(\xi) -$

$\left[f(\xi+2)-f(\xi)\right] \overset{(1),(3),(4)}{=} = (\xi+2)\left[f'(\xi)+4\right] - 0 - 4\xi = 4\xi+8-4\xi = 8$.

β) Ολοκληρώνοντας στην (1) έχουμε

$\int_0^2 f(x+2)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 4xdx$ (5). Θέτω $x+2=u$ οπότε $dx = du$. Για $x=0$ είναι $u=2$ άρα $u=0$ ενώ για $x=2$ είναι $u=4$ οπότε η (5) γίνεται $\int_2^4 f(u)du = \int_0^2 f(x)dx + \left[2x^2\right]_0^2 \Leftrightarrow$

$\int_2^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + 8 \Leftrightarrow -2\int_0^2 f(x)dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = -2$.

47.α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$, λόγω του θεωρήματος Μέγιστης-Ελάχιστης τιμής, παρουσιάζει μέγιστο στο διάστημα αυτό.

β) Έστω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος $[0,\pi]$ στο οποίο είναι παραγωγίσιμη. Τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat, οπότε $f'(x_0)=0$. Είναι $f(x_0) < \eta\mu x_0 f'(x_0) = 0$, οπότε για κάθε $x \in [0,\pi]$ είναι $f(x) \le f(x_0) < 0$.

Αν η f έχει μέγιστο στο 0 ή στο π, τότε επειδή $f(0) < \eta\mu 0 \cdot f'(0) = 0$, $f(\pi) < \eta\mu\pi \cdot f'(\pi) = 0$, είναι $f(x) \le f(0) < 0$ και $f(x) \le f(\pi) < 0$. Οπότε σε κάθε περίπτωση είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,\pi]$.

γ) Είναι $f(x) < \eta\mu x f'(x) \Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(x)dx < \int_0^{\pi/2} \eta\mu x f'(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi/2} f(x)dx < \left[\eta\mu x f(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x f(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi/2} f(x)dx + \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x f(x)dx < f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} (1+\sigma\upsilon\nu x) f(x)dx < f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

δ) Επειδή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,\pi]$, η σχέση $f(x) < \eta\mu x f'(x)$ γίνεται:

$2f(x)f(x) > 2\eta\mu x f(x) f'(x) \Leftrightarrow 2f^2(x) > \eta\mu x \left(f^2(x)\right)' \Rightarrow$

$\int_0^{\pi/2} 2f^2(x)dx > \int_0^{\pi/2} \eta\mu x \left(f^2(x)\right)' dx \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi/2} 2f^2(x)dx > \left[\eta\mu x f^2(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x f^2(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi/2} 2f^2(x)dx + \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x f^2(x)dx > f^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi/2}\left[2f^2(x)+\sigma\upsilon\nu x f^2(x)\right]dx > f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2}(2+\sigma\upsilon\nu x)f^2(x)dx > f^2\left(\frac{\pi}{2}\right).$

ε) $f(x) < \eta\mu x f'(x) \underset{x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]}{\overset{f(x)<0,\eta\mu x>0}{\Leftrightarrow}} \frac{1}{\eta\mu x} > \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{f'(x)}{f(x)}dx < \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{\eta\mu x}dx \quad (1)$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\eta\mu x}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx \underset{x=\frac{\pi}{2}\to u=0}{\overset{\sigma\upsilon\nu x=u}{\underset{\eta\mu x dx=-du}{=}}} \int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-du}{1-u^2} = -\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{u^2-1}du .$$

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1} = \frac{Au+A+Bu-B}{(u-1)(u+1)} = \frac{(A+B)u+A-B}{u^2-1} .$$

Για να ισχύει η ισότητα για κάθε $u \neq \pm 1$ πρέπει: $\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$, άρα

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1} = \frac{\frac{1}{2}}{u-1}-\frac{\frac{1}{2}}{u+1}, \text{ οπότε:}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{u^2-1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u+1}\right)dx = \left[\frac{1}{2}\ln|u-1|-\frac{1}{2}\ln|u+1|\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ln 3$$

και $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\eta\mu x}dx = -\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{u^2-1}du = \frac{1}{2}\ln 3$. Η σχέση (1) γίνεται:

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{f'(x)}{f(x)}dx < \frac{1}{2}\ln 3 \Leftrightarrow \left[\ln|f(x)|\right]_{\pi/3}^{\pi/2} < \frac{1}{2}\ln 3 \Leftrightarrow \ln\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| - \ln\left|f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| < \ln 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{3}\right)} < \ln\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{3}\right)} < \sqrt{3} \overset{f\left(\frac{\pi}{3}\right)<0}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{\pi}{2}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Τράπεζα θεμάτων Ι.Ε.Π.

27668.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = (x-\lambda)(x-1)+(x-3)(x-1)+(x-3)(x-\lambda) \Leftrightarrow$

$f'(x) = x^2 - x - \lambda x + \lambda + x^2 - 3x - x + 3 + x^2 - \lambda x - 3x + 3\lambda \Leftrightarrow$

$f'(x) = 3x^2 - 2(\lambda+4)x + 4\lambda + 3$. Η f' είναι τριώνυμο με διακρίνουσα

$\Delta = 4(\lambda+4)^2 - 12(4\lambda+3) = 4(\lambda^2+8\lambda+16-12\lambda-9) = 4(\lambda^2-4\lambda+7)$.

Το τριώνυμο $\lambda^2-4\lambda+7$ έχει διακρίνουσα αρνητική, άρα $\Delta = 4(\lambda^2-4\lambda+7) > 0$

για κάθε $\lambda \in (1,3)$, οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες. .

β) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της f΄με $x_1 < x_2$, τότε για κάθε $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, x_1], [x_2, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτά.

Για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(x_1)$ και τοπικό ελάχιστο το $f(x_2)$. Η f΄είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f''(x) = 6x - 2(\lambda+4)$.Είναι $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6x \geq 2(\lambda+4) \Leftrightarrow x \geq \dfrac{\lambda+4}{3}$.

Για κάθε $x < \dfrac{\lambda+4}{3}$ είναι $f''(x) < 0$ και για κάθε $x > \dfrac{\lambda+4}{3}$ είναι $f''(x) > 0$,

επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $\left(-\infty, \dfrac{\lambda+4}{3}\right]$ και κυρτή στο

$\left[\dfrac{\lambda+4}{3}, +\infty\right)$, οπότε έχει σημείο καμπής το $\left(\dfrac{\lambda+4}{3}, f\left(\dfrac{\lambda+4}{3}\right)\right)$.

γ) Είναι $\int_1^3 f(x)dx = -\int_1^3 f(4-x)dx$.

Θέτουμε $4-x=u \Leftrightarrow x = 4-u$, $dx = -du$. Για x=1 είναι u=3 και για x= 3 είναι u = 1, οπότε $\int_1^3 f(x)dx = \int_3^1 f(u)du \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx = -\int_1^3 f(x)dx \Leftrightarrow$

$2\int_1^3 f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx = 0$.

24131.α) Είναι $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 1$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = [0, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[-\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

β) Για κάθε $x \geq 0$ και $y \in \left[-\dfrac{1}{2}, 1\right)$ είναι: $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = y \Leftrightarrow$

$y\sqrt{x} + 2y = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow y\sqrt{x} - \sqrt{x} = -2y - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}(y-1) = -(2y+1) \Leftrightarrow$

$\sqrt{x} = \dfrac{-(2y+1)}{y-1} \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{2y+1}{1-y}\right)^2$, άρα

$f^{-1}(y)=\left(\frac{2y+1}{1-y}\right)^2$, $y\in\left[-\frac{1}{2},1\right)$, οπότε $f^{-1}(x)=\left(\frac{2x+1}{1-x}\right)^2$, $x\in\left[-\frac{1}{2},1\right)$.

γ) i. Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$, η C_1 παριστάνει τη γραφική της παράσταση, οπότε η C_2 παριστάνει τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

ii. Είναι $f^{-1}(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=-\frac{1}{2}$, οπότε $\int_{-1/2}^{0} f^{-1}(x)dx>0\Leftrightarrow \alpha>0$.

Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$. Για $x=-\frac{1}{2}$ είναι $f(u)=-\frac{1}{2}=f(0)\Leftrightarrow u=0$ και για $x=0$ είναι $f(u)=0=f(1)\Leftrightarrow u=1$.

Είναι $\int_{-1/2}^{0} f^{-1}(x)dx=\alpha\Leftrightarrow \int_0^1 uf'(u)du=\alpha\Leftrightarrow \left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=\alpha\Leftrightarrow$ $f(1)-I=\alpha\Leftrightarrow -I=\alpha\Leftrightarrow I=-\alpha$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Έστω $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ οπότε $dx=f'(u)du$. Για $x=-4$ είναι $f(u)=-4=f(0)\Leftrightarrow u=0$, ενώ για $x=e-3$ είναι $f(u)=e-3=f(1)\Leftrightarrow u=1$.

Άρα $I=\int_{-4}^{e-3} f^{-1}(x)dx=\int_0^1 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=$

$=f(1)-\int_0^1\left(e^u+2u-5\right)du=e-3-\left[e^u\right]_0^1-\left[u^2\right]_0^1+5\left[u\right]_0^1=$

$e-3-e+1-1+5=2$. **Σωστή απάντηση Γ.**

2. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε παραγωγίζοντας στην σχέση $f^3(x)+f(x)=x$ (1) έχουμε

$3f^2(x)f'(x)+f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)+1\right)=1 \overset{3f^2(x)+1>0}{\Leftrightarrow}$

$f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+1}>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1, συνεπώς αντιστρέφεται.

Αν $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$ και η σχέση (1) γίνεται $y^3+y=f^{-1}(y)$, άρα $f^{-1}(x)=x^3+x, x\in\mathbb{R}$. Αν $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$ οπότε $dx=\left(f^{-1}(y)\right)'dy$. Για $x=0$ είναι $f^{-1}(y)=0=f^{-1}(0)\Leftrightarrow y=0$, ενώ για $x=2$ είναι

$f^{-1}(y)=2=f^{-1}(1)\Leftrightarrow y=1$. Άρα

$$I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 y\left(f^{-1}(y)\right)'dy=\int_0^1 y\left(3y^2+1\right)dy=3\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{5}{4}.$$

Σωστή απάντηση Β.

3. Είναι $f''(x)=-f''(2-x)\Leftrightarrow f'(x)=f'(2-x)+c_1$. Για $x=1$ είναι

$f'(1)=f'(1)+c_1\Leftrightarrow c_1=0$, οπότε $f'(x)=f'(2-x)\Leftrightarrow f(x)=-f(2-x)+c_2$

Για $x=1$ είναι $f(1)=-f(1)+c_2\Leftrightarrow c_2=2f(1)=2$, άρα $f(x)+f(2-x)=2$.

Οπότε $\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2 2dx$ (1). Θέτουμε $2-x=\omega$ άρα

$dx=-d\omega$, Για $x=2$ είναι $\omega=0$, ενώ για $x=0$ είναι $\omega=2$. Τότε

$\int_0^2 f(2-x)dx=\int_2^0 f(\omega)(-d\omega)=\int_0^2 f(x)dx$. Συνεπώς η σχέση (1) γίνεται

$2\int_0^2 f(x)dx=4\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx=2$. **Σωστή απάντηση Α.**

4. Αν στη σχέση $f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=\beta x^2$ θέσουμε όπου x το x-α

τότε έχουμε: $f(\alpha+(x-\alpha))+f(\alpha-(x-\alpha))=\beta(x-\alpha)^2\Leftrightarrow$

$f(x)+f(2\alpha-x)=\beta(x-\alpha)^2$ οπότε

$\int_0^{2\alpha} f(x)dx+\int_0^{2\alpha} f(2\alpha-x)dx=\int_0^{2\alpha}\beta(x-\alpha)^2\,dx$ (1) .Είναι

$\int_0^{2\alpha} f(2\alpha-x)dx\overset{2\alpha-x=\omega}{=}\int_{2\alpha}^0 f(\omega)(-d\omega)=\int_0^{2\alpha} f(\omega)d\omega$ οπότε η σχέση (1) γίνεται

$$2\int_0^{2\alpha} f(x)dx=\beta\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_0^{2\alpha}=\beta\left(\frac{\alpha^3}{3}+\frac{\alpha^3}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$2\int_0^{2\alpha} f(x)dx=\frac{2\beta\alpha^3}{3}\Leftrightarrow\int_0^{2\alpha} f(x)dx=\frac{\beta\alpha^3}{3}$.**Σωστή απάντηση Δ.**

5. $3\int_0^2 f^2(x)dx+32=12\int_0^2 xf(x)dx\Leftrightarrow\int_0^2 f^2(x)dx+\frac{32}{3}=4\int_0^2 xf(x)dx\Leftrightarrow$

$\int_0^2 f^2(x)dx-\int_0^2 4xf(x)dx+\int_0^2 4x^2dx=0\Leftrightarrow\int_0^2\left(f^2(x)-4xf(x)+4x^2\right)dx=0\Leftrightarrow$

$\int_0^2\left(f(x)-2x\right)^2dx=0$. Είναι $\left(f(x)-2x\right)^2\geq 0$ οπότε αν υπάρχει $x_0\in[0,2]$

τέτοιο, ώστε $f(x_0)-2x_0\neq 0$ θα ήταν $\int_0^2\left(f(x)-2x\right)^2dx>0$ (άτοπο) . Άρα

$\left(f(x)-2x\right)^2=0\Leftrightarrow f(x)=2x$. **Σωστή απάντηση Γ.**

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»								
1. Λ	**2.**Σ	**3.** Σ	**4.** Σ	**5.** Σ	**6.** Λ	**7.** Σ	**8.** Λ	**9.** Σ

14 Ανισοτικές σχέσεις ολοκληρωμάτων

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \gamma \text{ ή } \int_\alpha^\beta f(x)dx < \delta$$

18.α) Έστω $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$, $x > 0$. $f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$

Η f είναι $\nearrow(0,e]$ και $\searrow[e,+\infty)$ και έχει μέγιστο το $f(e)$. Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \le f(e) \Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}} \le e^{\frac{1}{e}}$ οπότε $\int_e^{2e} x^{\frac{1}{x}} dx < \int_e^{2e} e^{\frac{1}{e}} dx = e^{\frac{1}{e}} \cdot e = e^{\frac{1}{e}+1} = e^{\frac{e+1}{e}}$

β) Έστω $g(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. $g'(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ οπότε $g \searrow \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Για $x \ge \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow g(x) \le g\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{2}{\pi}$ οπότε $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\eta\mu x}{x} dx < \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

γ) Έστω $h(x) = \eta\mu^{1821} x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $h'(x) = 1821\eta\mu^{1820} x \cdot \sigma\upsilon\nu x > 0$ όταν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε $h \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Για $x \le \frac{\pi}{2}$ είναι $h(x) \le h\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \eta\mu^{1821} x \le 1$ οπότε $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{1821} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$.

19. Για $x \ge \alpha$ θα είναι $f(x) \ge f(\alpha)$. Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \alpha$ είναι: $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta f(\alpha)dx \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx > f(\alpha)(\beta - \alpha)$.

20.α) Έστω $g(x) = f(x) - x^4$, $x \ge 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x) = f'(x) - 4x^3$. Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x \ge 0 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x) \ge g(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \ge x^4$.

β) $\int_0^1 \eta\mu x f(t)dt = 1 - x \Leftrightarrow \eta\mu x \int_0^1 f(t)dt - 1 + x = 0$.

Έστω $h(x) = \eta\mu x \int_0^1 f(t)dt - 1 + x$, $x \in [0,1]$. Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(0) = -1 < 0$ και

$h(1)=\eta\mu 1\cdot\int_0^1 f(t)dt$. Είναι $1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \eta\mu 1>0$ και $f(x)\geq x^4\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$, άρα $\int_0^1 f(t)dt>0$, οπότε $h(1)>0$. Επειδή $h(0)h(1)<0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow \int_0^1 \eta\mu x f(t)dt=1-x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $h'(x)=\sigma\upsilon\nu x\int_0^1 f(t)dt+1>0\Rightarrow h\nearrow[0,1]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

21.α) Έστω $g(x)=f(x)+e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)-e^{-x}<0\Rightarrow g\searrow\mathbb{R}$. Για κάθε $x<0$ είναι $g(x)>g(0)=0\Leftrightarrow f(x)>-e^{-x}$ και για κάθε $x>0$ είναι $g(x)<g(0)=0\Leftrightarrow f(x)<-e^{-x}$.

β) $\int_1^2 \ln(x+1)f(t)dt=3x-e^x\Leftrightarrow \ln(x+1)\int_1^2 f(t)dt-3x+e^x=0$.

Έστω $h(x)=\ln(x+1)\int_1^2 f(t)dt-3x+e^x$, $x\in[0,1]$. Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(0)=1>0$ και $h(1)=\ln 2\cdot\int_1^2 f(t)dt-3+e$ Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)<-e^{-x}<0\Rightarrow$ $\int_1^2 f(t)dt<0\Leftrightarrow \ln 2\int_1^2 f(t)dt<0\Leftrightarrow \ln 2\int_1^2 f(t)dt-3+e<-3+e<0\Rightarrow$ $h(1)<0$. Επειδή $h(0)h(1)<0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow \int_1^2 \ln(x+1)f(t)dt=3x-e^x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Αυξημένης δυσκολίας

22. Αφού η f είναι κυρτή τότε $f'\nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Στο διάστημα $[-1,x]$ με $x\in(-1,1]$ εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει $\xi\in(-1,x):f'(\xi)=\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$. Όμως $-1<\xi<x\leq 1$ άρα $\xi<1$ οπότε $f'(\xi)<f'(1)\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}<f'(1)\Leftrightarrow$ $f(x)-f(-1)<f'(1)(x+1)$ και $\int_{-1}^1 f(x)dx-\int_{-1}^1 f(-1)dx<\int_{-1}^1 f'(1)(x+1)dx\Leftrightarrow$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx - 2f(-1) < f'(1)\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_{-1}^{1} \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx - 2f(-1) < 2f'(1) \Leftrightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx < 2\left[f(-1) + f'(1)\right].$$

23. Αφού η f είναι κοίλη η f′ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Στο διάστημα $[-2, x]$ με $x \in (-2, 2]$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f, οπότε υπάρχει

$\xi \in (-2, x) : f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(-2)}{x+2}$. Όμως $-2 < \xi < x \le 2$ άρα $\xi < 2$ οπότε

$$f'(\xi) > f'(2) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} > f'(2) \Leftrightarrow f(x) - f(-2) > f'(2)(x+2) \text{ και}$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx - \int_{-2}^{2} f(-2)dx > \int_{-2}^{2} f'(2)(x+2)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx - 4f(-2) > f'(2)\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{2} \Leftrightarrow \int_{-2}^{2} f(x)dx - 4f(-2) > 8f'(2) \Leftrightarrow$$

$$8f'(2) + 4f(-2) < \int_{-2}^{2} f(x)dx \Leftrightarrow 2f'(2) + f(-2) < \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)dx$$

24.α) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \ln x + \dfrac{x-1}{x} - 1 = \ln x - \dfrac{1}{x}$ και

$f''(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f' \nearrow (0, +\infty)$, οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει το πολύ 1 ρίζα. Είναι $f'(1) = -1 < 0$, $f'(2) = \ln 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\ln 2 - 1}{2} = \dfrac{\ln 4 - \ln e}{2} > 0$, δηλαδή $f'(1)f'(2) < 0$ και επειδή η f ′είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho) = 0$. Επειδή η f ′είναι γνησίως αύξουσα, το ρ είναι η μοναδική της ρίζα.

β) Για κάθε $0 < x < \rho$ είναι $f'(x) < f'(\rho) = 0$ και για κάθε $x > \rho$ είναι $f'(x) > f'(\rho) = 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \rho]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\rho, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο ρ.

γ) Για κάθε $1 \le x \le \rho \overset{f \searrow [1,\rho]}{\Leftrightarrow} f(1) \ge f(x) \ge f(\rho) \Rightarrow f(x) \le -1$ και για κάθε

$\rho \le x \le 1 \overset{f \nearrow [\rho,1]}{\Leftrightarrow} f(\rho) \le f(x) \le f(1) = -1$, άρα για κάθε $x \in [1, 2]$ είναι

$f(x) \le -1 \Leftrightarrow (x-1)\ln x - x \le -1 \Leftrightarrow \ln\left(x^{x-1}\right) \le x - 1 \Leftrightarrow x^{x-1} \le e^{x-1}$ και επειδή η

ισότητα ισχύει μόνο για x=1 είναι $\int_1^2 x^{x-1}dx < \int_1^2 e^{x-1}dx = \left[e^{x-1}\right]_1^2 = e-1$.

25.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \dfrac{-3\left(x^2-4x+2\right)}{\left(x^2-4x+6\right)^2}$.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
f΄	–	0	+	0	–		
f	↘		↗		↘		

Στο διπλανό πίνακα βλέπουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,2)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,2]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $1 \le x \le 2$ είναι $f(1) \le f(x) \le f(2) \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le 1$ και επειδή οι ισότητες στη σχέση αυτή ισχύουν μόνο για $x = 1$ και $x = 2$ αντίστοιχα, είναι:

$0 < \int_1^2 f(x)dx < \int_1^2 dx \Leftrightarrow 0 < \int_1^2 f(x)dx < 1$.

β) $f(4-x) = \dfrac{(4-x)^2 - 4 + x}{(4-x)^2 - 4(4-x) + 6} = \dfrac{16 - 8x + x^2 - 4 + x}{\cancel{16} - 8x + x^2 - \cancel{16} + 4x + 6} = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 4x + 6}$,

οπότε $f(x) + f(4-x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 6} + \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 4x + 6} = \dfrac{2x^2 - 8x + 12}{x^2 - 4x + 6} \Leftrightarrow$

$f(x) + f(4-x) = \dfrac{\cancel{2\left(x^2 - 4x + 6\right)}}{\cancel{x^2 - 4x + 6}} = 2$ οπότε και

$\int_0^4 \left[f(x) + f(4-x)\right]dx = \int_0^4 2dx \Leftrightarrow \int_0^4 f(x)dx + \int_0^4 f(4-x)dx = 8$ (1)

Θέτουμε $4 - x = u \Leftrightarrow x = 4 - u$ και $dx = -du$. Για $x = 0$ είναι $u = 4$ και για $x = 4$ είναι $u = 0$. Τότε από τη σχέση (1) έχουμε

$\int_0^4 f(x)dx + \int_4^0 f(u)(-du) = 8 \Leftrightarrow$

$\int_0^4 f(x)dx + \int_0^4 f(u)du = 8 \Leftrightarrow 2\int_0^4 f(x)dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^4 f(x)dx = 4$

γ) Για κάθε $1 \le x \le 2$ είναι $0 \le f(x) \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) - 1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow$

$f(x)\left(f(x) - 1\right) \le 0 \Leftrightarrow f^2(x) - f(x) \le 0 \Leftrightarrow f^2(x) \le f(x)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [1,2]$, είναι: $\int_1^2 f^2(x)dx < \int_1^2 f(x)dx < 1$

26.α) Έστω ότι $f(x) \ne 2$ για κάθε $x \in [0,\pi]$, τότε επειδή η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2$, $x \in [0,\pi]$ είναι συνεχής και διαφορετική του μηδενός διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Αν για κάθε $x\in[0,\pi]$ είναι $g(x)>0\Leftrightarrow f(x)-2>0\Leftrightarrow f(x)>2$ τότε

$\int_0^\pi f(x)dx>\int_0^\pi 2dx\Leftrightarrow 2\pi>2\pi$ άτοπο.

Αν για κάθε $x\in[0,\pi]$ είναι $g(x)<0\Leftrightarrow f(x)-2<0\Leftrightarrow f(x)<2$ τότε

$\int_0^\pi f(x)dx<\int_0^\pi 2dx\Leftrightarrow 2\pi<2\pi$ άτοπο.

Επομένως υπάρχει $x_0\in[1,2]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=2$, δηλαδή το 2 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f

β) Έστω ότι $f(x)\neq\pi\cdot\eta\mu x\Leftrightarrow f(x)-\pi\cdot\eta\mu x\neq 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$. Τότε, επειδή η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\pi\cdot\eta\mu x$ είναι συνεχής στο [0, π], διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Αν $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$ τότε

$\int_0^\pi g(x)dx>0\Leftrightarrow\int_0^\pi\left(f(x)-\pi\eta\mu x\right)dx>0\Leftrightarrow\int_0^\pi f(x)dx+\pi\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi>0\Leftrightarrow$

$2\pi-\pi-\pi>0\Leftrightarrow 0>0$ άτοπο.

Αν $g(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$ τότε και $\int_0^\pi g(x)dx<0\Leftrightarrow$

$\int_0^\pi\left(f(x)-\pi\cdot\eta\mu x\right)dx<0\Leftrightarrow\int_0^\pi f(x)dx+\left[\pi\cdot\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi<0\Leftrightarrow$

$2\pi-\pi-\pi<0\Leftrightarrow 0<0$ άτοπο. Επομένως η εξίσωση

$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=\pi\cdot\eta\mu x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο [0, π].

2ος τρόπος: Έστω F αρχική της f .Τότε $\int_0^\pi f(x)dx=F(\pi)-F(0)=2\pi$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=F(x)+\pi\sigma\upsilon\nu x$.

Η k είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με παράγωγο

$k'(x)=f(x)-\pi\eta\mu x$.Είναι $k(0)=k(\pi)\Leftrightarrow F(0)+\pi=F(\pi)-\pi\Leftrightarrow$

$F(\pi)-F(0)=2\pi$ ισχύει οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιος ώστε

$k'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)-\pi\eta\mu\xi=0\Leftrightarrow f(\xi)=\pi\eta\mu\xi$.

27.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της x_0, στο οποίο παρουσιάζει ακρότατο. Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat οπότε $f'(x_0)=0$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη τότε $f'\searrow\mathbb{R}$. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο: $g'(x)=e^{-2024f(x)}f'(x)$.

Για $x<x_0\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_0)=0\Leftrightarrow e^{-2021f(x)}f'(x)>0\Leftrightarrow$

$g'(x)>0 \Rightarrow g\nearrow(-\infty, x_0]$.

Για $x > x_0 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{-2021\, f(x)} f'(x) < 0 \Leftrightarrow$

$g'(x)<0 \Rightarrow g\searrow[x_0, +\infty)$

Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το $g(x_0)$.Άρα $g(x) \le g(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = x_0$.

Άρα $\int_0^{x_0+1} g(x)\,dx < \int_0^{x_0+1} g(x_0)\,dx = x_0 g(x_0) + g(x_0)$.

β) $\int_0^{x_0+1} x g'(x)dx > (x_0+1)\big(g(x_0+1) - g(x_0)\big) \Leftrightarrow$

$\big[x g(x)\big]_0^{x_0+1} - \int_0^{x_0+1} g(x)dx > (x_0+1)\big(g(x_0+1) - g(x_0)\big) \Leftrightarrow$

$\cancel{(x_0+1) g(x_0+1)} - \int_0^{x_0+1} g(x)dx > \cancel{(x_0+1) g(x_0+1)} - (x_0+1) g(x_0) \Leftrightarrow$

$\int_0^{x_0+1} g(x)dx < x_0 g(x_0) + g(x_0)$ το οποίο ισχύει σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

28.Η f είναι κοίλη στο $[2, x_0]$ άρα $f'\searrow[2, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, 4]$ άρα $f'\nearrow[x_0, 4]$. Επομένως η f' παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = x_0$ το $f'(x_0) = 0$ άρα $f'(x) \ge f'(x_0) = 0$ για κάθε $x \in [2,4]$.

Άρα $\int_{x_0}^4 |f'(x)|\,dx = \int_{x_0}^4 f'(x)dx = f(4) - f(x_0) = f(4) - 1$

Είναι $f\nearrow[x_0, +\infty)$ άρα αν $4 < \lambda \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(4) < f(\lambda) \Leftrightarrow f(4) - 1 < f(\lambda) - 1$ άρα $\int_{x_0}^4 |f'(x)|\,dx + 1 < f(\lambda)$.

29.α) Είναι $\int_{x_0}^3 f'(x)dx = f(3) - f(x_0)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = x_0$ το $f(x_0)$ και ολικό μέγιστο για $x = 3$ το $f(3)$.

Άρα $f(x) \le f(3)$ για κάθε $x \in [0,3]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 3$ άρα $\int_2^3 f(x)dx < \int_2^3 f(3)dx \Leftrightarrow f(3) > 1$ (1). Αντίστοιχα $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in [0,3]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = x_0$ άρα $\int_0^2 f(x)dx > \int_0^2 f(x_0)dx \Leftrightarrow -2 > 2f(x_0) \Leftrightarrow -f(x_0) > 1$ (2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(2) είναι $f(3) - f(x_0) > 2 \Leftrightarrow \int_{x_0}^3 f'(x)dx > 2$.

β) Από γνωστή ιδιότητα απολύτων είναι $-|f'(x)| \le f'(x) \le |f'(x)|$ για κάθε

$x\in[0,3]$. Άρα $-\int_{x_0}^{3}|f'(x)|dx\le\int_{x_0}^{3}f'(x)dx\le\int_{x_0}^{3}|f'(x)|dx\Leftrightarrow$

$\left|\int_{x_0}^{3}f'(x)dx\right|\le\int_{x_0}^{3}|f'(x)|dx$ όμως $\int_{x_0}^{3}f'(x)dx>2>0$ άρα

$\int_{x_0}^{3}|f'(x)|dx\ge\int_{x_0}^{3}f'(x)dx>2$.

30. Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση, τότε:

Είναι $\int_0^1(x-1)^2f(x)dx=\int_0^1x^2f(x)dx-2\int_0^1xf(x)dx+\int_0^1f(x)dx=$

$=\int_0^1x^2f(x)dx-2\int_0^1xf(x)dx+\int_0^1f(x)dx=2\alpha^2-2\left(\alpha^2+\frac{\alpha}{2}\right)+\alpha=$

$=2\alpha^2-2\alpha^2-\alpha+\alpha=0$. Επειδή $f(x)>0$ τότε $(x-1)^2f(x)\ge0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$ άρα $\int_0^1(x-1)^2f(x)dx>0$ άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

$$\gamma\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\delta\ \text{ή}\ \gamma<\int_\alpha^\beta f(x)dx<\delta$$

31.α) Έστω $f(x)=\frac{e^x}{x^x}$, $x\in(0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x^x}\right)'=\left(\frac{e^x}{e^{\ln x^x}}\right)'=\left(e^{x-x\ln x}\right)'=-\ln x\cdot e^{x-x\ln x}$.

Είναι $f'(x)\ge0\Leftrightarrow-\ln x\cdot e^{x-x\ln x}\ge0\Leftrightarrow\ln x\le0\Leftrightarrow0<x\le1$. Για κάθε $x\in(1,2)$ είναι $f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$. Οπότε

$f(2)\le f(x)\le f(1)\Leftrightarrow\frac{e^2}{4}\le\frac{e^x}{x^x}\le e$, άρα και $\int_1^2\frac{e^2}{4}dx<\int_1^2\frac{e^x}{x^x}dx<\int_1^2edx\Leftrightarrow$

$\frac{e^2}{4}<\int_1^2\frac{e^x}{x^x}dx<e$.

β) Έστω $f(x)=e^{x^2}$ είναι $f'(x)=2xe^{x^2}>0$ όταν $x\in(0,2)$ οπότε $f\nearrow$ στο $[0,2]$ και $f(0)\le f(x)\le f(2)\Leftrightarrow1\le e^{x^2}\le e^4$ άρα

$\int_0^2 1dx<\int_0^2e^{x^2}dx<\int_0^2e^4dx\Leftrightarrow2<\int_0^2e^{x^2}dx<2e^4$.

γ) Έστω $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2+4}$, $x\in[-2,2]$. Είναι $f'(x)=\frac{4(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2}<0$ για κάθε $x\in(-2,2)$ οπότε $f\searrow[-2,2]$. Είναι $f(2)\le f(x)\le f(-2)\Leftrightarrow$

$0 \le \dfrac{x^2-4x+4}{x^2+4} \le 2$ άρα $0 < \int_{-2}^{2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2+4}dx < \int_{-2}^{2} 2dx = 8$.

δ) $f(x) = \dfrac{x^4+5}{x^4+2} = \dfrac{x^4+2+3}{x^4+2} = 1 + \dfrac{3}{x^4+2}$ και $f'(x) = \dfrac{-3\cdot 4x^3}{(x^4+2)^2} < 0$ όταν

$x \in (0,2)$ οπότε $f \searrow [0,2]$. Είναι $f(2) \le f(x) \le f(0) \Leftrightarrow \dfrac{21}{18} \le \dfrac{x^4+5}{x^4+2} \le \dfrac{5}{2}$ οπότε

$\int_0^2 \dfrac{21}{18}dx < \int_0^2 \dfrac{x^4+5}{x^4+2}dx < \int_0^2 \dfrac{5}{2}dx \Leftrightarrow \dfrac{7}{3} < \int_0^2 \dfrac{x^4+5}{x^4+2}dx < 5$.

32. Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0,x]$, $x \in (0,2]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (0,x) \subseteq (0,2)$ τέτοιο ώστε:

$f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \Leftrightarrow xf'(\xi) = f(x) - f(0)$. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,2]$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Είναι $0 < \xi < x < 2$ άρα $f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow xf'(\xi) > xf'(x) \Leftrightarrow$

$f(x) - f(0) > xf'(x) \Leftrightarrow$

$f(x) - f(0) - xf'(x) > 0$. Επειδή για $x = 0$ ισχύει ότι $f(0) - f(0) - 0\cdot f'(0) = 0$, είναι $f(x) - f(0) - xf'(x) \ge 0$ για κάθε $x \ge 0$ άρα

$\int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 f(0)dx - \int_0^2 xf'(x)dx > 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^2 f(x)dx - f(0)(2-0) - \left[xf(x)\right]_0^2 + \int_0^2 f(x)dx > 0 \Leftrightarrow$

$2\int_0^2 f(x)dx - 2f(0) - 2f(2) > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx > f(2) + f(0)$

Η εφαπτομένη της C_f στο $(0,f(0))$ έχει εξίσωση

$y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = f'(0)x + f(0)$. Επειδή η f είναι κοίλη, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \le f'(0)x + f(0)$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, είναι

$\int_0^2 f(x)dx < \int_0^2 (f'(0)x + f(0))dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx < f'(0)\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^2 + 2f(0) \Leftrightarrow$

$\int_0^2 f(x)dx < 2f'(0) + 2f(0)$.

33. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,x], 1 < x < 2$ οπότε υπάρχει

$\xi \in (1,x): f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Επειδή $1 < \xi < x < 2$ είναι $\xi < 2$.Όμως $f' \nearrow$ άρα $f'(\xi) < f'(2) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} < f'(2) \Leftrightarrow f(x) < f'(2)(x-1)+f(1)$.Επειδή για $x = 1$ ισχύει ότι $f(1) = f'(2)(1-1)+f(1)$, είναι $f(x) \le f'(2)(x-1)+f(1)$ για κάθε $x \ge 1$ οπότε

$\int_1^2 f(x)dx < \int_1^2 f'(2)(x-1)dx + \int_1^2 f(1)dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx < \dfrac{1}{2}f'(2)+f(1)$. Η εφαπτομένη της C_f στο $(2,f(2))$ έχει εξίσωση $y-f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y = f'(2)(x-2)+f(2)$. Επειδή η f είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \ge f'(2)(x-2)+f(2)$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$, είναι $\int_1^2 f(x)dx > \int_1^2 \left(f'(2)(x-2)+f(2)\right)dx \Leftrightarrow$

$\int_1^2 f(x)dx > f'(2)\left[\dfrac{(x-2)^2}{2}\right]_1^2 + f(2) \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx > f(2) - \dfrac{1}{2}f'(2)$.

34.α) $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 1 \le x+1 \le 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{x+1} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^\nu}{2} \le \dfrac{x^\nu}{x+1} \le x^\nu$ οπότε

$\int_0^1 \dfrac{x^\nu}{2}dx \le \int_0^1 \dfrac{x^\nu}{x+1}dx \le \int_0^1 x^\nu dx \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^1 \le \int_0^1 \dfrac{x^\nu}{x+1}dx \le \left[\dfrac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right]_0^1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\nu+1} \le \int_0^1 \dfrac{x^\nu}{x+1}dx \le \dfrac{1}{\nu+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le (\nu+1)I_\nu \le 1$.

β) $I_{\nu+1} + I_\nu = \int_0^1 \dfrac{x^{\nu+1}}{x+1}dx + \int_0^1 \dfrac{x^\nu}{x+1}dx = \int_0^1 \dfrac{x^{\nu+1}+x^\nu}{x+1}dx = \int_0^1 \dfrac{x^\nu \cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}dx = \dfrac{1}{\nu+1}$.

γ) $\dfrac{1}{2} \le (\nu+1)I_\nu \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2(\nu+1)} \le I_\nu \le \dfrac{1}{\nu+1}$. Είναι $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{1}{\nu+1} = 0$ και

$\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{1}{2(\nu+1)} = 0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{\nu\to+\infty} I_\nu = 0$.

δ) Είναι $I_{\nu+1} + I_\nu = \dfrac{1}{\nu+1}$, οπότε για $\nu = 3$: $I_4 + I_3 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow I_4 = \dfrac{1}{4} - I_3$, για $\nu = 2$: $I_3 + I_2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow I_3 = \dfrac{1}{3} - I_2$, για $\nu = 1$:

$I_2+I_1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow I_2=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{x+1-1}{x+1}dx=\frac{1}{2}-\int_0^1 dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}dx\Leftrightarrow$

$I_2=\frac{1}{2}-1+\left[\ln(x+1)\right]_0^1=-\frac{1}{2}+\ln 2$.

Άρα $I_3=\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}+\ln 2\right)=\frac{5}{6}-\ln 2$ και $I_4=\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{6}-\ln 2\right)=\ln 2-\frac{7}{12}$.

35. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ τότε από ΘΜΕΤ θα έχει μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m οπότε θα έχει σύνολο τιμών το $[m,M]$. Είναι

$m\le f(x)\le M\le 0\Leftrightarrow x^4m\le x^4f(x)\le x^4M$ άρα

$\int_0^1 x^4m\,dx\le\int_0^1 x^4f(x)\,dx\le\int_0^1 x^4M\,dx\Leftrightarrow$

$m\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1\le\int_0^1 x^4f(x)dx\le M\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1\Leftrightarrow\frac{m}{5}\le\int_0^1 x^4f(x)dx\le\frac{M}{5}\Leftrightarrow$

$m\le 5\int_0^1 x^4f(x)dx\le M$ άρα το $5\int_0^1 x^4f(x)dx\in f([\alpha,\beta])$ επομένως υπάρχει

$\xi\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=5\int_0^1 x^4f(x)dx$.

$\int_\alpha^\beta f(x)dx\ge\int_\alpha^\beta g(x)dx$ ή $\int_\alpha^\beta f(x)dx>\int_\alpha^\beta g(x)dx$

36.α) Έστω $f(x)=x^x=e^{x\ln x}$, $x\in[2,3]$.

Είναι $f'(x)=e^{x\ln x}(\ln x+1)>0\Rightarrow f\nearrow[2,3]$. Για κάθε $x\in[2,3]$ είναι

$x<x+1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(x+1)\Leftrightarrow x^x<(x+1)^{x+1}\Rightarrow\int_2^3 x^x dx<\int_2^3(x+1)^{x+1}dx$.

β) Έστω $f(x)=\ln x^4-\ln^3 x=4\ln x-\ln^3 x=\ln x(2-\ln x)(2+\ln x)$.

Είναι $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[1,e]$, άρα $4\ln x-\ln^3 x\ge 0\Leftrightarrow\ln x^4-\ln^3 x\ge 0$

οπότε και $\int_1^e(\ln x^4-\ln^3 x)dx\ge 0\Leftrightarrow\int_1^e\ln x^4dx-\int_1^e\ln^3 xdx\ge 0\Leftrightarrow$

$\int_1^e\ln x^4dx\ge\int_1^e\ln^3 xdx$.

γ) Αρκεί για κάθε $x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$ να είναι $x^x\ge(2-x)^{x-2}\Leftrightarrow\ln x^x\ge\ln(2-x)^{x-2}\Leftrightarrow$

$x\ln x\ge(x-2)\ln(2-x)\Leftrightarrow x\ln x-(x-2)\ln(2-x)\ge 0$.

Έστω $f(x)=x\ln x-(x-2)\ln(2-x)$, $x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$. Είναι

$f'(x)=\ln x+1-\ln(2-x)-1=\ln x-\ln(2-x)$.

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \ln x-\ln(2-x)\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq \ln(2-x)\Leftrightarrow x\geq 2-x\Leftrightarrow 2x\geq 2\Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $1\leq x\leq \frac{3}{2}$ είναι

$f(x)\geq f(1)=0\Leftrightarrow x\ln x-(x-2)\ln(2-x)\geq 0\Leftrightarrow$

$x\ln x\geq (x-2)\ln(2-x)\Leftrightarrow \ln x^x\geq \ln(2-x)^{x-2}\Leftrightarrow x^x\geq (2-x)^{x-2}$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για x = 1, είναι: $\int_1^{3/2}x^x dx>\int_1^{3/2}(2-x)^{x-2}dx$.

37.α) Είναι $1+x^9\geq 1\Leftrightarrow \sqrt[7]{1+x^9}\geq 1\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[7]{1+x^9}}\leq 1$ οπότε $\frac{x^{19}}{\sqrt[7]{1+x^9}}\leq x^{19}$

άρα $\int_0^1\frac{x^{19}}{\sqrt[7]{1+x^9}}dx<\int_0^1 x^{19}dx=\left[\frac{x^{20}}{20}\right]_0^1=\frac{1}{20}$

β) Στο διάστημα $[0,1]$ έχουμε: $\frac{1}{1+x^{60}}\leq 1\overset{\cdot(1+x^{30})>0}{\Leftrightarrow}\frac{1+x^{30}}{1+x^{60}}\leq 1+x^{30}$

οπότε $\int_0^1\frac{1+x^{30}}{1+x^{60}}dx<\int_0^1(1+x^{30})dx=1+\left[\frac{x^{31}}{31}\right]_0^1=\frac{32}{31}\Leftrightarrow \int_0^1\frac{1+x^{30}}{1+x^{60}}dx<\frac{32}{31}$

γ) Στο διάστημα $[1,\alpha]$ έχουμε: $\frac{1+x^{30}}{1+x^{60}}<\frac{1+x^{30}}{x^{60}}=\frac{1}{x^{60}}+\frac{1}{x^{30}}$ άρα και

$\int_1^\alpha\frac{1+x^{30}}{1+x^{60}}dx\leq\int_0^\alpha\left(\frac{1}{x^{60}}+\frac{1}{x^{30}}\right)dx=\left[\frac{x^{-59}}{-59}\right]_1^\alpha+\left[\frac{x^{-29}}{-29}\right]_1^\alpha=$

$=-\frac{1}{59\alpha^{59}}-\frac{1}{29\alpha^{29}}+\frac{1}{59}+\frac{1}{29}<\frac{1}{59}+\frac{1}{29}=\frac{1}{58}+\frac{2}{58}=\frac{3}{58}$.

Συνεπώς $\int_1^\alpha\frac{1+x^{30}}{1+x^{60}}dx<\frac{3}{58}$.

38.α) $f'(x)=\ln x+1-1=\ln x$. Για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$, ενώ για κάθε $0<x<1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(0,1]$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=0$.

β) Είναι $f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow x\ln x\geq x-1\Leftrightarrow \ln x^x\geq x-1\Leftrightarrow x^x\geq e^{x-1}$ οπότε και

$\int_1^2 x^x dx > \int_1^2 e^{x-1} dx = \left[e^{x-1}\right]_1^2 = e-1$.

39.α) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \geq x+1$. Αντικαθιστώντας όπου x το x^2-1 έχουμε $e^{x^2-1} \geq x^2-1+1 \Leftrightarrow e^{x^2-1} \geq x^2$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^{x^2-1} \geq x^2 \Leftrightarrow e^{x^2} e^{x^2-1} \geq x^2 e^{x^2} \Leftrightarrow e^{2x^2-1} \geq x^2 e^{x^2}$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, είναι

$\int_0^1 e^{2x^2-1} dx > \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx$

40.α) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $\ln x \leq x-1$. Αντικαθιστώντας όπου x το x^2+1 έχουμε $\ln\left(x^2+1\right) \leq x^2+1-1 \Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right) \leq x^2$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\ln\left(x^2+1\right) \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 \ln\left(x^2+1\right) \leq x^4$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x^2+1=1 \Leftrightarrow x=0$, έχουμε:

$\int_0^5 x^2 \ln\left(x^2+1\right) dx < \int_0^5 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^5 = 625$.

Αυξημένης δυσκολίας

41. $f'(x)+f(x) > 2xe^{-x} \Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f(x)-2x > 0$ οπότε $\left(e^x f(x)-x^2\right)' > 0$. Έστω $g(x) = e^x f(x)-x^2$ τότε $g'(x) > 0$ άρα η $g \nearrow [0,1]$ και για $0 \leq x \leq 1$ είναι $g(0) \leq g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow$

$0 \leq e^x f(x)-x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq e^x f(x) \leq x^2+1 \Leftrightarrow e^{-x} x^2 \leq f(x) \leq e^{-x}\left(x^2+1\right)$,

οπότε $\int_0^1 e^{-x} x^2 dx < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 e^{-x}\left(x^2+1\right) dx$ (1).

Έστω $I_1 = \int_0^1 e^{-x} x^2 dx = \int_0^1 \left(-e^{-x}\right)' x^2 dx = \left[-e^{-x} x^2\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{-x}\right) \cdot 2x dx =$

$= -\frac{1}{e} + \int_0^1 e^{-x} 2x dx = -\frac{1}{e} + \int_0^1 \left(-e^{-x}\right)' 2x dx = -\frac{1}{e} + \left[-e^{-x} 2x\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{-x}\right) \cdot 2 dx =$

$= -\frac{1}{e} - \frac{2}{e} + 2\int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{3}{e} - 2\left[e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{3}{e} - 2\left(\frac{1}{e}-1\right) = 2-\frac{5}{e}$ και

$I_2 = \int_0^1 e^{-x}\left(x^2+1\right) dx = \int_0^1 \left(-e^{-x}\right)'\left(x^2+1\right) dx =$

$\left[-e^{-x}\left(x^2+1\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{-x}\right) \cdot 2x dx = 1-\frac{2}{e} + \int_0^1 e^{-x} 2x dx =$

$$1-\frac{2}{e}+\int_0^1\left(-e^{-x}\right)'2x\,dx=1-\frac{2}{e}+\left[-e^{-x}2x\right]_0^1-\int_0^1\left(-e^{-x}\right)\cdot 2\,dx=$$

$$=1-\frac{2}{e}-\frac{2}{e}+2\int_0^1 e^{-x}dx=1-\frac{4}{e}-2\left(\frac{1}{e}-1\right)=3-\frac{6}{e}.$$

Άρα η (1) γίνεται $2-\frac{5}{e}<\int_0^1 f(x)\,dx<3-\frac{6}{e}$.

42.α) Έστω $g(x)=2f(x)-(x-1)f(3)-(3-x)f(1),\ x\in[1,3],\ x\in[\alpha,\beta]$.

Είναι $g'(x)=2f'(x)-f(3)+f(1)=2\left(f'(x)-\frac{f(3)-f(1)}{2}\right)$.

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[1,3]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(1,3)$:

$f'(\xi)=\frac{f(3)-f(1)}{2}$ άρα $g'(x)=2\left(f'(x)-f'(\xi)\right)$.

Για $1<x<\xi\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(\xi)\Leftrightarrow g'(x)>0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο [1.ξ], είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για $\xi<x<3\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(\xi)\Leftrightarrow g'(x)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο [ξ,3], είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Η g έχει τοπικά ελάχιστα τα $g(1)=0,\ g(3)=0$, οπότε έχει ελάχιστο το 0 και για κάθε $x\in[1,3]$ ισχύει ότι $g(x)\le 0\Leftrightarrow 2f(x)\ge(x-1)f(3)+(3-x)f(1)$.

β) Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση έχουμε:

$$\int_1^3 2f(x)\,dx>\int_1^3\left[(x-1)f(3)+(3-x)f(1)\right]dx\Leftrightarrow$$

$$2\int_1^3 f(x)\,dx>\left[f(3)\left(\frac{x^2}{2}-x\right)-\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)f(1)\right]_1^3\Leftrightarrow$$

$$2\int_1^3 f(x)\,dx>f(3)\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(9-\frac{9}{2}\right)f(1)-f(3)\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(3-\frac{1}{2}\right)f(1)\Leftrightarrow$$

$$2\int_1^3 f(x)\,dx>f(3)\left(\frac{9}{2}-3-\frac{1}{2}+1\right)+\left(3-\frac{1}{2}-9+\frac{9}{2}\right)f(1)\Leftrightarrow$$

$$2\int_1^3 f(x)\,dx>2f(3)-2f(1)\Leftrightarrow\int_1^3 f(x)\,dx>f(3)-f(1).$$

43.α) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2,x],\ x\in(2,3]$ οπότε υπάρχει

$\xi\in(2,x):f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.Επειδή $\xi<x<3$ και $f'\nearrow[2,3]$ είναι

$f'(\xi)<f'(3)\Leftrightarrow\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}<f'(3)\Leftrightarrow f(x)-f(2)<f'(3)(x-2).$

Αν $x=2$ ισχύει η ισότητα.

Οπότε για κάθε $x\in[2,3]$ είναι $f(x)-f(2)\le f'(3)(x-2)\ (1)$.

β) Η ισότητα ισχύει μόνο για x=2 οπότε έχουμε:

$\int_2^3 f(x)dx-\int_2^3 f(2)dx<f'(3)\int_2^3(x-2)dx\Leftrightarrow$

$\int_2^3 f(x)dx-f(2)(3-2)<f'(3)\dfrac{3^2-2^2}{2}-2f'(3)(3-2)\Leftrightarrow$

$\int_2^3 f(x)dx<f(2)+\dfrac{5}{2}f'(3)-2f'(3)\Leftrightarrow\int_2^3 f(x)dx<f(2)+\dfrac{1}{2}f'(3).$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx>\text{ή}<\int_\gamma^\delta f(x)dx$$

44. Για κάθε $1\le x\le 2\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(1)\ge f(x)\ge f(2)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in[1,2]$, είναι $\int_1^2 f(x)dx>\int_1^2 f(2)dx=f(2)(2-1)=f(2)\ (1)$

Για κάθε $2\le x\le 3\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(2)\ge f(x)\ge f(3)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in[2,3]$, είναι $\int_2^3 f(x)dx<\int_2^3 f(2)dx=f(2)(3-2)=f(2)\ (2)$.

Από $(1),(2)\Rightarrow\int_2^3 f(x)dx<\int_2^3 f(2)dx<\int_1^2 f(x)dx$.

45. $\int_\alpha^\beta f(x)dx<2\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx\Leftrightarrow\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)dx<2\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx\Leftrightarrow$

$\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)dx<\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx$.Είναι $\alpha\le x\le\dfrac{\alpha+\beta}{2}\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(\alpha)\ge f(x)\ge f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και

επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in\left[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$, είναι:

$\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)dx<\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx<\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(\alpha)dx\Leftrightarrow$

$f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)<\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx<f(\alpha)\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)\Leftrightarrow$

$f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\dfrac{\beta-\alpha}{2}<\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx<f(\alpha)\dfrac{\beta-\alpha}{2}\ (1).$

Είναι $\frac{\alpha+\beta}{2} \le x \le \beta \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \ge f(x) \ge f(\beta)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$, είναι: $\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(\beta)dx < \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x)dx <$

$\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx \Leftrightarrow f(\beta)\frac{\beta-\alpha}{2} < \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x)dx < f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{2}$ (2).

Από (1),(2) $\Rightarrow \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x)dx < f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{2} < \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx$.

46. $\int_{-2}^{-1} f(x)dx > \int_{4}^{3} f(x)dx \Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} f(x)dx > -\int_{3}^{4} f(x)dx$

Επειδή γνωρίζουμε την μονοτονία της f στο $[1,4]$ θα μετατρέψουμε το $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$ με άκρα στο διάστημα αυτό. Θέτουμε λοιπόν $u = -x$, τότε είναι $du = -dx$ και για $x = -2$ είναι $u = 2$ ενώ για $x = -1$ είναι $u = 1$. Άρα $\int_{-2}^{-1} f(x)dx = -\int_{2}^{1} f(-u)du = \int_{1}^{2} f(-u)du = -\int_{1}^{2} f(u)du$ αφού f περιττή. Αν τώρα G είναι μία παράγουσα της f θα είναι $\int_{-2}^{-1} f(x)dx =$

$= -\int_{1}^{2} f(x)dx = G(1) - G(2)$ και αντίστοιχα $\int_{3}^{4} f(x)dx = G(4) - G(3)$.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την G σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2]$, $[3,4]$ και προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1,2)$ και $\xi_2 \in (3,4)$ τέτοια ώστε

$G'(\xi_1) = \frac{G(2) - G(1)}{2-1} \Leftrightarrow f(\xi_1) = -(G(1) - G(2)) \Leftrightarrow$

$f(\xi_1) = \int_{1}^{2} f(x)dx \Leftrightarrow f(\xi_1) = -\int_{-2}^{-1} f(x)dx$ και

$G'(\xi_2) = \frac{G(4) - G(3)}{4-3} \Leftrightarrow f(\xi_2) = \int_{3}^{4} f(x)dx$.

Είναι $\xi_1 < \xi_2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\xi_1) < f(\xi_2) \Leftrightarrow -\int_{-2}^{-1} f(x)dx < \int_{3}^{4} f(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_{-2}^{-1} f(x)dx > -\int_{3}^{4} f(x)dx \Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} f(x)dx > \int_{4}^{3} f(x)dx$.

Συνάρτηση σταθερού προσήμου

47. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\left(f(x) + x^2\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2x^2 f(x) + x^4 \ge 0 \Leftrightarrow$

$2x^2 f(x) \ge -f^2(x) - x^4$, οπότε και $2\int_{0}^{2} x^2 f(x)dx \ge \int_{0}^{2} \left(-f^2(x) - x^4\right)dx \Leftrightarrow$

$2\int_0^2 x^2 f(x)dx \geq -\int_0^2 f^2(x)dx - \int_0^2 x^4 dx \Leftrightarrow 2\int_0^2 x^2 f(x)dx \geq -\frac{8}{5} - \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 \Leftrightarrow$

$2\int_0^2 x^2 f(x)dx \geq -\frac{8}{5} - \frac{32}{5} \Leftrightarrow 2\int_0^2 x^2 f(x)dx \geq -8 \Leftrightarrow \int_0^2 x^2 f(x)dx \geq -4$.

48.α) $\int_1^2 f^2(x)dx + 1 \geq 2\int_1^2 f(x)dx \Leftrightarrow \int_1^2 f^2(x)dx - \int_1^2 2f(x)dx \geq -1 \Leftrightarrow$

$\int_1^2 \left(f^2(x) - 2f(x)\right)dx \geq -1 \Leftrightarrow \int_1^2 \left(f^2(x) - 2f(x) + 1 - 1\right)dx \geq -1 \Leftrightarrow$

$\int_1^2 \left(f(x)-1\right)^2 dx - \int_1^2 1dx \geq -1 \Leftrightarrow \int_1^2 \left(f(x)-1\right)^2 dx - (2-1) \geq -1 \Leftrightarrow$

$\int_1^2 \left(f(x)-1\right)^2 dx - 1 \geq -1 \Leftrightarrow \int_1^2 \left(f(x)-1\right)^2 dx \geq 0$ ισχύει αφού $\left(f(x)-1\right)^2 \geq 0$.

β) $\int_1^2 f^2(x)dx \geq 2\int_1^2 xf(x)dx - \frac{7}{3} \Leftrightarrow \int_1^2 f^2(x)dx - 2\int_1^2 xf(x)dx \geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow$

$\int_1^2 \left(f^2(x) - 2xf(x)\right)dx \geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow \int_1^2 \left(f^2(x) - 2xf(x) + x^2 - x^2\right)dx \geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow$

$\int_1^2 \left(f(x)-x\right)^2 dx - \int_1^2 x^2 dx \geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow \int_1^2 \left(f(x)-x\right)^2 dx - \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 \geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow$

$\int_1^2 \left(f(x)-x\right)^2 dx - \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) \geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow \int_1^2 \left(f(x)-x\right)^2 dx - \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) \geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow$

$\int_1^2 \left(f(x)-x\right)^2 dx - \frac{7}{3} \geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow \int_1^2 \left(f(x)-x\right)^2 dx \geq 0$ ισχύει αφού

$\left(f(x)-x\right)^2 \geq 0$.

49.α) $\lambda^2 f(x) + 2\lambda + \frac{1}{f(x)} \geq 0\ (1) \overset{\cdot f(x)>0}{\Rightarrow} \lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\left(\lambda f(x) + 1\right)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Ολοκληρώνοντας στην (1) έχουμε

$\lambda^2 \int_\alpha^\beta f(x)dx + 2\lambda \int_\alpha^\beta dx + \int_\alpha^\beta \frac{1}{f(x)}dx \geq 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 \int_\alpha^\beta f(x)dx + 2(\beta - \alpha)\lambda + \int_\alpha^\beta \frac{1}{f(x)}dx \geq 0\ (2)$. Η σχέση (2) είναι τριώνυμο ως προς λ και αληθεύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οπότε πρέπει $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow$

$4(\beta - \alpha)^2 - 4\int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta \frac{1}{f(x)}dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \int_\alpha^\beta \frac{1}{f(x)}dx \geq (\beta - \alpha)^2$.

50. Έστω ότι η f είναι γνησίως μονότονη .
Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε για κάθε $\alpha < x < \beta$ θα είναι
$f(\alpha) < f(x) < f(\beta)$ οπότε $\int_\alpha^\beta f(\alpha)dx < \int_\alpha^\beta f(x)dx < \int_\alpha^\beta f(\beta)dx \Rightarrow 0 < 0$ άτοπο.

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.
Άρα η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

51. Ισχύει $(g(x)-h(x))^2 \geq 0 \Leftrightarrow g^2(x)-2h(x)g(x)+h^2(x) \geq 0$ οπότε
$\int_3^5 g^2(x)dx - 2\int_3^5 h(x)g(x)dx + \int_3^5 h^2(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow 34 \geq 2\int_3^5 h(x)g(x)dx \Leftrightarrow$
$\int_3^5 h(x)g(x)dx \leq 17$.

52. $\int_2^4 f^2(x)dx + \frac{14}{3} = \int_2^4 xf(x)dx \Leftrightarrow \int_2^4 f^2(x)dx - \int_2^4 xf(x)dx = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow$
$\int_2^4 \left(f^2(x)-xf(x)\right)dx = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \int_2^4 \left(f^2(x)-2\frac{x}{2}f(x)+\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}\right)dx = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow$
$\int_2^4 \left[\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}\right]dx = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \int_2^4 \left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2 dx - \int_2^4 \frac{x^2}{4}dx = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow$
$\int_2^4 \left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2 dx - \left[\frac{x^3}{12}\right]_2^4 = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \int_2^4 \left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2 dx - \left(\frac{64}{12}-\frac{8}{12}\right) = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow$
$\int_2^4 \left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2 dx - \frac{14}{3} = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \int_2^4 \left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2 dx = 0$. Επειδή
$\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in [2,4]$ θα είναι $\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$
$f(x)-\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in [2,4]$.(Αν υπήρχε $x_0 \in [2,4]$ τέτοιος ώστε
$\left(f(x_0)-\frac{x_0}{2}\right)^2 > 0$ τότε $\int_2^4 \left(f(x)-\frac{x}{2}\right)^2 dx > 0$ άτοπο).

53. $\int_0^6 \left(f^2(x)-2x^2f'(x)\right)dx = -72\left(f(6)+4\right) \Leftrightarrow$
$\int_0^6 f^2(x)dx - 2\int_0^6 x^2f'(x)dx = -72f(6)-288 \Leftrightarrow$

$\int_0^6 f^2(x)dx - 2\left[x^2 f(x)\right]_0^6 + 2\int_0^6 2xf(x)dx = -72f(6) - 288 \Leftrightarrow$

$\int_0^6 \left(f^2(x) + 4xf(x)\right)dx - \cancel{72f(6)} = -\cancel{72f(6)} - 288 \Leftrightarrow$

$\int_0^6 \left(f^2(x) + 4xf(x) + 4x^2\right)dx = \int_0^6 4x^2 dx - 288 \Leftrightarrow$

$\int_0^6 \left(f^2(x) + 4xf(x) + 4x^2\right)dx = \left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^6 - 288 \Leftrightarrow \int_0^6 \left(f(x) + 2x\right)^2 dx = 0$ (1).

Επειδή για κάθε $x \in [0,6]$ είναι $\left(f(x) + 2x\right)^2 \geq 0$, αν υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή του $x \in [0,6]$ για την οποία $\left(f(x) + 2x\right)^2 > 0$, τότε $\int_0^6 \left(f(x) + 2x\right)^2 dx > 0$ που είναι άτοπο.

Άρα για κάθε $x \in [0,6]$ είναι $\left(f(x) + 2x\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -2x$.

54.α) Είναι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$ οπότε

$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xF'(x)dx = \left[xF(x)\right]_0^1 - \int_0^1 F(x)dx =$

$F(1) - \int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 F(1)dx - \int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 \left(F(1) - F(x)\right)dx$.

β) Επειδή από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\int_x^1 f(t)dt \geq 1 - x^2 \Leftrightarrow$

$\left[F(t)\right]_x^1 \geq 1 - x^2 \Leftrightarrow F(1) - F(x) \geq 1 - x^2$ οπότε

$\int_0^1 \left(F(1) - F(x)\right)dx \geq \int_0^1 \left(1 - x^2\right)dx = \left[x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ και με βάση το (α) ερώτημα είναι $\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{2}{3}$.

γ) Είναι $\left(f(x) - x\right)^2 \geq 0$ οπότε $f^2(x) - 2xf(x) + x^2 \geq 0$ άρα

$\int_0^1 f^2(x)dx \geq 2\int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 x^2 dx \geq 2\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)dx \geq 1$.

55.α) Για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ισχύει $\left[\lambda f(x) + g(x)\right]^2 \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x)g(x) + g^2(x) \geq 0$ οπότε

$\lambda^2 \int_\alpha^\beta f^2(x)dx + 2\lambda \int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx + \int_\alpha^\beta g^2(x)dx \geq 0$. Η παραπάνω σχέση αποτελεί τριώνυμο ως προς λ που αληθεύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και αφού

$\int_\alpha^\beta f^2(x)dx \geq 0$ πρέπει $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow$

$4\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\int_\alpha^\beta g^2(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow$

$\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_\alpha^\beta f^2(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g^2(x)dx$.

β) Από το (α) ερώτημα για $f(x) \to \sqrt{f(x)}$, $g(x) \to \sqrt{g(x)}$ έχουμε

$\int_\alpha^\beta \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 dx \int_\alpha^\beta \left(\sqrt{g(x)}\right)^2 dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g(x)dx \geq \left(\int_\alpha^\beta \sqrt{f(x)g(x)}dx\right)^2 \Leftrightarrow$

$\int_\alpha^\beta \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 dx \int_\alpha^\beta \left(\sqrt{g(x)}\right)^2 dx \geq \left(\int_\alpha^\beta 1dx\right)^2 = (\beta-\alpha)^2$.

$(f(x)g(x) \geq 1$ οπότε $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx \geq 1)$

56.α) Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(2) < f(1)$ τότε $\int_{f(1)}^{f(2)} f(x)dx < 0$ άτοπο. Αν $f(2) = f(1)$, τότε $\int_{f(1)}^{f(2)} f(x)dx = 0$ άτοπο. Άρα $f(2) > f(1)$ (1).

Όμοια $f(3) < f(1)$ (2). Από τις (1),(2) $\Rightarrow f(3) < f(1) < f(2)$.

2ος τρόπος: Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f. Τότε $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η F είναι γνησίως αύξουσα. Είναι $\int_{f(1)}^{f(2)} f(x)dx > 0 \Leftrightarrow$

$F(f(2)) - F(f(1)) > 0 \Leftrightarrow F(f(2)) > F(f(1)) \overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow} f(2) > f(1)$ (1),

$\int_{f(1)}^{f(3)} f(x)dx < 0 \Leftrightarrow F(f(3)) - F(f(1)) < 0 \Leftrightarrow F(f(3)) < F(f(1)) \overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$f(3) < f(1)$ (2). Από τις (1),(2) $\Rightarrow f(3) < f(1) < f(2)$.

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,3]$ θα παρουσιάζει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Επειδή $f(3) < f(1) < f(2)$ η f δεν έχει μέγιστο στα άκρα 1 και 3 του διαστήματος $[1,3]$, οπότε θα παρουσιάζει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο ξ του διαστήματος. Η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα $f'(\xi) = 0$, επομένως η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Έστω $g(x) = f(x) - f(x+1)$, $x \in [1,2]$. Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι

$g(1) = f(1) - f(2) < 0$, $g(2) = f(2) - f(3) > 0$, δηλαδή $g(1)g(2) < 0$, οπότε

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = f(x_0 + 1)$.

57.α) Αν η ισότητα στη σχέση $f(x) \geq 3x^2$ δεν ισχύει για κάθε $x \in [0,1]$, τότε $\int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 3x^2 dx = \left[x^3\right]_0^1 = 1$ που είναι άτοπο, άρα $f(x) = 3x^2$ για κάθε $x \in [0,1]$.

β) $\int_0^1 f^2(x)dx + \frac{e^2}{2} = 2\int_0^1 e^x f(x)dx + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\int_0^1 f^2(x)dx - \int_0^1 2e^x f(x)dx + \frac{e^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^1 f^2(x)dx - \int_0^1 2e^x f(x)dx + \int_0^1 e^{2x}dx - \int_0^1 e^{2x}dx + \frac{e^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^1 \left[f^2(x) - 2e^x f(x) + e^{2x}\right]dx - \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 + \frac{e^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^1 \left[f(x) - e^x\right]^2 dx - \cancel{\frac{e^2 - 1}{2}} + \cancel{\frac{e^2 - 1}{2}} = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f(x) - e^x\right]^2 dx = 0$

Είναι $\left[f(x) - e^x\right]^2 \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, οπότε αν η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [0,1]$, τότε $\int_0^1 \left[f(x) - e^x\right]^2 dx > 0$ που είναι άτοπο, άρα $\left[f(x) - e^x\right]^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^x$ για κάθε $x \in [0,1]$.

58.Για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$ θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ οπότε $dx = f'(u)du$. Για $x = 0$ είναι $f(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = f(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} u = 0$ ενώ για $x = 1$ είναι $f(u) = 1 \Leftrightarrow f(u) = f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} u = 1$ άρα

$\int_0^1 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 uf'(u)du = \int_0^1 xf'(x)dx$.

Είναι $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f^{-1}(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf'(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_0^1 \left[f(x) - xf'(x)\right]dx = 0$. Έστω η συνάρτηση $k(x) = f(x) - xf'(x)$, $x \in [0,1]$, η οποία είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Αν $k(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ τότε η k διατηρεί πρόσημο άρα

$k(x) > 0 \Rightarrow \int_0^\beta k(x)dx > 0$ άτοπο ή $k(x) < 0 \Rightarrow \int_0^\beta k(x)dx < 0$ άτοπο.

Επομένως υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $k(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0$.
Αν $x_0 = 1$ τότε $f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ άτοπο.
Άρα τελικά υπάρχει $x_0 \in [0,1)$ τέτοιο ώστε $k(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 f'(x_0)$.

Ολοκληρώματα με ίσα άκρα

59. Είναι $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, άρα $f^2(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Αν $f(\beta) > f(\alpha)$ τότε $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^2(x)dx > 0$ που είναι άτοπο, ενώ αν $f(\beta) < f(\alpha)$ τότε $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^2(x)dx < 0$ που είναι επίσης άτοπο. Άρα $f(\beta) = f(\alpha)$. Επειδή η f είναι κοίλη, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$. Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[\alpha,\beta]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Για κάθε $\alpha < x < \xi \overset{f' \searrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \nearrow [\alpha,\xi]$ και για κάθε $\xi < x < \beta \overset{f' \searrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \searrow [\xi,\beta]$. Άρα $f(x) \geq f(\alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha,\xi]$ και $f(x) \geq f(\beta) = f(\alpha)$ για κάθε $x \in [\xi,\beta]$, οπότε τελικά $f(x) \geq f(\alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

60.α) Έστω $g(x) = f(x) - e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = f'(x) - e^x > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$
Για κάθε $x \geq 0 \overset{g \nearrow}{\Leftrightarrow} g(x) \geq g(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \geq e^x$.
β) Είναι $f(x) \geq e^x > 0$ για κάθε $x \geq 0$, οπότε: αν $f(\beta) > f(\alpha)$ τότε $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f(x)dx > 0$, ενώ αν $f(\beta) < f(\alpha)$ τότε $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f(x)dx < 0$.
Αν $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε προφανώς $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f(x)dx = 0$. Όμως τότε εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[\alpha,\beta]$ ή $[\beta,\alpha]$και υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ή (β,α) τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Είναι $f'(\xi) > e^{\xi} \Leftrightarrow 0 > e^{\xi}$ που είναι άτοπο. Τελικά $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f(x)dx \neq 0$ για κάθε $\alpha,\beta \in [0,+\infty)$.

γ) $\int_0^1 (x-1)e^{-t} f(t)dt = 1 - (x-2)f(x) \Leftrightarrow (x-1)\int_0^1 e^{-t} f(t)dt - 1 + (x-2)f(x) = 0$
Έστω $h(x) = (x-1)\int_0^1 e^{-t} f(t)dt - 1 + (x-2)f(x)$, $x \in [1,2]$. Η h είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(1) = -1 - f(1)$ και

$h(2)=\int_0^1 e^{-t}f(t)dt-1$. Επειδή $f(x)\geq e^x$ για κάθε $x\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, έχουμε: $f(1)>e \Leftrightarrow -f(1)<-e \Leftrightarrow -f(1)-1<-e-1 \Leftrightarrow$

$h(1)<-e-1<0$.Επίσης $f(x)\geq e^x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x}\geq 1 \Leftrightarrow e^{-x}f(x)\geq 1 \Rightarrow$

$\int_0^1 e^{-x}f(x)dx>1 \Leftrightarrow h(2)>0$. Είναι $h(1)h(2)<0$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow$

$\int_0^1 (x-1)e^{-t}f(t)dt=1-(x-2)f(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,2)$.

61.α) $\ln f(x)\leq \alpha x-\alpha \Leftrightarrow \ln f(x)-\alpha x+\alpha\leq 0$ (1)

Έστω $g(x)=\ln f(x)-\alpha x+\alpha,\ x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$g(1)=\ln f(1)-\alpha+\alpha=0$,οπότε η (1) γίνεται: $g(x)\leq g(1)$, δηλαδή η g παρουσιάζει μέγιστο στο $x=1$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-\alpha$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat οπότε

$g'(1)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(1)}{f(1)}-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=1$.

β) Είναι $\ln f(x)\leq x-1 \Leftrightarrow f(x)\leq e^{x-1} \Leftrightarrow ef(x)\leq e^x$, οπότε

$\int_0^1 ef(x)dx\leq \int_0^1 e^x dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$.

γ) Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε: αν $f(2)>1$ τότε $\int_1^{f(2)} f(x)dx>0$ άτοπο, ενώ αν $f(2)<1$ τότε $\int_1^{f(2)} f(x)dx<0$ επίσης άτοπο, άρα $f(2)=1$.

Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[1,2]$, οπότε υπάρχει $x_1\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=0$. Για την f' εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[1,x_1]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(1,x_1)\subseteq(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=\frac{f'(x_1)-f'(1)}{x_1-1}=-\frac{1}{x_1-1}$.

Είναι $f''(\xi)<-1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1-1}<-1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1-1}>1 \overset{x_1\in(1,2)}{\Leftrightarrow} x_1-1<1 \Leftrightarrow x_1<2$ που ισχύει.

Σύνθετες ασκήσεις

62.α) Η εφαπτομένη στο $M(\xi,f(\xi))$ είναι $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$ και για να

διέρχεται από το $(0,0)$ πρέπει $f(\xi)=\xi f'(\xi)$ (1).

Εφαρμόζοντας Rolle για την $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ στο $[2,6]$ προκύπτει η σχέση (1).

β) Είναι $\int_0^{\xi} xf''(x)dx=\left[xf'(x)\right]_0^{\xi}-\int_0^{\xi}f'(x)dx=$

$\xi f'(\xi)-\left[f(x)\right]_0^{\xi}\overset{(1)}{=}f(\xi)-\left(f(\xi)-f(0)\right)=f(0)$.

γ) i. Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi_1\in(2,x)$ και $\xi_2\in(x,6)$, $x\in(2,6)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{f(x)-4}{x-2}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(6)-f(x)}{6-x}=\dfrac{12-f(x)}{6-x}$

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε επειδή

$\xi_1<\xi_2$ είναι $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow\dfrac{f(x)-4}{x-2}<\dfrac{12-f(x)}{6-x}\Leftrightarrow f(x)<2x$. Επειδή επιπλέον $f(2)=4$ και $f(6)=12$, είναι $f(x)\le 2x$ για κάθε $x\in[2,6]$.

ii. Η σχέση του προηγούμενου ερωτήματος ισχύει μόνο για $x=2,4$ οπότε

$\int_3^5 f(x)dx<\int_3^5 2xdx=\left[x^2\right]_3^5=16$.

63.α) $f\cup\mathbb{R}\Leftrightarrow f'\nearrow\mathbb{R}$. Επειδή η f έχει κρίσιμο σημείο στο 0 και είναι παραγωγίσιμη στο 0, ισχύει ότι $f'(0)=0=f(0)$. Για κάθε

$x<0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(0)=0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$f'(x)>f'(0)=0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο 0, άρα $f(x)\ge f(0)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x=-1$ έχει εξίσωση:

$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y=f'(-1)x+f'(-1)+f(-1)$ και η εφαπτομένη της C_f στο $x=1$ έχει εξίσωση: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow$

$y=f'(1)x-f'(1)+f(1)$. Επειδή η f είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα

$f(x)\ge f'(-1)x+f'(-1)+f(-1)$ και $f(x)\ge f'(1)x-f'(1)+f(1)$. Είναι

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f'(-1)x+f'(-1)+f(-1)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}f'(-1)x=+\infty\ \left(f'(-1)<0\right)$ άρα

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(1)x-f'(1)+f(1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(1)x=+\infty\ \left(f'(1)>0\right)$ άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο

$A_1=(-\infty,0)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1)=(0,+\infty)$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=(0,+\infty)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2)=(0,+\infty)$.

Αν $k<0$ τότε το k δεν βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f, οπότε η εξίσωση $f(x)=k$ είναι αδύνατη.

Αν $k=0$, τότε $k\notin f(A_1),f(A_2)$, οπότε η εξίσωση δεν έχει λύση στα A_1,A_2 .

Επειδή $f(0)=0$, η εξίσωση $f(x)=k$ έχει μοναδική λύση τη $x=0$ στη περίπτωση αυτή. Τέλος αν $k>0$ ότε $k\in f(A_1),f(A_2)$, οπότε η εξίσωση έχει μια λύση σε καθένα από τα διαστήματα A_1,A_2.

γ) Είναι $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ για την f, υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)}{x}$.

Είναι $0<\xi<x\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}<f'(x)\Leftrightarrow 0<xf'(x)-f(x)\Leftrightarrow$

$g'(x)>0$ άρα $g\nearrow(0,+\infty)$.

δ) Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)<xf'(x)\Rightarrow$

$\int_\alpha^\beta f(x)dx<\int_\alpha^\beta xf'(x)dx=\left[xf(x)\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f(x)dx\Leftrightarrow 2\int_\alpha^\beta f(x)dx<\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)$

ε) Είναι $\alpha\le x\le\alpha+1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(\alpha)\le f(x)\le f(\alpha+1)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in[\alpha,\alpha+1]$, έχουμε: $\int_\alpha^{\alpha+1}f(\alpha)dx<\int_\alpha^{\alpha+1}f(x)dx<\int_\alpha^{\alpha+1}f(\alpha+1)dx\Leftrightarrow$

$f(\alpha)(\alpha+1-\alpha)<\int_\alpha^{\alpha+1}f(x)dx<f(\alpha+1)(\alpha+1-\alpha)\Leftrightarrow$

$f(\alpha)<\int_\alpha^{\alpha+1}f(x)dx<f(\alpha+1)$ (1)

Είναι $\alpha+1\le x\le\alpha+2\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(\alpha+1)\le f(x)\le f(\alpha+2)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in[\alpha+1,\alpha+2]$, έχουμε:

$\int_{\alpha+1}^{\alpha+2}f(\alpha+1)dx<\int_{\alpha+1}^{\alpha+2}f(x)dx<\int_{\alpha+1}^{\alpha+2}f(\alpha+2)dx\Leftrightarrow$

$f(\alpha+1)(\alpha+2-\alpha-1)<\int_{\alpha+1}^{\alpha+2}f(x)dx<f(\alpha+2)(\alpha+2-\alpha-1)\Leftrightarrow$

$f(\alpha+1)<\int_{\alpha+1}^{\alpha+2}f(x)dx<f(\alpha+2)$ (2). Από (1),(2) $\Rightarrow\int_\alpha^{\alpha+1}f(x)dx<\int_{\alpha+1}^{\alpha+2}f(x)dx$

64.α) Θέτουμε $\frac{x}{2}=u\Leftrightarrow x=2u$ και $dx=2du$. Για $x=0$ είναι $u=0$, ενώ για $x=2$ είναι $u=1$.Είναι: $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\int_0^1 f(u)du=0$.

β) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{x}{2},x\right]$, $x>0$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{x}{2},x\right)$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $\xi\in\left(\frac{x}{2},x\right)$ τέτοιο ώστε:

$f'(\xi)=\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x-\frac{x}{2}}=\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$. Όμως $f'(\xi)\geq 2$, οπότε:

$\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\geq 2\Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\geq x$ για κάθε $x>0$. Επειδή η σχέση αληθεύει και για $x=0$, ισχύει ότι: $f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\geq x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

γ) Είναι $\int_0^2\left(f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx\geq\int_0^2 xdx\Leftrightarrow$

$\int_0^2 f(x)dx-\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx\geq\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=2\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx\geq 2$.

δ) Έστω F αρχική της f. Είναι $\int_0^1 f(x)dx=0\Leftrightarrow F(1)-F(0)=0\Leftrightarrow F(1)=F(0)$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος.Rolle για την F, οπότε υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $F'(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=0$. Επειδή $f'(x)\geq 2>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$ το x_0 είναι μοναδικό. Για κάθε $0<x<x_0\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)<f(x_0)=0$ και για κάθε $x>x_0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(x_0)=0$.

ε) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f, οπότε υπάρχει $\xi_1\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$. Είναι

$f'(\xi_1)\geq 2\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(0)}{x}\geq 2\Leftrightarrow f(x)\geq 2x+f(0)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+f(0))=+\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

στ) Η εφαπτομένη της F στο $x=1$ είναι η $y-F(1)=F'(1)x \Leftrightarrow y=f(1)x+F(1)$. Είναι $F''(x)=f'(x)>0 \Rightarrow F\cup[0,+\infty)$ οπότε βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $F(x)\geq f(1)x+F(1)$.Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(1)x+F(1)\right)=+\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.

65.α) Για την f εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο $[0,x]$ με $x\in(0,2]$ οπότε υπάρχει $\xi_1\in(0,x): f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \Leftrightarrow xf'(\xi_1)=f(x)-f(0)$ (1). Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0,2]$ η f' είναι $\searrow$ οπότε $0<\xi_1<x<2$ άρα

$f'(\xi_1)>f'(x) \Leftrightarrow xf'(\xi_1)>xf'(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x)-f(0)>xf'(x)$ οπότε

$\int_0^2\left(f(x)-f(0)\right)dx>\int_0^2 xf'(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_0^2 f(x)dx-2f(0)>\left[xf(x)\right]_0^2-\int_0^2 f(x)dx \Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)dx>2f(0)+2f(2) \Leftrightarrow$

$\int_0^2 f(x)dx>f(0)+f(2)$.

β) i. Για $x<0$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο $[x,0]$ οπότε υπάρχει

$\xi_2\in(x,0): f'(\xi_2)=\dfrac{f(0)-f(x)}{-x}$ όμως $f'(\xi_2)<-1 \Leftrightarrow \dfrac{f(0)-f(x)}{-x}<-1 \Leftrightarrow$

$f(0)-f(x)<x \Leftrightarrow f(x)>f(0)-x$. Όμως

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(0)-x\right]=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

ii. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για f στο $[x,x+1], x\in\mathbb{R}$ οπότε υπάρχει

$\xi\in(x,x+1): f'(\xi)=f(x+1)-f(x)<-1 \Leftrightarrow f(x+1)<f(x)-1$ (2).

iii. Ολοκληρώνοντας την (2) έχουμε:

$\int_0^1 f(x+1)dx<\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 1dx \underset{\substack{x=0\to u=1,\\ x=1\to u=2,}}{\overset{x+1=u}{\Leftrightarrow}}$

$\int_1^2 f(u)du<\int_0^1 f(x)dx-1 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx<-1$.

iv. Για κάθε $1\leq x\leq 2 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(1)\geq f(x)\geq f(2)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in[1,2]$, είναι $\int_1^2 f(2)dx<\int_1^2 f(x)dx<\int_1^2 f(1)dx \Leftrightarrow$

$f(2)<\int_1^2 f(x)dx<f(1)$ (3). Από τη σχέση $f(x+1)<f(x)-1$ για $x=0$ προκύπτει: $f(1)<f(0)-1$ και για $x=2$

$f(3)<f(2)-1 \Leftrightarrow f(3)+1<f(2)$, οπότε η (3) γίνεται:

$f(3)+1<f(2)<\int_1^2 f(x)dx<f(1)<f(0)-1$.

66.α) Είναι $\left(e^x f(x)+e^x f'(x)\right)+f'(x)=-\eta\mu x \Leftrightarrow \left(e^x f(x)+f(x)\right)'=(\sigma\upsilon\nu x)'$

άρα $\left(e^x+1\right)f(x)=\sigma\upsilon\nu x+c$. Για $x=0$ προκύπτει $c=0$, οπότε $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x+1}$.

β) $f(x)+f(-x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x+1}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu(-x)}{e^{-x}+1}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x+1}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{1}{e^x}+1}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x+1}+\dfrac{e^x\sigma\upsilon\nu x}{e^x+1}=$

$\dfrac{\sigma\upsilon\nu x\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=\sigma\upsilon\nu x$.

γ) Είναι $\dfrac{-1}{e^x+1}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x+1}\le\dfrac{1}{e^x+1}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x+1}=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, άρα ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

δ) Από τη σχέση $f(x)+f(-x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχουμε

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x\,dx$ (1). Θέτουμε $-x=u$ οπότε

$dx=-du$, για $x=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow u=-\dfrac{\pi}{2}$ ενώ για $x=-\dfrac{\pi}{2}$ είναι $u=\dfrac{\pi}{2}$ άρα

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}f(u)(-du)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(u)du$.Επομένως η (1) γίνεται

$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\left[\eta\mu x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\Leftrightarrow\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=1$.

ε) Είναι $f'(x)=-\dfrac{\eta\mu x\left(1+e^x\right)+e^x\sigma\upsilon\nu x}{\left(1+e^x\right)^2}<0$ όταν $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ άρα η $f\searrow$ στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Επομένως για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ είναι

$f(0)\le f(x)\le f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow 0\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$ άρα

$0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}dx\Leftrightarrow 0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\le\dfrac{\pi}{4}$.

67.α. i. Έστω $\frac{f(x)-x}{x^2}=g(x),\ x\neq 0$ με $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1821$. Τότε $f(x)-x=x^2g(x)\Leftrightarrow f(x)=x^2g(x)+x$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και στο $x_0=0$, άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2g(x)+x\right)=0$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2g(x)+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(xg(x)+1\right)=1$ άρα $f'(0)=1$.

β. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+\lambda f^2(x)}{2x^2+f^2(x)}=3\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\lambda\frac{f^2(x)}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{f^2(x)}{x^2}}=3\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\lambda\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}{2+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}=3\Leftrightarrow$

$\frac{1+\lambda\left[f'(0)\right]^2}{2+\left[f'(0)\right]^2}=3\Leftrightarrow\frac{1+\lambda}{3}=3\Leftrightarrow 1+\lambda=9\Leftrightarrow\lambda=8$.

γ. i. Έστω $g(x)=e^{-x}f(x),\ x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)>0\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$

Για κάθε $x>0$ είναι $g(x)>g(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>0\overset{x>0}{\Rightarrow}xf(x)>0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $g(x)<g(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)<0\Leftrightarrow f(x)<0\overset{x<0}{\Rightarrow}xf(x)>0$.

Άρα $xf(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$.

ii. Επειδή οι συναρτήσεις f',f είναι συνεχείς στο $[0,1]$, ισχύει ότι:

$f'(x)>f(x)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)>0$ άρα $\int_0^1\left(f'(x)-f(x)\right)>0\Leftrightarrow$

$\int_0^1 f'(x)dx>\int_0^1 f(x)dx\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx<\left[f(x)\right]_0^1=f(1)-f(0)=f(1)$.

68.α) $f'(x)=\frac{g'(x)-g(x)}{e^x}=e^{-x}g'(x)-e^{-x}g(x)\Leftrightarrow f'(x)=\left(g(x)e^{-x}\right)'\Leftrightarrow$

$f(x)=g(x)e^{-x}+c$. Για $x=1$ είναι $f(1)=\frac{ef(1)}{e}+c\Rightarrow c=0$, οπότε

$f(x)=g(x)e^{-x},\ x\geq 0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=-1$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{xg(x)-2x^2e^x}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{xe^x f(x)-2x^2e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x\cdot x\left(f(x)-2x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{f(x)-2x}\right]=-2.$$

γ) i. Επειδή $g(x)>g'(x)\Leftrightarrow e^x f(x)>e^x f'(x)+e^x f(x)\Leftrightarrow e^x f'(x)<0\Leftrightarrow$

$f'(x)<0$ οπότε $xf'(x)\le 0$ άρα $\int_0^1 xf'(x)dx\le 0\Leftrightarrow$

$\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx\le 0\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx\ge f(1).$

ii. $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[0,+\infty)$, οπότε $\alpha<\beta\Leftrightarrow f(\alpha)>f(\beta)\Leftrightarrow$

$g(\alpha)e^{-\alpha}>g(\beta)e^{-\beta}\Leftrightarrow\frac{g(\alpha)}{e^\alpha}>\frac{g(\beta)}{e^\beta}\Leftrightarrow g(\alpha)e^\beta>g(\beta)e^\alpha.$

iii. . Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την g στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\beta)$

τέτοιο, ώστε $g'(\xi_1)=\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Όμως $g(\alpha)e^\beta>g(\beta)e^\alpha\Leftrightarrow g(\beta)<g(\alpha)\frac{e^\beta}{e^\alpha}$,

άρα $g'(\xi_1)<\frac{g(\alpha)\frac{e^\beta}{e^\alpha}-g(\alpha)}{\beta-\alpha}=g(\alpha)\frac{\frac{e^\beta-e^\alpha}{e^\alpha}}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow g'(\xi_1)<\frac{g(\alpha)}{e^\alpha}\cdot\frac{e^\beta-e^\alpha}{\beta-\alpha}$ (1)

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την $\varphi(x)=e^x$ στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει

$\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow e^{\xi_2}=\frac{e^\beta-e^\alpha}{\beta-\alpha}$.

Τότε η (1) γίνεται: $g'(\xi_1)<\frac{g(\alpha)}{e^\alpha}e^{\xi_2}\Leftrightarrow g'(\xi_1)<g(\alpha)e^{\xi_2-\alpha}$.

69.α) Είναι $f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow[2,3]$ άρα για $x\le 3$ είναι $f'(x)\ge f'(3)=1>0$

οπότε $f'(x)>0$ άρα $f\nearrow[2,3]$ με σύνολο τιμών $f(A)=\left[f(2),f(3)\right]=[0,3]$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $(3,f(3))$ είναι $y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow$

$y-3=1(x-3)\Leftrightarrow y=x$.

γ) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2,x]$, υπάρχει $\xi_1\in(2,x)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$. Από το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,3]$, υπάρχει $\xi_2\in(x,3)$

τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\frac{f(3)-f(x)}{3-x}$.

Είναι $\xi_1<\xi_2\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(2)}{x-2}>\frac{f(3)-f(x)}{3-x}$.

δ) Αν $x\in(2,3)$ τότε $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}>\frac{f(3)-f(x)}{3-x}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x-2}>\frac{3-f(x)}{3-x}\Leftrightarrow$
$3f(x)-xf(x)>3x-6-xf(x)+2f(x)\Leftrightarrow f(x)>3(x-2)$. Επιπλέον για $x=2$ και $x=3$ είναι $f(x)=3(x-2)$. Οπότε για κάθε $x\in[2,3]$ θα είναι $f(x)\geq 3(x-2)$.

ε) Είναι $f(x)-3(x-2)\geq 0$ και η $f(x)-3(x-2)$ συνεχής στο $[2,3]$ οπότε $\int_2^3[f(x)-3(x-2)]dx\geq 0\Leftrightarrow\int_2^3 f(x)dx\geq\int_2^3 3(x-2)dx=\frac{3}{2}$.

70.α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$, λόγω του θεωρήματος Μέγιστης-Ελάχιστης τιμής, παρουσιάζει μέγιστο στο διάστημα αυτό.

β) Έστω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος $[0,\pi]$. Η f είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat, άρα $f'(x_0)=0$.Είναι $f(x_0)<\eta\mu x_0 f'(x_0)=0$, οπότε για κάθε $x\in[0,\pi]$ είναι $f(x)\leq f(x_0)<0$.Αν η f έχει μέγιστο στο 0 ή στο π, τότε επειδή $f(0)<\eta\mu 0\cdot f'(0)=0$, $f(\pi)<\eta\mu\pi\cdot f'(\pi)=0$, είναι $f(x)\leq f(0)<0$ και $f(x)\leq f(\pi)<0$. Οπότε σε κάθε περίπτωση είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$.

γ) Είναι $f(x)<\eta\mu x f'(x)$ οπότε $\int_0^{\pi/2}f(x)dx<\int_0^{\pi/2}\eta\mu x f'(x)dx\Leftrightarrow$
$\int_0^{\pi/2}f(x)dx<[\eta\mu x f(x)]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu x f(x)dx\Leftrightarrow$
$\int_0^{\pi/2}f(x)dx+\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu x f(x)dx<f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\int_0^{\pi/2}(1+\sigma\upsilon\nu x)f(x)dx<f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

δ) Επειδή $f(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$, η σχέση $f(x)<\eta\mu x f'(x)$ γίνεται:
$2f(x)f(x)>2\eta\mu x f(x)f'(x)\Leftrightarrow 2f^2(x)>\eta\mu x\left(f^2(x)\right)'$ οπότε
$\int_0^{\pi/2}2f^2(x)dx>\int_0^{\pi/2}\eta\mu x\left(f^2(x)\right)'dx\Leftrightarrow$
$\int_0^{\pi/2}2f^2(x)dx>[\eta\mu x f^2(x)]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu x f^2(x)dx\Leftrightarrow$
$\int_0^{\pi/2}2f^2(x)dx+\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu x f^2(x)dx>f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow$
$\int_0^{\pi/2}[2f^2(x)+\sigma\upsilon\nu x f^2(x)]dx>f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\int_0^{\pi/2}(2+\sigma\upsilon\nu x)f^2(x)dx>f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

ε) $f(x)<\eta\mu x f'(x) \overset{f(x)<0,\eta\mu x>0}{\underset{x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow}} \frac{1}{\eta\mu x}>\frac{f'(x)}{f(x)}$ άρα $\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{f'(x)}{f(x)}dx<\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{\eta\mu x}dx$ (1)

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\eta\mu x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx \overset{\substack{\sigma\upsilon\nu x=u\\ \eta\mu x dx=-du\\ x=\frac{\pi}{3}\to u=\frac{1}{2}\\ x=\frac{\pi}{2}\to u=0}}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-du}{1-u^2}=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{u^2-1}du$$

$$\frac{1}{u^2-1}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}=\frac{Au+A+Bu-B}{(u-1)(u+1)}=\frac{(A+B)u+A-B}{u^2-1}$$

Για να ισχύει η ισότητα για κάθε $u\neq\pm1$ πρέπει: $\begin{cases}A+B=0\\ A-B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\ B=-\frac{1}{2}\end{cases}$, άρα

$$\frac{1}{u^2-1}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}=\frac{\frac{1}{2}}{u-1}-\frac{\frac{1}{2}}{u+1},\ \text{οπότε:}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{u^2-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u+1}\right)dx=\left[\frac{1}{2}\ln|u-1|-\frac{1}{2}\ln|u+1|\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\ln3$$

και $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\eta\mu x}dx=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{u^2-1}du=\frac{1}{2}\ln3$.

Η σχέση (1) γίνεται: $\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{f'(x)}{f(x)}dx<\frac{1}{2}\ln3\Leftrightarrow$

$$\left[\ln|f(x)|\right]_{\pi/3}^{\pi/2}<\frac{1}{2}\ln3\Leftrightarrow\ln\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|-\ln\left|f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|<\ln3^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\ln\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}<\ln\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}<\sqrt{3}\overset{f\left(\frac{\pi}{3}\right)<0}{\Leftrightarrow}f\left(\frac{\pi}{2}\right)>\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

71.α) Είναι $f'(x)=2f^2(x)-2f(x)+1=f^2(x)+(f(x)-1)^2>0$ γιατί δεν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο να είναι ταυτόχρονα $f(x)=0$ και $f(x)=1$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $f'(x)=2f^2(x)-2f(x)+1=f^2(x)+(f(x)-1)^2\geq f^2(x)$ γιατί

$\left(f(x)-1\right)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει ότι $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow$

$f(1) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$.

Είναι $f'(x) \geq f^2(x) \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f'(x)f(x) \geq f^3(x)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [1,2]$, είναι $\int_1^2 f'(x)f(x)dx > \int_1^2 f^3(x)dx \Leftrightarrow$

$$\int_1^2 f^3(x)dx < \left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_1^2 = \frac{f^2(2)}{2} - \frac{f^2(1)}{2} = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1.$$

δ) $f'(x) = 2f^2(x) - 2f(x) + 1 \Rightarrow$

$$\left[f'(x)\right]^2 = 2f^2(x)f'(x) - 2f(x)f'(x) + f'(x) \Rightarrow$$

$$\int_1^2 \left[f'(x)\right]^2 dx = \int_1^2 \left[2f^2(x)f'(x) - 2f(x)f'(x) + f'(x)\right]dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 \left[f'(x)\right]^2 dx = \left[\frac{2}{3}f^3(x) - f^2(x) + f(x)\right]_1^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}$$

ε) $f'(x) = 2f^2(x) - 2f(x) + 1$ άρα $\int_1^2 f'(x)dx = \int_1^2 \left[2f^2(x) - 2f(x) + 1\right]dx \Leftrightarrow$

$$f(2) - f(1) = 2\int_1^2 f^2(x)dx - 2\int_1^2 f(x)dx + 2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\not{1} = 2\int_1^2 f^2(x)dx - 2\int_1^2 f(x)dx + \not{1} \Leftrightarrow$$

$$2\int_1^2 f(x)dx = 2\int_1^2 f^2(x)dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 f^2(x)dx.$$

στ) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f''(x) = 4f(x)f'(x) - 2f'(x) = 2f'(x)\left(2f(x) - 1\right)$.

Για κάθε $x > 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x) - 1 > 0$ και επειδή $f'(x) > 0$, είναι $f''(x) > 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$.

Για κάθε $x < 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x) - 1 < 0$ και επειδή $f'(x) > 0$, είναι $f''(x) < 0$, οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$. Η f έχει σημείο καμπής το $\left(1, f(1)\right) \equiv \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

ζ) Είναι $f'(1) = 2f^2(1) - 2f(1) + 1 = \frac{2}{4} - 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο

$x=1$ έχει εξίσωση: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\geq\frac{1}{2}x$ για κάθε $x\geq 1$.Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x=+\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty,1]$, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\leq\frac{1}{2}x$ για κάθε $x\leq 1$. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x=-\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

η) $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2f^2(x)-2f(x)+1\right]\underset{\substack{x\to-\infty\\u\to-\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}\left(2u^2-2u+1\right)=$

$\lim\limits_{u\to-\infty}\left(2u^2\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2f^2(x)-2f(x)+1\right]\underset{\substack{x\to+\infty\\u\to+\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}}$

$\lim\limits_{u\to+\infty}\left(2u^2-2u+1\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(2u^2\right)=+\infty$.Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,1]$ η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα (f κοίλη), οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1)=\left[f'(1),\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)\right)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. Στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$ η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα (f κυρτή), οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2)=\left[f'(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Το σύνολο τιμών της f ΄ είναι το $f'(\mathbb{R})=f'(\Delta_1)\cup f'(\Delta_2)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

θ) Για κάθε $x\geq 1$ είναι $f(x)\geq\frac{1}{2}x$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, ισχύει ότι: $\int_1^2 f(x)dx>\int_1^2\frac{1}{2}xdx=\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2=\frac{3}{4}$.

72.α) $h'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$ οπότε η $h\searrow$ στο $[\alpha,\beta]$.

β) Για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $f(x)>xf'(x)$ άρα $\int_\alpha^\beta f(x)dx>\int_\alpha^\beta xf'(x)dx\Leftrightarrow$

$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \left[xf(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)dx \Leftrightarrow 2\int_\alpha^\beta f(x)dx > \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) \Leftrightarrow$

$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \frac{1}{2}\left(\beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)\right)$

γ) i. Είναι $\alpha \le x \le \beta \overset{h\searrow}{\Leftrightarrow} h(\alpha) \ge h(x) \ge h(\beta) \Leftrightarrow$

$\frac{f(\beta)}{\beta} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{f(\alpha)}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{f(\beta)}{\beta}x \le f(x) \le \frac{f(\alpha)}{\alpha}x \quad (1)$.

ii. Ολοκληρώνοντας την (1) προκύπτει

$\frac{f(\beta)}{\beta}\int_\alpha^\beta x dx \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le \frac{f(\alpha)}{\alpha}\int_\alpha^\beta x dx \Leftrightarrow$

$\frac{f(\beta)}{\beta}\cdot\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le \frac{f(\alpha)}{\alpha}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$

$h(\beta) \le \frac{2}{\beta^2-\alpha^2}\int_\alpha^\beta f(x)dx \le h(\alpha)$ και αφού η h είναι συνεχής, υπάρχει

$\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = \frac{2}{\beta^2-\alpha^2}\int_\alpha^\beta f(x)dx \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{2\xi}{\beta^2-\alpha^2}\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

73.α) Έστω $\frac{\ln f(x) - f(x) + 1}{(x-1)^2} = h(x),\ x \ne 1$.

Τότε $\ln f(x) - f(x) + 1 = (x-1)^2 h(x)$ και

$\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln f(x) - f(x) + 1\right] = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 h(x) \Leftrightarrow \ln f(1) - f(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\ln f(1) = f(1) - 1 \Leftrightarrow f(1) = 1$ αφού $\ln x \le x - 1$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

β) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln f(x) - f(x) + 1}{(x-1)^2} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)} - f'(x)}{2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\frac{f'(x)\left(1-f(x)\right)}{f(x)}}{2(x-1)}\right) =$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(-\frac{f'(x)}{2f(x)}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) = -\frac{f'(1)}{2f(1)}\cdot f'(1) = -\frac{\left[f'(1)\right]^2}{2}$, άρα

$-\frac{\left[f'(1)\right]^2}{2} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$.

γ) Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για κάθε

$x<1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(1)=0 \Rightarrow f\searrow(-\infty,1]$ και για κάθε

$x>1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(1)=0 \Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$.

Η f έχει ελάχιστο στο $x=1$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq f(1)=1$.

δ) Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο $x=2$, τότε ε:

$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=f'(2)x-2f'(2)+f(2)$. Επειδή η f είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από την ε εκτός του σημείου επαφής τους, άρα

$f(x)\geq f'(2)x-2f'(2)+f(2)$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(2)>f'(1)=0$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(2)x-2f'(2)+f(2)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(2)x=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

ε) Έστω $A_1=(-\infty,1), A_2=(1,+\infty)$. Λόγω της μονοτονίας της f στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε: $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to1^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left(0,\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$

$f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$.

Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, τότε για οποιοδήποτε $\alpha\in A_1$, $f(\alpha)\in f(A_2)$ υπάρχει $\beta\in A_2: f(\beta)=f(\alpha)$.

Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=k>0$, τότε για οποιοδήποτε $\alpha\in A_1$, $f(\alpha)\in(0,k)\subseteq f(A_2)$ υπάρχει $\beta\in A_2: f(\beta)=f(\alpha)$.

στ) $f(x)=\int_0^1\left(x^2-x+1\right)f(t)dt\Leftrightarrow f(x)-\left(x^2-x+1\right)\int_0^1f(t)dt=0$ Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\left(x^2-x+1\right)\int_0^1f(t)dt,\ x\in[0,1]$. Είναι

$g(0)=f(0)-\int_0^1f(t)dt$ και $g(1)=f(1)-\int_0^1f(t)dt$.

Για κάθε $0\leq x\leq1\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(0)\geq f(x)\geq f(1)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in[0,1]$, είναι

$\int_0^1f(0)dx>\int_0^1f(x)dx>\int_0^1f(1)dx\Leftrightarrow f(0)>\int_0^1f(x)dx>f(1)$, άρα

$g(0)=f(0)-\int_0^1f(t)dt>0$ και $g(1)=f(1)-\int_0^1f(t)dt<0$. Επειδή $g(0)g(1)<0$ και η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το Θ.Bolzano, υπάρχει $\rho\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$g(\rho)=0\Leftrightarrow f(\rho)=\int_0^1\left(\rho^2-\rho+1\right)f(t)dt$.

Τράπεζα θεμάτων Ι.Ε.Π.

23219.α) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ έχει εξίσωση
ε: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = 2x$.
Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq 2x$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq 2x$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$, άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

γ) i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq 2x$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 1, άρα
$\int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 2xdx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$.

ii. $\int_0^1 xf'(x)dx < 1 \Leftrightarrow \left[xf(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx < 1 \Leftrightarrow f(1) - \int_0^1 f(x)dx < 1 \Leftrightarrow$
$-\int_0^1 f(x)dx < 1 - 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx > 1$ ισχύει.

24758.α) Παρατηρούμε ότι $g(1) = g(-1) = 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq g(1)$ και $g(x) \geq g(-1)$, άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ και για $x = -1$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = 2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x)$ και τα $x = 1$ και $x = -1$ είναι εσωτερικά του πεδίου ορισμού της, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $g'(1) = 0 \Leftrightarrow 2f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$ και
$g'(-1) = 0 \Leftrightarrow 2f(-1) = 0 \Leftrightarrow f(-1) = 0$.

β) Είναι $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)}{x - 1}$,
$f'(-1) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{f(x)}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{f(x)}{x + 1}$.
Είναι $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)f(x) \geq 0$ (1), οπότε:

Αν $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ τότε από την (1) προκύπτει $f(x) > 0$ οπότε $\dfrac{f(x)}{x - 1} > 0 \Rightarrow$
$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)}{x - 1} \geq 0 \Rightarrow f'(1) \geq 0$ Αν $x < -1 \Leftrightarrow x + 1 < 0$ τότε από την (1) προκύπτει ότι
$f(x) > 0$ οπότε $\dfrac{f(x)}{x + 1} < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{f(x)}{x + 1} \leq 0 \Rightarrow f'(-1) \leq 0$.

γ) Έστω ότι η f είναι κοίλη τότε η f ΄θα είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε $-1 < 1 \Leftrightarrow f'(-1) > f'(1)$ που είναι άτοπο αφού $f'(-1) \leq 0 \leq f'(1)$. Άρα η f δεν είναι κοίλη.

δ) $\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x\right)f'(x)dx=\left[\left(x^3-3x\right)f(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left(3x^2-3\right)f(x)dx=-3\int_{-1}^{1}g(x)dx$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\geq 0$, άρα $\int_{-1}^{1}g(x)dx\geq 0\Leftrightarrow -3\int_{-1}^{1}g(x)dx\leq 0\Leftrightarrow$

$\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x\right)f'(x)dx\leq 0$.

23955.α) Είναι $f(0)=1$ και $f(1)=\frac{1}{2}$, άρα $\Gamma(0,1)$ και $\Delta\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

Η ευθεία ΓΔ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\Gamma\Delta}=\frac{\frac{1}{2}-1}{1-0}=-\frac{1}{2}$ και εξίσωση:

$y-1=-\frac{1}{2}x\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Η εφαπτομένη της C_f

στο Δ έχει εξίσωση $y-\frac{1}{2}=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+1$,

δηλαδή είναι η ΓΔ.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x)>-\frac{1}{2}x+1$ για κάθε $x\in(0,1)$. Είναι

$f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{1}{x^2+1}+\frac{x-2}{2}=\frac{2+(x-2)\left(x^2+1\right)}{2\left(x^2+1\right)}=\frac{\cancel{2}+x^3+x-2x^2-\cancel{2}}{2\left(x^2+1\right)}\Leftrightarrow$

$f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{x\left(x^2-2x+1\right)}{2\left(x^2+1\right)}=\frac{x(x-1)^2}{2\left(x^2+1\right)}>0$ για κάθε $x\in(0,1)$, άρα

$f(x)>-\frac{1}{2}x+1$ για κάθε $x\in(0,1)$.

γ) Για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}$ είναι $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=\frac{1}{1+(-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}=f(x)$,

άρα η f είναι άρτια.

Είναι $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(-x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$

Θέτουμε $-x=u\Leftrightarrow x=-u\Rightarrow dx=-du$. Για x = 0 είναι u = 0 και για $x=-1$ είναι u= 1. Τότε

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=-\int_{1}^{0}f(u)du+\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}f(x)dx$.

Για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) \geq -\frac{1}{2}x+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0 και x = 1, οπότε $\int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x+1\right)dx = \left[-\frac{x^2}{4}+x\right]_0^1 = -\frac{1}{4}+1 = \frac{3}{4}$, οπότε $\int_{-1}^1 f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx > 2\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$.

31551.α) Για κάθε $x \in (-\pi,\pi)$ είναι $\varphi'(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = -x\eta\mu x$.
Αν $x \in (-\pi,0)$ είναι $\eta\mu x < 0 \Rightarrow x\eta\mu x > 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0$.
Αν $x \in (0,\pi)$ είναι $\eta\mu x > 0 \Rightarrow x\eta\mu x > 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0$. Επειδή η φ είναι συνεχής στο [-π, π], είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1 = f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο x = 0.

Για κάθε $x \in (-\pi,0)\cup(0,\pi)$ είναι $f'(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2}$.
Για κάθε $-\pi < x < 0$ επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$ οπότε $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο [-π, 0], είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $0 < x < \pi$ επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει $\varphi(x) < \varphi(0) = 0$ οπότε $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο [0,π], είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.
Η f έχει τοπικά ελάχιστα τα $f(-\pi) = 0 = f(\pi)$ και μέγιστο το $f(0) = 1$.

γ) Αν $\kappa \in (-\pi,0)$ τότε $\varphi(x) > 0$ οπότε και
$\int_\kappa^0 \varphi(x)dx > 0 \Leftrightarrow -\int_0^\kappa \varphi(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^\kappa \varphi(x)dx < 0$.
Αν $\kappa \in (0,\pi)$ τότε $\varphi(x) < 0$ οπότε και $\int_0^\kappa \varphi(x)dx < 0$. Προφανώς αν κ = 0 τότε $\int_0^\kappa \varphi(x)dx = 0$. Επομένως κ = 0.

32225.α) i. $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)+x = 0 \overset{f(x)+x>0}{\Leftrightarrow} (f(x)+x)^2 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x = 0)$ ή $(x = -1)$.
ii. Για κάθε $x \in (-1,0)$ είναι $g(x) \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,0)$. Είναι $g\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, άρα $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,0)$.

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι $g(x) \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$. Είναι $g(1) = f(1)+1 > -1+1 = 0$, άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

β) Για κάθε $x \in [-1,+\infty)$ είναι $\left(f(x)+x\right)^2 = x^2(x+1) \Leftrightarrow$

$g^2(x) = x^2(x+1) \Leftrightarrow |g(x)| = \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x+1} \Leftrightarrow |g(x)| = |x|\cdot\sqrt{x+1}$ (1).

Αν $x \in (-1,0)$ είναι $g(x) < 0$, οπότε η (1) γίνεται

$-g(x) = -x\sqrt{x+1} \Leftrightarrow g(x) = x\sqrt{x+1}$ και αν $x > 0$ η (1) γίνεται

$g(x) = x\sqrt{x+1}$.

Άρα $g(x) = \begin{cases} x\sqrt{x+1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = x\sqrt{x+1},\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)+x = x\sqrt{x+1} \Leftrightarrow$

$f(x) = x\sqrt{x+1} - x = x\left(\sqrt{x+1}-1\right),\ x \in \mathbb{R}$.

(Αν θέσουμε x=0 στην (1) έχουμε $|g(0)| = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0.$)

γ) Αν η f είναι κυρτή τότε η f ΄είναι γνησίως αύξουσα.
Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με $h'(x) = f'(x+1) - f'(x)$.

Είναι $x+1 > x \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x+1) > f'(x) \Leftrightarrow h'(x) > 0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα. Για κάθε x > - 1 είναι

$x < x+1 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x) < h(x+1) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x) < f(x+2)-f(x+1)$, οπότε

$\int_{2023}^{2024}\left(f(x+1)-f(x)\right)dx < \int_{2023}^{2024}\left(f(x+2)-f(x+1)\right)dx$.

33578.α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x \geq x+1$ (1).

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq \eta\mu x \leq |x|$ και για $x \in [0,\pi]$ είναι $-x \leq \eta\mu x \leq x$ οπότε $x \geq -\eta\mu x \Leftrightarrow x+1 \geq -\eta\mu x+1$, άρα η (1) γίνεται

$e^x \geq x+1 \geq -\eta\mu x+1 \Rightarrow e^x + \eta\mu x \geq 1$.

β) $H'(x) = \left(x - \ln\left(e^x+\eta\mu x\right)\right)' = 1 - \dfrac{\left(e^x+\eta\mu x\right)'}{e^x+\eta\mu x} = \dfrac{\cancel{e^x} + \eta\mu x - \cancel{e^x} - \sigma\upsilon\nu x}{e^x+\eta\mu x} = f(x)$,

άρα η H είναι μια αρχική της f.

γ) $\int_0^{\pi} xf'(x)dx = \left[xf(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)dx = \pi f(\pi) - \left[H(x)\right]_0^{\pi} \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi} xf'(x)dx = \dfrac{\pi}{e^{\pi}} - H(\pi) + H(0) = \dfrac{\pi}{e^{\pi}} - 0 + 0 = \dfrac{\pi}{e^{\pi}}$.

δ) Για κάθε $x \in (0,\pi]$ είναι $e^x + \eta\mu x > 1 \Leftrightarrow x\left(e^x + \eta\mu x\right) > x \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{x\left(e^x+\eta\mu x\right)} < \frac{1}{x} \text{ άρα } \int_1^e \frac{1}{\left(e^x+\eta\mu x\right)\cdot x}dx < \int_1^e \frac{1}{x}dx = \left[\ln x\right]_1^e = 1 .$$

35245.) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Είναι $f''(x) = \left(\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x = -\frac{3x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^5}}$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) > 0$, για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) < 0$, η f είναι συνεχής, οπότε είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$. Η f έχει σημείο καμπής το $(0,f(0))$.

γ) i. Επειδή η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$, η f ΄είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Η f ΄ έχει μέγιστο το $f'(0) = 1$, οπότε $f'(x) \le 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Είναι $\alpha < \alpha+1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha) < f(\alpha+1) \Leftrightarrow f(\alpha+1) - f(\alpha) > 0$.

Είναι $f(\alpha+1) - f(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+1} f'(x)dx$.

Είναι $f'(x) \le 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0, οπότε

$\int_\alpha^{\alpha+1} f'(x)dx < \int_\alpha^{\alpha+1} 1dx \Leftrightarrow \int_\alpha^{\alpha+1} f'(x)dx < \alpha+1-\alpha \Leftrightarrow \int_\alpha^{\alpha+1} f'(x)dx < 1 \Leftrightarrow$

$f(\alpha+1) - f(\alpha) < 1$.

36816.α) Για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $xf(x) = \eta\mu x \Leftrightarrow f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, ισχύει ότι $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

β) Είναι $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \\ 1 \ , & x = 0 \end{cases}$.

γ) Για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$.

Έστω $\varphi(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x,\ x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Είναι

$\varphi'(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=-x\eta\mu x<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $0<x<\frac{\pi}{2}\overset{\varphi\searrow}{\Leftrightarrow}\varphi(0)>\varphi(x)>\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ οπότε $\varphi(x)<0$, άρα $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

δ) Για κάθε $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{4}\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(\frac{\pi}{6}\right)\ge f(x)\ge f\left(\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}}\le f(x)\le\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}}\Leftrightarrow$

$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\le f(x)\le\frac{3}{\pi}$ άρα $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{2\sqrt{2}}{\pi}dx\le\int_{\pi/6}^{\pi/4}f(x)dx\le\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{3}{\pi}dx\Leftrightarrow$

$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\le\int_{\pi/6}^{\pi/4}f(x)dx\le\frac{3}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{12}\le\int_{\pi/6}^{\pi/4}f(x)dx\le\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi}{12}\Leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{2}}{6}\le\int_{\pi/6}^{\pi/4}f(x)dx\le\frac{1}{4}$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Γνωρίζουμε ότι $e^x\ge x+1$ άρα $e^{x^2}\ge x^2+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, οπότε $\int_0^1e^{x^2}dx>\int_0^1(x^2+1)dx\Leftrightarrow\int_0^1e^{x^2}dx>\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+[x]_0^1\Leftrightarrow$

$\int_0^1e^{x^2}dx>\frac{1}{3}+1\Leftrightarrow\int_0^1e^{x^2}dx>\frac{4}{3}$. **Σωστή απάντηση Δ.**

2. Γνωρίζουμε ότι $e^x\ge x+1$ άρα $e^{x^2}\ge x^2+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, οπότε $\frac{e^{x^2}}{1+x^2}\ge1\Leftrightarrow\frac{x^2e^{x^2}}{1+x^2}\ge x^2$.Η ισότητα δεν ισχύει πάντα οπότε $\int_1^2\frac{x^2e^x}{1+x^2}dx>\int_1^2x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{7}{3}$. **Σωστή απάντηση Β.**

3. Είναι $(x-f(x))^2\ge0\Leftrightarrow xf(x)\le\frac{x^2+f^2(x)}{2}$ οπότε

$\frac{1}{3} \le \int_0^1 xf(x)dx \le \int_0^1 \frac{x^2+f^2(x)}{2}dx = \frac{1}{6}+\frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{1}{6}+\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Άρα $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{3}$ και $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)dx = \frac{1}{3}$ επίσης

$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ οπότε

$\int_0^1 (x-f(x))^2 dx = \int_0^1 x^2 dx - 2\int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 f^2(x)dx = 0$. Είναι

$(x-f(x))^2 \ge 0$ αν υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $(x-f(x))^2 \ne 0$ θα ήταν

$\int_0^1 (x-f(x))^2 dx > 0$ (άτοπο) άρα $x-f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=x$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Σωστή απάντηση Δ.

4. $4\int_0^1 \left[f(x)-e^x f^2(x)\right]dx \le \frac{1}{e}-1 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[4e^x f^2(x)-4f(x)\right]dx \ge 1-\frac{1}{e} \Leftrightarrow$

$-\int_0^1 \left[\left(2e^{\frac{x}{2}}f(x)-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 - \left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^2\right]dx \ge 1-\frac{1}{e} \Leftrightarrow$

$-\int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}}f(x)-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx + \int_0^1 e^{-x}dx \ge 1-\frac{1}{e} \Leftrightarrow$

$-\int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}}f(x)-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx - \left[e^{-x}\right]_0^1 \ge 1-\frac{1}{e} \Leftrightarrow$

$-\int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}}f(x)-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx - \frac{1}{e}+1 \ge 1-\frac{1}{e} \Leftrightarrow$

$-\int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}}f(x)-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx \ge 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}}f(x)-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx \le 0$

Όμως $\int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}}f(x)-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx \ge 0$ άρα $\int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}}f(x)-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx = 0$

Είναι $\left(2e^{\frac{x}{2}}f(x)-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 \ge 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, αν υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο,

ώστε $\left(2e^{\frac{x_0}{2}}f(x_0)-e^{-\frac{x_0}{2}}\right)^2 \ne 0$ θα ήταν $\int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}}f(x)-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx > 0$ (άτοπο).

Άρα $\left(2e^{\frac{x}{2}}f(x)-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2=0\Leftrightarrow 2e^{\frac{x}{2}}f(x)=e^{-\frac{x}{2}}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}e^{-x}$. **Σωστή απάντηση Γ.**

5. Είναι $\left(3f(x)-2g(x)\right)^2\geq 0$ οπότε $\int_0^1\left(3f(x)-2g(x)\right)^2dx\geq 0\Leftrightarrow$

$\int_0^1\left(9f^2(x)-12f(x)g(x)+4g^2(x)\right)dx\geq 0\Leftrightarrow$

$9\int_0^1 f^2(x)dx-12\int_0^1 f(x)g(x)dx+4\int_0^1 g^2(x)dx\geq 0$

$\Leftrightarrow 36-12\int_0^1 f(x)g(x)dx+36\geq 0\Leftrightarrow 12\int_0^1 f(x)g(x)dx\leq 72\Leftrightarrow$

$\int_0^1 f(x)g(x)dx\leq 6$. **Σωστή απάντηση Α.**

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»								
1.Λ	**2.**Λ	**3.** Σ	**4.** Σ	**5.** Λ	**6.** Σ	**7.** Σ	**8.** Λ	**9.** Σ
10.Σ	**11.** Σ	**12.** Λ	**13.**Σ	**14.** Σ	**15.** Σ	**16.**Σ	**17.**Λ	

39	Το ορισμένο ολοκλήρωμα και τα θεωρήματα του διαφορικού λογισμού

12. Έστω F αρχική της f. Είναι $\int_1^{\xi} f(t)dt = \int_1^3 f(t)dt + \frac{1}{2}\int_3^5 f(t)dt \Leftrightarrow$

$F(\xi) - F(1) = F(3) - F(1) + \frac{1}{2}F(5) - \frac{1}{2}F(3) \Leftrightarrow F(\xi) = \frac{1}{2}\left(F(3) + F(5)\right)$.

Επειδή η F είναι παραγωγίσιμη, είναι συνεχής στο $[1,5]$ οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Ε.Τ. θα υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [1,5]$. Άρα $m \le F(3) \le M$, $m \le F(5) \le M$ και με πρόσθεση κατά μέλη:

$2m \le F(3) + F(5) \le 2M \Leftrightarrow m \le \frac{1}{2}\left(F(3) + F(5)\right) \le M$. Επειδή ο αριθμός $\frac{1}{2}\left(F(3) + F(5)\right)$ ανήκει στο σύνολο τιμών της, υπάρχει $\xi \in [1,5]$ τέτοιο, ώστε $F(\xi) = \frac{1}{2}\left(F(3) + F(5)\right)$.

13. Έστω G αρχική της $g(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$. Είναι $f(x) = G\left(x^2 - 6x\right) - G(3)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = G'\left(x^2 - 6x\right) = \frac{1-e^{x^2-6x}}{1+e^{x^2-6x}}$.

$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{1-e^{x^2-6x}}{1+e^{x^2-6x}} \ge 0 \Leftrightarrow 1 - e^{x^2-6x} \ge 0 \Leftrightarrow e^{x^2-6x} \le 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x \le 0 \Leftrightarrow$

$0 \le x \le 6$. Για κάθε $x < 0$ ή $x > 6$, είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[6, +\infty)$ και για κάθε $0 < x < 6$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0,6]$.

14.α) Έστω F αρχική της f. Είναι $g(x) = F(x) - F(0)$,

$g'(x) = F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$.

β) $\int_{e^x}^{1-x} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow F(1-x) - F\left(e^x\right) = 0 \Leftrightarrow F(1-x) = F\left(e^x\right) \Leftrightarrow$

$F(1-x) - F(0) = F\left(e^x\right) - F(0) \Leftrightarrow$

$g(1-x) = g\left(e^x\right) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} 1 - x = e^x \Leftrightarrow e^x + x - 1 = 0$ (1).

Έστω $h(x) = e^x + x - 1,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι $h'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow h \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow h$ 1–1.

$(1) \Rightarrow h(x) = h(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 0$

Αρχική συνάρτηση και ανισοτικές σχέσεις

15.α) Έστω F αρχική της $f(x) = e^{x^2}$. Είναι $\int_1^x e^{t^2} dt \geq \int_1^{e \ln x} e^{t^2} dt \Leftrightarrow$

$F(x) - F(1) \geq F(e \ln x) - F(1) \Leftrightarrow F(x) \geq F(e \ln x)$ (1).

Είναι $F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow F \nearrow \mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται $x \geq e \ln x \Leftrightarrow$

$x - e \ln x \geq 0$. Έστω $g(x) = x - e \ln x,\ x > 0$. Είναι $g'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x}$.

Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (0, e]$ και για κάθε $x > e$ είναι

$g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [e, +\infty)$. Η g έχει ελάχιστο το $g(e) = 0$, οπότε

$g(x) \geq 0,\ x > 0$.

β) Έστω F αρχική της $f(x) = \eta\mu^{100} x$. Είναι $\int_0^{e^x} \eta\mu^{100} t dt \leq \int_0^{1+xe^x} \eta\mu^{100} t dt \Leftrightarrow$

$F(e^x) - F(0) \leq F(1 + xe^x) - F(0) \Leftrightarrow F(e^x) \leq F(1 + xe^x)$ (2)

Είναι $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \neq \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$, και επειδή η F είναι συνεχής,

είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. $(2) \Leftrightarrow e^x \leq 1 + xe^x \Leftrightarrow (x-1)e^x + 1 \geq 0$. Έστω

$h(x) = (x-1)e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι $h'(x) = xe^x$. Για κάθε $x < 0$ είναι

$h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow [0, +\infty)$.

Η h έχει ελάχιστο το $h(0) = 0$ οπότε $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)e^x + 1 \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$.

16. Έστω F αρχική της f στο $[0, +\infty)$. Είναι

$\frac{1}{x}\int_0^x f(t) dt < f(x) \Leftrightarrow F(x) - F(0) < xf(x) \Leftrightarrow \frac{F(x) - F(0)}{x} < f(x),\ x > 0$

Για την F εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0, x],\ x > 0$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$

τέτοιο, ώστε $F'(\xi) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(x) - F(0)}{x}$. Είναι

$0 < \xi < x \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(\xi) < f(x) \Leftrightarrow \frac{F(x) - F(0)}{x} < f(x)$.

17. Έστω F αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Είναι

$\int_{x-1}^x f(t) dt < f(x) < \int_x^{x+1} f(t) dt \Leftrightarrow F(x) - F(x-1) < f(x) < F(x+1) - F(x), x \in \mathbb{R}$.

Για την F εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στα $[x\chi - 1, x], [x, x+1],\ x \in \mathbb{R}$ οπότε

υπάρχουν $\xi_1 \in (x-1, x), \xi_2 \in (x, x+1)$ τέτοια, ώστε

$F'(\xi_1)=F(x)-F(x-1)\Leftrightarrow f(\xi_1)=F(x)-F(x-1)$ και
$F'(\xi_2)=F(x+1)-F(x)\Leftrightarrow f(\xi_2)=F(x+1)-F(x)$. Είναι
$x-1<\xi_1<x<\xi_2<x+1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(\xi_1)<f(x)<f(\xi_2)\Leftrightarrow$
$F(x)-F(x-1)<f(x)<F(x+1)-F(x), x\in\mathbb{R}$.

2ος τρόπος : $x-1\le t\le x\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x-1)\le f(t)\le f(x)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $t\in[x-1,x]$, είναι $\int_{x-1}^{x}f(x-1)dt<\int_{x-1}^{x}f(t)dt<\int_{x-1}^{x}f(x)dt\Leftrightarrow$
$f(x-1)(x-x+1)<\int_{x-1}^{x}f(t)dt<f(x)(x-x+1)\Leftrightarrow$
$f(x-1)<\int_{x-1}^{x}f(t)dt<f(x)\ (1)$.
$x\le t\le x+1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)\le f(t)\le f(x+1)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $t\in[x,x+1]$, είναι $\int_{x}^{x+1}f(x)dt<\int_{x}^{x+1}f(t)dt<\int_{x}^{x+1}f(x+1)dt\Leftrightarrow$
$f(x)(x+1-x)<\int_{x}^{x+1}f(t)dt<f(x+1)(x+1-x)\Leftrightarrow$
$f(x)<\int_{x}^{x+1}f(t)dt<f(x+1)\ (2)$.
Από $(1),(2)\Rightarrow\int_{x-1}^{x}f(t)dt<f(x)<\int_{x}^{x+1}f(t)dt$.

Αρχική συνάρτηση και θεώρημα Fermat

18. $\int_0^x\alpha e^{t^2}dt\ge\int_0^x\beta\sigma\upsilon\nu^{10}tdt\Leftrightarrow\int_0^x\alpha e^{t^2}dt-\int_0^x\beta\sigma\upsilon\nu^{10}tdt\ge0\Leftrightarrow$
$\int_0^x\left(\alpha e^{t^2}-\beta\sigma\upsilon\nu^{10}t\right)dt\ge0\ (1)$. Έστω F αρχική της $f(x)=\alpha e^{x^2}-\beta\sigma\upsilon\nu^{10}x,\ x\in\mathbb{R}$.
$(1)\Rightarrow F(x)-F(0)\ge0\Leftrightarrow F(x)\ge F(0)$, οπότε η F έχει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $x=0$.
Επειδή η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x)=f(x)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat, οπότε $F'(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

19. α) Έστω F αρχική της f . Είναι
$\int_0^x f(t)dt\ge xe^{-x}\Leftrightarrow F(x)-F(0)-xe^{-x}\ge0\ (1)$
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=F(x)-F(0)-xe^{-x},\ x\in\mathbb{R}$. Η (1) γίνεται $g(x)\ge g(0)$, οπότε η g παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $x=0$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη με

$g'(x)=f(x)-e^{-x}+xe^{-x}$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat, είναι $g'(0)=0 \Leftrightarrow f(0)-1=0 \Leftrightarrow f(0)=1$.

Η εφαπτομένη στο Α έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y=x+1$.

β) Έστω $M(x(t),y(t))$ με $y(t)=x(t)+1$ σημείο της ε με $x'(t)=1\ cm/sec$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το κινητό διέρχεται από το Α. Είναι $x(t_0)=0,\ y(t_0)=1$.Είναι

$$s(t)=(OM)=\sqrt{x^2(t)+(x(t)+1)^2}=\sqrt{2x^2(t)+2x(t)+1}\ ,$$

$$s'(t)=\frac{4x(t)x'(t)+2x'(t)}{2\sqrt{2x^2(t)+2x(t)+1}}=\frac{2x(t)x'(t)+x'(t)}{\sqrt{2x^2(t)+2x(t)+1}}$$ και τη χρονική στιγμή t_0 :

$$s'(t_0)=\frac{2x(t_0)x'(t_0)+x'(t_0)}{\sqrt{2x^2(t_0)+2x(t_0)+1}}=1cm/sec\ .$$

20. α) Έστω F αρχική της f . Είναι

$\int_{4x}^{x^3} f(t)dt \geq x^3-4x \Leftrightarrow F(x^3)-F(4x)-x^3+4x\geq 0$.

Έστω $g(x)=F(x^3)-F(4x)-x^3+4x,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $g(x)\geq g(0)$,

$g(x)\geq g(2),\ g(x)\geq g(-2)$ οπότε η g έχει ελάχιστο στα $x=0,-2$ και 2 .

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=F'(x^3)3x^2-4F'(4x)-3x^2+4=3x^2f(x^3)-4f(4x)-3x^2+4$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat, οπότε

$g'(0)=0 \Leftrightarrow -4f(0)+4=0 \Leftrightarrow f(0)=1$,

$g'(-2)=0 \Leftrightarrow 12f(-8)-4f(-8)-12+4=0 \Leftrightarrow f(-8)=1$ και

$g'(2)=0 \Leftrightarrow 12f(8)-4f(8)-12+4=0 \Leftrightarrow f(8)=1$

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στα διαστήματα $[-8,0],[0,8]$ οπότε υπάρχουν $x_1\in(-8,0)$ και $x_2\in(0,8)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1,x_2]$ για την f′ οπότε υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(-8,8)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi)=0$

21. α) Έστω F αρχική της f . Είναι

$\int_{-2}^{2} f(x)dx=0 \Leftrightarrow F(2)-F(-2)=0 \Leftrightarrow F(2)=F(-2)$

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-2,2]$ για την F

οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_1)=0 \Leftrightarrow f(\xi_1)=0$.

β) $\int_2^x f(t)dt \le x^2-4 \Leftrightarrow F(x)-F(2)-x^2+4 \le 0$.

Έστω $g(x)=F(x)-F(2)-x^2+4,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $g(x)\le g(2)$ και $g(x)\le g(-2)$ οπότε η g έχει μέγιστο στα $x=2$ και $x=-2$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=F'(x)-2x=f(x)-2x$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat οπότε $g'(2)=0 \Leftrightarrow f(2)-4=0 \Leftrightarrow f(2)=4$ και $g'(-2)=0 \Leftrightarrow f(-2)=4$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-2x,\ x\in[-2,2]$. Η h είναι συνεχής στο $[-2,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ με $h'(x)=f'(x)-2$. Επειδή $h(-2)=0=h(2)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi_2\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi_2)=0 \Leftrightarrow f'(\xi_2)=2$.

Όρια ολοκληρωμάτων

22.α) Έστω F αρχική της $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$. Είναι

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+h}\frac{\eta\mu x}{x}dx=\lim_{h\to 0}\frac{F\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{h\to 0}f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

β) Είναι $\int_1^x \ln t dt=\int_1^x (t)'\ln t dt=\left[t\ln t\right]_1^x-\int_1^x t\cdot\frac{1}{t}dt=x\ln x-x+1$ και

$$\int_0^x te^t dt=\int_0^x t\left(e^t\right)'dt=\left[te^t\right]_0^x-\int_0^x e^t dt=xe^x-e^x+1=e^x(x-1)+1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x \ln t dt-1}{\int_0^x te^t dt-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\ln x-1)}{e^x(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\cdot\frac{\ln x-1}{x-1}\right)=0 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x-1}{x-1}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{x}{1}}=0$$

23. Έστω F αρχική της f . Είναι $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^3+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x^3+x^2}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{3x+2}\right)=f'(0)\cdot\frac{1}{2}$.Επομένως

$f'(0)\cdot\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow f'(0)=2..$

24. $\frac{\lambda}{t(t+\lambda)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+\lambda}=\frac{At+A\lambda+Bt}{t(t+\lambda)}=\frac{(A+B)t+A\lambda}{t(t+\lambda)}\Leftrightarrow$

$\lambda=(A+B)t+A\lambda$. Είναι $\begin{cases}A+B=0\\ \lambda A=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=-1\\ A=1\end{cases}$. Τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\lambda}{t(t+\lambda)}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+\lambda}\right)dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln t-\ln(t+\lambda)\right]_1^x=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x-\ln(x+\lambda)+\ln(1+\lambda)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x(1+\lambda)}{x+\lambda}$.

Θέτουμε $\frac{x(1+\lambda)}{x+\lambda}=u$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(1+\lambda)}{x+\lambda}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(1+\lambda)}{x}=1+\lambda$, οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x(1+\lambda)}{x+\lambda}=\lim\limits_{u\to1+\lambda}\ln u=\ln(1+\lambda)$.

Επομένως $\ln(1+\lambda)=1\Leftrightarrow1+\lambda=e\Leftrightarrow\lambda=e-1$.

25.α) $1<x\le t\le 2x\Rightarrow\ln x\le\ln t\le\ln 2x\Leftrightarrow\frac{1}{\ln x}\ge\frac{1}{\ln t}\ge\frac{1}{\ln 2x}$. Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο όταν $t=x$ ή $t=2x$, είναι

$\int_x^{2x}\frac{1}{\ln 2x}dt<\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt<\int_x^{2x}\frac{1}{\ln x}dt\Leftrightarrow$

$\frac{2x-x}{\ln 2x}<\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt<\frac{2x-x}{\ln x}\Leftrightarrow\frac{x}{\ln 2x}<\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt<\frac{x}{\ln x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln 2x}\overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}\overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ οπότε

από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt=+\infty$.

β) Έστω $f(x)=\frac{3x^2+2}{x^2+2}$, $x>0$. Είναι $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+2)^2}>0\Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$.

Για κάθε $0<x\le t\le 2x\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)\le f(t)\le f(2x)$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο όταν $t=x$ ή $t=2x$, είναι $\int_x^{2x}f(x)dt<\int_x^{2x}f(t)dt<\int_x^{2x}f(2x)dt\Leftrightarrow$

$f(x)(2x-x)<\int_x^{2x}f(t)dt<f(2x)(2x-x)\Leftrightarrow xf(x)<\int_x^{2x}f(t)dt<xf(2x)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\dfrac{3x^2+2}{x^2+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3+2x}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^{\not 3}}{x^{\not 2}}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(2x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\dfrac{12x^2+2}{4x^2+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{12x^3+2x}{4x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{12x^{\not 3}}{4x^{\not 2}}=+\infty$, οπότε

από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\dfrac{3t^2+2}{t^2+2}dt=+\infty$.

γ) Έστω $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$, $x\in(0,\pi)$. Είναι $f'(x)=\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$.

Έστω $g(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in[0,\pi]$. Είναι $g'(x)=-x\eta\mu x<0\Rightarrow g\searrow[0,\pi]$.

Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $g(x)<g(0)=0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(0,\pi)$.

$x\le t\le 2x\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)\ge f(t)\ge f(2x)$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο όταν

$t=x$ ή $t=2x$, είναι $\int_x^{2x}f(2x)dt<\int_x^{2x}f(t)dt<\int_x^{2x}f(x)dt\Leftrightarrow$

$\dfrac{\eta\mu 2x}{2x}(2x-x)<\int_x^{2x}f(t)dt<\dfrac{\eta\mu x}{x}(2x-x)\Leftrightarrow\dfrac{\eta\mu 2x}{2}<\int_x^{2x}\dfrac{\eta\mu t}{t}dt<\eta\mu x$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu 2x}{2}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\eta\mu x=0$ από το κριτήριο παρεμβολής. είναι

$\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^{2x}\dfrac{\eta\mu t}{t}dt=0$.

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t^2-2x^2}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$. Είναι $0\le t\le x\Leftrightarrow 0\le t^2\le x^2\Leftrightarrow$

$1\le e^{t^2}\le e^{x^2}$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο όταν $t=0$ ή $t=x$, είναι

$\int_0^x 1dt<\int_0^x e^{t^2}dt<\int_0^x e^{x^2}dt\Leftrightarrow x<\int_0^x e^{t^2}dt<xe^{x^2}\Leftrightarrow xe^{-2x^2}<e^{-2x^2}\int_0^x e^{t^2}dt<xe^{-x^2}$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{2x^2}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4xe^{2x^2}}=0$.Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x^2}=0$, οπότε

από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t^2-2x^2}dt=0$.

26.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}e^{t^2+x}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\int_x^{x+1}e^{t^2}dt$. Είναι

$x\le t\le x+1\Leftrightarrow x^2\le t^2\le(x+1)^2\Leftrightarrow e^{x^2}\le e^{t^2}\le e^{x^2+2x+1}$ και επειδή η ισότητα

ισχύει μόνο όταν $t=x$ ή $t=x+1$, είναι $\int_x^{x+1}e^{x^2}dt<\int_x^{x+1}e^{t^2}dt<\int_x^{x+1}e^{x^2+2x+1}dt\Leftrightarrow$

$e^{x^2}(x+1-x)<\int_x^{x+1}e^{t^2}dt<(x+1-x)e^{x^2+2x+1}\Leftrightarrow e^{x^2+x}<e^x\int_x^{x+1}e^{t^2}dt<e^{x^2+3x+1}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2+x} \underset{\substack{x\to+\infty,\\ \theta\to+\infty}}{=} \lim\limits_{\theta\to+\infty} e^{\theta} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2+3x+1} \underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to+\infty}}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} e^{u} = +\infty$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} e^{t^2+x}dt = +\infty$.

β) Όμοια με το α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^{x+1} e^{t^2+x}dt = +\infty$.

γ) Έστω $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$, $x>0$. Είναι $f'(x) = e^{x\ln x}(\ln x+1) \geq 0 \Leftrightarrow$ $\ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$. Για κάθε $x \in \left(0,\frac{1}{e}\right)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow\left(0,\frac{1}{e}\right]$. Είναι $0<x\leq t\leq 2x<\frac{2}{e} \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)\geq f(t)\geq f(2x)$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο όταν $t=x$ ή $t=2x$, είναι $\int_x^{2x} f(2x)dt < \int_x^{2x} f(t)dt < \int_x^{2x} f(x)dt \Leftrightarrow$ $f(2x)(2x-x) < \int_x^{2x} f(t)dt < f(x)(2x-x) \Leftrightarrow xf(2x) < \int_x^{2x} t^t dt < xf(x)$ (1).

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+}(-x) = 0$,

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} e^{x\ln x} \underset{\substack{x\to0^+,\\ k\to0^+}}{\overset{k=x\ln x}{=}} 0$, $\lim\limits_{k\to0^+} e^{k} = 1$,

$\lim\limits_{x\to0^+} xf(2x) \underset{\substack{x\to0^+,u\to0^+\\ u\to0^+}}{\overset{2x=u}{=}} \lim\limits_{u\to0^+} \frac{1}{2}uf(u) = 0$, $\lim\limits_{x\to0^+} xf(x) = 0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^{2x} t^t dt = 0$.

δ) Όμοια με το γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(2x) \overset{2x=u}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{1}{2}uf(u) = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x} t^t dt = +\infty$.

27. α) $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]' = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] \Leftrightarrow$ $f'(x) = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]$. Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f'

εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$, οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$, $x>0$.Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$g'(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]=+\infty-1=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{u\to+\infty}{\overset{u=1+\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]=0$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{\substack{x\to+\infty,\\ k\to 1,}}{\overset{k=1+\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{k\to 1}\ln k=\ln 1=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$.

Για το σύνολο τιμών της g έχουμε:

$g((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x),\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\right)=(0,+\infty)$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x>0$,

οπότε $f'(x)>0$ και f γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Έστω F αρχική της f. Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει

$\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε: $F'(\xi)=\frac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow f(\xi)=F(x+1)-F(x)$.

Επειδή $x<\xi<x+1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(\xi)<f(x+1)\Leftrightarrow$

$f(x)<F(x+1)-F(x)<f(x+1)\Leftrightarrow f(x)<\int_x^{x+1} f(t)dt<f(x+1)$.Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e$ γιατί:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1)\underset{u\to+\infty}{\overset{x+1=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty} f(u)=e$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt=e$.

Σύνθετες ασκήσεις

28.α) $f(x)=\int_1^x t(2\ln t+1)dt=\int_1^x\left(\frac{t^2}{2}\right)'(2\ln t+1)dt\Leftrightarrow$

$f(x)=\left[\frac{t^2}{2}(2\ln t+1)\right]_1^x-\int_1^x \frac{t^{\not 2}}{\not 2}\cdot\frac{\not 2}{\not t}dt\Leftrightarrow$

$f(x)=\frac{x^2}{2}(2\ln x+1)-\frac{1}{2}-\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x=\frac{x^2}{2}(2\ln x+1)-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$f(x)=\frac{x^2}{2}(2\ln x+\not 1-\not 1)=x^2\ln x$.

β) $f'(x)=2x\ln x+x^{\not 2}\frac{1}{\not x}=x(2\ln x+1)\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq -\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\geq e^{-\frac{1}{2}}$.

Για κάθε $x\in\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$ και για κάθε $x>e^{-\frac{1}{2}}$ είναι

$f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$. Η f έχει ελάχιστο το $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2e}$.

γ) $f''(x)=2\ln x+1+\not x\cdot\frac{2}{\not x}=2\ln x+3\geq 0\Leftrightarrow x\geq e^{-\frac{3}{2}}$. Η f έχει σημείο καμπής

το $\left(e^{-\frac{1}{2}},-\frac{3}{2e^3}\right)$.

δ) $\int_{\rho_1}^{\rho_2} x(2\ln x+1)dx=-\frac{3}{2e^3}-\frac{1}{2}e^{x+5}\Leftrightarrow$

$\int_{\rho_1}^{\rho_2} f'(x)dx=-\frac{3}{2e^3}-\frac{1}{2}e^{x+5}\Leftrightarrow f(\rho_2)-f(\rho_1)=-\frac{3}{2e^3}-\frac{1}{2}e^{x+5}\Leftrightarrow$

$-\frac{\not 3}{\not 2e^3}-\frac{1}{2e}=-\frac{\not 3}{\not 2e^3}-\frac{1}{2}e^{x+5}\Leftrightarrow e^{-1}=e^{x+5}\Leftrightarrow x+5=-1\Leftrightarrow x=-6$.

29.α) Έστω F αρχική της $g(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$, $x\geq 1$. Είναι $f(x)=F(x)-F(1)$

και $f'(x)=F'(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}>0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$

β) Έστω $h(x)=\frac{\ln^2 x}{2}-f(x)$, $x\geq 1$. Είναι $h'(x)=\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x}<0\Rightarrow$

$h\searrow[1,+\infty)$, οπότε $h(x)\leq h(1)\Leftrightarrow\frac{\ln^2 x}{2}-f(x)\leq 0\Leftrightarrow\frac{\ln^2 x}{2}\leq f(x)$.

Έστω $t(x)=f(x)-\ln 2\cdot\ln x-\frac{\ln^2 x}{2}$, $x\geq 1$. Είναι

$t'(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{\ln 2}{x}-\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln(1+x)-(\ln 2+\ln x)}{x}=\frac{\ln(1+x)-\ln 2x}{x}$

Για κάθε $x>1$ είναι $2x>x+1\Leftrightarrow \ln 2x>\ln(x+1)\Leftrightarrow t'(x)<0\Rightarrow t\searrow[1,+\infty)$

οπότε $t(x)\leq t(1)\Leftrightarrow f(x)-\ln 2\cdot\ln x-\frac{\ln^2 x}{2}\leq 0\Leftrightarrow f(x)\leq \ln 2\cdot\ln x+\frac{\ln^2 x}{2}$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{2}=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln 2\cdot\ln x+\frac{\ln^2 x}{2}\right)$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.Για

κάθε $x>1$ είναι $\frac{\ln^2 x}{2x}\leq\frac{f(x)}{x}\leq \ln 2\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln^2 x}{2x}$.Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{2x}\overset{\text{DLH}}{=}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln 2\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln^2 x}{2x}\right)=0$, οπότε

από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

30.α) $f'(x)=e^x-\frac{e}{x}$, $f''(x)=e^x+\frac{e}{x^2}>0\Rightarrow f'\nearrow[1,+\infty)$ άρα για $x>1$ είναι

$f'(x)>f'(1)=0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$.

β) $e^{x-1}\geq\ln x\Leftrightarrow\frac{e^x}{e}\geq\ln x\Leftrightarrow e^x-e\ln x\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq 0$. Για κάθε $x\in(0,1)$

είναι $f'(x)<f'(1)=0\Rightarrow f\searrow(0,1]$ και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι

$f'(x)>f'(1)=0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$.Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=0$ οπότε $f(x)\geq 0$

για κάθε $x>0$.

γ) Έστω F αρχική της f . Είναι $\int_{x^2+1}^{x^2+2}f(t)dt=\int_{x^2+3}^{x^2+2}f(t)dt+\int_1^3 f(t)dt\Leftrightarrow$

$\cancel{F(x^2+2)}-F(x^2+1)=\cancel{F(x^2+2)}-F(x^2+3)+F(3)-F(1)\Leftrightarrow$

$F(x^2+3)-F(x^2+1)=F(3)-F(1)$ (1)

Έστω $g(x)=F(x^2+3)-F(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι

$g'(x)=2xF'(x^2+3)-2xF'(x^2+1)=2x\left(f(x^2+3)-f(x^2+1)\right)$. Για κάθε

$x\in\mathbb{R}$ είναι $1\leq x^2+1<x^2+3\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x^2+1)<f(x^2+3)\Leftrightarrow f(x^2+3)-f(x^2+1)>0$

Για $x<0$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\searrow(-\infty,0]$ και για $x>0$ είναι

$g'(x)>0 \Rightarrow g\nearrow[0,+\infty)$. Η g έχει ελάχιστο το $g(0)=F(3)-F(1)$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\geq g(0)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.
$(1)\Leftrightarrow g(x)=g(0)\Leftrightarrow x=0$.

31.α) Έστω F αρχική της $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $x>0$. Είναι $f(x)=F(x)-F(1)$ και
$f'(x)=F'(x)=e^{\frac{1}{x}}>0\Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$.Επειδή $e^{-1}<1$ τότε
$f(e^{-1})<f(1)\Leftrightarrow\int_1^{e^{-1}}e^{\frac{1}{t}}dt<0\Leftrightarrow\int_{e^{-1}}^{1}e^{\frac{1}{t}}dt>0$.
β) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,2]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}\Leftrightarrow e^{\frac{1}{\xi}}=\int_1^2 e^{\frac{1}{t}}dt$ (1). Όμως
$1<\xi<2\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\frac{1}{\xi}<1\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}}<e^{\frac{1}{\xi}}<e\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\sqrt{e}<\int_1^2 e^{\frac{1}{t}}dt<e$.
γ) Πρέπει $2-e^x>0\Leftrightarrow e^x<2\Leftrightarrow x<\ln 2$
$\int_1^{e^{2x}}e^{\frac{1}{t}}dt=\int_1^{2-e^x}e^{\frac{1}{t}}dt\Leftrightarrow f(e^{2x})=f(2-e^x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}e^{2x}=2-e^x\overset{e^x=\lambda>0}{\Leftrightarrow}$
$\lambda^2+\lambda-2=0\Leftrightarrow(\lambda=-2$ απορρίπτεται $)$ή $(\lambda=1\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0)$.
δ) $f(1)=0$ και $f'(1)=e$, οπότε η εξίσωση εφαπτομένης στο $x_0=1$ είναι
$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=ex-e$. Η $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}<0$, άρα η f κοίλη οπότε βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός από το σημείο επαφής επομένως $f(x)\leq ex-e$ για κάθε $x>0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=1$.
ε) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[x-1,x]$ και $[x,x+1]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(x-1,x)$ και $\xi_2\in(x,x+1)$ τέτοια ώστε
$f'(\xi_1)=f(x)-f(x-1)$ και $f'(\xi_2)=f(x+1)-f(x)$. Είναι $\xi_1<\xi_2\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}$
$f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow f(x)-f(x-1)>f(x+1)-f(x)\Leftrightarrow\int_{x-1}^{x}e^{\frac{1}{t}}dt>\int_x^{x+1}e^{\frac{1}{t}}dt$.

32.α) Έστω F αρχική της $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $f(x)=F(x)-F(0)$,

$f'(x)=F'(x)=\frac{1}{x^2+1}>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$. Για κάθε $x<0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(0)=0$ και για κάθε $x>0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)=0$.

β) Είναι $f''(x)=\frac{-2x}{x^2+1}$. Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$, κοίλη στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(0,0)$.

γ) Για $x=0$ ισότητα .Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,0]$ με $x<0$ οπότε υπάρχει $\xi\in(x,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)}{x}$, όμως η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ άρα η $f'\nearrow$ στο $(-\infty,0]$, συνεπώς για $x<\xi<0$ είναι

$f'(x)<f'(\xi)<f'(0)\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}<\frac{f(x)}{x}<1\overset{x<0}{\Leftrightarrow}\frac{x}{x^2+1}>f(x)>x$.

Άρα $x\le f(x)\le\frac{x}{x^2+1}$.

δ) Είναι $f(\varepsilon\varphi x)=x\Leftrightarrow f(\varepsilon\varphi x)-x=0$ με $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(\varepsilon\varphi x)-x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Είναι

$h'(x)=\frac{1}{\varepsilon\varphi^2x+1}\cdot(\varepsilon\varphi x)'-1=\sigma\upsilon\nu^2x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}-1=0$. Οπότε $h(x)=c, c\in\mathbb{R}$.

Όμως $h(0)=0$ οπότε $h(x)=0$, δηλαδή $f(\varepsilon\varphi x)=x$. Για $x=\frac{\pi}{6}$ είναι

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$.

ε) Έστω $t(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$, $x>0$. Είναι $t'(x)=f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=$

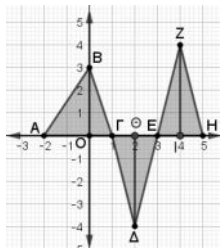
$\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{\cancel{x^2}\frac{1+x^2}{\cancel{x^2}}}=0\Leftrightarrow$

$t(x)=c\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$. .

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1.Σ 2.Σ 3.Σ 4.Σ 5.Σ

40. Εμβαδό επίπεδου χωρίου



24. $I_1=\int_{-2}^{0} f(x)dx=(OAB)=\dfrac{(OA)(OB)}{2}=\dfrac{2\cdot 3}{2}=3$,

$I_2=\int_{-2}^{1} f(x)dx=(AB\Gamma)=\dfrac{(A\Gamma)(BO)}{2}=\dfrac{3\cdot 3}{2}=\dfrac{9}{2}$,

$I_3=\int_{1}^{3} f(x)dx=-(\Gamma\Delta E)=-\dfrac{(\Gamma E)\cdot(\Delta\Theta)}{2}=-\dfrac{2\cdot 4}{2}=-4$,

$I_4=\int_{3}^{5} f(x)dx=(ZEH)=\dfrac{(EH)\cdot(ZI)}{2}=\dfrac{2\cdot 4}{2}=4$.

25.α) $\int_{-3}^{0} f(x)dx=E_1=2$ **β)** $\int_{0}^{4} f(x)dx=-E_2=-5$ **γ)** $E=E_1+E_2=7$.

26.α) $\int_{-4}^{5} f(x)dx=\int_{-4}^{-2} f(x)dx+\int_{-2}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{5} f(x)dx=$

$-1+2-3+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

β) $E=-\int_{-4}^{-2} f(x)dx+\int_{-2}^{1} f(x)dx-\int_{1}^{4} f(x)dx=1+2+3=6$.

γ) $E=\int_{-2}^{1} f(x)dx-\int_{1}^{4} f(x)dx=2+3=5$.

27.α) $E=\int_{0}^{2} x^3dx=\left[\dfrac{x^4}{4}\right]_0^2=4$.

β) $E=\int_{0}^{1} e^x dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$.

γ) Επειδή για $x\in(0,1)$ είναι $f(x)<0$ και για $x>1$ είναι $f(x)>0$, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$E=\int_{1/e}^{1}\ln x dx+\int_{1}^{e}\ln x dx=\int_{1/e}^{1}(x)'\ln x dx+\int_{1}^{e}(x)'\ln x dx\Leftrightarrow$

$E=\left[x\ln x\right]_{1/e}^{1}-\int_{1/e}^{1}x\cdot\dfrac{1}{x}dx+\left[x\ln x\right]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}x\cdot\dfrac{1}{x}dx\Leftrightarrow$

$E=-\dfrac{1}{e}\ln\dfrac{1}{e}-\left(1-\dfrac{1}{e}\right)+e-(e-1)=\dfrac{1}{e}-1+\dfrac{1}{e}+e-e+1=\dfrac{2}{e}$.

δ) $E=\int_{0}^{2}(4-x^2)dx-\int_{2}^{3}(4-x^2)dx\Leftrightarrow$

$E=\left[4x-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2-\left[4x-\dfrac{x^3}{3}\right]_2^3\Leftrightarrow$

x		-2		2	
$4-x^2$	-		+		-

$$E=8-\frac{8}{3}-(12-9)+\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{23}{3}.$$

ε) $E=\int_1^2\left(x^2-6x+8\right)dx-\int_2^3\left(x^2-6x+8\right)dx \Leftrightarrow$

x		2		4
x^2-6x+8	+	-	+	

$$E=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right]_1^2-\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right]_2^3 \Leftrightarrow$$

$$E=\frac{8}{3}-12+16-\left(\frac{1}{3}-3+8\right)-(9-27+24)+\left(\frac{8}{3}-12+16\right)=2.$$

στ) Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι ημx > 0 και για κάθε $x\in(\pi,2\pi)$ είναι ημx < 0.

$$E=\int_0^{\pi}\eta\mu x dx-\int_{\pi}^{2\pi}\eta\mu x dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_{\pi}^{2\pi}=1+1-(-1-1)=4.$$

ζ) Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι συνx > 0 και για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ είναι συνx < 0.

$$E=\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu x dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\sigma\upsilon\nu x dx \Leftrightarrow E=\left[\eta\mu x\right]_0^{\pi/2}-\left[\eta\mu x\right]_{\pi/2}^{\pi}=1-(0-1)=2.$$

η) $E=\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}.$

28. $f(x)=0\Leftrightarrow x^4-x^2=0\Leftrightarrow x^2(x^2-1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή

$x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1.$

$E=-\int_{-1}^1 f(x)dx \Leftrightarrow$

$E=-\int_{-1}^1\left(x^4-x^2\right)dx \Leftrightarrow$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x^2	+		+	o	+		+
x^2-1	+	o	−		−	o	+
γινόμενο	+		−		−		+

$$E=-\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1=-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{15}.$$

29.α) $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$.

Για κάθε $x\in(1,3)$ είναι $f(x)<0$, οπότε

$$E=-\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^3=\frac{4}{3}.$$

β) $E' = \int_0^1 \left(x^2 - 4x + 3\right)dx - \int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right)dx + \int_3^4 \left(x^2 - 4x + 3\right)dx \Leftrightarrow$

$E' = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 + \frac{4}{3} + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_3^4 = 4$.

30.α) $f(x) = x(x-1)(x+1)$. Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$, οπότε:

$E(\Omega) = -\int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = 5$.

β) $f(x) = x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6)$. Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty,2) \cup (6,+\infty)$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (2,6)$, άρα

$E(\Omega) = \int_0^2 f(x)dx - \int_2^4 f(x)dx = 16$.

γ) Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,\pi)$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\pi,2\pi)$, οπότε:

$E(\Omega) = \int_0^{\pi} f(x)dx - \int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx = 4\pi$.

31. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow$ f συνεχής στο 0.

Για $x \le 0$ είναι $f(x) = (1-x)(x+1) \ge 0 \Leftrightarrow x+1 \ge 0 \Leftrightarrow x \in [-1,0]$.

Για $x > 0$ είναι $f(x) = (x-1)^2 \ge 0$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$E = -\int_{-2}^{-1} \left(1 - x^2\right)dx + \int_{-1}^{0} \left(1 - x^2\right)dx + \int_0^2 \left(x^2 - 2x + 1\right)dx \Leftrightarrow$

$E = -\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^2 = \frac{8}{3}$.

32. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2 \Rightarrow$ f συνεχής στο 1.

Για κάθε $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$ είναι $f(x) > 0$ και για κάθε $x \in (-1,0)$ είναι $f(x) < 0$. $E(\Omega) = -\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^e f(x)dx = 2e + 2$.

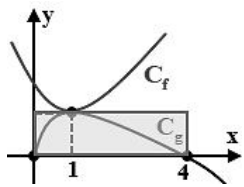
33. $f(x) \ge 0 \Leftrightarrow x(x-\lambda) \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0] \cup [\lambda,+\infty)$ αν $\lambda > 0$ ή $x \in (-\infty,\lambda] \cup [0,+\infty)$ αν $\lambda < 0$. Για $\lambda > 0$ είναι

$E(\Omega) = -\int_0^{\lambda} f(x)dx = -\int_0^{\lambda} \left(x^2 - \lambda x\right)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \lambda\frac{x^2}{2}\right]_0^{\lambda} = \frac{\lambda^3}{6}$.

Πρέπει $\frac{\lambda^3}{6}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\lambda^3=8\Leftrightarrow\lambda=2$.

Για $\lambda<0$ είναι $E(\Omega)=-\int_{\lambda}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{\lambda}(x^2-\lambda x)dx=-\frac{\lambda^3}{6}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\lambda=-2$.

34.α) Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν μεταξύ C_g και x΄x είναι μικρότερο του εμβαδού του ορθογωνίου ΟΑΒΓ με Ο(0,0), Α(4,0), Β(4,1) και Γ(0,1) το οποίο έχει εμβαδόν ίσο με 4 τ.μ.



Άρα $\int_0^4|g(x)|dx<4\Leftrightarrow\int_0^4 g(x)dx<4$

β) Παρατηρούμε ότι $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για x=1. Άρα $\int_0^4 f(x)dx>\int_0^4 g(x)dx=\int_0^4\left(2\sqrt{x}-x\right)dx=$

$$=\int_0^4\left(2x^{\frac{1}{2}}-x\right)dx=\left[4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^4=4\frac{4^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{16}{2}==\frac{4^{\frac{5}{2}}}{3}-8=\frac{2^5}{3}-8=\frac{32}{3}-8=\frac{8}{3}.$$

Αυξημένης δυσκολίας

35. $6f'(x)-g(x)f^2(x)=0\Leftrightarrow g(x)=6\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

$$E(\Omega)=\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2 6\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\left[-\frac{6}{f(x)}\right]_0^2=-\frac{6}{f(2)}+\frac{6}{f(0)}=4.$$

36. Αρχικά θα βρούμε τις τετμημένες των σημείων Α και Β. Είναι
$f(x)=0\Leftrightarrow\ln^2x-\ln x=0\Leftrightarrow\ln x(\ln x-1)=0\Leftrightarrow(\ln x=0\Leftrightarrow x=1)$ ή
$(\ln x=1\Leftrightarrow x=e)$. Επειδή $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[1,e]$, είναι

$$E=-\int_1^e f(x)dx=-\int_1^e\left(\ln^2x-\ln x\right)(x)'dx\Leftrightarrow$$

$$E=-\left[\left(\ln^2x-\ln x\right)x\right]_1^e+\int_1^e\left(\ln^2x-\ln x\right)'xdx\Leftrightarrow$$

$$E=\int_1^e\left(2\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right)xdx=\int_1^e(2\ln x-1)dx=2\int_1^e\ln x(x)'dx-(e-1)\Leftrightarrow$$

$$E=2[x\ln x]_1^e-2\int_1^e\frac{1}{x}\cdot xdx-(e-1)=2e-2(e-1)-(e-1)=3-e.$$

37. $f'(x)=e^x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$. Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=1$, άρα $f(x)\geq 1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$E(\Omega)=\int_0^1\left(e^x-x\right)dx=\left[e^x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=e-\frac{1}{2}-1=e-\frac{3}{2}.$$

38. $f'(x)=-\ln x<0$ για κάθε $x>1$, άρα $f\searrow[1,+\infty)$. Για κάθε $x\geq 1$ είναι $f(x)\leq f(1)=0$, οπότε

$$E(\Omega)=-\int_1^e f(x)dx=-\int_1^e(x-1-x\ln x)dx=-\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^e+\int_1^e\ln x\left(\frac{x^2}{2}\right)'dx=$$

$$=-\frac{e^2}{2}+e+\frac{1}{2}-1+\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx=\ldots=\frac{4e-e^2-1}{4}.$$

39.α) Η G είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,2\pi)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$G'(x)=\left(\sigma\upsilon\nu x+(1-\sigma\upsilon\nu x)\ln(1-\sigma\upsilon\nu x)\right)'=$$

$$=-\eta\mu x+\eta\mu x\cdot\ln(1-\sigma\upsilon\nu x)+\cancel{(1-\sigma\upsilon\nu x)}\frac{\eta\mu x}{\cancel{1-\sigma\upsilon\nu x}}=$$

$$=\cancel{-\eta\mu x}+\eta\mu x\cdot\ln(1-\sigma\upsilon\nu x)+\cancel{\eta\mu x}=f(x)$$ Άρα η G είναι αρχική της f στο $(0,2\pi)$.

β) Είναι $0<\lambda<\pi\Leftrightarrow-\pi<-\lambda<0\Leftrightarrow\pi<2\pi-\lambda<2\pi$ άρα ο τύπος $f(x)=\eta\mu x\cdot\ln(1-\sigma\upsilon\nu x)$ ορίζεται στο $[\lambda,2\pi-\lambda]\subseteq(0,2\pi)$.

Το εμβαδόν είναι $E(\lambda)=\int_\lambda^{2\pi-\lambda}|f(x)|dx=$

$$=-\int_\lambda^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)dx-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx+\int_\pi^{2\pi-\lambda}f(x)dx=$$

$$=-\left[G(x)\right]_\lambda^{\frac{\pi}{2}}+\left[G(x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}-\left[G(x)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi}+\left[G(x)\right]_\pi^{2\pi-\lambda}=$$

$$=-G\left(\frac{\pi}{2}\right)+G(\lambda)+G\left(\frac{3\pi}{2}\right)-G\left(\frac{\pi}{2}\right)-G(\pi)+G\left(\frac{3\pi}{2}\right)+G(2\pi-\lambda)-G(\pi)=$$

$$=-2G\left(\frac{\pi}{2}\right)+2G\left(\frac{3\pi}{2}\right)-2G(\pi)+G(\lambda)+G(2\pi-\lambda)$$

Είναι $G\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right)\ln\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right)=0+(1-0)\ln 1=0$

Είναι $G\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}+\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}\right)\ln\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}\right)=0+(1-0)\ln 1=0$

Είναι $G(\pi)=\sigma\upsilon\nu\pi+(1-\sigma\upsilon\nu\pi)\ln(1-\sigma\upsilon\nu\pi)=-1+2\ln 2=\ln 4-1$

Είναι $G(\lambda)=\sigma\upsilon\nu\lambda+(1-\sigma\upsilon\nu\lambda)\ln(1-\sigma\upsilon\nu\lambda)$

Είναι $G(2\pi-\lambda)=\sigma\upsilon\nu(2\pi-\lambda)+(1-\sigma\upsilon\nu(2\pi-\lambda))\ln(1-\sigma\upsilon\nu(2\pi-\lambda))=$

$=\sigma\upsilon\nu\lambda+(1-\sigma\upsilon\nu\lambda)\ln(1-\sigma\upsilon\nu\lambda)=G(\lambda)$

Άρα είναι $E(\lambda)=-2G(\pi)+G(\lambda)+G(2\pi-\lambda)=-2G(\pi)+2G(\lambda)=$

$=-2\ln 4+2+2\sigma\upsilon\nu\lambda+2(1-\sigma\upsilon\nu\lambda)\ln(1-\sigma\upsilon\nu\lambda)=$

$=2\sigma\upsilon\nu\lambda+2(1-\sigma\upsilon\nu\lambda)\ln(1-\sigma\upsilon\nu\lambda)-\ln 16+2$

β) 1ος τρόπος: Επειδή ο τύπος $f(x)=\eta\mu x\cdot\ln(1-\sigma\upsilon\nu x)$, δεν δίνει τις τιμές στο 0 και 1 τότε το ζητούμενο εμβαδόν θα ισούται με το εμβαδόν Ε(λ) που περικλείεται από την C_f, τον x΄x, την $x=\lambda$ και την $x=2\pi-\lambda$ όταν το λ είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\lambda)=$

$=2\cdot 1+2\cdot 0-\ln 16+2=4-\ln 16=\ln e^4-\ln 16=\ln\frac{e^4}{16}$ γιατί

$\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\left[(1-\sigma\upsilon\nu\lambda)\ln(1-\sigma\upsilon\nu\lambda)\right]=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\frac{\ln(1-\sigma\upsilon\nu\lambda)}{\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu\lambda}}\overset{1-\sigma\upsilon\nu\lambda=u}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}$

$=\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\frac{-u^{\not 2}}{\not u}=0$

2ος τρόπος: Στο $(0,2\pi)$ η f έχει αρχική την συνάρτηση

$G(x)=\sigma\upsilon\nu x+(1-\sigma\upsilon\nu x)\ln(1-\sigma\upsilon\nu x)$

Έστω F μία αρχική της f στο $[0,2\pi]$. Τότε η F είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[0,2\pi]$. Άρα $F(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=1$ και $F(2\pi)=\lim\limits_{x\to 2\pi^-}G(x)=1$.

Άρα μία αρχική της f είναι η $F(x)=\begin{cases}G(x)\,,\ 0<x<2\pi\\ 1\quad,\ x=0\ \text{ή}\ x=\pi\end{cases}$

Άρα το εμβαδόν είναι $E=\int_0^{2\pi}|f(x)|dx=$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx+\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx=$$

$$=-\left[G(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[G(x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}-\left[G(x)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi}+\left[G(x)\right]_{\pi}^{2\pi}=$$

$$=-G\left(\frac{\pi}{2}\right)+G(0)+G\left(\frac{3\pi}{2}\right)-G\left(\frac{\pi}{2}\right)-G(\pi)+G\left(\frac{3\pi}{2}\right)+G(2\pi)-G(\pi)=$$

$$=-2G\left(\frac{\pi}{2}\right)+2G\left(\frac{3\pi}{2}\right)-2G(\pi)+G(0)+G(2\pi)=-2G(\pi)+2G(0)=$$

$$=-2\ln 4+2+2=4-\ln 16=\ln e^4-\ln 16=\ln\frac{e^4}{16}\quad \text{τ.μ.}$$

40.α) Είναι $f(x)=x\ln x\geq 0$ για κάθε $x\geq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E\left[\alpha(t)\right]=\int_1^{\alpha(t)}\left|f(x)\right|dx=\int_1^{\alpha(t)}x\ln x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\alpha(t)}-\int_1^{\alpha(t)}\frac{x}{2}dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\alpha(t)}-\int_1^{\alpha(t)}\frac{x}{2}dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\alpha(t)}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\alpha(t)}=$$

$$=\frac{\alpha^2(t)}{2}\ln\left[\alpha(t)\right]-\frac{\alpha^2(t)}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2\alpha^2(t)\ln\left[\alpha(t)\right]-\alpha^2(t)+1}{4}$$

β) Το σημείο $M\left(\alpha(t),0\right)$ απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με ταχύτητα 1cm/sec και κινείται πάνω στον άξονα x΄x οπότε $\alpha'(t)=1\Leftrightarrow\alpha(t)=t+c, c\in\mathbb{R}$. Για $t=0$ είναι $c=0$ οπότε $\alpha(t)=t$. Την χρονική στιγμή $t=2$ sec θα είναι $\alpha(2)=2$.

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι

$$E'(t)=\frac{4\alpha(t)\alpha'(t)\ln\left[\alpha(t)\right]+\frac{2\alpha^{\not 2}(t)}{\not\alpha(t)}\alpha'(t)-2\alpha(t)\alpha'(t)}{4}=\alpha(t)\alpha'(t)\ln\left[\alpha(t)\right]$$

Την χρονική στιγμή $t=2$ sec θα είναι

$$E'(2)=\alpha(2)\alpha'(2)\ln\left[\alpha(2)\right]=2\cdot 1\cdot\ln 2=2\ln 2\ \text{cm}^2./\sec$$

41. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1\Leftrightarrow f'(x_0)=1$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, άρα και $f'(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{1}f'(x)dx=\left[f(x)\right]_{-1}^{1}=f(1)-f(-1)=1-(-1)=2.$$

42. $f(1)=0,\ f'(1)=0$. f κοίλη $\Rightarrow f'\searrow[0,2]$, άρα για

$0<x<1\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(1)=0$ και για $1<x<2\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(1)=0$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega)=\int_0^2\left|f'(x)\right|dx=\int_0^1 f'(x)dx-\int_1^2 f'(x)dx\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=f(1)-f(0)-f(2)+f(1)=-\left(f(0)+f(2)\right)=3.$

43. $E(\Omega)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(3x^2-2x\int_0^1 f(x)dx+5\right)dx\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=\left[x^3-x^2\int_0^1 f(x)dx+5x\right]_0^1=1-E(\Omega)+5\Leftrightarrow 2E(\Omega)=6\Leftrightarrow E(\Omega)=3.$

44. $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x)f(t)dx\right)dt=\int_0^1 f(u)du\Leftrightarrow\int_0^1 f(t)\left(\int_0^1 f(x)dx\right)dt=\int_0^1 f(u)du\Leftrightarrow$

$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f(u)du\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx\Leftrightarrow$

$E^2(\Omega)=E(\Omega)\Leftrightarrow E^2(\Omega)-E(\Omega)=0\Leftrightarrow E(\Omega)\left(E(\Omega)-1\right)=0\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=1$ ή $E(\Omega)=0$ που είναι αδύνατο.

45.Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0=f(0)\Leftrightarrow$ f συνεχής στο 0.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$,

άρα ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

α) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες και την ευθεία $x=\lambda$ είναι $E(\lambda)=-\int_\lambda^0 xe^x dx=(\lambda-1)e^\lambda+1$.

β) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες και την ευθεία $x=\kappa$ είναι $E(\kappa)=\int_0^\kappa xe^{-x}dx=-(\kappa+1)e^{-\kappa}+1$.

γ) Είναι $E_1=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}(\lambda-1)e^\lambda=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\dfrac{\lambda-1}{e^{-\lambda}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-\lambda}}=0$ και

$E_2=\lim\limits_{k\to+\infty}E(\kappa)=\lim\limits_{k\to+\infty}(k+1)e^{-k}=\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{k+1}{e^k}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1}{e^k}=0.$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega)=E_1+E_2=2$.

46.α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-1}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0\Rightarrow y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

Αν $\lambda\in(0,1)$ είναι $f(x)<0$, οπότε

$$E(\lambda)=-\int_\lambda^1\frac{\ln x-1}{x}dx=-\int_\lambda^1(\ln x-1)(\ln x-1)'\,dx\Leftrightarrow$$

$$E(\lambda)=\left[-\frac{(\ln x-1)^2}{2}\right]_\lambda^1=-\frac{1}{2}+\frac{(\ln\lambda-1)^2}{2}=\frac{\ln^2\lambda-2\ln\lambda}{2}=\frac{\ln\lambda(\ln\lambda-2)}{2}.$$

Αν $\lambda\in(1,e)$ είναι $f(x)<0$, οπότε

$$E(\lambda)=-\int_1^\lambda\frac{\ln x-1}{x}dx=\int_\lambda^1\frac{\ln x-1}{x}dx=\frac{-\ln^2\lambda+2n\lambda}{2}.$$

Αν $\lambda>e$, είναι $f(x)>0$, οπότε

$$E(\lambda)=\int_1^\lambda\frac{\ln x-1}{x}dx=-\int_\lambda^1\frac{\ln x-1}{x}dx=\frac{\ln\lambda(\ln\lambda-2)}{2}.$$

β) i. $\lim\limits_{\lambda\to0}\left[\lambda^2\cdot E(\lambda)\right]=\lim\limits_{\lambda\to0}\left[\lambda^2\dfrac{\ln^2\lambda-2\ln\lambda}{2}\right]=\lim\limits_{\lambda\to0}\dfrac{\ln^2\lambda-2\ln\lambda}{\frac{2}{\lambda^2}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}$

$$\lim_{\lambda\to0}\frac{\frac{2\ln\lambda}{\lambda}-\frac{2}{\lambda}}{-\frac{4}{\lambda^3}}=\lim_{\lambda\to0}\frac{1-\ln\lambda}{\frac{2}{\lambda^2}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{\lambda\to0}\frac{-\frac{1}{\lambda}}{-\frac{4}{\lambda^3}}=\lim_{\lambda\to0}\frac{\lambda^2}{4}=0.$$

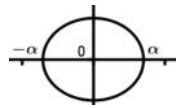
ii. $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\lambda^2\cdot E(\lambda)\right]=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\lambda^2\dfrac{\ln\lambda(\ln\lambda-2)}{2}\right]=+\infty$ αφού

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\ln^2\lambda-2\ln\lambda+2\right)\underset{\substack{\lambda\to+\infty,\\ \theta\to+\infty}}{\overset{\theta=\ln\lambda}{=}}\lim_{\theta\to+\infty}\left(\theta^2-2\theta+2\right)=\lim_{\theta\to+\infty}\theta^2=+\infty.$$

.

47. $y^2=9x\Leftrightarrow y=\pm3\sqrt{x}$. $E(\Omega)=2\int_0^1 3\sqrt{x}dx=2\left[3\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=2\left[2x\sqrt{x}\right]_0^1=4$.

48. $C:\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1\Leftrightarrow \beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2\Leftrightarrow$



$\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2-\beta^2x^2\Leftrightarrow \alpha^2y^2=\beta^2\left(\alpha^2-x^2\right)\Leftrightarrow$

$y^2=\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\alpha^2-x^2\right)\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\alpha^2-x^2\right)}\Leftrightarrow y=\pm\dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν αποτελείται από το εμβαδόν μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και $-f$ με $f(x)=\dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$. Λόγω συμμετρίας ως προς τον άξονα x΄x το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega)=2\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(x)|dx=2\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx==2\frac{\beta}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}dx=\frac{2\beta}{\cancel{\alpha}}\pi\cancel{\alpha}^2=2\pi\alpha\beta$$

αφού το $\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}dx$ παριστάνει το εμβαδόν του θετικού ημικυκλίου του κύκλου $x^2+y^2=\alpha^2$.

49. $\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 4dx \underset{x=0\Rightarrow u=1,\ x=1\Rightarrow u=0}{\overset{1-x=u,\ dx=-du}{\Leftrightarrow}} \int_0^1 f(x)dx-\int_1^0 f(u)du=4\Leftrightarrow$

$2\int_0^1 f(x)dx=4\Leftrightarrow E(\Omega)=2$.

50.α) $\int_0^{\pi} f(x)dx+\int_0^{\pi} f(\pi-x)dx=\int_0^{\pi}2dx \underset{x=0\Rightarrow u=\pi,\ x=\pi\Rightarrow u=0}{\overset{\pi-x=u,\ dx=-du}{\Leftrightarrow}} \int_0^{\pi} f(x)dx-$

$\int_{\pi}^0 f(u)du=2\pi\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)dx+\int_0^{\pi} f(x)dx=2\pi\Leftrightarrow 2\int_0^{\pi} f(x)dx=2\pi\Leftrightarrow E=\pi$.

όπου Ε το ζητούμενο εμβαδόν.

β) Για κάθε $x\in[0,\pi]$ είναι

$$g(x)=\frac{\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^2x}+1=\frac{\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu x+1+\eta\mu^2x}{1+\eta\mu^2x}=\frac{\eta\mu^2x(\sigma\upsilon\nu x+1)+1}{1+\eta\mu^2x}>0.$$

$g(\pi-x)=\dfrac{\eta\mu^2(\pi-x)\sigma\upsilon\nu(\pi-x)}{1+\eta\mu^2(\pi-x)}+1=\dfrac{\eta\mu^2x(-\sigma\upsilon\nu x)}{1+\eta\mu^2x}+1\Leftrightarrow g(\pi-x)=$

$-\dfrac{\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^2x}+1$. Είναι $g(x)+g(\pi-x)=\dfrac{\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^2x}+1-\dfrac{\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^2x}+1=2$,

οπότε από το α σκέλος το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\pi$.

51. $f''(x)+f''(4-x)=2\Leftrightarrow f'(x)-f'(4-x)=2x+c_1$, $c_1\in\mathbb{R}$.

Για $x=2$ είναι $f'(2)-f'(2)=4+c_1 \Leftrightarrow c_1=-4$, άρα

$f'(x)-f'(4-x)=2x-4 \Leftrightarrow f(x)+f(4-x)=x^2-4x+c_2$. Για $x=2$ είναι

$f(2)+f(2)=-4+c_2 \Leftrightarrow c_2=6$, άρα $f(x)+f(4-x)=x^2-4x+6$, $x\in\mathbb{R}$.

$$\int_1^3 f(x)dx+\int_1^3 f(4-x)dx=\int_1^3\left(x^2-4x+6\right)dx \overset{\substack{4-x=u\\ dx=-du\\ \Leftrightarrow\\ x=1\Rightarrow u=3\\ x=3\Rightarrow u=1}}{}$$

$$\int_1^3 f(x)dx-\int_3^1 f(u)du=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+6x\right]_1^3 \Leftrightarrow$$

$$2\int_1^3 f(x)dx=\frac{14}{3} \Leftrightarrow 2E(\Omega)=\frac{14}{3} \Leftrightarrow E(\Omega)=\frac{7}{3}.$$

52.α) $\int_0^4 f'(x)dx=6-2f(0) \Leftrightarrow \left[f(x)\right]_0^4=6-2f(0) \Leftrightarrow$

$f(4)-f(0)=6-2f(0) \Leftrightarrow f(4)=6-f(0)$.

Για $x=4$ είναι $f(4)=\lambda-f(0) \Leftrightarrow 6-\cancel{f(0)}=\lambda-\cancel{f(0)} \Leftrightarrow \lambda=6$.

β) $f(x)=6-f(4-x) \Rightarrow \int_0^4 f(x)dx=\int_0^4 6dx-\int_0^4 f(4-x)dx \overset{\substack{4-x=u\\ dx=-du\\ \Leftrightarrow\\ x=0\Rightarrow u=4\\ x=4\Rightarrow u=0}}{}$

$$\int_0^4 f(x)dx=24+\int_4^0 f(u)du \Leftrightarrow \int_0^4 f(x)dx=24-\int_0^4 f(x)dx \Leftrightarrow$$

$2\int_0^4 f(x)dx=24 \Leftrightarrow \int_0^4 f(x)dx=12$, άρα $E(\Omega)=12$.

53.α) $f'(x)\sigma\upsilon\nu x+f(x)\eta\mu x=f(x)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{f'(x)\sigma\upsilon\nu x+f(x)\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=ce^x \Leftrightarrow f(x)=ce^x\sigma\upsilon\nu x$, $c\in\mathbb{R}$.

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow ce^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}=e^{\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow c=2$, άρα $f(x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x = 0, είναι $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2e^x\sigma\upsilon\nu x\right)=2$ και επειδή

η f είναι συνεχής στο π, είναι $f(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi^-}\left(2e^x\sigma\upsilon\nu x\right)=-2e^{\pi}$.

Επομένως $f(x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

β) $E(\Omega)=\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sigma\upsilon\nu x\left(e^x\right)'dx=\left[2\sigma\upsilon\nu x e^x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\eta\mu x e^x dx \Leftrightarrow$

$E(\Omega)=e^{\frac{\pi}{3}}-2+\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\eta\mu x\left(e^x\right)'dx=e^{\frac{\pi}{3}}-2+\left[2\eta\mu x e^x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sigma\upsilon\nu x e^x dx \Leftrightarrow$

$E(\Omega)=e^{\frac{\pi}{3}}-2+\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}}-E(\Omega)\Leftrightarrow 2E(\Omega)=e^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\sqrt{3}\right)-2\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=\dfrac{e^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\sqrt{3}\right)-2}{2}$

54.α) Έστω $g(x)=f(x)-x^2$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=f'(x)-2x$,
$g''(x)=f''(x)-2>0\Rightarrow g'\nearrow\mathbb{R}$. Για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)>g'(0)=0\Rightarrow$
$g\nearrow[0,+\infty)$. Για κάθε $x\geq 0$ είναι $g(x)\geq g(0)=1\Leftrightarrow f(x)\geq x^2+1$.
β) Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$ είναι:

$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left[\dfrac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow E>\dfrac{4}{3}$.

γ) $\int_0^\lambda f(x)dx>\int_0^\lambda\left(x^2+1\right)dx=\left[\dfrac{x^3}{3}+x\right]_0^\lambda=\dfrac{\lambda^3}{3}+\lambda\Leftrightarrow E(\lambda)>\dfrac{\lambda^3}{3}+\lambda$

Είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\dfrac{\lambda^3}{3}+\lambda\right)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^3}{3}=+\infty$, άρα $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=+\infty$.

δ) Είναι $f(x)\geq x^2+1\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow}xf(x)\geq x^3+x$. Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για
$x=0$ είναι:

$\int_0^2 xf(x)dx>\int_0^2\left(x^3+x\right)dx\Leftrightarrow\int_0^2 g(x)dx>\left[\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}\right]_0^2=4+2=6\Leftrightarrow E_1>6$.

55.α) Από το ΘΜΤ για την f στα $[0,x],[x,3]$ υπάρχουν $\xi_1\in(0,x)$, $x\in(0,3)$
και $\xi_2\in(x,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{f(x)-1}{x}$ και
$f(\xi_2)=\dfrac{f(3)-f(x)}{3-x}=\dfrac{7-f(x)}{3-x}$. Είναι $\xi_1<\xi_2\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x)-1}{x}>\dfrac{7-f(x)}{3-x}\Leftrightarrow 3f(x)-\cancel{xf(x)}-3+x>7x-\cancel{xf(x)}\Leftrightarrow f(x)>2x+1$

β) $\int_1^2 f(x)dx>\int_1^2(2x+1)dx\Leftrightarrow E(\Omega)>\left[x^2+x\right]_1^2=4+2-1-1=4$.

56.α) Έστω $g(x)=f(x)-2x$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=f'(x)-2<0\Rightarrow g\searrow\mathbb{R}$.
Για κάθε $x\geq 0$ είναι $g(x)\leq g(0)=1\Leftrightarrow f(x)-2x\leq 1\Leftrightarrow f(x)\leq 2x+1$.
β) Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$ είναι:
$\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1(2x+1)dx\Leftrightarrow E(\Omega)<\left[x^2+x\right]_0^1=2$.

57.α) $f'(x)-2f(x)>2\Leftrightarrow e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)>2e^{-2x}$. Έστω
$g(x)=f(x)e^{-2x}+e^{-2x}$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι
$g'(x)=e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)-2e^{-2x}>0\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$. Για κάθε $x\geq 0$ είναι
$g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow f(x)e^{-2x}+e^{-2x}\geq 2\Leftrightarrow f(x)+1\geq 2e^{2x}\Leftrightarrow f(x)\geq 2e^{2x}-1$, $x\in\mathbb{R}$.
β) $\int_0^\lambda f(x)dx\geq\int_0^\lambda\left(2e^{2x}-1\right)dx\Leftrightarrow E(\lambda)\geq\left[e^{2x}-x\right]_0^\lambda=e^{2\lambda}-\lambda-1$.
Είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(e^{2\lambda}-\lambda-1\right)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\lambda\left(\frac{e^{2\lambda}}{\lambda}-1-\frac{1}{\lambda}\right)\right]=+\infty$, γιατί
$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{e^{2\lambda}}{\lambda}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{2e^{2\lambda}}{1}=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=+\infty$.

Εμβαδό και αντίστροφη συνάρτηση

58.α) $f'(x)=12x^2+2>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ $1-1$ και αντιστρέφεται.
β) $E(\Omega)=\int_{-6}^0\left|f^{-1}(x)\right|dx$. $f^{-1}(x)\geq 0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}(x)\right)\geq f(0)\Leftrightarrow x\geq -6$, οπότε
$E(\Omega)=\int_{-6}^0 f^{-1}(x)dx$.
Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$. Για $x=-6$ είναι
$f(u)=-6=f(0)\Leftrightarrow u=0$ και για $x=0$ είναι $f(u)=0=f(1)\Leftrightarrow u=1$. Άρα
$E(\Omega)=\int_0^1 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=\cancel{f(1)}^{0}-\int_0^1\left(4u^3+2u-6\right)du=$
$-\left[u^4+u^2-6u\right]_0^1=4$.

59.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με
$f'(x)=e^{x^2}+x\cdot 2xe^{x^2}=e^{x^2}\left(1+2x^2\right)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο
$\mathbb{R}$, οπότε είναι $1-1$ άρα αντιστρέφεται.
β) $f^{-1}(x)>0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}(x)\right)>f(0)\Leftrightarrow x>0$ και $f^{-1}(x)<0\Leftrightarrow x<f(0)=0$.

γ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_0^e f^{-1}(x)dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x)=u$. Τότε $x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$. Για $x=0$ είναι $f(u)=0=f(0)\Leftrightarrow u=0$ και για $x=e$ είναι $f(u)=e=f(1)\Leftrightarrow u=1$.

Άρα $E=\int_0^1 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=f(1)-\int_0^1 ue^{u^2}du \Leftrightarrow$

$E=e-\left[\frac{1}{2}e^{u^2}\right]_0^1=e-\frac{e-1}{2}=\frac{e+1}{2}$.

Αυξημένης δυσκολίας

60.α) $\left(4f^3(x)+2f(x)-6+x\right)'=0\Leftrightarrow 12f^2(x)f'(x)+2f'(x)+1=0\Leftrightarrow$

$f'(x)=-\frac{1}{12f^2(x)+2}<0\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}\Rightarrow f\ 1-1$.

β) $4f^3(x)+2f(x)-6+x=0\Leftrightarrow f(x)\left(4f^2(x)+2\right)=6-x$. Επειδή $4f^2(x)+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\leq 6$. Επειδή $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, έχουμε: $4f^3(x)+2f(x)-6+x=0\Rightarrow$

$4y^3+2y-6+f^{-1}(y)=0\Leftrightarrow f^{-1}(y)=-4y^3-2y+6,\ y\in\mathbb{R}$.

Είναι $E(\Omega)=\int_0^6 f(x)dx$. Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=-4y^3-2y+6$ και $dx=\left(-12y^2-2\right)dy$. Για $x=0$ είναι $y=1$ και για $x=6$ είναι $y=0$,

άρα $E(\Omega)=\int_1^0 y\left(-12y^2-2\right)dy=\int_0^1\left(12y^3+2y\right)dy=\left[3y^4+y^2\right]_0^1=4$.

Εμβαδό και αρχική συνάρτηση

61.α) $F(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)=\ln\frac{x^2+1-1}{x^2+1}=\ln\frac{x^2}{x^2+1}=\ln x^2-\ln\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow$

$F(x)=2\ln|x|-\ln\left(x^2+1\right)$,

$F'(x)=\frac{2}{x}-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2x^2+2-2x^2}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{2}{x^3+x}=f(x)$. Άρα η F είναι παράγουσα της f.

β) Είναι $f(x)=\frac{2}{x\left(x^2+1\right)}<0$ για κάθε $x<0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=-\int_{-2}^{-1}f(x)dx=-\left[F(x)\right]_{-2}^{-1}=-F(-1)+F(-2)\Leftrightarrow$$

$$E=-\ln\frac{(-1)^2}{(-1)^2+1}+\ln\frac{(-2)^2}{(-2)^2+1}=-\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{4}{5}=\ln\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}}=\ln\frac{8}{5}.$$

62.α) $F(x)=\ln\left(\frac{1}{\eta\mu x}+2\sigma\upsilon\nu x\right)=\ln\frac{1+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\Leftrightarrow$

$$F(x)=\ln\frac{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x+2\eta\mu x\eta\mu x}{\eta\mu x}=\ln\frac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2}{\eta\mu x}\Leftrightarrow$$

$$F(x)=\ln(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2-\ln(\eta\mu x)=2\ln(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)-\ln(\eta\mu x).$$

$$F'(x)=2\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu^2x-\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}\Leftrightarrow$$

$$F'(x)=\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2x-\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}=\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2x-1}{\eta\mu x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}=f(x).$$

β) $f(x)=\frac{\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)-1}{\eta\mu x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}<0$ για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ γιατί

$\sigma\upsilon\nu x\le\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$, $\eta\mu x\ge\eta\mu\frac{\pi}{4}$, οπότε $\sigma\upsilon\nu x\le\eta\mu x\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\le0$ και επειδή $\eta\mu x>0$, είναι $\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)-1<0$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=-\int_{\pi/4}^{\pi/2}f(x)dx=-\left[F(x)\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=-F\left(\frac{\pi}{2}\right)+F\left(\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$E=2\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=2\ln\sqrt{2}-\ln\sqrt{2}+\ln2\Leftrightarrow$$

$$E=\ln\sqrt{2}+\ln2\Leftrightarrow E=\frac{1}{2}\ln2+\ln2\Leftrightarrow E=\frac{3}{2}\ln2.$$

Αυξημένης δυσκολίας

63. Είναι $F'(x)=f(x)>0\Rightarrow F\nearrow\mathbb{R}$. Για κάθε $x\le1\overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow}F(x)\le F(1)=0$, οπότε

$$E(\Omega)=-\int_0^1F(x)dx=-\int_0^1(x)'F(x)dx=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1xf(x)dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -F(1) + \int_0^1 x e^{x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} e^{x^2} \right)' dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

64. Έστω ότι η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f. Τότε $E_2 = -\int_1^2 f(x)dx = -F(2) + F(1)$. Στη περίπτωση αυτή η C_1 θα είναι η γραφική παράσταση της F, οπότε από το σχήμα προκύπτει ότι $F(1) = 2$, $F(2) = \frac{1}{4}$, άρα $E_2 = -\frac{1}{4} - 2 = -\frac{9}{4}$ άτοπο. Άρα η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της αρχικής της.

65.α) $x^2 = u \Rightarrow 2xdx = du$. Για $x = 0$ είναι $u=0$ και για $x=1$ είναι $u=1$.

Τότε: $\int_0^\alpha x^3 g(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^\alpha x^2 g(x^2) 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha^2} u g(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha^2} x g(x) dx$.

β) i. Η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow F \nearrow \mathbb{R}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $F(x) > F(0) = 0$.

ii. Για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $h(x) \geq 0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$E = \int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 x^3 F(x^2) dx$ και με βάση το α σκέλος είναι

$$E = \int_0^1 x F(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)' F(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} F(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} F'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} F(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = 1 - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx = 1 - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx \Leftrightarrow$$

$$E = 1 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = 1 - \int_0^1 1 dx + \int_0^1 f(x) dx = 1 - 1 + \left[F(x) \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$E = F(1) - F(0) = 2$.

Εμβαδό χωρίου που σχηματίζεται από δύο γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

66.α) $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$.

Για κάθε $x < 1$ είναι $h(x) < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $h(x) > 0$.

$$E(\Omega) = -\int_{-1}^1 (x^3 + x - 2) dx + \int_1^2 (x^3 + x - 2) dx = \frac{29}{4}.$$

β) $h(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x + 4 = 2(x-1)(x-2) < 0$ για κάθε $x \in (1,2)$.

$E(\Omega)=-\int_1^2\left(2x^2-6x+4\right)dx=\frac{1}{3}$.

γ) $h(x)=f(x)-g(x)=\left(x^2-x\right)e^x=x(x-1)e^x<0 \quad \forall x\in(0,1)$

$E(\Omega)=-\int_0^1\left(x^2-x\right)e^x dx=-\left[\left(x^2-x\right)e^x\right]_0^1+\int_0^1(2x-1)e^x dx=$

$=\left[(2x-1)e^x\right]_0^1-\int_0^1 2e^x dx=3-e$.

67.α) $h(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{x^2}+2x$.

Αν $\lambda>1$, τότε $E(\lambda)=\int_1^\lambda h(x)dx=\int_1^\lambda\left(\frac{1}{x^2}+2x\right)dx=\left[-\frac{1}{x}+x^2\right]_1^\lambda=-\frac{1}{\lambda}+\lambda^2$.

Αν $\lambda\in(0,1)$, τότε $E(\lambda)=\int_\lambda^1 h(x)dx=\frac{1}{\lambda}-\lambda^2$. Τέλος αν $\lambda=1$, τότε $E(\lambda)=0$.

β) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}+\lambda^2\right)=+\infty$.

68.α) Αν $\lambda\in(0,1)$, τότε

$E(\lambda)=\int_\lambda^1(-\ln x-\ln x)dx=\int_\lambda^1(-2\ln x)(x)'dx=2\lambda(\ln\lambda-1)+2$.

Αν $\lambda>1$, τότε $E(\lambda)=\int_1^\lambda\left(\ln x-(-\ln x)\right)dx=-\int_\lambda^1 2\ln x dx=2\lambda(\ln\lambda-1)+2$.

β) $\lim\limits_{\lambda\to0^+}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\left[2\lambda(\ln\lambda-1)+2\right]=2$, γιατί

$\lim\limits_{\lambda\to0^+}2\lambda(\ln\lambda-1)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\frac{\ln\lambda-1}{\frac{1}{2\lambda}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{\lambda\to0^+}\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{2\lambda^2}}=\lim\limits_{\lambda\to0^+}(-2\lambda)=0$ και

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[2\lambda(\ln\lambda-1)+2\right]=+\infty$.

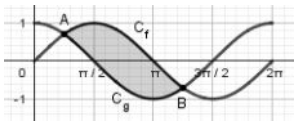
69.α) Αρχικά θα βρούμε τη τετμημένη του Α. Για $x\in(0,\pi)$ είναι

$\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$.

$E_1=\int_0^{\pi/4}(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)dx=\left[\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi/4}=$

$\sqrt{2}-1$.

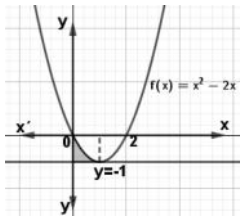
β) Θα βρούμε την τετμημένη του Β.



Για $x \in (\pi, 2\pi)$ είναι $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)\,dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}$.

70. Επειδή είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1,3]$, το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x)\,dx$ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$. Λόγω όμως της συμμετρίας της f ως προς το σημείο $M(2,1)$ το εμβαδόν ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ όπου Α(1,0), Β(3,0) και Γ(3,2). Άρα είναι $\int_1^3 f(x)\,dx = \frac{1}{2}(AB)(B\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 2 = 2$ τ.μ.

71. $(OAB) = \frac{1}{2}(OB)(AB) = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 12 = 12$. Το χωρίο Ω_1 που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$ έχει εμβαδόν $E(\Omega_1) = \int_0^2 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_0^2 = 8$, οπότε το χωρίο Ω_2 που περικλείεται από την ΟΑ και τη C_f έχει εμβαδό $E(\Omega_2) = 12 - 8 = 4$. Είναι $\frac{E(\Omega_2)}{E(\Omega_1)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.



72. $E(\Omega) = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

73. Επειδή η ΑΒ έχει εξίσωση x= κ, το Α έχει συντεταγμένες (κ, κ^3). Το τρίγωνο ΟΑΒ έχει εμβαδό: $(OAB) = \frac{1}{2}(OB)(AB) = \frac{1}{2}\cdot\kappa\cdot\kappa^3 = \frac{1}{2}\kappa^4$.

Το E_2 είναι: $E_2 = \int_0^\kappa x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^\kappa = \frac{\kappa^4}{4}$.

Είναι $E_2 = \int_0^\kappa x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^\kappa = \frac{\kappa^4}{4} = \frac{1}{2}(OAB)$, οπότε και $E_1 = \frac{1}{2}(OAB)$, άρα $E_1 = E_2$.

Αυξημένης δυσκολίας

74. Έστω $A(\alpha,\alpha^4)$, $\alpha>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=4x^3$.

Η ε έχει εξίσωση: $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y-\alpha^4=4\alpha^3(x-\alpha)\Leftrightarrow$

$y=4\alpha^3x-3\alpha^4$. Για $y=0$ είναι $0=4\alpha^3x-3\alpha^4\Leftrightarrow x=\dfrac{3\alpha}{4}$, άρα $B\left(\dfrac{3\alpha}{4},0\right)$.

Το τρίγωνο ΟΑΒ έχει εμβαδό

$(OAB)=\dfrac{1}{2}(OB)\cdot d(A,x'x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3\alpha}{4}\cdot\alpha^4=\dfrac{3}{8}\alpha^5$. Η ευθεία ΟΑ έχει $\lambda=\dfrac{\alpha^4}{\alpha}=\alpha^3$

και εξίσωση $y=\alpha^3x$. Για το E_1 έχουμε

$$E_1=\int_0^{\alpha}\left(\alpha^3x-x^4\right)dx=\left[\alpha^3\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\alpha}=\frac{1}{2}\alpha^5-\frac{1}{5}\alpha^5=\frac{3}{10}\alpha^5.$$

$$E_2=(OAB)-E_1=\frac{3}{8}\alpha^5-\frac{3}{10}\alpha^5=\frac{3}{40}\alpha^5=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{10}\alpha^5\Leftrightarrow E_2=\frac{1}{4}E_1\Leftrightarrow E_1=4E_2.$$

75.α) $f(x)=3\Leftrightarrow 4x-x^2=3\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=3$.

$$E_1=\int_0^1\left(3-4x+x^2\right)dx=\left[3x-2x^2+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{4}{3}.$$

β) $$E_2=\int_1^3\left(4x-x^2-3\right)dx=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}=E_1.$$

76.α) $h(x)=f(x)-g(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$h'(x)=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=-x\eta\mu x<0\Rightarrow h\searrow\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\overset{h\searrow}{\Leftrightarrow}h(0)\ge h(x)\ge h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow -1\le h(x)\le 0$.

$$E(\Omega)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\eta\mu x)'dx-\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$-\left[x\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x dx+1=2-\frac{\pi}{2}.$$

β) $h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-2x-2$, $x\in[1,e]$.

$h'(x)=\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{1-2x}{x}<0\Rightarrow h\searrow[1,e]$, άρα

$h(1)\geq h(x)\geq h(e)\Leftrightarrow -2e-1\leq h(x)\leq -4<0$.

$E(\Omega)=-\int_1^e h(x)dx=-\int_1^e(\ln x-2x-2)dx=-\int_1^e \ln x\,(x)'dx+\left[x^2+2x\right]_1^e\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=-\left[x\ln x\right]_1^e+\int_1^e\dfrac{1}{x}xdx+e^2+2e-1-2=-e+e-1+e^2+2e-3=e^2+2e-4$.

γ) $h(x)=f(x)-g(x)=2e^x-x^2-2x-2,\ x\in[-1,1]$.

$h'(x)=2e^x-2x-2=2\left(e^x-x-1\right)>0$ για κάθε $x\neq 0$, άρα $h\nearrow\mathbb{R}$.

Για κάθε $x<0$ είναι $h(x)<0$ και για κάθε $x>0$ είναι $h(x)>0$.

$E(\Omega)=\int_{-1}^1 h(x)dx=-\int_{-1}^0 h(x)dx+\int_0^1 h(x)dx=...=2e+\dfrac{2}{e}-6$.

77. $f''(x)=g''(x)+e^x\Leftrightarrow\left(f'(x)\right)'=\left(g'(x)+e^x\right)'\Leftrightarrow f'(x)=g'(x)+e^x+c$

$c\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $f'(0)=g'(0)+1+c\Leftrightarrow c=0$ και

$f'(x)=g'(x)+e^x\Leftrightarrow f'(x)=\left(g(x)+e^x\right)'\Leftrightarrow f(x)=g(x)+e^x+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ είναι $f(0)=g(0)+1+c_1\Leftrightarrow c_1=-1$. Άρα $f(x)-g(x)=e^x-1$.

Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$.

$E(\Omega)=\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1\left(e^x-1\right)dx=e-2$.

78. Είναι $f(x)=6x^2+2x\int_0^1 g(x)dx+10$, άρα και

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(6x^2+2x\int_0^1 g(x)dx+10\right)dx\Leftrightarrow$

$\int_0^1 f(x)dx=\left[2x^3+x^2\int_0^1 g(x)dx+10x\right]_0^1\Leftrightarrow$

$\int_0^1 f(x)dx=2+\int_0^1 g(x)dx+10\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 g(x)dx=12\Leftrightarrow$

$\int_0^1\left(f(x)-g(x)\right)dx=12\Leftrightarrow E(\Omega)=12$.

79. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$, άρα η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=-\frac{1}{x},\ x>0$ όπου $g(x)=x$. Είναι

$$E(\Omega)=-\int_e^{e^2} h(x)dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_e^{e^2}=2-1=1.$$

80.α) Έστω F, G αρχικές των f, g αντίστοιχα.

$E_1=E_2\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta g(x)dx\Leftrightarrow F(\beta)-F(\alpha)=G(\beta)-G(\alpha)\Leftrightarrow$

$F(\beta)-G(\beta)=F(\alpha)-G(\alpha)$. Έστω $h(x)=F(x)-G(x),\ x\in[\alpha,\beta]$. Επειδή οι f, g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ άρα συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Επειδή $h(\alpha)=0=h(\beta)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει

$\xi_1\in(\alpha,\beta):h'(\xi_1)=0\Leftrightarrow f(\xi_1)=g(\xi_1)$.

β) Από το ΘΜΤ για την h στο $[\alpha,\beta]$, υπάρχει

$$\xi\in(\alpha,\beta):h'(\xi)=\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow f(\xi)-g(\xi)=\frac{E_1-E_2}{\beta-\alpha}.$$

Εμβαδό χωρίου που σχηματίζεται από τις γραφικές παραστάσεις αντίστροφων συναρτήσεων

81.α) $f'(x)=2e^{2x}+2>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f\ 1-1$.

β) Έστω $g(x)=f(x)-x=e^{2x}+x-1$. Είναι $g'(x)=2e^{2x}+1>0\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$.

Επειδή $g(0)=0$ το $x=0$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την $y=x$

Για $x>0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)\Leftrightarrow f(x)>x$ και λόγω συμμετρίας είναι και $f(x)>f^{-1}(x)$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\Omega)=\int_0^{e^2+1}\left(f(x)-f^{-1}(x)\right)dx=\int_0^{e^2+1}f(x)dx-\int_0^{e^2+1}f^{-1}(x)dx$$

Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du=\left(2e^{2u}+2\right)du$.

Για $x=0\Rightarrow f(u)=0=f(0)\Leftrightarrow u=0$ και για

$x=e^2+1\Rightarrow f(u)=e^2+1=f(1)\Leftrightarrow u=1$

$$E(\Omega)=\int_0^{e^2+1}\left(e^{2x}+2x-1\right)dx-\int_0^1 u\left(2e^{2u}+2\right)du=\ldots=\frac{1}{2}e^{2e^2+2}+e^4-\frac{1}{2}e^2-2$$

82.α) $f'(x)=1-\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$, άρα

$f\nearrow(0,2\pi)\Rightarrow f\ 1-1$ οπότε αντιστρέφεται.

β) Λόγω συμμετρίας το ζητούμενο εμβαδό είναι διπλάσιο από το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τη $y=x$.

$f(x)-x=\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$ ή $x=\frac{3\pi}{2}$.

$E(\Omega)=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|\sigma\upsilon\nu x|dx=-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x dx=-2\left[\eta\mu x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=4$.

83.α) Είναι $f'(x)=3x^2-12x+12=3\left(x^2-4x+4\right)=3(x-2)^2>0$ για κάθε $x\neq 2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε $1-1$ και αντιστρέφεται.

β) Οι τετμημένες των ζητούμενων σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=x$.

Είναι: $f(x)=x\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-6=x\Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$ ή $x=3$. Οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(1,1)$, $(2,2)$ και $(3,3)$.

γ) Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, το ζητούμενο εμβαδό Ε είναι διπλάσιο από το εμβαδό E_1 του χωρίου που ορίζεται από την C_f και την διχοτόμο $y=x$.

Έστω $h(x)=f(x)-x=x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
h	−	+	−	+	

Είναι $E_1=\int_1^2 h(x)dx-\int_2^3 h(x)dx=\frac{1}{2}$.

Οπότε $E=2E_1=2\cdot\frac{1}{2}=1$ τ.μ.

Αυξημένης δυσκολίας

84. Επειδή $f(x)\neq x$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και η $f(x)-x$ είναι συνεχής, είναι $f(x)>x$ ή $f(x)<x$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Έστω $f(x)>x$, τότε λόγω συμμετρίας είναι $f(x)>x>f^{-1}(x)$, οπότε

$E=\int_\alpha^\beta\left(f(x)-f^{-1}(x)\right)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx$

Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$.

Για $x=\alpha \Rightarrow f(u)=\alpha=f(\alpha) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} u=\alpha$ και για $x=\beta \Rightarrow f(u)=\beta=f(\beta) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} u=\beta$

Οπότε $E=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta uf'(u)du \Leftrightarrow$

$E=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\left[uf(u)\right]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta f(u)du=2\int_\alpha^\beta f(x)dx-\left(\beta^2-\alpha^2\right) \Leftrightarrow$

$E=2\int_\alpha^\beta f(x)dx-2\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta=2\int_\alpha^\beta f(x)dx-2\int_\alpha^\beta xdx=2\int_\alpha^\beta \left(f(x)-x\right)dx$.

Όμοια αν $f(x)<x$.

Εμβαδό χωρίου που σχηματίζεται από τις γραφικές παραστάσεις περισσότερων από δύο συναρτήσεων

85. Έστω $M(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη στο Μ είναι η ευθεία $\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y=2x_0x-x_0^2-1$. Για να διέρχεται από το Α, πρέπει $-1=4x_0-x_0^2-1 \Leftrightarrow x_0^2-4x_0=0 \Leftrightarrow x_0(x_0-4)=0 \Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=4$.

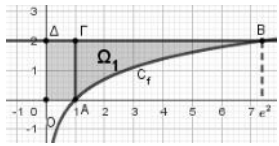
Τότε $\varepsilon_1: y=8x-17$ και $\varepsilon_2: y=-1$. Είναι

$E=\int_0^2\left(x^2-1-(-1)\right)dx+\int_2^4\left(x^2-1-(8x-17)\right)dx=\int_0^2 x^2dx+$

$\int_2^4\left(x^2-8x+16\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x^2+16x\right]_2^4=\frac{16}{3}$.

86. Το χωρίο Ω αποτελείται από το ορθογώνιο ΟΑΓΔ που έχει εμβαδό $(ΟΑΓΔ)=1\cdot 2=2$ και από το χωρίο Ω_1.

Είναι $\ln x=2 \Leftrightarrow x=e^2$, άρα η C_f τέμνει την y=2 στο σημείο $B(e^2,2)$. Το χωρίο Ω_1 έχει εμβαδό



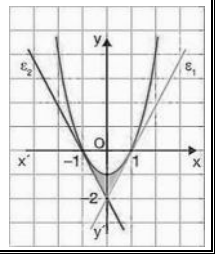
$E(\Omega_1)=\int_1^{e^2}(2-\ln x)dx=\int_1^{e^2}2dx-\int_1^{e^2}\ln x(x)'dx \Leftrightarrow$

$E(\Omega_1)=2(e^2-1)-\left[x\ln x\right]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\cdot xdx=2e^2-2-2e^2+e^2-1=e^2-3$.

Άρα $E(\Omega)=2+E(\Omega_1)=e^2-1$.

87. $f'(x)=2x$. Έστω $M(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη στο Μ είναι η ευθεία $\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y=2x_0x-x_0^2-1$.

Για να διέρχεται από το Α, πρέπει $-2=-x_0^2-1 \Leftrightarrow x_0=\pm 1$

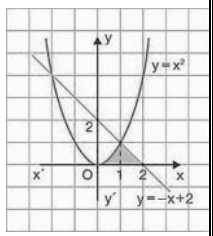


Τότε $\varepsilon_1 : y = 2x - 2$ και $\varepsilon_2 : y = -2x - 2$

$$E(\Omega) = \int_{-1}^{0}\left(x^2 - 1 - (-2x - 2)\right)dx + \int_{0}^{1}\left(x^2 - 1 - (2x - 2)\right)dx \Leftrightarrow E(\Omega) = \frac{2}{3}.$$

88. $E(\Omega) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x + 2)dx =$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 = \frac{5}{6}$$



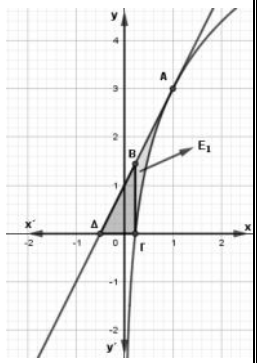
89. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη στο Μ είναι η ευθεία $\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = 2x_0 x - x_0^2$.

Για να διέρχεται από το Α, πρέπει $-\alpha^2 = -x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow x_0 = \pm\alpha$. Τότε $\varepsilon_1 : y = 2\alpha x - \alpha^2$ και $\varepsilon_2 : y = -2\alpha x - \alpha^2$. Τα σημεία Β, Γ έχουν συντεταγμένες $(-\alpha, \alpha^2)$ και (α, α^2) αντίστοιχα. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδό:

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(B\Gamma)\cdot d(A, B\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha \cdot 2\alpha^2 = 2\alpha^3$. Είναι

$$E_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\alpha^2 - x^2\right)dx = \left[\alpha^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{4\alpha^3}{3} \text{ και}$$

$$E_2 = (AB\Gamma) - E_1 = \frac{2\alpha^3}{3}, \text{άρα } E_1 = 2E_2.$$



90. $f'(x) = \frac{2}{x}$, $f'(1) = 2$. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x + 1$. Το ζητούμενο χωρίο αποτελείται από το τρίγωνο ΒΓΔ και από το χωρίο E_1.

$$(B\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(\Delta\Gamma)(B\Gamma) \Leftrightarrow (B\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e\sqrt{e}}\right)\left(\frac{2}{e\sqrt{e}} + 1\right) \Leftrightarrow$$

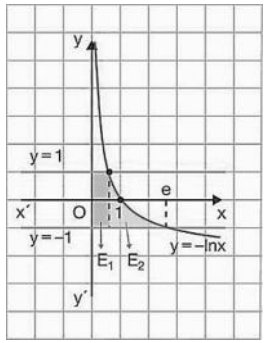
$$(B\Gamma\Delta) = \frac{2e^3 + 3e\sqrt{e} + e}{2e^3}.$$

$$E_1 = \int_{\frac{1}{e\sqrt{e}}}^{1}\left(2x + 1 - 2\ln x - 3\right)dx = \int_{\frac{1}{e\sqrt{e}}}^{1}\left(2x - 2\ln x - 2\right)dx \Leftrightarrow$$

$$E_1=\left[x^2\right]_{\frac{1}{e\sqrt{e}}}^{1}-2\left[x\ln x-x\right]_{\frac{1}{e\sqrt{e}}}^{1}-2+\frac{1}{e\sqrt{e}}\Leftrightarrow E_1=\frac{2e^3-2+3e\sqrt{e}}{2e^3}.$$

$$E(\Omega)=(B\Gamma\Delta)+E_1=\frac{4e^3+e-2+6e\sqrt{e}}{2e^3}.$$

91. $E(\Omega)=E_1+E_2=2\cdot\frac{1}{e}+\int_{\frac{1}{e}}^{e}(-\ln x+1)dx\Leftrightarrow$

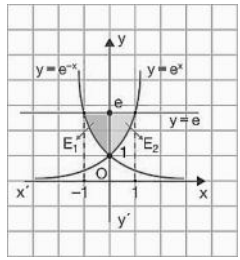


$$E(\Omega)=\frac{2}{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{e}(x)'\ln x dx+e-\frac{1}{e}\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\frac{2}{e}+e-\frac{1}{e}-\left[x\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{e}+\int_{\frac{1}{e}}^{e}x\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\frac{2}{e}+e-\cancel{\frac{1}{e}}+\cancel{\frac{1}{e}}+\cancel{e}-\cancel{e}+\frac{1}{e}=e+\frac{3}{e}.$$

92. $E(\Omega)=E_1+E_2=\int_{-1}^{0}\left(e-e^{-x}\right)+\int_{0}^{1}\left(e-e^{x}\right)dx\Leftrightarrow$



$$E(\Omega)=\left[ex+e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\left[ex-e^{x}\right]_{0}^{1}=2.$$

93.α) Έστω $M(x_0,f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=\lambda e^{\lambda x_0}x+e^{\lambda x_0}(1-\lambda x_0)$$

Επειδή διέρχεται από το Ο, ισχύει: $e^{\lambda x_0}(1-\lambda x_0)=0\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{\lambda}$. Η εφαπτομένη είναι η $\varepsilon: y=\lambda ex$. $f'(x)=\lambda e^{\lambda x}$, $f''(x)=\lambda^2e^{\lambda x}>0\Rightarrow f$ κυρτή, οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός από το σημείο επαφής.
Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\lambda)=\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left(e^{\lambda x}-\lambda ex\right)dx=\left[\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}-\left[\lambda e\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}=\frac{e-2}{2\lambda}.$$

β) $\lim\limits_{\lambda\to0^+}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\frac{e-2}{2\lambda}=+\infty$ και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{e-2}{2\lambda}=0$.

Διαχωρισμός χωρίου

94.α) $E(\Omega)=\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4 3x^2dx=\left[x^3\right]_2^4=64-8=56.$

β) $\int_2^{\alpha} f(x)dx = \frac{E(\Omega)}{2} \Leftrightarrow \left[x^3\right]_2^{\alpha} = 28 \Leftrightarrow \alpha^3 - 8 = 28 \Leftrightarrow \alpha^3 = 36 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{36}$.

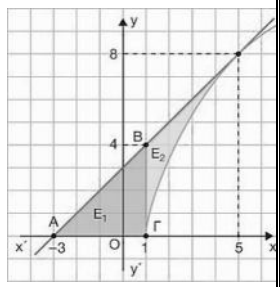
95.α) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$, $f'(5) = 1$, $f(5) = 8$.

Η εφαπτομένη είναι $\varepsilon : y - f(5) = f'(5)(x-5) \Leftrightarrow y = x + 3$.

$E(\Omega) = (AB\Gamma) + \int_1^5 \left(x + 3 - f(x)\right)dx \Leftrightarrow$

$E(\Omega) = \frac{4 \cdot 4}{2} + \int_1^5 \left(x + 3 - 4(x-1)^{\frac{1}{2}}\right)dx \Leftrightarrow$

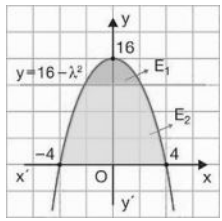
$E(\Omega) = 8 + \left[\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{8}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^5 = 8 + \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$.



β) Επειδή $(AB\Gamma) = 8 > \frac{1}{2}E(\Omega)$, η ευθεία $x = \lambda$ θα βρίσκεται αριστερά της ευθείας ΒΓ, δηλαδή $\lambda \in (-3,1)$. Τότε

$\frac{(\lambda+3)^2}{2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \lambda + 3 = \pm\sqrt{\frac{32}{3}} \Leftrightarrow \lambda = 3 \pm \sqrt{\frac{32}{3}}$.

Επειδή $\lambda \in (-3,1)$ είναι $\lambda = 3 - \sqrt{\frac{32}{3}}$.



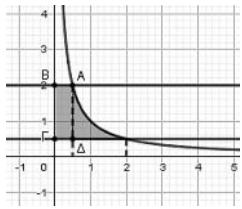
96.α) $E(\Omega) = \int_{-4}^{4}\left(16 - x^2\right)dx = \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4} = \frac{256}{3}$.

β) $E_1 = \int_{-\lambda}^{\lambda}\left(16 - x^2 - 16 + \lambda^2\right)dx = \frac{1}{2}E(\Omega) = \frac{128}{3} \Leftrightarrow$

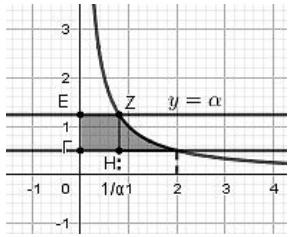
$\frac{4\lambda^3}{3} = \frac{128}{3} \Leftrightarrow \lambda^3 = 32 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$.

97.α) $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2$, $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$E(\Omega) = (AB\Gamma\Delta) + \int_{1/2}^{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) +$



$\left[\ln x-\frac{1}{2}x\right]_{1/2}^{2}=2\ln 2$.



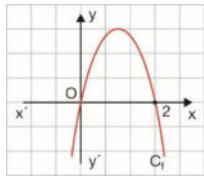
β) $f(x)=\alpha\Leftrightarrow x=\frac{1}{\alpha}$.

Είναι $(EZH\Gamma)+\int_{1/\alpha}^{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{2}E(\Omega)\Leftrightarrow$

$\frac{1}{\alpha}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+\left[\ln x-\frac{1}{2}x\right]_{1/\alpha}^{2}=\ln 2\Leftrightarrow$

$1-\frac{1}{2\alpha}+\ln 2-\ln\frac{1}{\alpha}-1+\frac{1}{2\alpha}=\ln 2\Leftrightarrow -\ln\frac{1}{\alpha}=0\Leftrightarrow\ln\frac{1}{\alpha}=0\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}=1\Leftrightarrow\alpha=1$.

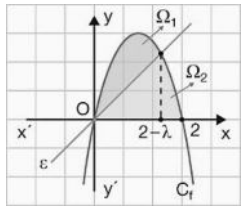
98.α) Είναι $f(x)=2x-x^2=x(2-x)$.



$f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,2)$. Για το εμβαδόν του χωρίου Ω έχουμε:

$E(\Omega)=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(2x-x^2)dx=\left[x^2\right]_0^2-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{4}{3}$.

β) Έστω $\varepsilon: y=\lambda x$ η ζητούμενη ευθεία (Αν ήταν ο άξονας x΄x δεν θα έτεμνε το χωρίο Ω).Για τα κοινά σημεία των ε, C_f,



έχουμε: $2x-x^2=\lambda x\Leftrightarrow 2x-x^2-\lambda x=0\Leftrightarrow$

$x(2-\lambda-x)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=2-\lambda$. Η ευθεία ε ορίζει στο Ω τα χωρία Ω_1 και Ω_2. Πρέπει

$E(\Omega_1)=E(\Omega_2)=\frac{E(\Omega)}{2}=\frac{2}{3}$.

Για το εμβαδόν του χωρίου Ω_1, έχουμε:

$E(\Omega_1)=\int_0^{2-\lambda}(f(x)-\lambda x)dx=\int_0^{2-\lambda}\left[(2-\lambda)x-x^2\right]dx\Leftrightarrow$

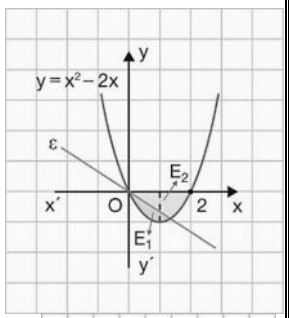
$E(\Omega_1)=(2-\lambda)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2-\lambda}-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2-\lambda}=\frac{(2-\lambda)^3}{2}-\frac{(2-\lambda)^3}{3}=\frac{(2-\lambda)^3}{6}$.

Είναι $\frac{(2-\lambda)^3}{6}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow(2-\lambda)^3=4\Leftrightarrow 2-\lambda=\sqrt[3]{4}\Leftrightarrow\lambda=2-\sqrt[3]{4}$. Άρα η ε έχει εξίσωση $y=\left(2-\sqrt[3]{4}\right)x$.

99.α) $E(\Omega)=-\int_0^2 f(x)dx=-\int_0^2\left(x^2-2x\right)dx=\frac{4}{3}$.

β) $x^2-2x=\lambda x\Leftrightarrow x\left(x-2-\lambda\right)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\lambda+2$

Η ευθεία ε ορίζει στο Ω τα χωρία Ω_1 και Ω_2.



Πρέπει $E(\Omega_1)=E(\Omega_2)=\frac{E(\Omega)}{2}=\frac{2}{3}$.

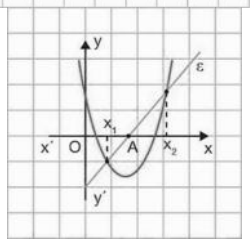
Για το εμβαδόν του χωρίου Ω_1, έχουμε:

$E(\Omega_1)=\int_0^{\lambda+2}\left(\lambda x-f(x)\right)dx\Leftrightarrow$

$E(\Omega_1)=\int_0^{\lambda+2}\left[-x^2+(2+\lambda)x\right]dx\Leftrightarrow\lambda=\sqrt[3]{4}-2$.

100. Η ευθεία ε έχει εξίσωση:

$y-0=\lambda(x-2)\Leftrightarrow y=\lambda x-2\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$.



(Η ευθεία δεν μπορεί να είναι η $x=2$ γιατί τότε δεν θα υπήρχε χωρίο). Για τα σημεία τομής των C_f , ε ισχύει:

$f(x)=\lambda x-2\lambda\Leftrightarrow x^2-4x+3=\lambda x-2\lambda\Leftrightarrow$

$x^2-(\lambda+4)x+2\lambda+3=0\ (1)$. Η τελευταία είναι 2ου βαθμού ως προς x με $\Delta=(\lambda+4)^2-4(2\lambda+3)=\lambda^2+4>0$ και οι ρίζες της είναι:

$x_1=\frac{\lambda+4-\sqrt{\lambda^2+4}}{2}$ και $x_2=\frac{\lambda+4+\sqrt{\lambda^2+4}}{2}$. Έστω $x_1<x_2$.Για το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ε, ισχύει:

$E(\lambda)=\int_{x_1}^{x_2}\left(\lambda x-2\lambda-f(x)\right)dx=-\int_{x_1}^{x_2}\left(x^2-(\lambda+4)x+2\lambda+3\right)dx=$

$-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x_1}^{x_2}+(\lambda+4)\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}-(2\lambda+3)(x_2-x_1)=$

$=-\frac{1}{3}(x_2-x_1)\left(x_2^2+x_2x_1+x_1^2\right)+\frac{\lambda+4}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1)-(2\lambda+3)(x_2-x_1)=$

$=(x_2-x_1)\frac{-2\left(x_2^2+x_2x_1+x_1^2\right)+3(\lambda+4)(x_2+x_1)-6(2\lambda+3)}{6}$ (2).

Η εξίσωση (1) έχει άθροισμα ριζών $x_1+x_2=\lambda+4$ και γινόμενο ριζών

$x_1x_2=2\lambda+3$. Είναι $x_2-x_1=\frac{\lambda+4+\sqrt{\lambda^2+4}}{2}-\frac{\lambda+4-\sqrt{\lambda^2+4}}{2}=\sqrt{\lambda^2+4}$ άρα

$(x_2-x_1)^2=\lambda^2+4\Leftrightarrow x_2^2-2x_2x_1+x_1^2=\lambda^2+4\Leftrightarrow$

$x_2^2-2(2\lambda+3)+x_1^2=\lambda^2+4 \Leftrightarrow \quad x_2^2+x_1^2=\lambda^2+4\lambda+10$. Η (2) γίνεται:

$$E(\lambda)=\frac{1}{6}\sqrt{\lambda^2+4}\left[-2\left(\lambda^2+4\lambda+10+2\lambda+3\right)+3(\lambda+4)(\lambda+4)-6(2\lambda+3)\right] \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda)=\frac{1}{6}\sqrt{\lambda^2+4}\left(\lambda^2+4\right)=\frac{1}{6}\left(\lambda^2+4\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Είναι $E'(\lambda)=\frac{1}{6}\frac{3}{2}\left(\lambda^2+4\right)^{\frac{1}{2}}2\lambda=\frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+4}}{2}$. $E'(\lambda)=0 \Leftrightarrow \frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+4}}{2}=0 \Leftrightarrow \lambda=0$

Το $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο για $\lambda=0$. Τότε η ε έχει εξίσωση $y=0$, δηλαδή είναι ο άξονας $x'x$. Το εμβαδόν στη περίπτωση αυτή είναι $E(0)=\frac{4}{3}$ τ.μ.

Σύνθετες ασκήσεις

101. α) $f'(x)=\frac{1}{x}\left(f(x)-x^2e^{-x}\right) \Leftrightarrow xf'(x)=f(x)-x^2e^{-x} \Leftrightarrow$

$$xf'(x)-f(x)=-x^2e^{-x} \Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-e^{-x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(e^{-x}\right)' \Leftrightarrow$$

$\frac{f(x)}{x}=e^{-x}+c \Leftrightarrow f(x)=x\left(e^{-x}+c\right)$, $c\in\mathbb{R}$. $f(1)=\frac{1}{e}+1 \Leftrightarrow e^{-1}+c=\frac{1}{e}+1 \Leftrightarrow$

$c=1$ και $f(x)=x\left(e^{-x}+1\right)$, $x>0$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+1\right)=1$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{-x}+1\right)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0,$$

άρα η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\left(e^{-x}+1\right)=0$

άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

γ) Έστω ευθεία $x=k$, $k>0$. Είναι

$$\int_1^k\left|f(x)-x\right|dx=\int_1^k xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_1^k+\int_1^k e^{-x}dx=-\frac{k+1}{e^k}+\frac{2}{e}.$$

$E(\Omega)=\lim\limits_{k\to+\infty}\left(-\frac{k+1}{e^k}+\frac{2}{e}\right)=\frac{2}{e}$, γιατί $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{k+1}{e^k}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^k}=0$.

102. α) $f^2(x)-4f(x)+4f'(x)+4=0 \Leftrightarrow 4f'(x)=-\left(f(x)-2\right)^2 \overset{f(x)\neq2}{\Leftrightarrow}$

$$-\frac{f'(x)}{(f(x)-2)^2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-2}=\frac{x}{4}+c\Leftrightarrow f(x)-2=\frac{4}{x+4c}\Leftrightarrow$$

$f(x)=\dfrac{4}{x+4c}+2$.Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0$, ισχύει ότι

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{x+4c}+2\right)\Leftrightarrow 4=\frac{1}{c}+2\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$$. Τότε

$$f(x)=\frac{4}{x+2}+2=\frac{4+2x+4}{x+2}=\frac{2x+8}{x+2}$$

β) $E(\Omega)=\int_0^1\frac{2x+8}{x+2}dx=\int_0^1\frac{2x+4+4}{x+2}dx=\int_0^1\left(\frac{2\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}+\frac{4}{x+2}\right)dx\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=\left[2x+4\ln(x+2)\right]_0^1=2+4\ln 3-4\ln 2=2+4\ln\frac{3}{2}$.

γ) Είναι $f'(x)=-\dfrac{4}{(x+2)^2}<0\Rightarrow f\searrow[0,+\infty)$

$$2\le x\le 4\Leftrightarrow f(4)\le f(x)\le f(2)\Leftrightarrow m=\frac{8}{3}\le f(x)\le 3=M$$

δ) $\dfrac{8}{3}\le f(x)\le 3\Leftrightarrow \dfrac{8}{3}e^x\le e^x f(x)\le 3e^x$, άρα

$$\int_2^4\frac{8}{3}e^x dx\le\int_2^4 e^x f(x)dx\le\int_2^4 3e^x dx\Leftrightarrow\frac{8}{3}e^2\left(e^2-1\right)\le\int_2^4 e^x f(x)dx\le 3e^2\left(e^2-1\right)$$

Είναι $3e^2\left(e^2-1\right)<24e^2\Leftrightarrow e^2-1<8\Leftrightarrow e^2<9$ που ισχύει και

$$2\cancel{e^2}<\frac{8}{3}\cancel{e^2}\left(e^2-1\right)\Leftrightarrow 6<8e^2-8\Leftrightarrow e^2>\frac{7}{4}$$ που ισχύει.

Άρα $2e^2<\dfrac{8}{3}e^2\left(e^2-1\right)\le\int_2^4 e^x f(x)dx\le 3e^2\left(e^2-1\right)<24e^2$.

103. α) $f'(x)=\alpha+e^{-x}-xe^{-x}$. $f'(0)=2\Leftrightarrow\alpha+1=2\Leftrightarrow\alpha=1$.

β) i. $f'(x)=1+e^{-x}(1-x)=1+\dfrac{1-x}{e^x}=\dfrac{e^x+1-x}{e^x}$. Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης e^x+1-x. Έστω $g(x)=e^x+1-x$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=e^x-1$ και για $x>0$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow[0,+\infty)$ και για $x<0$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\searrow(-\infty,0]$. Για

$x>0 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0)=0$ και για $x<0 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0)=0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$, άρα $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\Rightarrow \ y=x \text{ ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } +\infty.$$

ii. $E(\lambda)=\int_0^{\lambda}|f(x)-x|dx=\int_0^{\lambda}xe^{-x}dx=-\left[xe^{-x}\right]_0^{\lambda}+\int_0^{\lambda}e^{-x}dx=-\lambda e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+1\Leftrightarrow$

$E(\lambda)=-e^{-\lambda}(1+\lambda)+1,\ \lambda>0.$

iii. $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(-e^{-\lambda}(1+\lambda)+1\right)=1$, γιατί

$$\lim_{\lambda\to+\infty}e^{-\lambda}(1+\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1+\lambda}{e^{\lambda}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{e^{\lambda}}=0.$$

104. α) Έστω ότι $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1x+\alpha_0$, $\alpha_\nu\neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\alpha_\nu x^{\nu-2}.$$

Αν $\nu>2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\nu-2}=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\begin{cases}+\infty \text{ αν } \alpha_\nu>0\\ -\infty \text{ αν } \alpha_\nu<0\end{cases}$ που

απορρίπτεται. Αν $\nu=0$ ή 1 τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0\neq 1$ απορρίπτεται. Άρα $\nu=2$,

οπότε $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$.Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=1\Leftrightarrow\alpha=1.$

Έστω $\frac{f(x)}{x-1}=g(x),\ x\neq 1$ με $\lim\limits_{x\to1}g(x)=-1$. Τότε

$f(x)=g(x)(x-1)\Leftrightarrow x^2+\beta x+\gamma=g(x)(x-1)$ οπότε

$\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+\beta x+\gamma\right)=\lim\limits_{x\to1}g(x)(x-1)\Leftrightarrow 1+\beta+\gamma=0\Leftrightarrow\gamma=-\beta-1$. Τότε

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+\beta x-\beta-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)+\beta(x-1)}{x-1}=.$$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1+\beta)}{\cancel{x-1}}=2+\beta$. Είναι $2+\beta=-1\Leftrightarrow\beta=-3$ και $\gamma=-(-3)-1=2$,

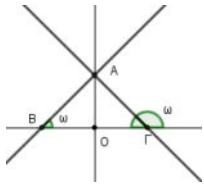
οπότε $f(x)=x^2-3x+2,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Έστω $N(x,f(x))$ σημείο της C_f. Η απόσταση του Ν από την ευθεία ε:

$y=-x \Leftrightarrow x+y=0$ είναι $d(N,\varepsilon)=\dfrac{|x+f(x)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}|x^2-2x+2|$

Το τριώνυμο x^2-2x+2 έχει $\Delta=-4<0$ άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$x^2-2x+2>0$, οπότε $d(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x^2-2x+2)$, $x\in\mathbb{R}$. Η d είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $d'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(2x-2)$. Για κάθε x < 1 είναι $d'(x)<0$ και επειδή η d είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε x > 1 είναι $d'(x)>0$ και επειδή η d είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη για x = 1, τότε $N(1,0)$.



γ) Έστω $K(x_0,f(x_0))$. Επειδή το τρίγωνο που σχηματίζει η εφαπτομένη στο K με τους άξονες είναι ορθογώνιο, όταν θα είναι και ισοσκελές, οι οξείες γωνίες του θα είναι 45°. Τότε η γωνία κλίσης της εφαπτομένης θα είναι 45° ή 135°.

Άρα $(\lambda=f'(x_0)=\varepsilon\varphi 45^\circ=1)$ ή $(\lambda=f'(x_0)=\varepsilon\varphi 135^\circ=-1)$

Είναι $f'(x)=2x-3$, άρα $f'(x_0)=1\Leftrightarrow 2x_0-3=1\Leftrightarrow 2x_0=4\Leftrightarrow x_0=2$ ή

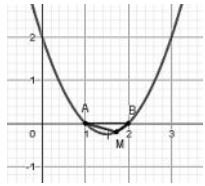
$f'(x_0)=-1\Leftrightarrow 2x_0-3=-1\Leftrightarrow 2x_0=2\Leftrightarrow x_0=1$. Οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι οι ευθείες $\varepsilon_1: y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=x-2$ και

$\varepsilon_2: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=-x+1$.

δ) Έστω M(x,f(x)) σημείο της C_f με $1<x<2$.

Το τρίγωνο MAB έχει εμβαδό

$E=\dfrac{1}{2}(AB)d(M,x'x)=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot|f(x)|=\dfrac{1}{2}(-x^2+3x-2)$.



Έστω $E(x)=\dfrac{1}{2}(-x^2+3x-2)$, $x\in(1,2)$. Είναι

$E'(x)=\dfrac{1}{2}(-2x+3)$.

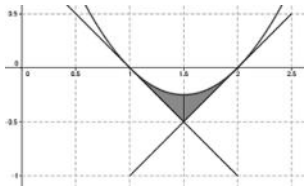
$E'(x)\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}(-2x+3)\geq 0\Leftrightarrow -2x+3\geq 0\Leftrightarrow x\leq\dfrac{3}{2}$.

Για κάθε $x\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ είναι $E'(x)>0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο $\left(1,\dfrac{3}{2}\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in\left(\dfrac{3}{2},2\right)$ είναι

$E'(x) < 0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο για $x = \frac{3}{2}$, τότε

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$, άρα $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

ε) Επειδή το εμβαδόν περικλείεται από 3 συναρτήσεις χρειάζεται σχήμα.



Η f είναι μία παραβολή με κορυφή το $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ και ρίζες το 1 και το 2 .Είναι $f''(x) = 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Οι δύο ευθείες τέμνονται στο $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = \int_1^{\frac{3}{2}} |f(x) + x - 1|\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 |f(x) - x + 2|\,dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \left(f(x) + x - 1\right)dx +$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^2 \left(f(x) - x + 2\right)dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - 2x + 1\right)dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \left(x^2 - 4x + 4\right)dx = \int_1^{\frac{3}{2}} (x-1)^2\,dx +$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^2 (x-2)^2\,dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{12} \text{ τ.μ.}$$

105.α) $f^2(x)-2f(x)=e^{2x}+2e^x$ (1). Από τη σχέση (1) έχουμε ισοδύναμα :

$f^2(x)-2f(x)=e^{2x}+2e^x \Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=e^{2x}+2e^x=1 \Leftrightarrow$

$(f(x)-1)^2=(e^x+1)^2 \Leftrightarrow |f(x)-1|=e^x+1$ (2).

Όμως $e^x+1>0 \Leftrightarrow |f(x)-1|>0 \Leftrightarrow f(x)-1\neq 0$, η συνάρτηση $k(x)=f(x)-1$ είναι συνεχής οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο. Από τη σχέση (2) έχουμε

$|f(x)-1|=e^x+1 \Leftrightarrow |k(x)|=e^x+1 \Leftrightarrow (k(x)=e^x+1)$ ή $(k(x)=-e^x-1)$

Επειδή $k(0)=f(0)-1=2>0$, ο τύπος της k είναι

$k(x)=e^x+1 \Leftrightarrow f(x)-1=e^x+2 \Leftrightarrow f(x)=e^x+3, x\in\mathbb{R}$.

β) $h(f(x))=3x-5, x\in\mathbb{R}$ (3).

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow e^x+3=y \Leftrightarrow e^x=y-3 \overset{y>3}{\Leftrightarrow} x=\ln(y-3)$.

Από τη σχέση (3) έχουμε ισοδύναμα :

$h(f(x))=3x-5 \Leftrightarrow h(y)=3\ln(y-3)-5, y>3$ οπότε :

$h(x)=3\ln(x-3)-5, x>3$.

γ) $f(g(x))=e^{x^2+1}+3, x\in\mathbb{R}$ ..Από τον τύπο της f έχουμε

$f(g(x))=e^{g(x)}+3 \Leftrightarrow e^{x^2+1}+\cancel{3}=e^{g(x)}+\cancel{3} \Leftrightarrow e^{x^2+1}=e^{g(x)} \Leftrightarrow$

$g(x)=x^2+1, x\in\mathbb{R}$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $m(x)=f(x)-g(x)=e^x+3-x^2-1=e^x-x^2+2$.

Η m είναι παραγωγίσιμη ,με παράγωγο $m'(x)=e^x-2x$ και δύο φορές παραγωγίσιμη , με δεύτερη παράγωγο $m''(x)=e^x-2$.

Έχουμε $m''(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^x-2\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq \ln 2$.

Η m' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $m''(x)>0$ στο $(\ln 2,+\infty)$, $m''(x)<0$ στο $(-\infty,\ln 2)$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ln 2]$ οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο $\ln 2$, το

$m'(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2=2(1-\ln 2)=2\ln\frac{e}{2}>2\ln 1=0$.

Επομένως $m'(x)\geq m'(\ln 2)>0$ οπότε η m είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $m(-1)=\frac{1}{e}+1>0$, $m(-2)=\frac{1}{e^2}-2<0$ άρα $m(-1)m(-2)<0$,

επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano και αφού η m γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_0\in(-2,-1)$ τέτοιο ώστε $m(x_0)=0$. Άρα έχουν

μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-2,-1)$.

ε) Για $-2 \le x \le x_0 \overset{m\nearrow}{\Rightarrow} m(x) \le m(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \le g(x)$.

Για $x_0 \le x \le -1 \overset{m\nearrow}{\Rightarrow} m(x) \ge m(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \ge g(x)$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{-2}^{-1} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^{x_0} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_0}^{-1} |f(x) - g(x)| dx =$$

$$= -\int_{-2}^{x_0} [f(x) - g(x)] dx + \int_{x_0}^{-1} [f(x) - g(x)] dx = -\int_{-2}^{x_0} m(x) dx + \int_{x_0}^{-1} m(x) dx =$$

$$= -\int_{-2}^{x_0} (e^x - x^2 + 2) dx + \int_{x_0}^{-1} (e^x - x^2 + 2) dx =$$

$$-\left[e^x - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-2}^{x_0} + \left[e^x - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{x_0}^{-1} =$$

$$= -e^{x_0} + \frac{{x_0}^3}{3} - 2x_0 + \frac{1}{e^2} + \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{e} + \frac{1}{3} - 2 - e^{x_0} + \frac{{x_0}^3}{3} - 2x_0 =$$

$-2e^{x_0} + \frac{2{x_0}^3}{3} - 4x_0 + \frac{1+e}{e^2} - 3$. Επειδή $m(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = {x_0}^2 - 2$ έχουμε :

$$E = -2({x_0}^2 - 2) + \frac{2{x_0}^3}{3} - 4x_0 + \frac{1+e}{e^2} - 3 = \frac{2}{3}{x_0}^3 - 2{x_0}^2 - 4x_0 + \frac{1+e}{e^2} + 1.$$

106. α) Για $x = 0$: $f(0) - e^{-f(0)} = -1 \Leftrightarrow e^{-f(0)} - f(0) - 1 = 0$ (1). Έστω $g(x) = e^{-x} - x - 1,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \Rightarrow g \searrow \mathbb{R} \Rightarrow g\ 1-1$

$(1) \Leftrightarrow g(f(0)) = g(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(0) = 0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη τότε παραγωγίζοντας την σχέση $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$ $(*)$ έχουμε:

$$f'(x) + e^{-f(x)} f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)(1 + e^{-f(x)}) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} \quad (2).$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη από τη (2) προκύπτει ότι και η f' είναι

παραγωγίσιμη με $f''(x) = -\frac{(1 + e^{-f(x)})'}{(1 + e^{-f(x)})^2} = \frac{e^{-f(x)} f'(x)}{(1 + e^{-f(x)})^2} > 0$ αφού η $f'(x) > 0$

οπότε η f κυρτή άρα η f' γνησίως αύξουσα . Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f

στο $[0,x]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{f(x)}{x}$.

Είναι $0<\xi<x$ οπότε

$$f'(0)<f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\frac{f(x)}{x}<f'(x)\Leftrightarrow\frac{x}{2}<f(x)<xf'(x)\quad(3)$$

Επίσης $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}<1$ οπότε για $x>0$ θα είναι $xf'(x)<x\ \ (4)$.

Άρα από (3) και (4) έχουμε $\dfrac{x}{2}<f(x)<xf'(x)<x$.

γ) Είναι $\dfrac{x}{2}<f(x)<x$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ άρα από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Ακόμη επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x)=1821$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{f(x)}}\underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to+\infty}}{\overset{u=f(x)}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{e^{u}}=0$. Από τη σχέση $(*)$ έχουμε:

$f(x)-(x-1)=e^{-f(x)}$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-f(x)}=0$ άρα η $y=x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ε) Έστω $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x>0$. Είναι $h'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}>0\Rightarrow h\nearrow(0,+\infty)$

Είναι $2\le t\le 3\overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}h(2)\le h(t)\le h(3)\Rightarrow\int_2^3h(2)dt<\int_2^3h(t)dt<\int_2^3h(3)dt$ (5).

Είναι $3\le t\le 4\overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}h(3)\le h(t)\le h(4)\Rightarrow\int_3^4h(3)dt<\int_3^4h(t)dt<\int_3^4h(4)dt\Leftrightarrow$

$h(3)<\int_3^4h(t)dt\le h(4)$ (6).

(Οι ανισότητες $h(2)\le h(t)\le h(3), h(3)\le h(t)\le h(4)$ ισχύουν μόνο για $x=2,3,4$). Από $(5),(6)\Rightarrow\int_2^3h(t)dt<\int_3^4h(t)dt\Leftrightarrow\int_2^3\frac{f(t)}{t}dt<\int_3^4\frac{f(t)}{t}dt$

στ) Για κάθε $0\le x\le 1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(0)\le f(x)\le f(1)\Rightarrow f(x)\ge 0$, οπότε $E=\int_0^1f(x)dx$

Από την ανισότητα που αποδείξαμε στο β) έχουμε:

$\int_0^1\frac{x}{2}dx<\int_0^1f(x)dx<\int_0^1xf'(x)dx<\int_0^1xdx\Leftrightarrow$

$\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 < E < \left[xf(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx < \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < E < f(1) - E < \frac{1}{2}$ (7)

Είναι $E < f(1) - E \Leftrightarrow 2E < f(1) \Leftrightarrow E < \frac{f(1)}{2}$ (8).

Από το β σκέλος για $x = 1$ προκύπτει $\frac{1}{2} < f(1) < f'(1) < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{f(1)}{2} < \frac{1}{2}$ (9),

οπότε από $(7),(8),(9) \Rightarrow \frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1) < \frac{1}{2}$.

107. α) $\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt + 2\int_0^x tf'(t)dt + \int_0^2 xtf(x)dt = 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt + 2\int_0^x tf'(t)dt + xf(x)\int_0^2 tdt = 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^x \left[(t^2+1)f''(t) + 2tf'(t)\right]dt + xf(x)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^x \left[(t^2+1)f'(t)\right]' dt + 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow \left[(t^2+1)f'(t)\right]_0^x + 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow$

$(x^2+1)f'(x) - 2 + 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow \left[(x^2+1)f(x) - 2x\right]' = 2 \Leftrightarrow$

$(x^2+1)f(x) = 2x + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$. Για $x = 0$ είναι $f(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$ και

$(x^2+1)f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $|h(x) + x - 3| \le |f(x)| \Leftrightarrow -|f(x)| \le h(x) + x - 3 \le |f(x)|$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim\limits_{x\to+\infty} \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-|f(x)|\right)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(h(x) + x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left(h(x) - (-x+3)\right) = 0$.

Άρα η ευθεία $y = -x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$.

γ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = \int_0^3 \left|h(x) - (-x+3)\right| dx$.

Είναι $|h(x) + x - 3| \le |f(x)|$, άρα και $\int_0^3 |h(x) + x - 3| dx \le \int_0^3 |f(x)| dx$.

Όμως $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \ge 0$ για κάθε $x \in [0,3]$, άρα

$\int_0^3 \left|h(x)+x-3\right|dx \le \int_0^3 \frac{2x}{x^2+1}dx = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^3 = \ln 10$.

108. α) Είναι $f\left(g(x)\right) \ge g(x) \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)-g(x) \ge 0 \quad (1)$

Έστω $h(x) = f\left(g(x)\right)-g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$h(3) = f\left(g(3)\right)-g(3) = f(0) = 0$, οπότε η (1) γίνεται: $h(x) \ge h(3)$. Δηλαδή η συνάρτηση h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 3$.

Επειδή το $x_0 = 3$ είναι στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της h ,η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = f'\left(g(x)\right)g'(x)-g'(x)$ άρα είναι

παραγωγίσιμη στο 3, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat είναι:

$h'(3) = 0 \Leftrightarrow f'\left(g(3)\right)g'(3)-g'(3) = 0 \Leftrightarrow g'(3)\left[f'(0)-1\right] = 0 \quad (2)$.Επειδή

$f'(x)g'(x) > 0$ είναι $g'(3) \ne 0$ οπότε η (2) γίνεται: $f'(0)-1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$.

β) Για κάθε $x \in (1,2)$ είναι $\frac{f(1821)}{x-1}+\frac{1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow f(1821)(x-2)+x-1 = 0$.

Έστω $g(x) = f(1821)(x-2)+x-1$, $x \in [1,2]$.Είναι

$g(1) = f(1821)(1-2)+1-1 = -f(1821)$ και

$g(2) = f(1821)(2-2)+2-1 = 1 > 0$.Επειδή $f'(x)g'(x) > 0$, είναι $f'(x) \ne 0$

και επειδή η f' είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επειδή $f'(0) = 1 > 0$, είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή $1821 > 0$, είναι $f(1821) > f(0) = 0$, άρα $g(1) < 0$ οπότε $g(1)g(2) < 0$. Επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,2]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(1821)(x-2)+x-1 = 0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$, άρα η εξίσωση $\frac{f(1821)}{x-1}+\frac{1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

γ) Για κάθε $x \ge 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) \ge f(0) = 0$. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες και την ευθεία $x = 1$ είναι $E = \int_0^1 f(x)dx$, άρα $\int_0^1 f(x)dx = 1821$. Έστω F αρχική της f στο $[0,1]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, η F είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $F'(x) = f(x)$, οπότε είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Από το θεώρημα

μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$F'(\xi) = \dfrac{F(1)-F(0)}{1-0} \Leftrightarrow f(\xi) = \int_0^1 f(t)dt \Leftrightarrow f(\xi) = 1821$.

Είναι $0 < \xi < 1$ και f γνησίως αύξουσα, άρα $f(\xi) < f(1) \Leftrightarrow 1821 < f(1)$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 0$ ενώ για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0$. Επειδή $f'(x)g'(x) > 0$ και $f'(x) > 0$, είναι και $g'(x) > 0$, άρα g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x > 3$ είναι $g(x) > g(3) = 0$, ενώ για κάθε $x < 3$ είναι $g(x) < g(3) = 0$.

ε) Έστω $\int_0^3 2xg(x)dx = \lambda \in \mathbb{R}$ (3), τότε από τη σχέση $\int_0^3 2xg(x)dx + x + 6 = g(x)$, έχουμε: $\lambda + x + 6 = g(x)$. Η σχέση (3) γίνεται:

$\int_0^3 2x(\lambda + x + 6)dx = \lambda \Leftrightarrow \int_0^3 (2\lambda x + 2x^2 + 12x)dx = \lambda \Leftrightarrow$

$\left[\lambda x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + 6x^2\right]_0^3 = \lambda \Leftrightarrow 9\lambda + 18 + 54 = \lambda \Leftrightarrow 8\lambda = -72 \Leftrightarrow \lambda = -9$. Τότε $g(x) = -9 + x + 6 = x - 3$.

109. α) i) Για να ορίζεται η f πρέπει

$\beta + x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq -\beta \overset{\beta \geq 0}{\Leftrightarrow} x \geq -\sqrt[3]{|-\beta|} \Leftrightarrow x \geq -\sqrt[3]{\beta}$ άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $\left[-\sqrt[3]{\beta}, +\infty\right)$. Από τον τύπο της h βλέπουμε ότι ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f είναι το διάστημα $[-1,0]$ άρα πρέπει

$-\sqrt[3]{\beta} \leq -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\beta} \geq 1 \Leftrightarrow \beta \geq 1$.

ii) Είναι $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2} + \gamma\right) - \beta + 1 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2} + \gamma\right) = \beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = \beta$ (1)

Το $\gamma \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ άρα $0 \leq \sigma\upsilon\nu\gamma \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \beta \leq 1$. Άρα $\beta = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = 1 \overset{\gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow} \gamma = 0$.

Αφού η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Rolle στο $[-1,0]$, τότε

$f(-1) = f(0) \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2\sqrt{1-1} = \alpha^2\sqrt{1} \Leftrightarrow \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

Άρα $f(x) = x^2\sqrt{1+x^3}$, $x \geq 1$, $g(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$h(x)=\begin{cases} x^2\sqrt{1+x^3}\ , -1\le x\le 0 \\ \eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}\ , 0<x\le\pi \end{cases}$$

β) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ με παράγωγο:

$$h'(x)=2x\sqrt{1+x^3}+\frac{x^2\cdot 3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}=\frac{4x\left(1+x^3\right)+3x^4}{2\sqrt{1+x^3}}=\frac{7x^4+4x}{2\sqrt{1+x^3}}=\frac{x\left(7x^3+4\right)}{2\sqrt{1+x^3}}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{h(x)}{x+1}=+\infty$ γιατί

1ος τρόπος: Είναι $L=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{h(x)}{x+1}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to -1^+}h'(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x\left(7x^3+4\right)}{2\sqrt{1+x^3}}=+\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to -1^+}\left[x\left(7x^3+4\right)\right]=3$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\left[2\sqrt{1+x^3}\right]=0$ και $2\sqrt{1+x^3}\ge 0$.

2ος τρόπος: Είναι

$$L=\lim_{x\to -1^+}\frac{h(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x^3}}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2\sqrt{(1+x)\left(1-x+x^2\right)}}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x}^{\,2}}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x}}=+\infty \quad \text{αφού}$$

$\lim\limits_{x\to -1^+}\left[x^2\sqrt{1-x+x^2}\right]=3$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt{1+x}=0$ και $\sqrt{1+x}\ge 0$. Επίσης σπάσαμε την ρίζα γιατί για x κοντά -1 από μεγαλύτερες τιμές είναι $1+x>0$ και $1-x+x^2>0$. Άρα η h δεν είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^{\not 2}\sqrt{1+x^3}}{\not x}=0$ άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0]$.

γ) Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με παράγωγο:

$$g'(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}\left(-\eta\mu x\right)=\sigma\upsilon\nu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}-\eta\mu^2 x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}=$$

$e^{\sigma\upsilon\nu x}\left(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2 x\right)$. Έστω η συνάρτηση $k(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2 x$, $x\in[0,\pi]$.

Η k είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με

$k'(x)=-\eta\mu x-2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu x\left(1+2\sigma\upsilon\nu x\right)$ και ισχύει $g'(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x}k(x)$

επομένως: Η g' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με παράγωγο:

$$g''(x)=-\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}\cdot k(x)+e^{\sigma\upsilon\nu x}\cdot k'(x)=$$

$$-\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}\cdot k(x)-e^{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\eta\mu x\left(1+2\sigma\upsilon\nu x\right)=$$

$= -\eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}\left(k(x)+2\sigma\upsilon\nu x+1\right) = -\eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}\left(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2 x+2\sigma\upsilon\nu x+1\right) =$

$= -\eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}\left(\cancel{1}+\sigma\upsilon\nu^2 x+3\sigma\upsilon\nu x+\cancel{1}\right) = -\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}\left(\sigma\upsilon\nu x+3\right)$

Είναι $-\eta\mu x<0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$, $\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και

$\sigma\upsilon\nu x<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $e^{\sigma\upsilon\nu x}>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ και

$-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1\Leftrightarrow 0<2\le\sigma\upsilon\nu x+3\le 4$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.

Άρα $-\eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}\left(\sigma\upsilon\nu x+3\right)<0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.

Επομένως $g''(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $g''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

άρα g' γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

δ) Αφού $g''(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $g''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

τότε η g είναι κοίλη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Η g παρουσιάζει καμπή

για $x=\frac{\pi}{2}$. Επομένως η εφαπτομένη στο $x_0=\frac{\pi}{2}$ διαπερνά την γραφική

παράσταση της h. Η εφαπτομένη στο $x_0=\frac{\pi}{2}$ έχει εξίσωση:

$$y-g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y-1=-x+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow y=-x+\frac{\pi+2}{2}$$

$$2\eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}+2x=\pi+2\Leftrightarrow \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}=-x+\frac{\pi+2}{2}\Leftrightarrow g(x)=-x+\frac{\pi+2}{2}\quad(1)$$

Η g είναι κοίλη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ άρα $g(x)\le -x+\frac{\pi+2}{2}$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με την

ισότητα να ισχύει μόνον για $x=\frac{\pi}{2}$. Η g είναι κυρτή στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ άρα

$g(x)\ge -x+\frac{\pi+2}{2}$ για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για

$x=\frac{\pi}{2}$. Άρα η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα στο $[0,\pi]$ την $x=\frac{\pi}{2}$.

ε) Η h' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $h'(x)=g'(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x}k(x)$.

Η k είναι συνεχής και $k(0)k\left(\frac{\pi}{2}\right)=1(-1)=-1<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$k(x_1)=0\Leftrightarrow e^{\sigma\upsilon\nu x_1}k(x_1)=0\Leftrightarrow g'(x_1)=0\Leftrightarrow h'(x_1)=0$.

Επειδή η h' γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ το x_1 είναι μοναδικό.

στ) Για $-1<x<0$ είναι $h'(x)=\frac{x\left(7x^3+4\right)}{2\sqrt{1+x^3}}$

Είναι $7x^3+4\geq 0\Leftrightarrow 7x^3\geq -4\Leftrightarrow x^3\geq -\frac{4}{7}\Leftrightarrow x\geq -\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$ με $-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}>-1$ ($-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}>-1\Leftrightarrow\frac{4}{7}<1$ ισχύει)

Άρα $x\left(7x^3+4\right)>0$ για κάθε $x\in\left(-1,-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right)$ και $x\left(7x^3+4\right)<0$ για κάθε $x\in\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{7}},0\right)$ και $2\sqrt{1+x^3}>0$ για κάθε $x\in(-1,0)$.

Για $0<x<\pi$ είναι $h'(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x}k(x)$ και από γ) ερώτημα έχουμε:

Για $0<x<x_1\overset{h'\searrow}{\Rightarrow}h'(x)>h'(x_1)=0$, $x_1<x<\frac{\pi}{2}\overset{h'\searrow}{\Rightarrow}h'(x)<h'(x_1)=0$ και

$\frac{\pi}{2}<x<\pi\overset{h'\nearrow}{\Leftrightarrow}h'\left(\frac{\pi}{2}\right)<h'(x)<h'(\pi)\Leftrightarrow -1<h'(x)<-\frac{1}{e}$.Η h είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0)$ και $(0,\pi]$. Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=0$ και $h(0)=f(0)=0$ άρα η h είναι συνεχής στο μηδέν. Άρα η h είναι συνεχής στο $[-1,\pi]$.

Επομένως $h'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-1,-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right)\cup(0,x_1)$, $h'(x)<0$ για $x\in\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{7}},0\right)\cup\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ άρα $h\nearrow\left[-1,-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right]$,

$h\searrow\left[-\sqrt[3]{\frac{4}{7}},0\right]$, $h\nearrow(0,x_1]$ και $h\searrow[x_1,\pi]$ ως συνεχής.

Η h παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$ το $h\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right)$,για $x=x_1$ το $h(x_1)$ και τοπικό ελάχιστο για $x=-1$ το $h(-1)=0$, για $x=0$ το $h(0)=0$ και για $x=\pi$ το $h(\pi)=0$.

ζ) Έχουμε ολικό ελάχιστο $h(-1)=h(0)=h(\pi)=0$ άρα είναι $h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[-1,0]$ με την ισότητα να ισχύει για $x=-1$ ή $x=0$ ή $x=\pi$.Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{\pi}|h(x)|dx=\int_{-1}^{\pi}h(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}g(x)dx=$$

$$=I_1+\int_0^{\pi}g(x)dx=I_1+\int_0^{\pi}\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}dx=I_1-\left[e^{\sigma\upsilon\nu x}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{4}-\frac{1}{e}+e=\frac{e-4+4e^2}{4e}$$

τ.μ. γιατί $I_1=\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$

1ος τρόπος: Θέτουμε $1+x^3=u\geq 0$ για κάθε $x\in[-1,0]$ με $3x^2dx=du$. Για $x=-1$ είναι $u=0$ και για $x=0$ είναι $u=1$.

Άρα $I_1=\int_{-1}^{0}x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int_{-1}^{0}\sqrt[3]{1+x^3}\,3x^2dx=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt[3]{u}\,du=\frac{1}{3}\int_0^1u^{\frac{1}{3}}du=$

$$\frac{1}{\cancel{3}}\left[\frac{\cancel{3}u^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}.$$

2ος τρόπος: Θέτουμε $\sqrt[3]{1+x^3}=u\Leftrightarrow 1+x^3=u^3\Leftrightarrow x^3=u^3-1$ με $3x^2dx=3u^2du\Leftrightarrow x^2dx=u^2du$. Για $x=-1$ είναι $u=0$ και για $x=0$ είναι $u=1$. Άρα $I_1=\int_{-1}^{0}x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\int_0^1u\cdot u^2du=\int_0^1u^3\,du=\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$.

Τράπεζα θεμάτων Ι.Ε.Π.

32800.α) Επειδή $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[7,9]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 7 και x = 9, είναι $\int_7^9f(x)dx>0$,οπότε $\left(\int_7^9f(x)dx\right)^2=16=4^2\Leftrightarrow\int_7^9f(x)dx=4$.

β) $E(\Omega)=\frac{4}{3}+\left(e^2-5\right)+1+\int_7^9f(x)dx=\frac{4}{3}+e^2-5+1+4=\frac{3e^2+4}{3}$.

γ) $\int_1^9f(x)dx=\frac{4}{3}-\left(e^2-5\right)-1+\int_7^9f(x)dx=\frac{4}{3}-e^2+5-1+4=\frac{28-3e^2}{3}$.

33588.α) i. $\int_0^1 f(x)dx = -E(\Omega_1) = -\frac{4}{3}$.

ii. $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$.

iii. $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = 0 - E(\Omega_3) = -\frac{4}{3}$.

β) $\int_0^{2023} f(x)dx - \int_4^{2023} f(x)dx = \int_0^{2023} f(x)dx + \int_{2023}^4 f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx = -\frac{4}{3}$.

36837.α) i. $\int_{-2}^{-1} f(x)dx = -(\Theta B\Gamma) = -\frac{1}{2}(B\Gamma)(\Theta B) = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = -1$.

ii. $\int_{-1}^0 f(x)dx = (AO\Gamma) = \frac{1}{2}(O\Gamma)(AO) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$.

iii. $\int_0^3 f(x)dx = (AO\Delta\Lambda) = \frac{((AO)+(\Delta\Lambda))\cdot(O\Delta)}{2} = \frac{(2+5)\cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$.

β) $E = \int_{-2}^{-1}|f(x)|dx + \int_{-1}^3|f(x)|dx = -\int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx = \frac{25}{2}$.

36838.α) i. $\int_3^8 f(x)dx = \int_3^1 f(x)dx + \int_1^8 f(x)dx = -\int_1^3 f(x)dx + \int_1^8 f(x)dx = 23$.

ii. $\int_5^8 2f(x)dx = 2\left(\int_5^3 f(x)dx + \int_3^8 f(x)dx\right) = 2\left(-\int_3^5 f(x)dx + 23\right) = 30$.

iii. $\int_1^5 (f(x)+g(x))dx = \int_1^5 f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx - 6 = 8$.

β) Είναι $E = -\int_1^5 g(x)dx = 6$ τ.μ.

36849.α) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0 = f(0)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-\sigma\upsilon\nu x) = 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ η f είναι συνεχής στο 0.

β) Επειδή $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[-2,\pi]$, είναι

$$E = \int_{-2}^{\pi} f(x)dx = \int_{-2}^0 x^2 dx + \int_0^{\pi}(1-\sigma\upsilon\nu x)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^0 + [x-\eta\mu x]_0^{\pi} = \frac{8}{3} + \pi \text{ τ.μ.}$$

23218.α) Η P είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $P'(x) = 3x^2 + 6x - \lambda$. Η P ′ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $P''(x) = 6x + 6$. Είναι $P''(x)\geq 0 \Leftrightarrow 6x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$.

Για κάθε $x \in (-\infty,-1)$ είναι $P''(x) < 0$ και επειδή η P είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$ είναι κοίλη στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (-1,+\infty)$ είναι $P''(x) > 0$ και επειδή η P είναι συνεχής στο $[-1,+\infty)$ είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Η P έχει σημείο καμπής το $K(-1,P(-1)) \Leftrightarrow K(-1,3+\lambda)$.

β) Η P' είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 36+12\lambda$.

Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 36+12\lambda < 0 \Leftrightarrow 12\lambda < -36 \Leftrightarrow \lambda < -3$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $P'(x) > 0$, οπότε η P είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει ακρότατα.

Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow 36+12\lambda = 0 \Leftrightarrow 12\lambda = -36 \Leftrightarrow \lambda = -3$ τότε

$P'(x) = 3x^2+6x+3 = 3(x+1)^2 > 0$ για κάθε $x \neq -1$ και επειδή η P είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει ακρότατα.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
P΄	+	0	−	0	+
P	↗		↘		↗

Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 36+12\lambda > 0 \Leftrightarrow 12\lambda > -36 \Leftrightarrow \lambda > -3$ τότε η P΄ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ και αφού $\alpha = 3 > 0$ το πρόσημο της P΄και η μονοτονία της P φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

Άρα για λ > - 3 η P έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = \dfrac{-6-\sqrt{12\lambda+36}}{6}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = \dfrac{-6+\sqrt{12\lambda+36}}{6}$.

γ) i. Αφού η P παρουσιάζει τοπικά ακρότατα είναι $\lambda > -3$. Η εφαπτομένη της C_P στο K έχει εξίσωση

ε: $y - P(-1) = P'(-1)(x+1)$ $y-(\lambda+3) = (-3-\lambda)(x+1) \Leftrightarrow y = (-3-\lambda)x$.

Επειδή λ > - 3 είναι $(-3-\lambda) < 0$ και επειδή διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

ii. Επειδή η P είναι κοίλη στο $(-\infty,-1]$ βρίσκεται κάτω από την ε στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x \leq -1$ είναι $P(x) \leq (-3-\lambda)x$. Επειδή η P είναι κυρτή στο $[-1,+\infty)$, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους άρα για κάθε $x \geq -1$ είναι $P(x) \geq (-3-\lambda)x$.

$$E_1 = \int_{x_1}^{-1}\left((-3-\lambda)x - P(x)\right)dx = \int_{x_1}^{-1}\left((-3-\lambda)x - \left(x^3+3x^2-\lambda x+1\right)\right)dx =$$

$$\int_{x_1}^{-1}\left((-3-\lambda)x - x^3 - 3x^2 + \lambda x - 1\right)dx = \int_{x_1}^{-1}\left(-x^3-3x^2-3x-1\right)dx = -\int_{x_1}^{-1}(x+1)^3\,dx =$$

$$-\left[\frac{(x+1)^4}{4}\right]_{x_1}^{-1}=\frac{(x_1+1)^4}{4}.$$

$$E_2=\int_{-1}^{x_2}\left(P(x)-(-3-\lambda)x\right)dx=\int_{-1}^{x_2}\left(\left(x^3+3x^2-\lambda x+1\right)-(-3-\lambda)x\right)dx=$$

$$\int_{-1}^{x_2}\left(x^3+3x^2+3x+1\right)dx=\int_{-1}^{x_2}(x+1)^3\,dx=\ =\frac{(x_2+1)^4}{4}.$$

Επειδή τα x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $P'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2+6x-\lambda=0$, από τους τύπους Vieta είναι $x_1+x_2=-\frac{6}{3}=-2$ οπότε

$$x_1+x_2=-1-1\Leftrightarrow x_1+1=x_2+1\Leftrightarrow (x_1+1)^4=(x_2+1)^4\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x_1+1)^4}{4}=\frac{(x_2+1)^4}{4}\Leftrightarrow E_1=E_2.$$

24275.α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=-x+1+\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow f(x)+x-1=e^{-x}$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$, οπότε η ευθεία $y=-x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-1-e^{-x}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f(1)=-1+1+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}>0$, $f(2)=-2+1+\frac{1}{e^2}=-1+\frac{1}{e^2}<0$, δηλαδή $f(1)f(2)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο [1,2], σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)=0$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα το ρ είναι μοναδικό και επειδή επιπλέον $\rho\in(1,2)$ είναι $\rho>1$.

γ) Για κάθε $x\in(1,\rho)$ είναι $f(x)>f(\rho)=0$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E(\Omega)=\int_1^{\rho}f(x)dx=\int_1^{\rho}\left(-x+1+e^{-x}\right)dx=\left[-\frac{x^2}{2}+x-e^{-x}\right]_1^{\rho}\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=-\frac{\rho^2}{2}+\rho-e^{-\rho}+\frac{1}{2}-1+e^{-1}=-\frac{\rho^2-2\rho+1}{2}-e^{-\rho}+e^{-1}=-\frac{(\rho-1)^2}{2}-e^{-\rho}+e^{-1}\ (1).$$

Είναι $f(\rho)=0\Leftrightarrow-\rho+1+e^{-\rho}=0\Leftrightarrow e^{-\rho}=\rho-1$, οπότε η (1) γίνεται:

$$E(\Omega)=-\frac{(\rho-1)^2}{2}-(\rho-1)+e^{-1}\ \text{τετραγωνικές μονάδες.}$$

24704.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{x}+e^x$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x+e^x\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=e$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f((0,1))=(-\infty,e)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f((0,1))$, υπάρχει μοναδικό λόγω μονοτονίας $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Επομένως η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο Α τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

γ) Είναι $x_0\le x\le 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_0)\le f(x)\le f(1)\Leftrightarrow 0\le f(x)\le e$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_{x_0}^{1} f(x)dx=\int_{x_0}^{1}\left(\ln x+e^x\right)dx=\int_{x_0}^{1}\ln x\,(x)'\,dx+\left[e^x\right]_{x_0}^{1}\Leftrightarrow$

$$E=\left[x\ln x\right]_{x_0}^{1}-\int_{x_0}^{1}x\cdot\frac{1}{x}dx+e-e^{x_0}=-x_0\ln x_0-1+x_0+e-e^{x_0}\quad(1)$$

Είναι $f(x_0)=0\Leftrightarrow \ln x_0+e^{x_0}=0\Leftrightarrow \ln x_0=-e^{x_0}$, οπότε η (1) γίνεται:

$$E=-x_0\ln x_0-1+x_0+e+\ln x_0=e+(x_0-1)-\ln x_0(x_0-1)\Leftrightarrow$$

$$E=e+(x_0-1)(1-\ln x_0)$$

25147.α) Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow e^{-x}=e^{-x}\eta\mu x\Leftrightarrow \eta\mu x=1 \overset{x\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{2}$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\frac{\pi}{2},e^{\frac{-\pi}{2}}\right)$, στο διάστημα ορισμού τους $[0,2\pi]$.

β) Είναι $f'(x)=-e^{-x}$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$ και $g'(x)=f'(x)\eta\mu x+f(x)\sigma\upsilon\nu x$, άρα $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο Α.

γ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x)(1-\eta\mu x)\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|e^{-x}(1-\eta\mu x)\right|dx\Leftrightarrow$$

$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\left(1-\eta\mu x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\eta\mu x dx \quad (1)$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\eta\mu x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-x}\right)'\eta\mu x dx=e^{-\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sigma\upsilon\nu x dx=e^{-\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-x}\right)'\sigma\upsilon\nu x dx=$

$e^{-\frac{\pi}{2}}+\left[e^{-x}\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\eta\mu x dx \Leftrightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\eta\mu x dx=-e^{-\frac{\pi}{2}}+1\Leftrightarrow,$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\eta\mu x dx=\frac{-e^{-\frac{\pi}{2}}+1}{2}$ οπότε η (1) γίνεται $E=-e^{-\frac{\pi}{2}}+1-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}-1}{2}=\frac{1-e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$ τ.μ.

25235.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ με $f'(x)=-\eta\mu x$.

Είναι $(\varepsilon_1): y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y=-x+\frac{\pi}{2}$ και

$(\varepsilon_2): y-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y=\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y=x-\frac{3\pi}{2}$.

β) Για τις συντεταγμένες του σημείου τομής Γ των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$, έχουμε:

$\begin{cases} y=-x+\frac{\pi}{2} \\ y=x-\frac{3\pi}{2} \end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}2y=-\pi\Leftrightarrow y=-\frac{\pi}{2}$ και $-\frac{\pi}{2}=x-\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow x=\pi$, άρα $\Gamma\left(\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδό $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}(AB)|y_\Gamma|=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$. Το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα x΄x είναι

$E(\Omega_1)=-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\sigma\upsilon\nu x dx=-\left[\eta\mu x\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}=-(-1-1)=2$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E(\Omega)=(AB\Gamma)-E(\Omega_1)=\frac{\pi^2}{4}-2$.

γ) Επειδή η f είναι κυρτή στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό,

εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ είναι

$f(x)>-x+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow f(x)+x-\frac{\pi}{2}>0$.Ακόμη $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(f(x)+x-\frac{\pi}{2}\right)=0$, οπότε αν

θέσουμε $f(x)+x-\frac{\pi}{2}=u$, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{f(x)+x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{u\to0^+}\frac{1}{u}=+\infty$.

25259.α) i. Επειδή το σημείο $A\left(0,f(0)\right)$ ανήκει στην ευθεία ε, είναι $f(0)=\frac{1}{4}$.

Επειδή η ε εφάπτεται της C_f στο Α, είναι $f'(0)=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(0)=0$.

ii. $\lim\limits_{x\to0}\frac{4f(x)-1}{\eta\mu x\cdot f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{4\left(f(x)-\frac{1}{4}\right)}{\eta\mu x\cdot f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{4\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}\cdot f(x)}=\frac{4f'(0)}{1\cdot f(0)}=0.$

β) i. Επειδή η f είναι κυρτή, η f΄ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $0\le x\le1$ είναι $f'(x)\ge f'(0)=0$.

ii. Επειδή η f ΄είναι γνησίως αύξουσα είναι1-1, οπότε $f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=f'(0)\Leftrightarrow x=0$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E=\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ τ.μ.

25746.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)$.

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)>f(x)$, είναι $g'(x)>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x<0$ είναι $g(x)<g(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0$ και για κάθε $x>0$ είναι $g(x)>g(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$.

γ) Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)>f(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, οπότε είναι και 1-1 στο $[0,+\infty)$.Είναι $|\eta\mu x|+1>0,\ |x|+1>0$, οπότε

$f(|\eta\mu x|+1)=f(|x|+1)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}|\eta\mu x|+1=|x|+1\Leftrightarrow|\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0$.

(Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x|\le|x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$).

δ) Επειδή για κάθε $x\ge0$ είναι $f(x)\ge0$ και η f είναι συνεχής, το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E=\int_0^1 f(x)dx$. Είναι

$f'(x)>f(x)\Rightarrow\int_0^1 f'(x)dx>\int_0^1 f(x)dx\Leftrightarrow E<f(1)-f(0)\Leftrightarrow E<f(1)$.

25747.α) Για κάθε $x \in (0,2)$ είναι

$f(x)f'(x) = -x+1 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = -2x+2 \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)' = \left(-x^2+2x\right)' \Leftrightarrow$

$f^2(x) = -x^2+2x+c,\ c \in \mathbb{R}$. Για $x = 1$ είναι

$f^2(1) = -1+2+c \Leftrightarrow 1 = 1+c \Leftrightarrow c = 0$, οπότε $f^2(x) = -x^2+2x$ για κάθε $x \in (0,2)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,2]$, είναι συνεχής και στα $x_1 = 0,\ x_2 = 2$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^+} f^2(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x^2+2x\right) \Leftrightarrow f^2(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ και $\int_0^2 f(x)dx = \frac{\pi\rho^2}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f^2(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(-x^2+2x\right) \Leftrightarrow f^2(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = 0$.

Τελικά $f^2(x) = \begin{cases} -x^2+2x,\ x \in (0,2) \\ 0,\ x = 0 \text{ ή } x = 2 \end{cases} = -x^2+2x,\ x \in [0,2]$

β) Για κάθε $x \in [0,2]$ είναι $f^2(x) = -x^2+2x \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{-x^2+2x}$ (1). Είναι

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x} = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x = 0 \Leftrightarrow x(-x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$.

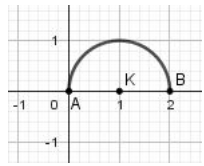
Για κάθε $x \in (0,2)$ είναι $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Επειδή $f(1) = 1$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,2)$, οπότε η (1) γίνεται $f(x) = \sqrt{-x^2+2x}$.

Άρα $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2+2x},\ x \in (0,2) \\ 0\ ,x = 0 \text{ ή } x = 2 \end{cases} = \sqrt{-x^2+2x},\ x \in [0,2]$.

γ) Είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x} = y,\ y \geq 0$, οπότε

$-x^2+2x = y^2 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2-2x+1+y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 1$. Η γραφική παράσταση της f είναι το ημικύκλιο με κέντρο Κ(1,0) και ακτίνα 1 που βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x, μαζί με τα σημεία Α και Β.



δ) Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι το εμβαδό του προηγούμενου ημικυκλίου, οπότε $\int_0^2 f(x)dx = \frac{\pi\rho^2}{2} = \frac{\pi}{2}$.

25757.α) Στο διάστημα $[0,1)$ η f είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Για κάθε $x \in [0,1)$ είναι

$0 \le \eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le (1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right) \le 1-x$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(0)$, επομένως η f είναι συνεχής στο [0,1].

β) Στο προηγούμενο σκέλος δείξαμε ότι για κάθε $x \in [0,1)$ είναι

$0 \le (1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right) \le 1-x \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le 1-x$. Επειδή

$f(1)=0$ οπότε $0 \le f(0) \le 1-1$, η σχέση $0 \le f(x) \le 1-x$ αληθεύει για κάθε $x \in [0,1]$.

γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο [0,1] και $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E = \int_0^1 f(x)dx$.Για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) \le 1-x$ και η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [0,1]$, οπότε

$$\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 (1-x)dx \Leftrightarrow E < \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1-\frac{1}{2} \Leftrightarrow E < \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

25765.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = \frac{2}{x} + 1$.

Για κάθε x >0 είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2\ln x + x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(2\ln x + x) = +\infty + \infty = +\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$.

β) Επειδή η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f(A) = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $D_f = (0,+\infty)$, έχουμε:

Αν $x \le 0$ τότε η ανίσωση $f^{-1}(x) > x$ είναι αληθής. Αν x> 0 τότε

$f^{-1}(x) > x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x)\right) > f(x) \Leftrightarrow f(x) < x \Leftrightarrow 2\ln x + x < x \Leftrightarrow 2\ln x < 0 \Leftrightarrow$ $\ln x < \ln 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$. Τελικά η ανίσωση αληθεύει για $x < 1$.

γ) i. Η συνάρτηση $f(|x|)$ ορίζεται όταν $|x| > 0 \Leftrightarrow x \ne 0$, τότε

$f(|x|) = 2\ln|x| + |x|$ και $g(x) = e^{f(|x|)} = e^{2\ln|x| + |x|} = e^{\ln x^2} \cdot e^{|x|} = x^2 e^{|x|}$, $x \ne 0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, οπότε

$g(0)=\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{|x|}=0$, οπότε $g(x)=\begin{cases}x^2e^{|x|},\ x\neq 0\\ 0\ ,\ x=0\end{cases}=x^2e^{|x|},\ x\in\mathbb{R}$.

ii. $E(\Omega)=\int_{-1}^{1}|g(x)|dx=\int_{-1}^{1}x^2e^{|x|}dx=\int_{-1}^{0}x^2e^{-x}dx+\int_{0}^{1}x^2e^{x}dx\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=\left[-x^2e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}2xe^{-x}dx+\left[x^2e^{x}\right]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}2xe^{x}dx\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=e+\left[-2xe^{-x}\right]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}2e^{-x}dx+e-\left[2xe^{x}\right]_{0}^{1}+\int_{0}^{1}2e^{x}dx\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=\cancel{e}-\cancel{2e}-2\left[e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\cancel{e}-2e+2\left[e^{x}\right]_{0}^{1}=-2+2e-2e+2e-2=2(e-2)$.

26183.α) Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=1=f(1)$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1-\frac{4\ln x}{x}\right)=1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$ η f είναι συνεχής στο 1.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\left(\frac{\pi x}{4}\right)'}{1}=\frac{\frac{\pi}{4}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\pi}{2}$$ και

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\frac{4\ln x}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-4\ln x}{x^2-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{4}{x}}{2x-1}=\frac{-4}{1}=-4\ .$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

β) Επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1 που είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, το x=1 είναι κρίσιμο σημείο της f.

Για $x\in(0,1)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\left(\frac{\pi x}{4}\right)'=\frac{\pi}{4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$. Επειδή για κάθε $x\in(0,1)$ είναι

$f'(x)>0$, η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο διάστημα αυτό.

Για $x > 1$ είναι $f'(x) = -4\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4\dfrac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

Επειδή τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης είναι τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία δεν είναι παραγωγίσιμη και οι ρίζες της f', η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία τα 1, e.

γ) Είναι $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{\pi x}{4} \le \dfrac{\pi}{4}$ οπότε $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi x}{4}\right) \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, η f είναι συνεχής στο [0,1] άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)dx$.

Θέτουμε $\dfrac{\pi x}{4} = u \Leftrightarrow x = \dfrac{4u}{\pi}$, άρα $dx = \dfrac{4}{\pi}du$. Για x = 0 είναι u=0 και για x=1 είναι $u=\dfrac{\pi}{4}$, οπότε

$$E = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi u du = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu u}{\sigma\upsilon\nu u}du = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sigma\upsilon\nu u)'}{\sigma\upsilon\nu u}du = -\frac{4}{\pi}\left[\ln(\sigma\upsilon\nu u)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

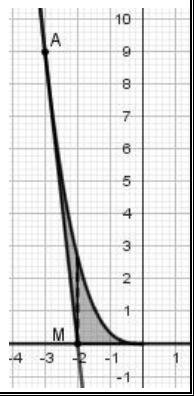
$$E = -\frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4}{\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{4}{\pi}\left(-\ln 2^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2\ln 2}{\pi}\ \tau.\mu.$$

27031.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0]$ με $f'(x) = -x^2$. Η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ευθεία

$$\varepsilon:\ y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y + \frac{\alpha^3}{3} = -\alpha^2(x-\alpha) \Leftrightarrow y = -\alpha^2 x + \frac{2\alpha^3}{3}.$$

β) i. Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\alpha(t_0) = -3$ και $\alpha'(t_0) = -\alpha(t_0) = 3$.

ii. Επειδή $\alpha(t) < 0$ είναι $\alpha'(t) = -\alpha(t) > 0$, δηλαδή η τετμημένη του σημείου Μ αυξάνεται αφού το Μ πλησιάζει το Ο.



γ) Για $\alpha = -3$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση ε:

$$y = -(-3)^2 x + \frac{2\cdot(-3)^3}{3} \Leftrightarrow y = -9x - 18.$$

Για y = 0 είναι $-9x - 18 = 0 \Leftrightarrow -9x = 18 \Leftrightarrow x = -2$, άρα $M(-2,0)$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\Omega)=\int_{-3}^{-2}\left(-\frac{1}{3}x^3-(-9x-18)\right)dx+\int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3\right)dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{9}{2}x^2+18x\right]_{-3}^{-2}+\left[-\frac{1}{12}x^4\right]_{-2}^{0}=\ldots=\frac{9}{4}\ \tau.\mu.$$

28476.α) i. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=1$.

ii. Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)(x-1)}{\ln x}$, $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, τότε $f(x)=g(x)\dfrac{\ln x}{x-1}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι συνεχής στο x = 1, άρα

$f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}g(x)\dfrac{\ln x}{x-1}=0\cdot1=0$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=\sqrt{x^2+1}>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Επειδή $f(1)=0$, η x = 1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Για κάθε $x<1$ είναι $f(x)<f(1)=0$ και για κάθε $x>1$ είναι

$f(x)>f(1)=0$.

δ) Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x)\le0$ για κάθε $x\in[0,1]$, το ζητούμενο

εμβαδό είναι: $E=-\int_0^1 f(x)dx=-\int_0^1(x)'f(x)dx=-\left[xf(x)\right]_0^1+\int_0^1 xf'(x)dx \Leftrightarrow$

$$E=-f(1)+\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2+1\right)'\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx \Leftrightarrow$$

$$E=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\ \tau.\mu.$$

27408.α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι

$E(x)=(A\Delta)(AB)=2x\cdot f(x)=2x\left(9-x^2\right)=18x-2x^3$, $x\in[0,3]$

β) Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο (0,3) με $E'(x)=18-6x^2$.

Είναι $E'(x)\ge0\Leftrightarrow18-6x^2\ge0\Leftrightarrow-6x^2\ge-18\Leftrightarrow x^2\le3\overset{x\in(0,3)}{\Leftrightarrow}x\le\sqrt{3}$

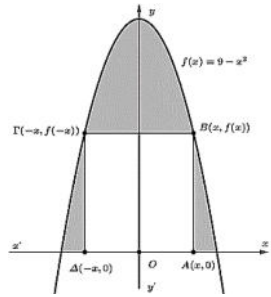
Για κάθε $x\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ είναι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in\left(\sqrt{3},3\right)$ είναι $f'(x)<0$,

η Ε είναι συνεχής στο [0,3], είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\sqrt{3}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\sqrt{3},3\right]$.

γ) Το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο για $x=\sqrt{3}$, τότε οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $A\Delta = 2x = 2\sqrt{3}$ και

$B\Gamma = f\left(\sqrt{3}\right) = 9-\left(\sqrt{3}\right)^2 = 9-3 = 6$. Το μέγιστο εμβαδό είναι

$E\left(\sqrt{3}\right) = 18\sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3}\right)^3 = 18\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ τ.μ..



δ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E(\Omega) = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx - E\left(\sqrt{3}\right) = \int_{-3}^{3}\left(9-x^2\right)dx - 12\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} - 12\sqrt{3} \Leftrightarrow E(\Omega) = 27 - 9 + 27 - 9 - 12\sqrt{3} = 12\left(3-\sqrt{3}\right) \text{ τ.μ.}$$

29645. **α)** Για $x<0$ είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+1=0 \Leftrightarrow -3x^2=-1 \Leftrightarrow$

$x^2 = \frac{1}{3} \overset{x<0}{\Leftrightarrow} x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ άρα η f έχει ακριβώς μία ρίζα x_1 στο διάστημα $(-\infty,0)$.

Για $x>0$ είναι $f'(x) = -3x^2+3 \geq 0 \Leftrightarrow -3x^2 \geq -3 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x \leq 1$.

Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x \in (1,+\infty)$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right) = -\infty$.

Στο διάστημα $[0,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f([0,1]) = [1,3]$ και στο $[1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f((1,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right) = (-\infty,3)$.

Επειδή το 0 δεν περιέχεται στο $f([0,1]) = [1,3]$, η f δεν έχει ρίζα στο [0, 1].

Επειδή το 0 περιέχεται στο $f((1,+\infty))$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_2 > 1$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$.Είναι $f(3) = -27+27+1 = 1$, οπότε στο διάστημα $(3,+\infty)$ η f έχει σύνολο τιμών το $(-\infty,1)$, οπότε η ρίζα x_2 της f περιέχεται στο $(3,+\infty)$,

επομένως $x_2 > 3$.

β) i. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$, οπότε η f είναι συνεχής στο x = 0 και επειδή είναι συνεχής στα $[x_1, 0)$, $[0, x_2]$ ως πολυωνυμική, είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$. Στο $(x_1, 0)$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -6x$. Στο $(0, x_2)$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -3x^2 + 6x$. Στο x = 0 είναι

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-3x^2+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-3x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-3x) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3+3x^2+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}(-x^2+3x)}{\cancel{x}} = 0.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ η f είναι παραγωγίσιμη στο x = 0, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2). Επειδή $f(x_1) = f(x_2) = 0$ η συνάρτηση ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

ii. Για $x \in (x_1, 0)$ είναι $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 6\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ αδύνατο.

Για $x \in (0, x_2)$ είναι $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -3\xi^2 + 6\xi = 0 \Leftrightarrow -3\xi(\xi - 2) = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ απορρίπτεται ή $\xi = 2$ δεκτή.

Επίσης $f'(0) = 0$ οπότε τα ζητούμενα ξ είναι τα 0,2.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο x = 2 έχει εξίσωση

$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 5$. Έστω

$h(x) = 5 - f(x) = 5 + x^3 - 3x^2 - 1 = x^3 - 3x^2 + 4 = (x-2)(x^2 - x - 2) \Leftrightarrow$

$h(x) = (x-2)^2(x+1) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,2]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^2 h(x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x\right]_0^2 = 4 \text{ τ.μ.}$$

29646.α) i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = -3x^2 + 6x$.

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x \geq 0 \Leftrightarrow -3x(x-2) \geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$.

Για κάθε $x \in (0,2)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε x > 2 είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 0$ και τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 2$.

Η f ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=-6x+6$.

Είναι $f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow -6x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f''(x)>0$, για κάθε $x>1$ είναι $f''(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κυρτή στο [0, 1] και κοίλη στο $[1,+\infty)$. Η f έχει σημείο καμπής το $\Gamma(1,f(1))$.

ii. Είναι $f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(2)=5$, οπότε Α(0, 1), Β(2, 5) και Γ(1, 3).

Είναι $\lambda_{AB}=\frac{5-1}{2-0}=2,\ \lambda_{B\Gamma}=\frac{3-5}{1-2}=2$, δηλαδή $\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}\Leftrightarrow AB//B\Gamma$, οπότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Είναι $\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{0+2}{2}=1=x_\Gamma$ και $\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1+5}{2}=3=y_\Gamma$, οπότε το Γ είναι μέσο του ΑΒ.

β) Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $y-1=2x\Leftrightarrow y=2x+1$. Έστω

$g(x)=f(x)-y=-x^3+3x^2+1-2x-1=-x^3+3x^2-2x\Leftrightarrow$

$g(x)=-x(x^2-3x+2)=-x(x-1)(x-2)$

x	0		1		2	$+\infty$
- x	–		–		–	
x- 1	–	0	+		+	
x – 2	–		–	0	+	
g	–	0	+	0	+	

Όταν $x\in[0,1]$ είναι

$g(x)\leq 0\Leftrightarrow f(x)\leq 2x+1$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία ΑΒ είναι

$E_1=-\int_0^1 g(x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1=\frac{1}{4}$ τ.μ.

Όταν $x\in[1,2]$ είναι $g(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq 2x+1$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία ΑΒ είναι

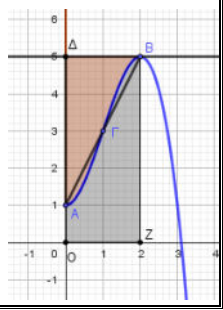
$E_2=\int_1^2 g(x)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3-x^2\right]_1^2=\frac{1}{4}$ τ.μ. Επειδή

$E_1=E_2$ η ευθεία ΑΒ ορίζει με τη γραφική παράσταση της f δύο ισεμβαδικά χωρία.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο Β έχει εξίσωση $y=5$.

Είναι $(AB\Delta)=\frac{1}{2}(A\Delta)(B\Delta)=4$ τ.μ..

Το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της C_f, της ευθείας ε και του άξονα y'yείναι



$$E=\int_0^2 5-f(x)\,dx=10-\int_0^2\left(-x^3+3x^2+1\right)dx \Leftrightarrow$$

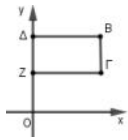
$$E=10-\left[-\frac{x^4}{4}+x^3+x\right]_0^2=10-6=4\ \tau.\mu.,\ \text{άρα } E=(AB\Delta).$$

31148.α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f(x)\ge g(x)\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{e^x}\ge e^{-x}\Leftrightarrow x^2+1\ge e^x e^{-x}\Leftrightarrow x^2+1\ge 1\Leftrightarrow x^2\ge 0$$ ισχύει

β) i. $E(x)=(B\Gamma)(\Gamma Z)=\left(f(x)-g(x)\right)\cdot x=$

$$\left(\frac{x^2+1}{e^x}-e^{-x}\right)x=\frac{x^2}{e^x}\cdot x=\frac{x^3}{e^x},\ x>0.$$



ii. Για κάθε $x>0$ είναι $E'(x)=\dfrac{3x^2e^x-x^3e^x}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{x^2e^x(3-x)}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{x^2(3-x)}{e^x}$.

$$E'(x)\ge 0\Leftrightarrow\frac{x^2(3-x)}{e^x}\ge 0\Leftrightarrow 3-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 3.$$

Για κάθε $x\in(0,3)$ είναι $E'(x)>0$ και για κάθε $x\in(3,+\infty)$ είναι $E'(x)<0$, επειδή η Ε είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3,+\infty)$. Η Ε έχει μέγιστο για x = 3.

γ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_{\ln 2}^1 h(x)\,dx=\int_{\ln 2}^1\frac{f(x)-g(x)}{x}dx=\int_{\ln 2}^1\frac{x}{e^x}dx=\int_{\ln 2}^1 xe^{-x}dx\Leftrightarrow$$

$$E=\int_{\ln 2}^1 x\left(-e^{-x}\right)'dx=\left[-xe^{-x}\right]_{\ln 2}^1-\int_{\ln 2}^1\left(-e^{-x}\right)dx=-e^{-1}+\frac{\ln 2}{e^{\ln 2}}-\left[e^{-x}\right]_{\ln 2}^1=\ldots=\ln\sqrt{2e}-\frac{2}{e}$$

31149.α) Για κάθε x> 0 είναι $1+\dfrac{1}{x}>1\Leftrightarrow\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>0$ και επειδή $x^2>0$,

είναι $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}>0$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι

$$\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x_1}>1+\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow\ln\left(1+\frac{1}{x_1}\right)>\ln\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\ (1)$$

και $x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow\dfrac{1}{x_1^2}>\dfrac{1}{x_2^2}\ (2)$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1), (2)

προκύπτει ότι $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow (0,+\infty)$. (Προτιμήσαμε τον ορισμό μονοτονίας γιατί η παραγώγιση φαίνονταν ποιο δύσκολη).

β) $\ln(1+f(x)) - \ln(f(x)) > f^2(x)\cdot f(\ln 2) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{1+f(x)}{f(x)}\right) > f^2(x)\cdot f(\ln 2) \Leftrightarrow$

$\ln\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right) > f^2(x)\cdot f(\ln 2) \Leftrightarrow \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)}{f^2(x)} > f(\ln 2) \Leftrightarrow$

$f(f(x)) > f(\ln 2) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) < \ln 2 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x > 1$.

γ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$.

Θέτουμε $1+\dfrac{1}{x} = u$, τότε $-\dfrac{1}{x^2}dx = du$. Για $x = \dfrac{1}{2}$ είναι u= 3 και για x = 1 είναι u=2, οπότε $E = -\int_{1/2}^{1} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}dx\right) = -\int_3^2 \ln u\,du = \int_2^3 \ln x\,(x)'\,dx =$

$[x\ln x]_2^3 - \int_2^3 u\cdot\dfrac{1}{u}du = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 3 + 2 \Leftrightarrow$

$E = \ln 27 - \ln 4 - 1 = \ln 27 - \ln 4e = \ln\left(\dfrac{27}{4e}\right)$ τ.μ.

31530.α) i. Είναι $f(0) = -2,\ f(1) = 4$, άρα $f(0)f(1) < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 + 5$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

ii. Είναι $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{5}{2} - 2 = \dfrac{5}{8} > 0$, άρα $f\left(\dfrac{1}{2}\right)f(0) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. Όμως το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f, άρα $x_0 \in \left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, οπότε το x_0 είναι ποιο κοντά στο 0.

β) Είναι $x_0+\theta>x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_0+\theta)>f(x_0)=0$ και $x_0-\theta<x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$f(x_0-\theta)<f(x_0)=0$.Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x_o+\theta)x^3+2x-5}{f(x_o-\theta)x-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x_o+\theta)x^{\not 3^2}}{f(x_o-\theta)\not x}=-\infty$.

γ) Είναι $f'(1)=3+5=8$. Η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει εξίσωση

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=8x-4$.

$f(x)-y=x^3+5x-2-8x+4=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_1^2\left|x^3-3x+2\right|dx=\int_{-2}^2\left(x^3-3x+2\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2=\frac{5}{4}\ \tau.\mu.$$

31792.α) Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(-x^2+x+1\right)=1$,

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(1+\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)=1=f(1)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$ η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x^2+x+1-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x\not(x-1)}{\not x-1}=-1$ και

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1+\dfrac{(\ln x)^2}{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(\ln x)^2}{x^2-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\underset{\text{DLH}}{\lim\limits_{x\to1^+}}\dfrac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{2x-1}=0$.Επειδή

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

β) Η f έχει κρίσιμο σημείο το $x_0=1$. Για -1 < x< 1 είναι $f'(x)=-2x+1$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow-2x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$. Η f έχει κρίσιμο σημείο το $x=\dfrac{1}{2}$.

Για x > 1 είναι $f'(x)=\dfrac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-\ln^2 x}{x^2}=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}=0\Leftrightarrow$

$2-\ln x=0\Leftrightarrow\ln x=2\Leftrightarrow x=e^2$. Η f έχει κρίσιμο σημείο το $x=e^2$.

γ) Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=1+\dfrac{(\ln x)^2}{x}-e^{-x}$, $x\in[1,e]$.

Για κάθε $1 \le x \le e$ είναι $-1 \ge -x \ge -e \Leftrightarrow e^{-e} \le e^{-x} \le e^{-1} = \dfrac{1}{e} < 1 \Rightarrow 1 - e^{-x} > 0$

και επειδή $\dfrac{(\ln x)^2}{x} \ge 0$, είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, e]$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_1^e h(x)dx = \int_1^e \left(1 - e^{-x}\right)dx + \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \left[x + e^{-x}\right]_1^e + \int_1^e (\ln x)^2 (\ln x)' dx \Leftrightarrow$$

$$E = e + e^{-e} - 1 - \frac{1}{e} + \left[\frac{\ln^3 x}{3}\right]_1^e = e + e^{-e} - 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{3} = e + e^{-e} - \frac{2}{3} - \frac{1}{e} \quad \text{τ.μ.}$$

31533.α) Για κάθε $x \ne 0$ είναι $f'(x) = \dfrac{8}{x^3}$. Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Για κάθε $x \ne 0$ είναι $f''(x) = -\dfrac{24}{x^4} < 0$, οπότε η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(4 - \dfrac{4}{x^2}\right) = 4$ και

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(4 - \dfrac{4}{x^2}\right) = 4$, άρα η ευθεία y =4 είναι ασύμπτωτη της C_f.

β) Επειδή οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, ισχύει ότι $f'(x_1)f'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{8}{x_1^3} \cdot \dfrac{8}{x_2^3} = -1 \Leftrightarrow (x_1 x_2)^3 = -64 \Leftrightarrow$

$x_1 x_2 = -4$.

γ) i. Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει εμβαδό $(ΑΒΓΔ) = (ΑΒ)(ΑΔ) = 4(\alpha - 1)$.

$$E(\Omega_2) = \int_1^\alpha f(x)dx = \int_1^\alpha \left(4 - \frac{4}{x^2}\right)dx = \left[4x + \frac{4}{x}\right]_1^\alpha = 4\alpha + \frac{4}{\alpha} - 4 - 4 \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega_2) = 4\alpha + \frac{4}{\alpha} - 8 = \frac{4\alpha^2 - 8\alpha + 4}{\alpha} = \frac{4(\alpha - 1)^2}{\alpha}.$$

$$E(\Omega_1) = (ΑΒΓΔ) - E(\Omega_2) = 4(\alpha - 1) - \frac{4(\alpha - 1)^2}{\alpha} = 4(\alpha - 1)\left(1 - \frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) = \frac{4(\alpha - 1)}{\alpha}$$

ii. $E(\Omega_1) = E(\Omega_2) \Leftrightarrow \dfrac{4(\alpha - 1)}{\alpha} = \dfrac{4(\alpha - 1)^2}{\alpha} \Leftrightarrow 1 = \alpha - 1 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

31534.α) Επειδή η f΄είναι παραβολή έχει εξίσωση της μορφής $f'(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Επειδή η παραβολή έχει μέγιστο είναι α < 0. Επειδή η παραβολή διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι $f'(0)=0\Leftrightarrow\gamma=0$.
Επειδή η f΄έχει μέγιστο στο x = 2 που βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, είναι $f''(2)=0$.
Είναι $f''(x)=2\alpha x+\beta$, οπότε $f''(2)=0\Leftrightarrow 4\alpha+\beta=0\Leftrightarrow\beta=-4\alpha$ (1).
Επειδή η $C_{f'}$ διέρχεται από το Κ, ισχύει ότι

$$f'(2)=2\Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}4\alpha-8\alpha=2\Leftrightarrow-4\alpha=2\Leftrightarrow\alpha=-\frac{1}{2}$$

και από την (1) είναι β =2, άρα $f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x\Leftrightarrow f'(x)=\left(-\frac{1}{6}x^3+x^2\right)'\Leftrightarrow$

$f(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2+c,\ c\in\mathbb{R}$.Είναι $f(0)=1\Leftrightarrow c=1$,άρα $f(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2+1$.

γ) i. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε x > 0 είναι

$$g(x)>f(x)\Leftrightarrow \cancel{x^2}+x+\cancel{1}-\eta\mu x>-\frac{1}{6}x^3+\cancel{x^2}+\cancel{1}\Leftrightarrow$$

$\frac{1}{6}x^3+x-\eta\mu x>0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{1}{6}x^3+x-\eta\mu x,\ x\geq 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=\frac{1}{2}x^2+1-\sigma\upsilon\nu x$.

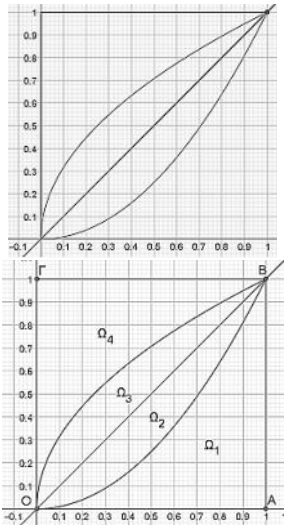
Για κάθε x > 0 είναι $\frac{1}{2}x^2>0,\ 1-\sigma\upsilon\nu x\geq 0$, άρα $h'(x)>0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε x > 0 είναι $h(x)>h(0)\Leftrightarrow\frac{1}{6}x^3+x-\eta\mu x>0$

ii. Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_0^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{6}x^3+x-\eta\mu x\right|dx=$

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{6}x^3+x-\eta\mu x\right)dx=\left[\frac{x^4}{24}+\frac{x^2}{2}+\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^4}{24}+\frac{\pi^2}{2}-1-1=\frac{\pi^4+12\pi^2-48}{24}.$$

33598.α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι 1-1άραντιστρέφεται.

$D_{f^{-1}} = f(A) = [0,1]$.



β) Επειδή η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι συμμετρική της f ως προς την ευθεία y = x, σχεδιάζουμε την y = x και στη συνέχεια τη συμμετρική της καμπύλης ως προς την ευθεία αυτή.

γ) Έστω Ω_1 το χωρίο που ορίζεται από τη C_f , τον x΄x και την ευθεία x=1.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι το χωρίο Ω_1 έχει εμβαδό μικρότερο από το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ, οπότε $E_1 < (OAB) \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2}$$

δ) i. Λόγω της συμμετρίας ως προς την y = x είναι $E(\Omega_1) = E(\Omega_4)$.

$$\int_0^1 f^{-1}(x)dx = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = (OAB\Gamma) - E(\Omega_4) =$$

$$1^2 - E(\Omega_1) = 1 - \int_0^1 f(x)dx .$$

ii. Από το σχήμα έχουμε:

$$E(\Omega) = E(\Omega_4) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$$

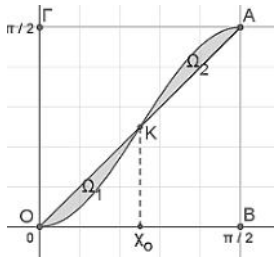
33634.α) $$I + J = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx + \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx\right) \Leftrightarrow$$

$$I + J = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} .$$

β) $u = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - u \Rightarrow dx = -du$. Για x = 0 είναι $u = \frac{\pi}{2}$ και για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι u = 0. $J = -\frac{\pi}{2}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2} - u\right)du = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 u du = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx = I$.

Άρα $I + J = \frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow 2I = \frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow I = \frac{\pi^2}{8} = J$.

γ) i. Η ευθεία ΟΑ επειδή διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$, $A(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, είναι η y = x.



Το Ι αντιπροσωπεύει το εμβαδόν του χωρίου που ορίζει η C_f, ο άξονας x΄x και η ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$.

Παρατηρούμε ότι το τετράγωνο ΟΒΑΓ έχει εμβαδό $\frac{\pi^2}{4}$, οπότε $(OBA\Gamma) = I + J \Leftrightarrow J = (OBA\Gamma) - I$. Στο σχήμα όμως η περιοχή αυτή είναι το χωρίο που σχηματίζεται από τη C_f, τον άξονα yy' και την ευθεία $y = \frac{\pi}{2}$, άρα το J είναι εμβαδόν αυτής της περιοχής.

ii. Είναι $I = (OAB) + E(\Omega_2) - E(\Omega_1)$ και $J = (OA\Gamma) + E(\Omega_1) - E(\Omega_2)$

Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑΓ είναι ίσα, οπότε έχουν ίσα εμβαδά.

Είναι $I = J \Leftrightarrow \cancel{(OAB)} + E(\Omega_2) - E(\Omega_1) = \cancel{(OA\Gamma)} + E(\Omega_1) - E(\Omega_2) \Leftrightarrow$

$2E(\Omega_2) = 2E(\Omega_1) \Leftrightarrow E(\Omega_2) = E(\Omega_1)$.

34566.α) Η g είναι συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = f^2(x) + 2xf(x)f'(x)$. Είναι $g(\alpha) = \alpha f^2(\alpha) = \beta f^2(\beta) = g(\beta)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$. Η εφαπτομένη της C_g στο $x = \xi$ είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

β) Είναι $E = \int_\alpha^\beta f^2(x)dx$. $\int_\alpha^\beta xf(x)f'(x)dx = -\ln 2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta x\left[f^2(x)\right]' dx = -\ln 2 \Leftrightarrow \left[xf^2(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f^2(x)dx = -2\ln 2 \Leftrightarrow$

$\cancel{\beta f^2(\beta)} - \cancel{\alpha f^2(\alpha)} - E = -\ln 4 \Leftrightarrow E = \ln 4$ τ.μ.

γ) Επειδή η f ΄είναι συνεχής στο [α, β] και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, η f΄ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Έστω ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε η f θα ήταν γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Τότε:

$\alpha < \beta$ $(1) \overset{f\nearrow[\alpha,\beta]}{\Leftrightarrow} f(\alpha) < f(\beta) \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f^2(\alpha) < f^2(\beta)$ (2)

Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2) κατά μέλη προκύπτει ότι $\alpha f^2(\alpha) < \beta f^2(\beta)$ που είναι άτοπο, άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα.

δ) Για την G εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο [α, x], $x \in (\alpha,\beta]$, οπότε υπάρχει $x_1 \in (\alpha,x)$ τέτοιο, ώστε $G'(x_1) = \dfrac{G(x)-G(\alpha)}{x-\alpha} \Leftrightarrow f(x_1) = \dfrac{G(x)-G(\alpha)}{x-\alpha}$.

Είναι $\alpha < x_1 < \beta \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(\alpha) \Leftrightarrow \dfrac{G(x)-G(\alpha)}{x-\alpha} < f(\alpha)$.

35302.α) Για κάθε x < 0 είναι $h'(x) = e^x + 1 > 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $h''(x) = e^x > 0 \Rightarrow h \cup \mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x + x + 1) = -\infty$ και $h(0) = 2$, οπότε η h επειδή είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, 2]$.

β) Επειδή $f(0) = 1$ και η C_3 είναι η μόνη που διέρχεται από το σημείο B(0,1), είναι η γραφική παράσταση της f.Επειδή η C_4 βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x, δεν είναι η γραφική παράσταση της h. Είναι $g(x) = e^x + 1 > 0$ για κάθε x < 0, οπότε η C_4 είναι η γραφική παράσταση της g.Είναι $h(-1) = e^{-1} - 1 + 1 = \dfrac{1}{e} > 0$, οπότε στο διάστημα $(-\infty, -1)$ η h έχει σύνολο τιμών το $\left(-\infty, \dfrac{1}{e}\right)$.Το 0 περιέχεται στο $\left(-\infty, \dfrac{1}{e}\right)$, οπότε υπάρχει μοναδικό (λόγω μονοτονίας) $\rho \in (-\infty, -1)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho) = 0$, δηλαδή η γραφική παράσταση της h τέμνει τον άξονα x΄x σε σημείο πριν το E, άρα η C_2 είναι η γραφική παράσταση της h.

γ) Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες C_3 , C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες x= -1 και x=0 έχει εμβαδό $E_1 = \int_{-1}^{0}\left(g(x) - f(x)\right)dx = \int_{-1}^{0}\left(e^x + 1 - e^x\right)dx = 1$. Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες C_3, C_2 και τον άξονα y΄y, έχει εμβαδό

$$E_2 = \int_{-1}^{0}\left(h(x) - f(x)\right)dx = \int_{-1}^{0}\left(e^x + x + 1 - e^x\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Επειδή $E_2 = \dfrac{E_1}{2}$ η καμπύλη C_2 χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες C_3 , C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες x= -1 και x=0 σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

34151.α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $F'(x) = f(x)$.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, είναι $f(x) < 0$ και για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ είναι $f(x) > 0$, άρα για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ είναι $F'(x) < 0$ και για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ είναι $F'(x) > 0$. Επειδή η F είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0], \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0, \frac{1}{2}\right], [1, +\infty)$. Η F έχει τοπικά ελάχιστα στα $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ και τοπικό μέγιστο στο $x_3 = 1$.

β) Αν η C_3 ήταν η γραφική παράσταση της f', τότε θα ήταν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f θα ήταν γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ που είναι άτοπο. Άρα η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 12x^2 - 12x + 2$ και

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x \Leftrightarrow F'(x) = \left(x^4 - 2x^3 + x^2\right)' \Leftrightarrow$

$F(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$. Στο σχήμα βλέποντας τη C_3, έχουμε ότι

$F(0) = 1$, άρα $c = 1$, οπότε $F(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

δ) $E(\Omega) = \int_0^{1/2} f(x)\,dx - \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) - \left(F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right) \Leftrightarrow$

$E(\Omega) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) - F(1) + F\left(\frac{1}{2}\right) = 2F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) - F(1) \Leftrightarrow$

$E(\Omega) = 2\left(\frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 1\right) - 1 - 1 = 2 \cdot \frac{17}{16} - 2 = \frac{17}{8} - \frac{16}{8} = \frac{1}{8}$ τ.μ.

35244.α) Έστω $g(x) = \eta\mu x - (1 + x)\sigma\upsilon\nu x,\ x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{4} - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - 1 - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{8} < 0$,

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{2}-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=1>0$. Είναι $g\left(\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ με

$g'(x)=\cancel{\sigma\upsilon\nu x}-\cancel{\sigma\upsilon\nu x}+(1+x)\eta\mu x>0\Rightarrow g\nearrow$ στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της g στο διάστημα αυτό.

β) Για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$f(x)>0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x-1>0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x>\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ και

$f(x)<0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x-1<0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x<\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 0\le x<\frac{\pi}{4}$.

γ) Είναι $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ και $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=-\int_0^{\pi/4}f(x)dx+\int_{\pi/4}^{\pi/3}f(x)dx=-\int_0^{\pi/4}(\varepsilon\varphi x-1)dx+\int_{\pi/4}^{\pi/3}(\varepsilon\varphi x-1)dx\Leftrightarrow$$

$$E=-\int_0^{\pi/4}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx+\frac{\pi}{4}-0+\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\pi/4}\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}dx+\frac{\pi}{4}-$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}dx-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow E=\left[\ln(\sigma\upsilon\nu x)\right]_0^{\pi/4}-\left[\ln(\sigma\upsilon\nu x)\right]_{\pi/4}^{\pi/3}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$$E=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{6}=\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\ln 2+\frac{\pi}{6}=\ln\frac{1}{2}+\ln 2+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\ \tau.\mu.$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Είναι $f(x)=x^2-2x+1+4=(x-1)^2+4, x\ge 1$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με $f'(x)=2(x-1)\ge 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ οπότε η f είναι 1-1 και θα αντιστρέφεται . Είναι $E(\Omega)=\int_4^5\left|f^{-1}(x)\right|dx$.Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$. Για $x=4$ είναι $f(u)=4=f(1)\Leftrightarrow u_1=1$, ενώ για $x=5$ είναι $f(u)=5=f(0)\Leftrightarrow u_2=0$. Οπότε

$$E(\Omega)=\int_1^0|u|f'(u)du\overset{u>0}{=}\int_1^0 u(2u-2)du=\int_0^1(2u-2u^2)du=\left[u^2\right]_0^1-2\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

Σωστή απάντηση Β.

2. Είναι $E(\Omega)=\int_1^e\left|\frac{x^2+x+4}{x}-x-1\right|dx=\int_1^e\left|\frac{4}{x}\right|dx\overset{x>0}{=}\int_1^e\frac{4}{x}dx=4\left[\ln x\right]_1^e=4$.

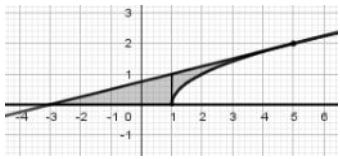
Σωστή απάντηση Γ.

3. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, $f(5)=2, f'(5)=\frac{1}{4}$ άρα η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=5$ είναι

$$y-f(5)=f'(5)(x-5)\Leftrightarrow y-2=\frac{1}{4}(x-5)\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}.$$

$$E(\Omega)=\int_{-3}^1\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\right)dx+\int_1^5\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}-\sqrt{x-1}\right)dx=$$



$$\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^1+\frac{3}{4}\left[x\right]_{-3}^1-\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^5=$$

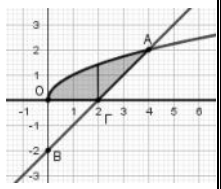
$$\frac{1}{4}(-4)+3+\frac{1}{4}12+3-\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x-1)^3}\right]_1^5=-1+3+3+3-\frac{2}{3}8=\frac{8}{3}.$$

Σωστή απάντηση Δ.

4. Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\sqrt{x}=x-2\overset{x\geq 2}{\Leftrightarrow}x=x^2-4x+4\Leftrightarrow$

$x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x=1$ απορρίπτεται ή $x=4$. Είναι

$f(4)=2$ οπότε οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(4,2)$. Το ζητούμενο εμβαδό ισούται με



$$E(\Omega)=\int_0^4\left[\sqrt{x}-(x-2)\right]dx-(\text{ΟΒΓ})=$$

$$\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4+2\left[x\right]_0^4-\frac{1}{2}2\cdot 2=\frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^4-8+8-2=\frac{16}{3}-2=\frac{10}{3}.$$

Σωστή απάντηση Α.

5. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\frac{1}{x}2\sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \dfrac{2(x-1)+\ln x}{4x\sqrt{x}}$.

Για κάθε $x \in (1,4)$ είναι $x-1>0$, $\ln x > 0$, άρα $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο [1, 4], είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $1 \le x \le 4 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(1) \le f(x) \le f(4) \Leftrightarrow 1 \le f(x) \le 2 - \dfrac{\ln 4}{4}$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1,4]$. Το ζητούμενο εμβαδό ισούται με

$$E(\Omega) = \int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx - \int_1^4 \ln x\left(\sqrt{x}\right)' dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 - \left[\sqrt{x}\cdot\ln x\right]_1^4 + \int_1^4 \frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\left[x\sqrt{x}\right]_1^4 - 2\ln 4 + \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \frac{2}{3}\cdot 7 - 2\ln 2^2 + \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{14}{3} - 4\ln 2 + 2 = \frac{20}{3} - 4\ln 2 .$$

Σωστή απάντηση Β.

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Σ	**2.** Λ	**3.** Λ	**4.** Λ	**5.** Σ	**6.** Λ	**7.** Λ	**8.** Σ

41. Διαγωνίσματα στα Ολοκληρώματα

1ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Θεωρία

Α2. α) Η πρόταση είναι λανθασμένη

β) Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

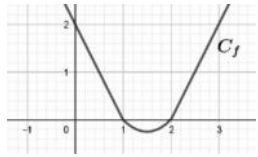
$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left[0-g(x)\right]dx=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx\,.$$

Α3. Αρχική ή παράγουσα μιας συνάρτησης f στο Δ ονομάζεται κάθε παραγωγίσιμη στο Δ συνάρτηση F για την οποία ισχύει $F'(x)=f(x)$.

Α4. α) **Σ** **β)Λ** **γ) Σ** **δ) Σ** **ε) Λ**

Θέμα Β

Β1. Η συνάρτηση f αποτελείται από δύο ημιευθείες και ένα τμήμα παραβολής, οπότε η γραφική της παράσταση είναι η εξής :

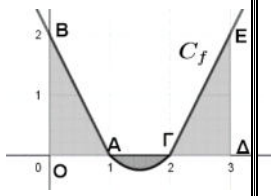


Β2. $f(x)\le 0$ στο $[1,2]$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν Ε είναι :

$$E=-\int_1^2 f(x)dx=-\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2\Leftrightarrow$$

$$E=-\frac{8}{3}+6-4+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{6}.$$

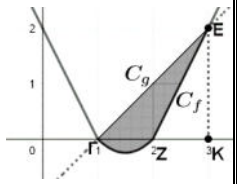
Β3. Το εμβαδόν E_1 του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=0$ και $x=3$ είναι ίσο με το άθροισμα αποτελείται το εμβαδόν Ε του ερωτήματος β) και τα εμβαδά των ορθογωνίων τριγώνων ΟΑΒ και ΓΔΕ. Άρα



$$E_1=(OAB)+E+(\Gamma\Delta E)=\frac{OA\cdot OB}{2}+\frac{1}{6}+\frac{\Gamma\Delta\cdot\Delta E}{2}=$$

$$1+\frac{1}{6}+1=\frac{13}{6}\ .$$

Β4. Το εμβαδόν Ε του χωρίου Ω_2 που περικλείεται από τη C_f ,την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x-1$ και τις ευθείες $x=1, x=3$ αποτελείται από το εμβαδόν Ε του ερωτήματος β) και το εμβαδόν του τριγώνου ΓΖΕ.



Άρα $E_1=E+(E\Gamma Z)=\frac{1}{6}+\frac{\Gamma Z\cdot EK}{2}=\frac{1}{6}+1=\frac{7}{6}=7E$.

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$. Έχουμε

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}\geq 0 \overset{2x\sqrt{x}>0}{\Leftrightarrow} 2-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 2 \Leftrightarrow x\leq e^2$ οπότε ηf είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e^2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[e^2,+\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο στο e^2 , το $f(e^2)=\dfrac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}=\dfrac{2}{e}$.

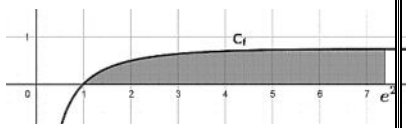
Γ2. Η f' είναι παραγωγίσιμη με τύπο

$f''(x)=\dfrac{-2\sqrt{x}-(2-\ln x)3\sqrt{x}}{4x^3}=\dfrac{-8+3\ln x}{4x^2\sqrt{x}}$.

$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-8+3\ln x}{4x^2\sqrt{x}}\geq 0 \overset{4x^2\sqrt{x}>0}{\Leftrightarrow} -8+3\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq \dfrac{8}{3} \Leftrightarrow x\geq e^{\frac{8}{3}}=e^2\sqrt[3]{e^2}$

οπότε η f είναι κοίλη στο $(0,e^2\sqrt[3]{e^2}]$, κυρτή στο $[e^2\sqrt[3]{e^2},+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $\left(e^2\sqrt[3]{e^2},f\left(e^2\sqrt[3]{e^2}\right)\right)\equiv\left(e^2\sqrt[3]{e^2},\dfrac{8}{3e\sqrt[3]{e}}\right)$.

Γ3. Για $x\geq 1$ έχουμε
$\ln x\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 0$, οπότε το εμβαδόν Ε του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x'x ,την ευθεία $x=1$ και την ευθεία $x=e^2$ είναι ίσο με :



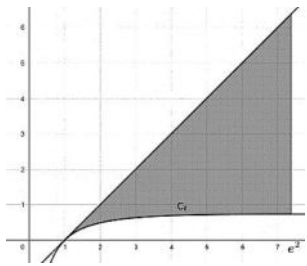
$E(\Omega)=\int_1^{e^2} f(x)dx=\int_1^{e^2}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int_1^{e^2}\left(2\sqrt{x}\right)'\ln x dx \Leftrightarrow$

$E(\Omega)=\left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}2\sqrt{x}\dfrac{1}{x}dx=4e-2\int_1^{e^2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow$

$E(\Omega)=4e-2\left[2\sqrt{x}\right]_1^{e^2}=4e-4e+4=4$.

Γ4. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο 1 έχει εξίσωση :
$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=x-1$.

Για $x\in[1,e^2]$ η f είναι κοίλη οπότε βρίσκεται κάτω από την (ε) εκτός από το σημείο επαφής .Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν



$E(\Omega_1)=\int_1^{e^2}\left(x-1-f(x)\right)dx=\int_1^{e^2}(x-1)dx-\int_1^{e^2}f(x)dx=$

$\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^{e^2}-E(\Omega)\Leftrightarrow\ E(\Omega_1)=\frac{e^4-2e^2-7}{2}$.

Θέμα Δ

Δ1. Για την συνάρτηση F ισχύει το ΘΜΤ στα διαστήματα $[1,2],[2,3]$ άρα υπάρχουν $\theta_1\in(1,2),\theta_2\in(2,3)$ τέτοια ώστε:

$$F'(\theta_1)=\frac{F(2)-F(1)}{2-1}\Leftrightarrow f(\theta_1)=F(2)-F(1),$$

$$F'(\theta_2)=\frac{F(3)-F(2)}{3-2}\Leftrightarrow f(\theta_2)=F(3)-F(2).$$

Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα ,τότε:

$\theta_1<\theta_2\Leftrightarrow f(\theta_1)>f(\theta_2)\Leftrightarrow F(2)-F(1)>F(3)-F(2)\Leftrightarrow 2F(2)>F(1)+F(3)$ άτοπο από τη σχέση που μας δίνεται ,οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2. Έχουμε :

$\int_\alpha^{\alpha+1}f(x)dx<\int_{\alpha+1}^{\alpha+2}f(x)dx\Leftrightarrow F(\alpha+1)-F(\alpha)<F(\alpha+2)-F(\alpha+1)$. Για την συνάρτηση F ισχύει το ΘΜΤ στα διαστήματα $[\alpha,\alpha+1],[\alpha+1,\alpha+2]$ άρα υπάρχουν $x_1\in(\alpha,\alpha+1),x_2\in(\alpha+1,\alpha+2)$ τέτοια ώστε:

$$F'(x_1)=\frac{F(\alpha+1)-F(\alpha)}{\alpha+1-\alpha}\Leftrightarrow f(x_1)=F(\alpha+1)-F(\alpha),$$

$$F'(x_2)=\frac{F(\alpha+2)-F(\alpha+1)}{\alpha+2-\alpha-1}\Leftrightarrow f(x_2)=F(\alpha+2)-F(\alpha+1).$$

Έχουμε: $x_1<x_2\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow F(\alpha+1)-F(\alpha)<F(\alpha+2)-F(\alpha+1)$.

Δ3. α) Το 1 είναι μέγιστο της G , εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, η G είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Fermat και $G'(1)=F(1)=0$. Επίσης :

$$\lim_{h\to0}\frac{G(3h)-G(2h)}{h}=0\Leftrightarrow\lim_{h\to0}\frac{G(3h)-G(0)+G(0)-G(2h)}{h}=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{h\to0}\frac{G(3h)-G(0)}{h}-\frac{G(2h)-G(0)}{h}=0\Leftrightarrow 3G'(0)-2G'(0)=0\Leftrightarrow G'(0)=0\Leftrightarrow$$

$F(0)=0.$

β) Για την συνάρτηση F ισχύει το ΘΜΤ στο διάστημα $[0,x]$ άρα υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε: $F'(\xi)=\frac{F(x)-F(0)}{x}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{F(x)}{x}$.

Έχουμε: $\xi<x\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(\xi)<f(x)\Leftrightarrow\frac{F(x)}{x}<f(x)\Leftrightarrow F(x)<xf(x)\Leftrightarrow$

$x\cdot f(x)-F(x)>0$.

γ) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με τύπο

$g'(x)=\dfrac{xF'(x)-F(x)}{x^2}=\dfrac{xf(x)-F(x)}{x^2}$.

Όμως $x\cdot f(x)-F(x)>0$ από το α) άρα $g'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Δ4. Από το ερώτημα Δ3.β)α) έχουμε $x\cdot f(x)-F(x)>0\Leftrightarrow x\cdot f(x)>F(x)$

οπότε $\int_1^2 xf(x)dx>\int_1^2 F(x)dx\Leftrightarrow\int_1^2 xf(x)dx>\int_1^2 xF(x)dx\Leftrightarrow$

$\int_1^2 xf(x)dx>\left[xF(x)\right]_1^2-\int_1^2 xF'(x)dx\Leftrightarrow$

$\int_1^2 xf(x)dx>2F(2)-\int_1^2 xf(x)dx\Leftrightarrow$

$2\int_1^2 xf(x)dx>2F(2)\Leftrightarrow\int_1^2 xf(x)dx>F(2)$.

2ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Θεωρία

Α2. α) Η πρόταση είναι σωστή **β)** Ισχύει όταν f,g είναι σταθερές συναρτήσεις.

Α3.Θεωρία **Α4.** α) **Σ** **β) Σ** **γ) Λ** **δ) Λ** **ε) Σ**

Θέμα Β

Β1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=[-1,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f'(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{2x+2+x}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$.

Έχουμε $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}\geq 0\Leftrightarrow 3x+2\geq 0\Leftrightarrow 3x\geq -2\Leftrightarrow x\geq -\dfrac{2}{3}$.Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[-1,-\dfrac{2}{3}\right]$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $-\dfrac{2}{3}$, το $f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}\sqrt{-\dfrac{2}{3}+1}=-\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ και τοπικό μέγιστο το $f(-1)=0$.

Β2. Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με δεύτερη παράγωγο

$$f''(x)=\frac{6\sqrt{x+1}-\frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}}{4(x+1)}=\frac{6x+6-3x-2}{4\left(\sqrt{x+1}\right)^3}=\frac{3x+4}{4\left(\sqrt{x+1}\right)^3}>0 \text{ για } x\geq -1 .$$

Άρα η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της .

Β3. Για $x\in[-1,0]$: $f(x)\leq 0$ αφού $x\leq 0$ και $\sqrt{x+1}\geq 0$.Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με : $E(\Omega)=-\int_{-1}^{0}f(x)dx=-\int_{-1}^{0}x\sqrt{x+1}dx$.Θέτουμε $u=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x=u^2-1$ οπότε $dx=2udu$. Για $x=-1$ έχουμε $u=0$ και για $x=0$ έχουμε $u=1$,οπότε :

$$E(\Omega)=-\int_0^1 2u^2\left(u^2-1\right)udx=-\int_0^1\left(2u^4-2u^2\right)dx=-\left[\frac{2u^5}{5}-2\frac{u^3}{3}\right]_0^1=\frac{4}{15}.$$

Β4. $I=\int_{\ln 3}^{3\ln 2}e^x f\left(e^x\right)dx=\int_{\ln 3}^{\ln 8}e^{2x}\sqrt{e^x+1}dx$. Θέτουμε $h=\sqrt{e^x+1}\Leftrightarrow e^x=h^2-1$ οπότε $2hdh=e^x dx$. Για $x=\ln 3$ έχουμε $h=2$ και για $x=\ln 8$ έχουμε $h=3$, οπότε : $I=\int_2^3\left(h^2-1\right)h\cdot 2hdh\Leftrightarrow I=2\int_2^3\left(h^4-h^2\right)dh\Leftrightarrow$

$$I=2\left[\frac{h^5}{5}-\frac{h^3}{3}\right]_2^3=2\left[\left(\frac{243}{5}-\frac{27}{3}\right)-\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}\right)\right]=2\left(\frac{211}{5}-\frac{19}{3}\right)=\frac{1076}{15}.$$

Θέμα Γ

Γ1. α) Έστω $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,\alpha\neq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x\eta\mu\frac{1}{x}}$ $\overset{x \text{ κοντά στο } 0}{\Leftrightarrow}$ $f(x)=g(x)\cdot x\eta\mu\frac{1}{x}$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}g(x)\cdot x\eta\mu\frac{1}{x}=1\cdot 0=0.$$

($\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq|x|\Leftrightarrow -|x|\leq x\eta\mu\frac{1}{x}\leq|x|$.Είναι $\lim_{x\to 0}|x|=\lim_{x\to 0}(-|x|)=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to 0}x\eta\mu\frac{1}{x}=0$.)

Όμως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν πολυωνυμική άρα και στο 0, οπότε $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)\Leftrightarrow\delta=0$.

β) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x^6+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}{\sqrt{x^6+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(\alpha+\frac{\beta^{\cancel{0}}}{x}+\frac{\gamma^{\cancel{0}}}{x^2}+\frac{\delta^{\cancel{0}}}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\sqrt{1+\frac{1^{\cancel{0}}}{x^6}}}=\alpha$$

άρα α= 1.

Γ2. $\int_{-3}^{0} f(x)dx = \frac{45}{4} \Leftrightarrow \int_{-3}^{0} \left(x^3 + \beta x^2 + \gamma x\right)dx = \frac{45}{4} \Leftrightarrow$

$\left[\frac{x^4}{4} + \beta\frac{x^3}{3} + \gamma\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0} = \frac{45}{4} \Leftrightarrow -\frac{81}{4} + 9\beta - \frac{9\gamma}{2} = \frac{45}{4} \Leftrightarrow -81 + 36\beta - 18\gamma = 45 \Leftrightarrow$

$36\beta - 18\gamma = 126 \Leftrightarrow 2\beta - \gamma = 7$ (1).

$\int_0^1 f(x)dx = -\frac{7}{12} \Leftrightarrow \int_0^1 \left(x^3 + \beta x^2 + \gamma x\right)dx = -\frac{7}{12} \Leftrightarrow \left[\frac{x^4}{4} + \beta\frac{x^3}{3} + \gamma\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{7}{12} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{4} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{2} = -\frac{7}{12} \Leftrightarrow 3 + 4\beta + 6\gamma = -7 \Leftrightarrow 4\beta + 6\gamma = -10 \Leftrightarrow 2\beta + 3\gamma = -5$ (2).

Με αφαίρεση της σχέσης (1) από την (2) έχουμε $4\gamma = -12 \Leftrightarrow \gamma = -3$ και

$2\beta + 3 = 7 \Leftrightarrow 2\beta = 4 \Leftrightarrow \beta = 2$. Άρα $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$.

Γ3. $\int_2^3 \frac{x}{f(x)}dx = \int_2^3 \frac{x}{x^3 + 2x^2 - 3x}dx = \int_2^3 \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(x^2 + 2x - 3\right)}dx \Leftrightarrow$

$\int_2^3 \frac{x}{f(x)}dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2 + 2x - 3}dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+3)}dx$.

$\frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{(A+B)x + 3A - B}{(x-1)(x+3)}$.

Επομένως : $\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ 3A + A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ 4A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{4} \\ A = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Άρα $\int_2^3 \frac{x}{f(x)}dx = \frac{1}{4}\int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{4}\left[\ln|x-1| - \ln|x+3|\right]_2^3 = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$.

Γ4. $I = \int_0^1 \frac{f(x)\cdot\ln(x+1)}{x+3}dx = \int_0^1 \frac{\left(x^3 + 2x^2 - 3x\right)\cdot\ln(x+1)}{x+3}dx \Leftrightarrow$

$I = \int_0^1 \frac{\left(x^2 - x\right)\cancel{(x+3)}\cdot\ln(x+1)}{\cancel{x+3}}dx = \int_0^1 \left(x^2 - x\right)\ln(x+1)dx \Leftrightarrow$

$I = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)'\ln(x+1)dx =$

$\left[\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2x^3 - 3x^2}{x+1}dx \Leftrightarrow$

$2x^3 - 3x^2$	$x+1$
$+\quad -2x^3 - 2x^2$	$2x^2 - 5x + 5$
$-5x^2$	
$+\quad 5x^2 + 5x$	
$5x$	
$+\vert\quad -5x - 5$	
-5	

$$I=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\ln 2-\frac{1}{6}\int_0^1\frac{(x+1)\left(2x^2-5x+5\right)-5}{x+1}\Leftrightarrow$$

$$I=-\frac{\ln 2}{6}-\frac{1}{6}\left[\frac{2x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+5x-5\ln(x+1)\right]_0^1\Leftrightarrow$$

$$I=-\frac{\ln 2}{6}-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}+5-5\ln 2\right)\Leftrightarrow I=\frac{2\ln 2}{3}-\frac{19}{36}\Leftrightarrow I=\frac{24\ln 2-19}{36}.$$

Θέμα Δ

Δ1. α) Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$, $f(x)\neq 0$ στο $[0,2]$ άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

β) Έχουμε $f(x)\neq 0\Rightarrow f^2(x)>0$. Αν $F(2)>0$ τότε $\int_0^{F(2)}f^2(x)dx>0$ άτοπο.

Αν $F(2)<0$ τότε $\int_0^{F(2)}f^2(x)dx<0$ άτοπο. Επομένως $F(2)=0$.

Δ2. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=e^x+x-1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=e^x+1>0$ άρα η g είναι γνησίως μονότονη και 1-1. Η εξίσωση $g(x)=0$ έχει προφανή ρίζα το 0 , η οποία είναι μοναδική αφού η g είναι 1-1. Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο άρα $f(x)>0\Leftrightarrow F'(x)>0$ ή $f(x)<0\Leftrightarrow F'(x)<0$. Άρα η F είναι γνησίως μονότονη οπότε το 2 είναι η μοναδική της ρίζα. Επομένως η εξίσωση $\left(e^x+x-1\right)F(x)\left(xf(x)+F(x)\right)=0$ έχει ρίζα στο $(0,2)$ μόνο αν η παράσταση $xf(x)+F(x)$ έχει ρίζα στο $(0,2)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=xF(x)$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,2]$, παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με παράγωγο $h'(x)=F(x)+xF'(x)=F(x)+xf(x)$. Επίσης $h(0)=0, h(2)=2F(2)=0$ άρα $h(0)=h(2)$,οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle δηλαδή υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε : $h'(x_0)=0\Leftrightarrow x_0f(x_0)+F(x_0)=0$. Άρα η εξίσωση $xf(x)+F(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$,οπότε η εξίσωση $\left(e^x+x-1\right)F(x)\left(xf(x)+F(x)\right)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.

Δ3. α) $\int_0^2\left[f(x)-xe^x\right]dx\geq -1\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx-\int_0^2 xe^x dx\geq -1\Leftrightarrow$

$$\int_0^2 f(x)dx-\left[xe^x\right]_0^2+\int_0^2 e^x dx\geq -1\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx-2e^2+\left[e^x\right]_0^2\geq -1\Leftrightarrow$$

$\int_0^2 f(x)dx-2e^2+e^2-1\geq -1\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx\geq e^2>0$. Γνωρίζουμε ότι η f

διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αν $f(x)<0$ τότε $\int_0^2 f(x)dx<0$ άτοπο, άρα $f(x)>0$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε

$\int_0^2 f(x)dx>0 \Leftrightarrow F(2)-F(0)>0 \Leftrightarrow -F(0)>0 \Leftrightarrow F(0)<0$.

Δ4. Έχουμε την εξίσωση $\frac{F(x)}{x}+\frac{F(x)-1}{x-2}=0 \Leftrightarrow (x-2)F(x)+x(F(x)-1)=0$

.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $m(x)=(x-2)F(x)+x(F(x)-1)$.

Η συνάρτηση m είναι συνεχής στο $[0,2]$, $m(0)=-2F(0)>0, m(2)=-2<0$

άρα $m(0)m(2)<0$.Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano δηλαδή υπάρχει $x_1\in(0,2)$ τέτοιο ώστε

$m(x_1)=0 \Leftrightarrow (x_1-2)F(x_1)+x_1(F(x_1)-1)=0 \Leftrightarrow \frac{F(x_1)}{x_1}+\frac{F(x_1)-1}{x_1-2}=0$, άρα η εξίσωση $\frac{F(x)}{x}+\frac{F(x)-1}{x-2}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.

42. Συνδυαστικά θέματα σε όλη την ύλη

Επίπεδο δυσκολίας Β Θέματος

1. α) Η f ορίζεται όταν $x>0$ και $1-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$, άρα $A_f=(0,1]$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με

$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$. Είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και παρουσιάζει μέγιστο για $x=1$ το $f(1)=0$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ άρα και 1-1 ,συνεπώς είναι αντιστρέψιμη. Επίσης, το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f

$A_{f^{-1}}=f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),f(1)\right]=(-\infty,0]$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$.

γ) Αφού το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,1]$ η C_f δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη .

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$ οπότε η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

δ) Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της οπότε

$0<f^{-1}(x)\leq 1\Leftrightarrow 0<x^2f^{-1}(x)\leq x^2$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}x^2=0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2f^{-1}(x)\right)=0$.

ε) Είναι $f(A)=(-\infty,0]$ οπότε $f(x)\leq 0$, άρα

$$E(\Omega)=\int_{\frac{1}{e}}^{1}|f(x)|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-f(x))dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\sqrt{1-x}-\ln x\right)dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\sqrt{1-x}dx-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x dx$$

Για το $\int_{\frac{1}{e}}^{1}\sqrt{1-x}dx$ θέτουμε $1-x=u$ οπότε $dx=-du$. Για $x=1$ είναι $u=0$ και για $x=\frac{1}{e}$ είναι $u=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}$. Τότε

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1}\sqrt{1-x}dx=-\int_{\frac{e-1}{e}}^{0}\sqrt{u}du=-\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{e-1}{e}}^{0}=\frac{2}{3}\left(\frac{e-1}{e}\right)^{\frac{3}{2}},\text{ άρα}$$

$$E(\Omega)=\frac{2}{3}\left(\frac{e-1}{e}\right)^{\frac{3}{2}}-\left[x\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{e-1}{e}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}+\left[x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}=\frac{2}{3}\left(\frac{e-1}{e}\right)^{\frac{3}{2}}+1-\frac{2}{e}$$

2. α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σύνολο $A=(0,1)$, με $f'(x)=-\frac{1}{(1-x)}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x(1-x)}<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα στο Α. Είναι

$f(x)=0\Leftrightarrow\ln(1-x)-\ln x=0\Leftrightarrow\ln(1-x)=\ln x\Leftrightarrow 1-x=x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, αν

$0<x<\frac{1}{2}\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ οπότε $f(x)>0$, ενώ αν

$\frac{1}{2}<x<1\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

β) Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\frac{1-x}{x}\underset{\left(\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-x}{x}=+\infty\right)}{\overset{\left(u=\frac{1-x}{x}\right)}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ και,

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\ln\frac{1-x}{x}\underset{\left(\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1-x}{x}=0\right)}{\overset{\left(u=\frac{1-x}{x}\right)}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$, άρα $f(A)=\mathbb{R}$ και οι ευθείες $x=0$ και $x=1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f. Αφού το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A=(0,1)$ τότε η συνάρτηση f δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι και "1−1" άρα αντιστρέψιμη,

$f(x)=y\Leftrightarrow y=\ln\frac{1-x}{x}\Leftrightarrow e^y=\frac{1-x}{x}\Leftrightarrow xe^y=1-x\Leftrightarrow xe^y+x=1\Leftrightarrow$

$x(e^y+1)=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{1+e^y}$, άρα $f^{-1}(y)=\frac{1}{1+e^y}, y\in\mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x)=\frac{1}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

δ) $E=\int_0^1\left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx=\int_0^1\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{(1+e^x)'}{1+e^x}\right)dx=$

$=\left[x-\ln(e^x+1)\right]_0^1=\ln\frac{2e}{e+1}$

3. α) Είναι $\frac{1-x}{1+x}>0\Leftrightarrow(1-x)(1+x)>0\Leftrightarrow x\in(-1,1)$, άρα $A_f=(-1,1)$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $f'(x)=\dfrac{2}{x^2-1}<0$, για κάθε $x\in(-1,1)$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

β) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $f''(x)=-\dfrac{4x}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Αν $x\in(-1,0)$ τότε $f''(x)>0$ οπότε η f είναι κυρτή στο $(-1,0]$, ενώ αν $x\in(0,1)$ τότε $f''(x)<0$ και f είναι κοίλη στο $[0,1)$,συνεπώς παρουσιάζει σημείο καμπής στην αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$ άρα θα είναι "1−1" και αντιστρέψιμη.

Είναι $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\ln\dfrac{1-x}{1+x}\overset{u=\frac{1-x}{1+x}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\ln\dfrac{1-x}{1+x}\overset{u=\frac{1-x}{1+x}}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$, $f(A)=\mathbb{R}$.

$f(x)=y\Leftrightarrow \ln\dfrac{1-x}{1+x}=y\Leftrightarrow \dfrac{1-x}{1+x}=e^y\Leftrightarrow 1-x=e^y+xe^y\Leftrightarrow 1-e^y=\left(1+e^y\right)x\Leftrightarrow$

$x=\dfrac{1-e^y}{1+e^y}$. $f^{-1}(y)=\dfrac{1-e^y}{1+e^y}$, $y\in(-1,1)$, οπότε $f^{-1}(x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$, $x\in(-1,1)$.

δ) Είναι $E=\int_0^1\left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_0^1\dfrac{e^x-1}{e^x+1}dx$, οπότε θέτοντας

$e^x=u\Leftrightarrow x=\ln u$ άρα $dx=\dfrac{du}{u}$, Για $x=0\Leftrightarrow u=1$, $x=1\Leftrightarrow u=e$ έχουμε

$$E=\int_1^e\frac{u-1}{u+1}\cdot\frac{du}{u}=\int_1^e\left(\frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}\right)du\overset{(*)}{=}\int_1^e\left(\frac{-1}{u}+\frac{2}{u+1}\right)du=$$

$$=\left[-\ln u+2\ln(u+1)\right]_1^e=\left[\ln\frac{(u+1)^2}{u}\right]_1^e=\ln\frac{(e+1)^2}{e}-\ln 4=\ln\frac{(e+1)^2}{4e}$$

$$(*)\ \frac{u-1}{u(u+1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}=\frac{(A+B)u+A}{u(u+1)}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}A+B=1\\A=-1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}B=2\\A=-1\end{matrix}\right\}$$

ε) Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^x+\dfrac{x^2}{2}+1$, $x\in(-1,1)$,

$g'(x)=f'(x)-e^x+x<0$, $x\in(-1,1)$ εφόσον από ερώτημα **(α)** είναι

$f'(x)<0$, $e^x>x \Leftrightarrow x-e^x<0$, οπότε $g \searrow$, οπότε και "1−1" στο $(-1,1)$.
Είναι $g(0)=f(0)-1+0+1=0$ και άρα η $x=0$ μοναδική λύση της εξίσωσης , αφού είναι ισοδύναμη με την $g(x)=0$.

4. α) Είναι

$$D_{g\circ f}=\left\{x\in D_f / f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} / x^2+3\geq 7\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} / x^2\geq 4\right\}$$

$$=\left\{x\in\mathbb{R} / |x|\geq 2\right\}=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty) \text{ και}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+3)=\sqrt{x^2+3-7}=\sqrt{x^2-4}$$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(g\circ f)(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(g\circ f)(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+1\right)}=0$.

Οπότε η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

γ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(g\circ f)(x)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}\sqrt{x^2-4}\right)$, είναι $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2-4}=\sqrt{5}>0$,

$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{(g\circ f)(x)}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$ άρα

$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(g\circ f)(x)}{x-3}=+\infty$. Επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(g\circ f)(x)}{x-3}$.

δ) Είναι $\alpha(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-4}, x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\\ 4-x^2, x\in(-2,2)\end{cases}$ η οποία είναι συνεχής στο 2

γιατί $\lim\limits_{x\to 2^-}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(4-x^2\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to 2^+}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{x^2-4}\right)=0=\alpha(2)$,
επιπλέον η $\alpha(x)$ είναι συνεχής στα $[0,2)$ και $(2,4]$ ως πράξη συνεχών , αρά η $\alpha(x)$ είναι συνεχής στο $[0,4]$ οπότε η $\beta(x)=\alpha(x)\eta\mu(\pi x)$ θα είναι συνεχής στο $[0,4]$ ως γινόμενο συνεχών.

Αν $x\in(0,2)$ η συνάρτηση $\beta(x)=\left(4-x^2\right)\eta\mu(\pi x)$ είναι παραγωγίσιμη με
$\beta'(x)=-2x\eta\mu(\pi x)+\left(4-x^2\right)\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x)$ και αν $x\in(2,4)$ η συνάρτηση
$\beta(x)=\sqrt{x^2-4}\eta\mu(\pi x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$\beta'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}\eta\mu(\pi x)+\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x)\sqrt{x^2-4}$ και θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=2$.

$$\lim_{x\to2^-}\frac{\beta(x)-\beta(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{(4-x^2)\eta\mu(\pi x)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{-(x-2)(x+2)\eta\mu(\pi x)}{x-2}=$$

$$\lim_{x\to2^-}\left[-(x+2)\eta\mu(\pi x)\right]=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{\beta(x)-\beta(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}\eta\mu(\pi x)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}\eta\mu(\pi x)}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x+2}\eta\mu(\pi x)}{\sqrt{x-2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to2^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\eta\mu(\pi x)+\sqrt{x+2}\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x)}{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}=$$

$\lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}\eta\mu(\pi x)+2\pi\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x)\right)=0$. Άρα η συνάρτησή $\beta(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ με $\beta'(2)=0$. Επίσης $\beta(0)=\beta(4)=0$, οπότε πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την συνάρτηση $\beta(x)=\alpha(x)\eta\mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0,4]$.

ε) Είναι $f(x)=x^2+3>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{0}\left(x^2+3\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}+3[x]_{-1}^{0}=\frac{10}{3}$$

5. α) Η συνάρτηση $f(x)=|x^2-4x|$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων. Επίσης, είναι $x^2-4x\geq0\Leftrightarrow x(x-4)\geq0\Leftrightarrow x\leq0$ ή $x\geq4$, οπότε ο τύπος της f γίνεται $f(x)=\begin{cases}x^2-4x, & x\in(-\infty,0]\cup[4,+\infty)\\ -x^2+4x, & x\in(0,4)\end{cases}$

Για $x<0$ ή $x>4$ η $f(x)=x^2-4x$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=2x-4$. Για $x\in(0,4)$ η $f(x)=-x^2+4x$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-2x+4$.

Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα στα $x_1=0$ και $x_2=4$.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-4x}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x(x-4)}{x}=\lim_{x\to0^-}(x-4)=-4 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2+4x}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(-x+4)}{x}=\lim_{x\to0^+}(-x+4)=4$$

οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_1 = 0$. Επίσης,

$\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{-x^2+4x}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{-x(x-4)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^-} (-x) = -4$ και

$\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x^2-4x}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x(x-4)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^+} (x) = 4$, συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_2 = 4$.

β) Για $x<0$ ή $x>4$ είναι $f'(x) = 2x-4 > 0 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$, ενώ για $x \in (0,4)$ έχουμε $f'(x) = -2x+4 > 0 \Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow x < 2$. Επομένως, το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$2x-4$	-				+
$-2x+4$		+	-		
$f'(x)$	-	+	-	+	
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[2,4]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[0,2]$ και $[4,+\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$ ή $x=4$ το $f(0)=f(4)=0$ και τοπικό μέγιστο για $x=2$ το $f(2)=4$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-4x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-4x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1 = (-\infty,0]$ με σύνολο τιμών

$f(A_1) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = [0,+\infty)$. Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_2 = [0,2]$ με $f(A_2) = [f(0), f(2)] = [0,4]$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_3 = [2,4]$ με $f(A_3) = [f(4), f(2)] = [0,4]$. Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_4 = [4,+\infty)$ με σύνολο τιμών

$f(A_4) = \left[f(4), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [0,+\infty)$. Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \cup f(A_4) = [0,+\infty)$.

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι το $O(0,0)$ και $A(4,0)$ στα οποία δεν παραγωγίζεται καθώς επίσης και το σημείο $B(2,4)$ στο οποίο παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

δ) Έστω $M(\mu, f(\mu))$ το σημείο επαφής.

Για $x \in (0,4)$ είναι $f(x) = -x^2 + 4x$ και $f'(x) = -2x + 4$.

Η εξίσωση εφαπτομένης στο Μ είναι $y - f(\mu) = f'(\mu)(x - \mu)$.

Αν $\mu \in (0,4)$ τότε επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $E\left(2, \frac{17}{4}\right)$

είναι $\frac{17}{4} - \left(-\mu^2 + 4\mu\right) = (-2\mu + 4)(2 - \mu) \Leftrightarrow \frac{17}{4} + \mu^2 - 4\mu = -4\mu + 2\mu^2 + 8 - 4\mu$

$\Leftrightarrow \mu^2 - 4\mu + \frac{15}{4} = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{2}$ ή $\mu = \frac{5}{2}$.

Είναι $f'\left(\frac{3}{2}\right) f'\left(\frac{5}{2}\right) = \left(-2\frac{3}{2} + 4\right)\left(-2\frac{5}{2} + 4\right) = 1 \cdot (-1) = -1$, συνεπώς οι

εφαπτόμενες είναι κάθετες μεταξύ τους. Η εξίσωση εφαπτομένης στο $x = \frac{3}{2}$

είναι $y - f\left(\frac{3}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y - \frac{15}{4} = 1\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y = x + \frac{9}{4}$, ενώ η

εξίσωση εφαπτομένης στο $x = \frac{5}{2}$ είναι

$y - f\left(\frac{5}{2}\right) = f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x + \frac{25}{4}$

Αν $\mu \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, τότε $\frac{17}{4} - \left(\mu^2 - 4\mu\right) = (2\mu - 4)(2 - \mu) \Leftrightarrow \ldots$

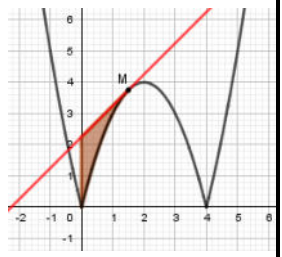
$\mu^2 - 4\mu + \frac{49}{4} = 0$ αδύνατη

ε) Η $y = x + \frac{9}{4}$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο

$M\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$ και επειδή η $f(x) = -x^2 + 4x$ είναι κοίλη

στο $[0,4]$ αφού $f''(x) = -2 < 0$ τότε $f(x) \le y$ για

κάθε $x \in [0,4]$. Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι



$E(\Omega) = \int_0^{\frac{3}{2}} \left[x + \frac{9}{4} - \left(-x^2 + 4x\right) \right] dx \Leftrightarrow$

$E(\Omega) = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} \right) dx \Leftrightarrow E(\Omega) = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\left[x^2 \right]_0^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{4}\left[x \right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{27}{24}$

6. α) Είναι $\lim\limits_{x \to 0}\left(1 - x^2\right) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0}\left(1 + x^2\right) = 1$, οπότε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Η σχέση $1-x^2 \le f(x) \le 1+x^2$ για $x=0$ γίνεται: $1 \le f(0) \le 1 \Leftrightarrow f(0)=1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Αρκεί $f(0)=1$ (ισχύει) και $f'(0)=0$ (η ευθεία $y=1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 0). $1-x^2 \le f(x) \le 1+x^2 \Leftrightarrow -x^2 \le f(x)-f(0) \le x^2$ (1)

Αν $x<0$, τότε η (1) γίνεται: $-x \ge \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \ge x$. Επειδή

$\lim\limits_{x\to 0^-}(-x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} x$, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι και

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$. Αν $x>0$, τότε η (1) γίνεται: $-x \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le x$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} x$, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι και

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$.Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0)=0$.

γ) i. Αρκεί η εξίσωση $f(x)=3x$ να έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0,1)$.

Έστω $g(x) = f(x)-3x,\ x \in [0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $g(0) = f(0) - 3\cdot 0 = 1 > 0$ και $g(1) = f(1)-3$.

Για $x=1$ είναι $1-1^2 \le f(1) \le 1+1^2 \Leftrightarrow 0 \le f(1) \le 2 \Leftrightarrow -3 \le f(1)-3 \le -1 \Rightarrow$.

$g(1) < 0$. Επειδή $g(0)g(1) < 0$, σύμφωνα με το θ.Bolzano, η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=3x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

ii. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $E = \int_0^1 |f(x)|\,dx$.

Επειδή $1-x^2 \ge 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $0 \le 1-x^2 \le f(x) \le 1+x^2$, οπότε $E = \int_0^1 f(x)\,dx$. Είναι $\int_0^1 (1-x^2)\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 (1+x^2)\,dx \Leftrightarrow$

$$\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \le E \le \left[x+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{3} \le E \le 1+\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le E \le \frac{4}{3}.$$

7. α) Για να έχουν κοινή έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο A(1,1) πρέπει $f(1)=g(1)$ και $f'(1)=g'(1)$. Είναι $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}, g'(x) = 2x-3$ οπότε $f'(1) = -1 = g'(1)$ και $f(1) = g(1) = 1$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) - f(x) = x^2 - 3x + 3 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{(x-1)^3}{x}$.

$h(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^3}{x}>0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Επομένως η C_g βρίσκεται πάνω από τη C_f στο διάστημα $(1,+\infty)$ και κάτω στο διάστημα $(0,1)$ και τέμνονται στο σημείο $(1,1)$.

γ) $h(x)=g(x)-f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x}, x>0$.

$$h'(x)=\left(\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x}\right)'=\frac{(3x^2-6x+3)\cdot x-(x^3-3x^2+3x-1)}{x^2}=$$

$$\frac{3x^3-6x^2+3x-x^3+3x^2-3x+1}{x^2}=\frac{2x^3-3x^2+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2}>0,$$

οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

$$h''(x)=\left(\frac{2x^3-3x^2+1}{x^2}\right)'=\frac{(6x^2-6x)\cdot x^{\not 2}-(2x^3-3x^2+1)\cdot 2\not x}{x^{\not 4}}=$$

$$\frac{6x^3-\cancel{6x^2}-4x^3+\cancel{6x^2}-2}{x^3}=\frac{2x^3-2}{x^3}.$$

$h''(x)\ge 0 \Leftrightarrow 2x^3-2\ge 0 \Leftrightarrow 2x^3\ge 2 \Leftrightarrow$
$x^3\ge 1 \Leftrightarrow x\ge 1$

Άρα η h είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$ και κοίλη στο $(0,1]$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο 1 το $h(1)=0$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	−	0	+
f	∩ Σ.Κ. ∪		

δ) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3-3x^2+3x-1)\cdot\dfrac{1}{x}=-1\cdot(+\infty)=-\infty$

.

Άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$.

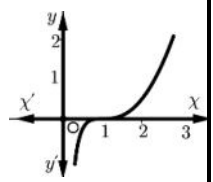
$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$.

Άρα δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες .

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

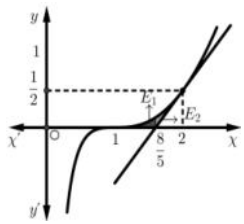
Άρα δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες .

ε)



στ) $h(2)=\dfrac{1}{2}, h'(2)=\dfrac{5}{4}$ οπότε η εφαπτομένη στο $x_0=2$ έχει εξίσωση

$(\varepsilon): y-\frac{1}{2}=\frac{5}{4}(x-2) \Leftrightarrow y=\frac{5}{4}x-2$.



Η (ε) τέμνει τον x΄x στο $\left(\frac{8}{5},0\right)$.Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το

$$E=E_1+E_2=\int_1^{\frac{8}{5}}h(x)dx+\int_{\frac{8}{5}}^{2}\left(h(x)-\frac{5}{4}x+2\right)dx=$$

$$\frac{603}{250}+\frac{187}{50}+\ln\frac{4}{5}-\ln\frac{8}{5}=\frac{550}{750}-\ln 2=\frac{11}{15}-\ln 2$$

$$E_1=\int_1^{\frac{8}{5}}h(x)dx=\int_1^{\frac{8}{5}}\left(x^2-3x+3-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+3x-\ln x\right]_1^{\frac{8}{5}}=\frac{123}{250}-\ln\frac{8}{5}$$

$$E_2=\int_{\frac{8}{5}}^{2}\left(h(x)-\frac{5}{4}x+2\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+3x-\ln x-\frac{5}{8}x^2+2x\right]_{\frac{8}{5}}^{2}=\ln\frac{4}{5}+\frac{181}{750}$$

8. α) $A_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Για $x>0$: $f(x)=\frac{x^2+3x-2}{x^2}=1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}=\frac{-3x+4}{x^3}$.

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+4}{x^3}\geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} -3x+4\geq 0 \Leftrightarrow 3x\leq 4 \Leftrightarrow x\leq\frac{4}{3}$. Για κάθε $x\in\left(0,\frac{4}{3}\right)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x\in\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{4}{3}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$. Για $x<0$ είναι $f(x)=\frac{x^2+3x-2}{-x^2}=-1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $f'(x)=\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}=\frac{3x-4}{x^3}>0$ αφού $3x-4<0$ και $x^3<0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$.

β) Για $x>0$ είναι $f''(x)=\left(-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)'=\frac{6}{x^3}-\frac{12}{x^4}=\frac{6x-12}{x^4}$.

$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{6x-12}{x^4}\geq 0 \overset{x^4>0}{\Leftrightarrow} 6x-12\geq 0 \Leftrightarrow 6x\geq 12 \Leftrightarrow x\geq 2$.

Για κάθε $x \in (0,2)$ είναι $f''(x) < 0$ και για κάθε $x > 2$ είναι $f''(x) > 0$.Επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $(0,2]$ και κυρτή στο $[2,+\infty)$.

Για $x < 0$ είναι: $f''(x) = \left(\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)' = -\frac{6}{x^3} + \frac{12}{x^4} = \frac{-6x+12}{x^4} > 0$

$(x < 0 \Leftrightarrow -6x > 0 \Leftrightarrow -6x + 12 > 12 > 0)$. Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0)$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+3x-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+3x-2)\cdot\frac{1}{x^2} = -2\cdot(+\infty) = -\infty$.

Άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x-2}{-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$. Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 1$ και στο $-\infty$ την ευθεία $y = -1$. Εφόσον έχει οριζόντιες ασύμπτωτες δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $\pm\infty$.

δ) $A_g = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

i) Κατακόρυφη ασύμπτωτη αν έχει θα έχει την $x = 0$.

Αν $\mu = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}} = 2$ απορρίπτεται .

Αν $\mu > 0$ τότε

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+2x+\mu}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+2x+\mu)\cdot\frac{1}{x} = \mu\cdot(+\infty) = +\infty$ ισχύει.

Αν $\mu < 0$ τότε

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+2x+\mu}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+2x+\mu)\cdot\frac{1}{x} = \mu\cdot(-\infty) = -\infty$ ισχύει. Άρα για $\mu \neq 0$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$.

ii) Για $\mu \neq 0$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+\mu}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$.

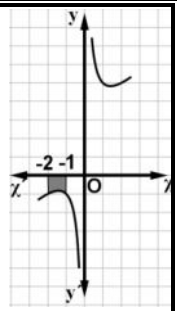
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (g(x)-x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+2x+\mu}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}+2x+\mu\cancel{-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$.

Άρα η ευθεία $y = x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της g στο $\pm\infty$.

Εφόσον έχει πλάγιες ασύμπτωτες δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες στο $\pm\infty$.

ε) $x^2+2x+\mu > x^2+2x+1 = (x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+2x+\mu > 0$.

Οπότε $g(x) < 0$ στο $[-2,-1]$ και



$$E=\int_{-2}^{-1}\left(-g(x)\right)dx=-\int_{-2}^{-1}\frac{x^2+2x+\mu}{x}dx \Leftrightarrow$$

$$E=-\int_{-2}^{-1}\left(x+2+\frac{\mu}{x}\right)dx \Leftrightarrow$$

$$2=-\left[\frac{x^2}{2}+2x+\mu\ln|x|\right]_{-2}^{-1} \Leftrightarrow 2=-\left(\frac{1}{2}-2-2+4-\mu\ln 2\right) \Leftrightarrow$$

$$2=-\frac{1}{2}+\mu\ln 2 \Leftrightarrow 4=-1+2\mu\ln 2 \Leftrightarrow 5=2\mu\ln 2 \Leftrightarrow \mu=\frac{5}{2\ln 2}.$$

$\left(\frac{5}{2\ln 2}>1 \Leftrightarrow 5>2\ln 2 \Leftrightarrow \ln e^5>\ln 4 \Leftrightarrow e^5>4 \text{ ισχύει}\right)$.

9. α) i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2} \overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{3}$. Είναι

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-1=\not{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\not{2}}-1=\sqrt{2}-1>0$, άρα

$f'(x)>0$ στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$. Είναι

$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}-1=\not{2}\cdot\left(-\frac{1}{\not{2}}\right)-1=-2<0$, άρα

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
f′	+	0	−
f	↗		↘

$f'(x)<0$ στο $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\frac{\pi}{3}$ το $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\eta\mu\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+3=\sqrt{3}+3-\frac{\pi}{3}$.

Επειδή $f(0)=3>f(\pi)=-\pi+3$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο π το $f(\pi)=-\pi+3$ και τοπικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=3$.

β) i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^+}f(x)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}+3-\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}+9-\pi}{3}$.Έστω $A_1=\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$,

$A_2=\left(\frac{\pi}{3},\pi\right]$. Είναι $f(A_1)\overset{f\nearrow}{=}\left[f(0),f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left[3,\frac{3\sqrt{3}+9-\pi}{3}\right]$,

$f(A_2)\overset{f\searrow}{=}\left[f(\pi),\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^+}f(x)\right)=\left[f(\pi),f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left[-\pi+3,\frac{3\sqrt{3}+9-\pi}{3}\right)$, άρα

$f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=\left[-\pi+3,\frac{3\sqrt{3}+9-\pi}{3}\right]$.

ii) $\eta\mu x=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2\eta\mu x=x-3\Leftrightarrow 2\eta\mu x-x+3=0\Leftrightarrow f(x)=0$.

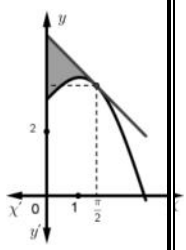
Το $0\notin f(A_1)$ οπότε δεν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο A_1 .Το $0\in f(A_2)$ οπότε υπάρχει $x_0\in A_2$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.Το x_0 είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και 1-1 στο A_2 και διάφορο του π αφού $f(\pi)\neq 0$. Άρα η εξίσωση $\eta\mu x=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,\pi)$.

γ) i) Είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\eta\mu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+3=5-\frac{\pi}{2}$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-1=-1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $\frac{\pi}{2}$ είναι

$y-5+\frac{\pi}{2}=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y=-x+\cancel{\frac{\pi}{2}}+5-\cancel{\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow y=-x+5$.

ii) $f''(x)=-2\eta\mu x<0$ στο $(0,\pi)$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0,\pi]$ αφού είναι συνεχής στο $[0,\pi]$. Άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την ε για κάθε σημείο της εκτός από το σημείο επαφής οπότε $f(x)\le -x+5$.



δ) Επειδή $f(x)\le -x+5$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι το

$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-x+5-f(x)\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cancel{-x}+5-2\eta\mu x\cancel{+x}-3\right)dx\Leftrightarrow$

$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-2\eta\mu x)dx=\left[2x+2\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$.

10. α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=e^x\left(f(x)-x+1\right)+e^x\left(f'(x)-1\right)\Leftrightarrow$

$g'(x)=e^x\left(f(x)-x+\cancel{1}+f'(x)-\cancel{1}\right)=e^x\left(f(x)-x-f(x)+x\right)=0\Leftrightarrow$

$g(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$

β) Είναι $g(0)=f(0)+1=1\Leftrightarrow c=1$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$e^x\left(f(x)-x+1\right)=1 \Leftrightarrow f(x)-x+1=e^{-x} \Leftrightarrow f(x)=e^{-x}+x-1$

γ) 1ος τρόπος: Είναι $f'(x)=\left(e^{-x}+x-1\right)'=-e^{-x}+1$

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -e^{-x}+1\geq 0 \Leftrightarrow e^{-x}\leq 1 \Leftrightarrow -x\leq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow f(x)\geq 0$.

2ος τρόπος: Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x\geq x+1$, οπότε αντικαθιστώντας όπου x το –x, είναι: $e^{-x}\geq -x+1 \Leftrightarrow e^{-x}+x-1\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 0$.

δ) Είναι $E(\Omega)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(e^{-x}+x-1\right)dx=\left[-e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1=\frac{e-2}{2e}$

ε) $e^{-x}+x=\alpha+1 \Leftrightarrow f(x)=\alpha$. Είναι

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+x-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\frac{e^{-x}}{x}+1-\frac{1}{x}\right)=-\infty(-\infty+1-0)=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+x-1\right)=+\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=(0,+\infty)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=(0,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=(0,+\infty)$. Επειδή $\alpha\in f(\Delta_1)$ και $\alpha\in f(\Delta_2)$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, μια στο Δ_1 και μια στο Δ_2.

11. α) Για να ορίζεται η f πρέπει $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$, άρα $A_f=(0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$. Είναι $f'(x)>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα είναι και 1-1.

$f(x)=y \Leftrightarrow \ln\left(e^x-1\right)=y,\ y\in\mathbb{R} \Leftrightarrow e^x-1=e^y \Leftrightarrow e^x=e^y+1 \Leftrightarrow x=\ln\left(e^y+1\right)$,

άρα $f^{-1}(y)=\ln\left(e^y+1\right),\ y\in\mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x)=\ln\left(e^x+1\right),\ x\in\mathbb{R}$.

($x>0 \Leftrightarrow \ln\left(e^y+1\right)>0 \Leftrightarrow \ln\left(e^y+1\right)>\ln 1 \Leftrightarrow e^y+1>1 \Leftrightarrow e^y>0$ ισχύει)

β) $f''(x)=\dfrac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\cdot e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{-e^x}{\left(e^x-1\right)^2}<0\Rightarrow f\cap(0,+\infty)$.

γ) Αρκεί $f(x)<x\Leftrightarrow \ln\left(e^x-1\right)<x\Leftrightarrow e^x-1<e^x$ που ισχύει.

δ) Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$. Για $x=\ln(e-1)$ είναι $f(u)=f(1)\Leftrightarrow u=1$ και για $x=\ln\left(e^e-1\right)$ είναι $f(u)=f(e)\Leftrightarrow u=e$, οπότε

$$\Pi=\int_1^e f(x)dx+\int_{\ln(e-1)}^{\ln\left(e^e-1\right)}f^{-1}(x)dx=\int_1^e f(x)dx+\int_1^e uf'(u)du\Leftrightarrow$$

$$\Pi=\cancel{\int_1^e f(x)dx}+\left[uf(u)\right]_1^e-\cancel{\int_1^e f(u)du}=ef(e)-f(1)=e\ln\left(e^e-1\right)-\ln(e-1).$$

ε) Είναι $g(x)\geq 0\Leftrightarrow e^x f(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq 0\Leftrightarrow \ln\left(e^x-1\right)\geq 0\Leftrightarrow e^x-1\geq 1\Leftrightarrow$

$e^x\geq 2\Leftrightarrow x\geq \ln 2$. $E(\Omega)=\int_{\ln 2}^{\ln 3}g(x)dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x\ln\left(e^x-1\right)dx$

Θέτουμε $e^x-1=u\Rightarrow e^x dx=du$. Για $x=\ln 2$ είναι $u=e^{\ln 2}-1=2-1=1$ και για $x=\ln 3$ είναι $u=e^{\ln 3}-1=3-1=2$, οπότε:

$$E(\Omega)=\int_1^2\ln u du=\int_1^2 u'\ln u du=\left[u\ln u\right]_1^2-\int_1^2 \cancel{u}\cdot\frac{1}{\cancel{u}}du=2\ln 2-(2-1)=2\ln 2-1$$

12. α) Επειδή η f είναι συνεχής στο x = 0 ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=\lambda$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1$, άρα λ = 1.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^x-1-x}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$, άρα $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x+1$.

γ) Για κάθε $x>0$ είναι $e^x>e^0=1\Leftrightarrow e^x-1>0\Rightarrow\dfrac{e^x-1}{x}>0\Leftrightarrow f(x)>0$. Για κάθε $x<0$ είναι $e^x<e^0=1\Leftrightarrow e^x-1<0\Rightarrow\dfrac{e^x-1}{x}>0\Leftrightarrow f(x)>0$. Επειδή και $f(0)=1>0$, είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Είναι $f'(x)=\dfrac{xe^x-\left(e^x-1\right)}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)+1}{e^x}$. Για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0$

και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

$\beta e^{\alpha}-\alpha e^{\beta}<\beta-\alpha \Leftrightarrow \beta e^{\alpha}-\beta<\alpha e^{\beta}-\alpha \Leftrightarrow \beta\left(e^{\alpha}-1\right)<\alpha\left(e^{\beta}-1\right) \Leftrightarrow$

$\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha}<\dfrac{e^{\beta}-1}{\beta} \Leftrightarrow f(\alpha)<f(\beta) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} \alpha<\beta$ ισχύει

ε) Για κάθε $x>0$ είναι $g(x)=x\dfrac{e^{x}-1}{x}=xe^{x}-x>0$.

$E(\Omega)=\int_1^2 g(x)dx=\int_1^2\left(xe^{x}-x\right)dx=\int_1^2 x\left(e^{x}\right)'dx-\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_1^2 \Leftrightarrow$

$E(\Omega)=\left[xe^{x}\right]_1^2-\int_1^2 e^{x}dx-\dfrac{3}{2}=2e^2-e-e^2+e-\dfrac{3}{2}=e^2-\dfrac{3}{2}$ τ.μ.

13. α) Είναι $f(x)=x-4\sqrt{x}+4=\left(\sqrt{x}-2\right)^2$, $x\geq 0$.

Είναι $A_{f\circ f}=\left\{x\in A_f / f(x)\in A_f\right\}=\left\{x\geq 0/\left(\sqrt{x}-2\right)^2\geq 0 \text{ ισχύει}\right\}=[0,+\infty)$.

Για κάθε $x\geq 0$ είναι

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}-2\right)^2=\left(\left|\sqrt{x}-2\right|-2\right)^2$.

Για κάθε $x\in[0,4]$ είναι $0\leq x\leq 4\Leftrightarrow 0\leq\sqrt{x}\leq 2$ οπότε $\sqrt{x}-2\leq 0$ και

$(f\circ f)(x)=\left(2-\sqrt{x}-2\right)^2=x$

β)i. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{f(x)}\underset{\substack{x\to 4\Rightarrow\\ u\to 0^+}}{\overset{f(x)=u>0}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1-4\dfrac{\sqrt{x}}{x}+\dfrac{4}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-4\dfrac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}+\dfrac{4}{x}}{1+\dfrac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-4\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{x}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=1$

γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-4\sqrt{x}+4}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{x}\right)=1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-4\sqrt{x}+4\right)=-\infty$,οπότε η f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-2\right)^2=+\infty$ οπότε η f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

δ) $f(x)=x-e^{-x}\Leftrightarrow \cancel{x}-4\sqrt{x}+4-\cancel{x}+e^{-x}=0\Leftrightarrow e^{-x}-4\sqrt{x}+4=0$.

Έστω $\varphi(x)=e^{-x}-4\sqrt{x}+4,\ x\geq 0$.

Για κάθε $x>0$ είναι $\varphi'(x)=-e^{-x}-4\dfrac{1}{2\sqrt{x}}<0$ επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0,+\infty)$.

ε) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_0^1\left|f(x)-(f\circ f)(x)\right|dx=\int_0^1\left|\cancel{x}-4\sqrt{x}+4-\cancel{x}\right|dx=\int_0^1\left(4-4x^{\frac{1}{2}}\right)dx\Leftrightarrow$$

$$E=\left[4x-4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\left[4x-\frac{8}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\,\tau.\mu.$$

(Είναι $0\leq x\leq 1\Leftrightarrow 0\leq\sqrt{x}\leq 1\Leftrightarrow -4\leq -4\sqrt{x}\leq 0$ οπότε $-4\sqrt{x}+4\geq 0$)

14. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{x}=\dfrac{3x^3-1}{x}$.

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{3x^3-3}{x}\geq 0\Leftrightarrow 3x^3-3\geq 0\Leftrightarrow 3x^3\geq 3\Leftrightarrow x^3\geq 1\Leftrightarrow x\geq 1$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=1$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=6x+\dfrac{3}{x^2}>0\Rightarrow f\cup(0,+\infty)$.

β) $x^3-2=3\ln x\Leftrightarrow x^3-3\ln x=2\Leftrightarrow f(x)=2$

Είναι $f(1)=1,\ f(e)=e^3-3$ και $f(1)<2<f(e)$. Επειδή η f είναι συνεχής, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=2$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,e)$, το x_0 είναι μοναδικό.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3 - 3\ln x\right) = 0 + \infty = +\infty$ οπότε η ευθεία $x = 0$, δηλαδή ο άξονας y΄y, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[x^3\left(1 - \dfrac{3\ln x}{x^3}\right)\right] = +\infty(1-0) = +\infty$ γιατί

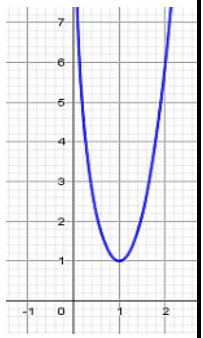
$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^3} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{3x^3} = 0$ άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2 - \dfrac{3\ln x}{x}\right) = +\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ οπότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

x	0	1	$+\infty$
f″	+	0	+
f′	−		+
f	↘		↗

δ)



ε) Είναι

$$F(x) = x^4 - 3(\ln x - 1) - 3x\cdot\frac{1}{x} = x^4 - 3\ln x + 3 - 3 = f(x),$$

άρα η F είναι αρχική της f.

$$E = \int_1^e f(x)dx = \left[F(x)\right]_1^e = F(e) - F(1) = \frac{e^5 + 14}{5}\ \text{τ.μ.}$$

15. α) Η f ορίζεται όταν $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, άρα $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Για το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ έχουμε:

$$A_{f\circ g} = \left\{x \in A_g / g(x) \in A_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / e^x \neq -1 \text{ ισχύει}\right\} = \mathbb{R}.$$

Είναι $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

β) $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\varphi'(x) = \frac{e^x\left(e^x + 1\right) - e^x\cdot e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} = \frac{\cancel{e^x\cdot e^x} + e^x - \cancel{e^x\cdot e^x}}{\left(e^x + 1\right)^2} = \frac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi'(x) > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow \mathbb{R}$, οπότε η φ δεν έχει ακρότατα.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to -\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{0}{0+1} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\underset{\substack{x\to+\infty\\ u\to+\infty}}{\overset{e^x=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{u+1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{u}=1$. Επειδή η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(0,1)$.

Επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\varphi(x)=y,\ y\in(0,1)\Leftrightarrow\dfrac{e^x}{e^x+1}=y\Leftrightarrow e^x=ye^x+y\Leftrightarrow e^x-ye^x=y\Leftrightarrow$

$e^x(1-y)=y\Leftrightarrow e^x=\dfrac{y}{1-y}\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{y}{1-y}$, άρα $f^{-1}(y)=\ln\dfrac{y}{1-y},\ y\in(0,1)$,

οπότε $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{x}{1-x},\ x\in(0,1)$.

δ) Είναι $\varphi''(x)=\left(\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)'=\dfrac{e^x(e^x+1)^2-e^x\cdot2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4}\Leftrightarrow$

$\varphi''(x)=\dfrac{\cancel{(e^x+1)}(e^{2x}+e^x-2e^{2x})}{(e^x+1)^{\cancel{4}3}}=\dfrac{e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^3}=\dfrac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$.

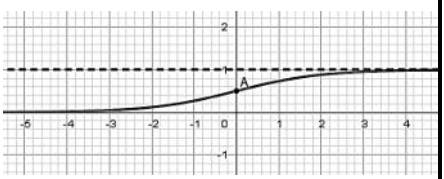
$\varphi''(x)\ge0\Leftrightarrow\dfrac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}\ge0\Leftrightarrow1-e^x\ge0\Leftrightarrow e^x\le1\Leftrightarrow x\le0$

Για κάθε $x<0$ είναι $\varphi''(x)>0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>0$ είναι $\varphi''(x)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

Η φ έχει σημείο καμπής το $A(0,\varphi(0))\equiv\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

ε) Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ η φ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=0$, δηλαδή τον άξονα x΄x.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$ η φ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=1$.



στ) $\int_0^1 e^x f(x)\,dx=\int_0^1\dfrac{e^x\cdot e^x}{e^x+1}dx$

1ος τρόπος: Θέτουμε $u=e^x\Rightarrow du=e^x dx$, για $x=0\Rightarrow u=1$ και για $x=1\Rightarrow u=e$

$$\int_0^1 \frac{e^x\cdot e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}e^x\,dx=\int_1^e \frac{u}{u+1}du=\int_1^e \frac{u+1-1}{u+1}du=\int_1^e\left(1-\frac{1}{u+1}\right)du=$$

$$=\left[u-\ln|u+1|\right]_1^e=\left[u-\ln(u+1)\right]_1^e=e-\ln(e+1)-1+\ln 2$$

2ος τρόπος: Θέτουμε $u=e^x+1\Rightarrow du=e^x dx$, για $x=0\Rightarrow u=2$ και για $x=1\Rightarrow u=e+1$

$$\int_0^1 \frac{e^x\cdot e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}e^x\,dx=\int_2^{e+1} \frac{u-1}{u}du=\int_2^{e+1}\left(1-\frac{1}{u}\right)du=\left[u-\ln|u|\right]_2^{e+1}=$$

$$=\left[u-\ln u\right]_2^{e+1}=e-\ln(e+1)-1+\ln 2$$

16. α) Είναι $f'(x)=2\left(x-e^x\right)\left(1-e^x\right)$.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x\geq x+1>x\Rightarrow x-e^x<0$, οπότε:

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 2\left(x-e^x\right)\left(1-e^x\right)\geq 0\Leftrightarrow 1-e^x\leq 0\Leftrightarrow e^x\geq 1\Leftrightarrow x\geq 0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=1$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-e^x\right)=-\infty-0=-\infty$, οπότε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-e^x\right)^2 \underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\ u\to-\infty}}{\overset{x-e^x=u}{=}} \lim_{u\to-\infty} u^2=+\infty.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-e^x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{e^x}{x}\right)\right]=+\infty(-\infty)=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-e^x\right)^2 \underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to-\infty}}{\overset{x-e^x=u}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty} u^2=+\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=[1,+\infty)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[0,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=[1,+\infty)$. Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[1,+\infty)$. Το $f(1821)$ περιέχεται στα $f(\Delta_1), f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=f(1821)$ έχει από μια ρίζα σε καθένα από τα Δ_1,Δ_2, οπότε έχει ακριβώς δύο λύσεις. ($f(1821)>f(1)=1$ αφού $f(x)>f(1)=1$ για $x\neq 1$)

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-e^x)^{\not 2}}{2\not{(x-e^x)}(1-e^x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-e^x}{2}\cdot\dfrac{1}{1-e^x}\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-e^x}{2}=-\dfrac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1-e^x}\overset{1-e^x=u}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1-e^x}\overset{1-e^x=u}{=}\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{1}{u}=-\infty$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=+\infty$ και δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=f'(x)\Leftrightarrow$

$(x-e^x)^{\not 2}=2\not{(x-e^x)}(1-e^x)\Leftrightarrow x-e^x-2+2e^x=0\Leftrightarrow e^x+x-2=0$ έχει μοναδική ρίζα. Έστω $\varphi(x)=e^x+x-2,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι

$\varphi'(x)=e^x+1>0\Rightarrow\varphi\nearrow\mathbb{R}$

Είναι $\varphi(0)=-1,\ \varphi(1)=e-1$, άρα $\varphi(0)\varphi(1)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

2ος τρόπος: Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$f(x)=f'(x)\Leftrightarrow(x-e^x)^{\not 2}=2\not{(x-e^x)}(1-e^x)\Leftrightarrow x-e^x-2+2e^x=0\Leftrightarrow$

$e^x+x-2=0$ έχει μοναδική ρίζα.

Έστω $\varphi(x)=e^x+x-2,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $\varphi'(x)=e^x+1>0\Rightarrow\varphi\nearrow\mathbb{R}$.

Η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε έχει σύνολο τιμών το :

$\varphi(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x),\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=(0-\infty-2,+\infty+\infty-2)=(-\infty,+\infty)$.

Το 0 ανήκει στο $\varphi(\mathbb{R})$ οπότε η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει ακριβώς μία πραγματική λύση.

ε) $\int_\alpha^\beta\left(x^2-2xe^x+e^{2x}\right)dx>\beta-\alpha\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta(x-e^x)^2dx>\beta-\alpha\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx>\beta-\alpha$

Ισχύει $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.

Επομένως $\int_\alpha^\beta f(x)dx>\int_\alpha^\beta dx\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx>\beta-\alpha$

στ) Είναι $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$E=\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x-e^x)^2dx=\int_0^1\left(x^2-2xe^x+e^{2x}\right)dx=$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + e^{2x}\right) dx - \int_0^1 2xe^x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \left[2xe^x\right]_0^1 + \int_0^1 2e^x \, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \left[2xe^x\right]_0^1 + \left[2e^x\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2e + 2e - 2 = \frac{3e^2 - 13}{6}$$

17. α) Είναι

$$A_{f\circ g} = \left\{x \in A_g / g(x) \in A_f\right\} = \left\{x > 0 / \ln x \in \mathbb{R}\right\} = (0, +\infty) = A_h = A_{-h}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{\ln x} - \ln x = x - \ln x = -h(x)$$

β) Είναι $f'(x) = e^x - 1$ και $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 1$.

Είναι $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $h'(x) > 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $(0,1]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $h'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η h έχει μέγιστο το $h(1) = -1$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \geq f(1) = 1 > -1 = h(1) \geq h(x)$.

γ) Είναι $f'(0) = 0$ και $h'(1) = 0$ Επειδή $f'(0) = h'(1)$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Ο(0,0) είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της C_h στο σημείο Β(1,-1).

δ) Είναι $g'(x) = \frac{1}{x}$ και $g'(1) = 1$. Η εφαπτομένη της C_g στο Α είναι η ευθεία ε: $y - g(1) = g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = x - 1$.

Για να εφάπτεται η ε στην C_f πρέπει να υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow e^{x_1} - 1 = 1 \Leftrightarrow e^{x_1} = 2 \Leftrightarrow x_1 = \ln 2$.

Είναι $f(\ln 2) = e^{\ln 2} - \ln 2 = 2 - \ln 2$ και η εφαπτομένη της C_f στο $x_1 = \ln 2$ έχει εξίσωση:

$y - f(\ln 2) = f'(\ln 2)(x - \ln 2) \Leftrightarrow y - 2 + \ln 2 = x - \ln 2 \Leftrightarrow y = x + 2 - 2\ln 2$ και δεν είναι η ε. Για να εφάπτεται η ε στην C_h πρέπει να υπάρχει $x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $h'(x_2) = \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_2} - 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_2} = 2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2}$. Είναι

$h\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\ln 2-\frac{1}{2}$ και η εφαπτομένη της C_h στο $x_2=\frac{1}{2}$ έχει εξίσωση:

$y-h\left(\frac{1}{2}\right)=h'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow y+\ln 2+\frac{1}{2}=x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=x-1-\ln 2$ και δεν είναι η ε.

ε) Έστω $\varphi(x)=g(x)+h(x)=\ln x+\ln x-x=2\ln x-x,\ x>0$.

Είναι $\varphi'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$. Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $\varphi'(x)>0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $(0,2]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(2,+\infty)$ είναι $\varphi'(x)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η φ έχει μέγιστο το $\varphi(2)=2\ln 2-2=2(\ln 2-1)<0$, οπότε για κάθε $x>0$ είναι

$\varphi(x)\le\varphi(2)<0\Leftrightarrow g(x)+h(x)<0\Leftrightarrow g(x)<-h(x)$

στ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_1^2|k(x)-g(x)|dx=\int_1^2|-h(x)-g(x)|dx=-\int_1^2\left(h(x)+g(x)\right)dx=$$

$$-\int_1^2(2\ln x-x)dx=\ =-\int_1^2 2\ln x\ dx+\int_1^2 x\ dx=-\left[2x\ln x\right]_1^2+\int_1^2 2\ dx+\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=$$

$$=-\left[2x\ln x\right]_1^2+\int_1^2 2\ dx+\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=-4\ln 2+2(2-1)+2-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}-4\ln 2\ \text{τ.μ.}$$

18. α) Η g ορίζεται όταν $x+511\ge 0\Leftrightarrow x\ge -511$, οπότε $A_g=[-511,+\infty)$.

Για το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ ισχύει ότι

$$A_{g\circ f}=\left\{x\in A_f/f(x)\in A_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x^3-511\ge -511\right\}=$$

$$\left\{x\in\mathbb{R}/x^3\ge 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\ge 0\right\}=[0,+\infty)$$

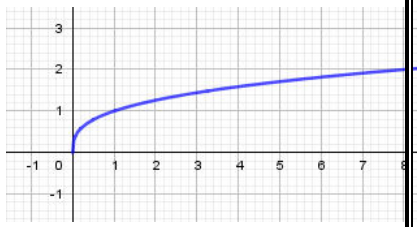
Είναι $h(x)=g(f(x))=\sqrt[9]{x^3-511+511}=\sqrt[9]{x^3}=\sqrt[3]{x},\ x\ge 0$.

β) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Για κάθε $x>0$ είναι $h'(x)>0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Η h' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$h''(x)=\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)'=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $h''(x) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.



γ) Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Είναι $h(0) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα έχει σύνολο τιμών το $h(A) = [0,+\infty)$, οπότε $A_{h^{-1}} = [0,+\infty)$.

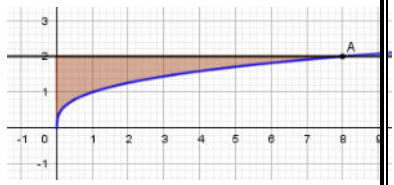
$h(x) = y \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = y \Leftrightarrow x = y^3$, άρα $h^{-1}(y) = y^3,\ y \geq 0$, οπότε

$h^{-1}(x) = x^3,\ x \geq 0$.

δ) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{g^3(x)-9}{\big(f(x)+510\big)(x-1)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\left(\sqrt[9]{x+511}\right)^3-9}{\big(x^3-511+510\big)(x-1)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{x+511}-9}{\big(x^3-1\big)(x-1)} =$

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x+511}-9}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)(x-1)} = \lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt[3]{x+511}-9}{x^2+x+1}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\right) = \frac{8-9}{3}(+\infty) = -\infty$$

ε) Αρχικά θα βρούμε το σημείο τομής των $y = 2$ και $y = h(x)$



$h(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 8$.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι $h(x) \leq 2$ για κάθε $x \in [0,8]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_0^8 \big(2-h(x)\big)dx = \int_0^8 \left(2-x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \left[2x - \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_0^8 =$$

$$\left[2x-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^8 = \left[2x-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right]_0^8 = \left[2x-\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\right]_0^8 = 16-\frac{3}{4}\cdot16 = 16-12 = 4$$

19. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \dfrac{2\left(1+x^2\right)-2x\cdot2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Η f ΄είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=2\frac{-2x\left(1+x^2\right)^2-\left(1-x^2\right)\cdot 2\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-4x\left(1+x^2+2-2x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}\Leftrightarrow$$

$f''(x)=\dfrac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$. Για κάθε $x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$ είναι $f''(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ είναι $f''(x)>0$.

Επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,\sqrt{3}\right],\left[0,\sqrt{3}\right]$ και κυρτή στα διαστήματα $\left[-\sqrt{3},0\right],\left[\sqrt{3},+\infty\right)$. Είναι

$f\left(-\sqrt{3}\right)=-\dfrac{2\sqrt{3}}{4}$, $f(0)=0, f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}$. Η f έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\sqrt{3},-\dfrac{2\sqrt{3}}{4}\right)$, $O(0,0)$ και $B\left(\sqrt{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{4}\right)$. Παρατηρούμε ότι το Ο είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, οπότε τα Α, Β είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

β) $|f(x)|\le 1\Leftrightarrow\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\le 1\Leftrightarrow\dfrac{2|x|}{1+x^2}\le 1\overset{1+x^2>0}{\Leftrightarrow}1+x^2\ge 2|x|\Leftrightarrow 1+|x|^2-2|x|\ge 0$

$\Leftrightarrow(1-|x|)^2\ge 0$ ισχύει.

γ) $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow F'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}\Leftrightarrow F'(x)=\dfrac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2}\Leftrightarrow F(x)=\ln\left(1+x^2\right)+c$, $c\in\mathbb{R}$. $F(0)=2022\Leftrightarrow c=2022$, οπότε $F(x)=\ln\left(1+x^2\right)+2022,\ x\in\mathbb{R}$

δ) Αν $\alpha=\beta$ η σχέση ισχύει ως ισότητα

Αν $\alpha\ne\beta$. Έστω $\alpha<\beta$ τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως παραγωγίσιμη, η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ,

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
4x	–	–	+	+	
x^2-3	+	–	–	+	
$\left(1+x^2\right)^3$	+	+	+	+	
f ΄΄	–	+	–	+	
f	∩	∪	∩	∪	

δηλαδή υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $F'(\xi)=\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow f(\xi)=\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Όμως $|f(\xi)| \le 1$ συνεπώς $\dfrac{|F(\beta)-F(\alpha)|}{|\beta-\alpha|} \le 1 \Leftrightarrow |F(\beta)-F(\alpha)| \le |\beta-\alpha|$.

Όμοια για $\alpha > \beta$. Οπότε σε κάθε περίπτωση $|F(\beta)-F(\alpha)| \le |\beta-\alpha|$

ε) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$E = \int_0^1 f(x)dx = \left[F(x)\right]_0^1 = F(1)-F(0) = \ln 2$ τ.μ.

Επίπεδο Β2

20. α) Είναι $f'(x) = \dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$, οπότε $f'(x) > 0$ στο $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ και η f συνεχής στο 0, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως η f είναι και «1 – 1», οπότε ορίζεται η αντίστροφή της. Πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$ είναι το σύνολο τιμών f (A).

Είναι $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}$ γιατί

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, επομένως η $f^{-1}(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

β) $f(x) \le x \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{x^2+1} \le x \Leftrightarrow x^3 \le x(x^2+1) \Leftrightarrow x \ge 0$, που ισχύει. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα τότε $x \le f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) \le f\left(f^{-1}(x)\right) \Leftrightarrow f(x) \le x$, που ισχύει από το προηγούμενο.

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^3+x} = 1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$ άρα η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και επειδή δεν διαφοροποιούνται τα όρια όταν $x \to -\infty$ τότε η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

δ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_1^{\kappa}\left[x-f(x)\right]dx=\int_1^{\kappa}\left(x-\frac{x^3}{x^2+1}\right)dx$

$=\int_1^{\kappa}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^{\kappa}\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_1^{\kappa}=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\kappa^2+1\right)-\ln 2\right]$

ε) Το κ άρα και το εμβαδόν Ε είναι συνάρτηση του χρόνου t και επομένως έχουμε $E(t)=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\kappa^2(t)+1\right)-\ln 2\right]$.

Επομένως $E'(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\kappa(t)\kappa'(t)}{\kappa^2(t)+1}\right)=\frac{\kappa(t)}{\kappa^2(t)+1}$ (1)

Τη χρονική στιγμή t_o έχουμε $\kappa(t_0)=2$. Στην (1) για $t=t_o$ έχουμε

$E'(t_0)=\frac{\kappa(t_0)}{\kappa^2(t_0)+1}=\frac{2}{5}$ $cm^2/\sec$.

21. α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=-e^{-x}+1=-\frac{1}{e^x}+1=\frac{e^x-1}{e^x}$, $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow e^x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.Έχει ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$. Είναι $f''(x)=e^{-x}>0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής .

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}+x-1\right)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x}+x-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x}\left(1+xe^x\right)-1\right)=+\infty$, εφόσον

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x)'}{(e^{-x})'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+xe^x)=1>0$ άρα το σύνολο τιμών αφού έχει ελάχιστο το 0 , είναι $f(A)=[0,+\infty)$. Η εξίσωση γίνεται

$e^x(x-1)=2e^x-1\overset{(e^x>0)}{\Leftrightarrow}x-1=2-e^{-x}\Leftrightarrow e^{-x}+x-1=2\Leftrightarrow f(x)=2$.

Αν $A_1=(-\infty,0)$, $A_2=[0,+\infty)$ τότε έχουμε

$f(A_1)=(0,+\infty)$, $f(A_2)=[0,+\infty)$ οπότε αφού $2\in f(A_1)$, $2\in f(A_2)$ και σε κάθε ένα από τα διαστήματα A_1, A_2 η f είναι γνησίως μονότονη η εξίσωση έχει δύο λύσεις .

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ οπότε η ευθεία $y=x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

δ) Θεωρούμε την $g(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2}-e^{-x}$, $x\in(-\infty,0]$.

Είναι $g'(x)=-1+x+e^{-x}=f(x)>0$ από ερώτημα **α** , άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $x<0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(0)\Leftrightarrow 1-x+\dfrac{x^2}{2}-e^{-x}<0\Leftrightarrow 1-x+\dfrac{x^2}{2}<e^{-x}$

ε) Η ανίσωση $f(x)<f\left(x^2\right)+\ln x$ ορίζεται για $x>0$ ενώ η εξίσωση $f(x)=f\left(x^2\right)+\ln x$ η έχει προφανή λύση $x=1$.

• Για $x>1$ τότε $\ln x>0$, $x^2>x>1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x^2)>f(x)\Leftrightarrow f(x)-f(x^2)<0$, δηλαδή $f(x)-f(x^2)<\ln x$ οπότε η ανίσωση αληθεύει στο $(1,+\infty)$.

• Αν $0<x<1$ τότε $\ln x<0$, $0<x^2<x\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x^2)<f(x)\Leftrightarrow f(x)-f(x^2)>0$, οπότε $f(x)-f(x^2)>\ln x$ συνεπώς η ανίσωση είναι αδύνατη $(0,1)$.

Επομένως η ανίσωση έχει λύση το διάστημα $(1,+\infty)$.

στ) Είναι $f(x)-(x-1)=e^{-x}>0$ οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_1^2\left[f(x)-(x-1)\right]dx=\int_1^2 e^{-x}dx=-\left[e^{-x}\right]_1^2=-\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e}\right)=\frac{e-1}{e}$$

22. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\kappa x^2+\lambda x+1}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\kappa x^2+\lambda x+1-x^2+x}{x-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(\kappa-1)x^2+(\lambda+1)x+1}{x-1}\right)$

- Αν $\kappa-1>0\Leftrightarrow\kappa>1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=+\infty$ (άτοπο)
- Αν $\kappa-1<0\Leftrightarrow\kappa<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=-\infty$ (άτοπο)

Συνεπώς, πρέπει $\kappa-1=0\Leftrightarrow\kappa=1$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\lambda+1)x+1}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(\lambda+1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)=\lambda+1 \text{ άρα}$$

$\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=-1$

β) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{1\}$

με $f'(x)=\dfrac{\left(x^2-x+1\right)'(x-1)-\left(x^2-x+1\right)(x-1)'}{(x-1)^2}=\cdots=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ είναι

$f'(x)>0\Leftrightarrow x^2-2x>0\Leftrightarrow x(x-2)>0\Leftrightarrow x<0$ ή $x>2$

Οπότε ο πίνακας προσήμου της f' και μονοτονίας της f διαμορφώνεται ως εξής

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[2,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[0,1)$ και $(1,2]$. Παρουσιάζει για $x=0$ τοπικό μέγιστο το $f(0)=-1$ και για $x=2$ τοπικό ελάχιστο το $f(2)=3$.

γ) Η $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ είναι παραγωγίσιμη $\mathbb{R}-\{1\}$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^4}=\ldots=\frac{2}{(x-1)^3}$$

Είναι $f''(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{2}{(x-1)^3}>0\Leftrightarrow(x-1)^3>0\Leftrightarrow x>1$ οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty,1)$ και κυρτή στο $(1,+\infty)$ και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

Είναι $f(x)=\dfrac{1}{x-1}\left(x^2-x+1\right)$ και $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2-x+1\right)=1>0$, $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$. Συνεπώς, η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$, επομένως η ευθεία $y=x$ είναι πλαγιά ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Επίσης, η ευθεία $y=x$ είναι πλαγιά ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1-x^2+x}{x-1}\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=0$.

δ) Παρατηρούμε ότι αν $x \in (-\infty,1)$ τότε $f(x) \le f(0) = -1$, άρα εφόσον $1-x^2$, $1-x^6 < 1$ για κάθε $x \neq 0$, για να ισχύει $f\left(1-x^2\right)+f\left(1-x^6\right) = -2$ πρέπει $f\left(1-x^2\right) = f\left(1-x^6\right) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 = 0 \\ 1-x^6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

.

ε) $E = \int_2^3 |f(x)-x|dx = \int_2^3 \left|\frac{x^2-x+1}{x-1} - x\right|dx = \int_2^3 \left|\frac{1}{x-1}\right|dx \overset{x-1>0}{=}$

$\int_2^3 \frac{1}{x-1}dx = \left[\ln|x-1|\right]_2^3 = \ln 2$.

23. α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 12$. Επειδή παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$ τότε σύμφωνα με το Θ. Fermat θα είναι $f'(2) = 0 \Leftrightarrow 12\alpha + 4\beta - 12 = 0$ (1)

Επίσης $f'(1) = -9 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta - 12 = -9 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta - 3 = 0$ (2). Από το σύστημα των (1), (2) έχουμε:

$\begin{cases} 12\alpha + 4\beta - 12 = 0 \\ 3\alpha + 2\beta - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\alpha + 4\beta - 12 = 0 \\ -6\alpha - 4\beta + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha - 6 = 0 \\ 3\alpha + 2\beta - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$

Είναι $f(x) = x^3 - 12x - 16$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = 3x^2 - 12$.

$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 \ge 0 \Leftrightarrow 3x^2 \ge 12 \Leftrightarrow x^2 \ge 4 \Leftrightarrow |x| \ge 2 \Leftrightarrow x \le -2$ ή $x \ge 2$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[2,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,2]$.Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -2$ το $f(-2) = 0$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = 2$ το $f(2) = -32$.

Η $f'(x) = 3x^2 - 12$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 6x$ και $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Συνεπώς, η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$, παρουσιάζει σημείο καμπής στο $K(0,-16)$.

β) Έχουμε $x^3 = 12x + 16 \Leftrightarrow x^3 - 12x - 16 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Είναι

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3 - 12x - 16\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3 - 12x - 16\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

• Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (-\infty,-2]$ με

$f(A_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(-2)\right] = (-\infty,0]$.

Επειδή $0 \in f(A_1)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα τη $\rho_1 = -2$.

• Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2=[-2,2]$ με
$f(A_2)=[f(2),f(-2)]=[-32,0]$. Επειδή $0\in f(A_2)$ η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα τη $\rho_1=-2$.

• Τέλος ,η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_3=[2,+\infty)$ με
$f(A_3)=\left[f(2),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-32,+\infty)$.Επειδή $0\in f(A_3)$ η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $\rho_2\in(2,+\infty)$.

Τελικά, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο ρίζες τη $\rho_1=-2$ και $\rho_2\in(2,+\infty)$.

γ) Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής τότε η εφαπτομένη στο Μ έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-2,0)$ οπότε $0-f(x_0)=f'(x_0)(-2-x_0)\Leftrightarrow 2f'(x_0)+x_0f'(x_0)-f(x_0)=0\Leftrightarrow$
$2(3x_0^2-12)+x_0(3x_0^2-12)-(x_0^3-12x_0-16)=0\Leftrightarrow x_0^3+3x_0^2-4=0\Leftrightarrow$
$(x_0-1)(x_0+2)^2=0\Leftrightarrow x_0=1$ ή $x_0=-2$

Η εφαπτομένη στο $x_0=-2$ είναι $y-f(-2)=f'(-2)(x+2)\Leftrightarrow y=0$, ενώ η εφαπτομένη στο $x_0=1$ είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=-9x-18$

δ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2=[-2,2]$, οπότε για $0\le x\le 1\Leftrightarrow f(0)\ge f(x)\ge f(1)\Leftrightarrow -27\le f(x)\le -16$, άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Συνεπώς ,

$$E(\Omega)=-\int_0^1(x^3-12x-16)dx=-\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+6\left[x^2\right]_0^1+16\left[x\right]_0^1=\frac{87}{4}\ \text{τ.μ.}$$

24. α) Είναι $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x}-\dfrac{x^2+3}{x+2}=\dfrac{2x^2+2x+10}{x^2+2x}$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2x+10}{x^2+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=2\ .$$

β) Αρχικά θα βρούμε το πρόσημο της f.
Για κάθε $x\in[1,2]$ είναι $2x^2+2x+10>0$ και $x(x+2)>0$ οπότε $f(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό, το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $E=\int_1^2 f(x)dx$.

$$f(x)=\frac{2x^2+2x+10}{x^2+2x}=\frac{2x^2+4x-2x+10}{x^2+2x}=\frac{2(x^2+2x)-2x+10}{x^2+2x}=2+\frac{-2x+10}{x^2+2x}$$

$$\frac{-2x+10}{x^2+2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{Ax+2A+Bx}{x(x+2)}=\frac{(A+B)x+2A}{x^2+2x}$$

Η προηγούμενη ισότητα ισχύει για κάθε $x\neq 0$ και $x\neq -2$, μόνο όταν $\begin{cases}A+B=2\\2A=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=-3\\A=5\end{cases}$, άρα $f(x)=\frac{2x^2+2x+10}{x^2+2x}=2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x+2}$ και

$$E=\int_1^2\left(2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x+2}\right)dx=\left[2x+5\ln x-3\ln(x+2)\right]_1^2=2+\ln\frac{27}{2}$$

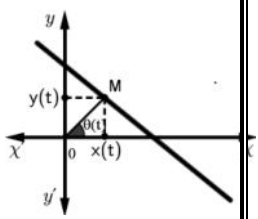
γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{0,2\}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{(4x+2)(x^2+2x)-(2x^2+2x+10)(2x+2)}{(x^2+2x)^2}=\frac{2x^2-20x-20}{(x^2+2x)^2}$$

Είναι $f(2)=\frac{8+4+10}{4+4}=\frac{11}{4}$ και $f'(2)=\frac{8-40-20}{8^2}=-\frac{52}{64}=-\frac{13}{16}$. Η εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0=2$ έχει εξίσωση:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-\frac{11}{4}=-\frac{13}{16}x+\frac{26}{16}\Leftrightarrow y=-\frac{13}{16}x+\frac{35}{8}.$$

δ) Επειδή οι συντεταγμένες του Μ μεταβάλλονται με βάση το χρόνο, οι συντεταγμένες του είναι $(x(t),y(t))$ με $x'(t)=1$ cm/sec.



Είναι $\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{-\frac{13}{16}x(t)+\frac{35}{8}}{x(t)}=-\frac{13}{16}+\frac{35}{8x(t)}$

και $\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)'=\left(-\frac{13}{16}+\frac{35}{8x(t)}\right)'\Leftrightarrow\frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}=-\frac{35x'(t)}{8x^2(t)}\Leftrightarrow$

$\theta'(t)=-\frac{35x'(t)\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}{8x^2(t)}$. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ έχει συντεταγμένες (2,11/4), τότε: $x(t_0)=2,\ y(t_0)=\frac{11}{4}$,

$$(OM)(t_0)=\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}=\sqrt{4+\frac{121}{16}}=\frac{\sqrt{185}}{4},$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta(t_0)=\frac{x(t_0)}{(OM)(t_0)}=\frac{2}{\frac{\sqrt{185}}{4}}=\frac{8}{\sqrt{185}}.$$

Είναι $\theta'(t_0) = -\dfrac{35x'(t_0)\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}{8x^2(t_0)} = -\dfrac{\cancel{35}^{7}\cdot 1\cdot\dfrac{\cancel{64}^{2}}{\cancel{185}^{37}}}{\cancel{8}\cdot 4} = -\dfrac{14}{37}\,\text{rad/sec}$

ε) Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2x^2+2x+10}{x+2}\cdot\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x^2+2x+10}{x+2} = 5$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$, άρα η ευθεία $x = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Είναι $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+}\left(\dfrac{2x^2+2x+10}{x}\cdot\dfrac{1}{x+2}\right) = -\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{2x^2+2x+10}{x} = -7$ και $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1}{x+2} = +\infty$, άρα η ευθεία $x = -2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επειδή η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

25. α) Είναι $f'(x) = \dfrac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \dfrac{\cancel{e^x}(1-x)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \dfrac{1-x}{e^x}$. Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει μέγιστο το $f(1) = \dfrac{1}{e}$.

Είναι $f''(x) = \dfrac{-e^x - (1-x)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{\cancel{e^x}(x-2)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \dfrac{x-2}{e^x}$.

Για κάθε $x \in (1,2)$ είναι $f''(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,2]$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (2,+\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Η f έχει σημείο καμπής στο $(2, f(2)) \equiv \left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$.

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=[1,+\infty)$, οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, οπότε $A_{f^{-1}}=\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$. Έστω ότι $f^{-1}\left(2e^{-2}\right)=\lambda$, τότε $f(\lambda)=2e^{-2}=\dfrac{2}{e^2} \Leftrightarrow f(\lambda)=f(2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \lambda=2$, άρα $f^{-1}\left(2e^{-2}\right)=2$

γ) $A_{f\circ g}=\left\{x\in A_g / g(x)\in A_f\right\}=\left\{x>0/\ln x\geq 1\right\}=\left\{x>0/x\geq e\right\}=[e,+\infty)$

$h(x)=(f\circ g)(x)=\dfrac{\ln x}{e^{\ln x}}=\dfrac{\ln x}{x}$.

δ) i. Για $x\geq e$: $\ln x\geq 1>0$ οπότε $h(x)>0$ και

$$E=\int_e^{e^e} h(x)dx=\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\int_e^{e^2}\ln x(\ln x)'dx=\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_e^{e^2}=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}$$

ii. Είναι $\dfrac{E(\Omega_1)}{E(\Omega_2)}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow E(\Omega_2)=2E(\Omega_1)$. Όμως

$$E(\Omega_1)+E(\Omega_2)=E=\frac{3}{2}\Leftrightarrow E(\Omega_1)+2E(\Omega_1)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3E(\Omega_1)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow E(\Omega_1)=\frac{1}{2}$$

$$E(\Omega_1)=\int_e^{\alpha} h(x)dx=\int_e^{\alpha}\frac{\ln x}{x}dx=\int_e^{\alpha}\ln x(\ln x)'dx=\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_e^{\alpha}=\frac{\ln^2\alpha-1}{2}$$, άρα

$\dfrac{\ln^2\alpha-1}{2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \ln^2\alpha-1=1\Leftrightarrow \ln^2\alpha=2\Leftrightarrow \ln\alpha=\pm\sqrt{2}\Leftrightarrow \alpha=e^{\sqrt{2}}$ ή

$\alpha=e^{-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{e^{\sqrt{2}}}<e$ απορρίπτεται. Άρα $\alpha=e^{\sqrt{2}}$.

26. α) Έστω $g(x)=u\Leftrightarrow 2x-2=u\Leftrightarrow x=\dfrac{u+2}{2}$. Τότε η σχέση

$f(g(x))=4x^2-8x+3$ γίνεται: $f(u)=4\left(\dfrac{u+2}{2}\right)^2-8\dfrac{u+2}{2}+3\Leftrightarrow$

$f(u)=u^2+\cancel{4u}+4-\cancel{4u}-8+3=u^2-1$, $u\in\mathbb{R}$, άρα $f(x)=x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$.

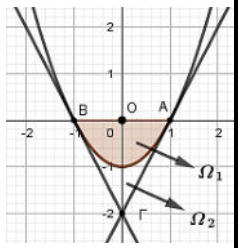
β) Αρχικά θα αναζητήσουμε σημείο $M(x_0,f(x_0))$ στο οποίο $f'(x_0)=\lambda_g=2$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x$.

Είναι $f'(x_0)=2 \Leftrightarrow 2x_0=2 \Leftrightarrow x_0=1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,0)$ είναι η ευθεία $y=2(x-1)=2x-2$, άρα είναι η g.

γ) ε: $y-f(-1)=f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y=-2x-2$

δ) Από το σύστημα των ε, C_g προκύπτει ότι $\Gamma(0,-2)$.



Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν:

$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}(AB)(\Gamma O)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$τ.μ.

Το χωρίο Ω_1 που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα x΄x.έχει εμβαδόν:

$$E(\Omega_1)=-\int_{-1}^{1} f(x)dx=-\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}\text{τ.μ}$$

Το χωρίο Ω_2 έχει εμβαδόν: $E(\Omega_2)=(AB\Gamma)-E(\Omega_1)=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$τ.μ. .

Είναι $\frac{E(\Omega_1)}{E(\Omega_2)}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{1}$.

ε) Η συνάρτηση h έχει εφαπτομένη στο $B(-1,0)$ την ε όταν $h(-1)=0$ και $h'(-1)=\lambda_\varepsilon=-2$.Έστω ότι $h(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha\neq 0$.Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+\beta x+\gamma}{x^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{x^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$ οπότε

$h(x)=\frac{x^2}{2}+\beta x+\gamma, \alpha\neq 0$ Η h είναι παραγωγίσιμη με τύπο $h'(x)=x+\beta$, τότε $h'(-1)=-2 \Leftrightarrow -1+\beta=-2 \Leftrightarrow \beta=-1$.

Είναι $h(-1)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+1+c=0 \Leftrightarrow c=-\frac{3}{2}$, οπότε $h(x)=\frac{x^2}{2}-x+\frac{3}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

27. α) Είναι $f'(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow$.

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$. $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}\geq 0 \Leftrightarrow x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και

επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.
Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=2$.

β) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\le 4\Leftrightarrow f(\alpha)+f(\beta)\le 4$ (1)

Επειδή η f έχει ελάχιστο το 2, ισχύει ότι $f(x)\ge 2$ για κάθε $x>0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=1$, άρα $f(\alpha)\ge 2$, $f(\beta)\ge 2$ και $f(\alpha)+f(\beta)\ge 2$ (1)
Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι
$f(\alpha)+f(\beta)=4\Leftrightarrow f(\alpha)=f(\beta)=2\Leftrightarrow \alpha=\beta=1$

γ) Έστω $M(x(t),y(t))$ με $y(t)=f(x(t))$ το υλικό σημείο. Είναι $x'(t)=0,5\text{cm/sec}$. Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ είναι $y'(t)=\left(f(x(t))\right)'=f'(x(t))x'(t)$. Έστω $t=t_0$ η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το Α, τότε $x(t_0)=4$, οπότε

$$y'(t_0)=f'(x(t_0))x'(t_0)=f'(4)\cdot 0,5=\frac{4-1}{2\cdot 4\sqrt{4}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{32}\text{cm/sec}$$

δ) i. Για το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ ισχύει ότι:

$$A_{f\circ g}=\left\{x\in A_g / g(x)\in A_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2>0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\ne 0\right\}=\mathbb{R}^*.$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2}}=|x|+\frac{1}{|x|}.$$

ii. Για κάθε $x>0$ είναι $\varphi(x)=x+\frac{1}{x}$, οπότε $\varphi'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$.

$$\varphi'(x)\ge 0\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x^2}\ge 0\Leftrightarrow x^2-1\ge 0\Leftrightarrow x^2\ge 1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x\ge 1.$$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $\varphi'(x)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $(0,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $\varphi'(x)>0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.
Η φ έχει τοπικό ελάχιστο το $\varphi(1)=2$.

Για κάθε $x<0$ είναι $\varphi(x)=-x-\frac{1}{x}$, οπότε $\varphi'(x)=-1+\frac{1}{x^2}=\frac{1-x^2}{x^2}$

$$\varphi'(x)\ge 0\Leftrightarrow\frac{1-x^2}{x^2}\ge 0\Leftrightarrow 1-x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\le 1\Leftrightarrow|x|\le 1\overset{x<0}{\Leftrightarrow}-x\le 1\Leftrightarrow x\ge -1.$$

Για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ είναι $\varphi'(x)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(-1,0)$ είναι

$\varphi'(x)>0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[-1,0)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η φ έχει τοπικό ελάχιστο το $\varphi(-1)=2$.

2ος τρόπος

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η φ είναι παραγωγίσιμη με

$$\varphi'(x)=\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)g'(x)=\frac{x^2-1}{\cancel{2}x^{\cancel{2}}\sqrt{x^2}}\cdot\cancel{2}x=\frac{x^2-1}{x|x|}=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2}, & x>0\\ -\dfrac{x^2-1}{x^2}, & x<0\end{cases}$$

ε) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4=\frac{49}{6}\,\tau.\mu..$$

28. α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x^3-\alpha x^2+\beta x+2\neq 0$.

Επειδή η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα x΄x , η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη.

Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-(\alpha-1)x-\alpha}{x^3-\alpha x^2+\beta x+2}=0\Leftrightarrow x^2-(\alpha-1)x-\alpha=0$ και

$x^3-\alpha x^2+\beta x+2\neq 0$, $x^2-(\alpha-1)x-\alpha=0$,

$\Delta=(\alpha-1)^2+4\alpha=\alpha^2-2\alpha+1+4\alpha=\alpha^2+2\alpha+1=(\alpha+1)^2>0$ αφού $\alpha\neq-1$

$$x^2-(\alpha-1)x-\alpha=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{\alpha-1\pm(\alpha+1)}{2}\Leftrightarrow x=\alpha\ \text{ή}\ x=-1$$

Επομένως για να είναι αδύνατη η εξίσωση $f(x)=0$ πρέπει οι ρίζες του αριθμητή να είναι ρίζες του παρονομαστή για να απορριφθούν από το πεδίο ορισμού της. Άρα έχουμε:

$$\begin{cases}\alpha^3-\alpha^3+\alpha\beta+2=0\\ -1-\alpha-\beta+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\beta+2=0\\ \alpha=1-\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta^2-\beta-2=0\\ \alpha=1-\beta\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\begin{cases}\beta=2\ \text{ Απορρίπτεται}\ \text{ή}\ \beta=-1\ \text{ Δεκτή}\\ \alpha=2\end{cases}$. Επομένως για το πεδίο ορισμού της f

πρέπει: $x^3-2x^2-x+2\neq 0\overset{\text{Σχήμα Horner με }\rho=-1}{\Leftrightarrow}(x+1)\left(x^2-3x+2\right)\neq 0\Leftrightarrow$

$(x+1)(x-1)(x-2)\neq 0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\{-1,1,2\}$.

Άρα $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-x+2}$, $x\in\mathbb{R}-\{-1,1,2\}$

β) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-x+2}=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-3x+2)}=\dfrac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+1)}(x-1)\cancel{(x-2)}}=\dfrac{1}{x-1}$,

$x\in\mathbb{R}-\{-1,1,2\}$. Η $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ ορίζεται αν $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$ άρα έχει πεδίο ορισμού το $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$. Οι f,g δεν έχουν ίδια πεδία ορισμού επομένως δεν είναι ίσες. Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1,1,2\}$ είναι $f(x)=g(x)$ άρα το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο f = g είναι το $x\in\mathbb{R}-\{-1,1,2\}$.

γ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ με παράγωγο

$g'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0$ άρα $g\searrow(-\infty,1)$ και $g\searrow(1,+\infty)$.

Η g συνεχής και $g\searrow(-\infty,1)$ άρα: $g((-\infty,1))=\left(\lim\limits_{x\to 1^-}g(x),\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right)=(-\infty,0)$

Η g συνεχής και $g\searrow(1,+\infty)$ άρα: $g((1,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}g(x),\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)\right)=(0,+\infty)$

Άρα αν $x_1<1<x_2$ τότε $g(x_1)<g(x_2)$.

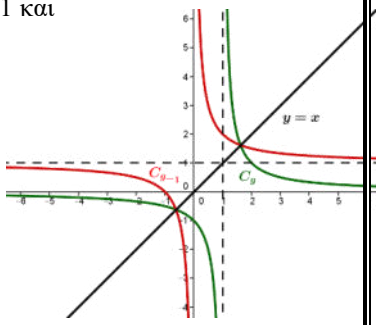
Άρα για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}-\{1\}$ με $x_1<x_2$ δεν είναι πάντα $g(x_1)>g(x_2)$ και επομένως η g δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

δ) Θα δείξουμε αρχικά ότι η g αντιστρέφεται.

1ος τρόπος: Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}-\{1\}$ με $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow\dfrac{1}{x_1-1}=\dfrac{1}{x_2-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2$ άρα η g είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

2ος τρόπος: Είναι $g((-\infty,1))\cap g((1,+\infty))=\varnothing$ άρα η εξίσωση $g(x)=y$ έχει μοναδική ρίζα ως προς x, επομένως η g είναι 1-1 και αντιστρέφεται.



Έστω $g(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{1}{x-1}=y$ (1). Είναι για $x<1\Leftrightarrow g(x)<0$ και για $x>1\Leftrightarrow g(x)>0$ άρα $g(x)\neq 0$. Άρα για $y\neq 0$ είναι

$(1)\Leftrightarrow yx-y=1\Leftrightarrow yx=y+1\overset{y\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$x=\dfrac{y+1}{y}\Leftrightarrow g^{-1}(y)=\dfrac{y+1}{y}$, $y\neq 0$

Η g είναι η καμπύλη $y=\dfrac{1}{x}$ μετατοπισμένη κατά μία μονάδα προς τα δεξιά. Η αντίστροφη της g είναι συμμετρική ως προς την ευθεία y=x.

ε) i) Ισχύει ότι $g(x_0)=\lambda x_0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_0-1}=\lambda x_0 \Leftrightarrow \lambda x_0^{\,2}-\lambda x_0=1\ (A)$. Ισχύει ότι

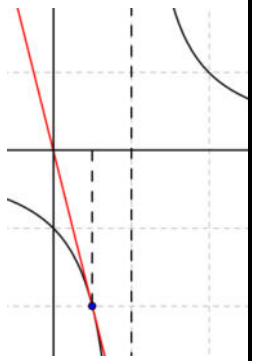
$$g'(x_0)=\alpha \Leftrightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2}=\lambda \Leftrightarrow -\lambda\left(x_0^{\,2}-2x_0+1\right)=1 \Leftrightarrow -\lambda x_0^{\,2}+2\lambda x_0-\lambda=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda x_0^{\,2}+\lambda x_0+\lambda x_0-\lambda=1 \overset{(A)}{\Leftrightarrow} -1+\lambda x_0-\lambda=1 \overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} x_0=\frac{\lambda+2}{\lambda}\ (B)$$

$$(A)\Leftrightarrow \cancel{\lambda}\,\frac{\lambda^2+4\lambda+4}{\cancel{\lambda^2}}-\frac{\lambda^2+2\lambda}{\lambda}=1 \Leftrightarrow \frac{\cancel{\lambda^2}+4\lambda+4\cancel{-\lambda^2}-2\lambda-\lambda}{\lambda}=0 \Leftrightarrow \lambda=-4$$

$$(B)\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$$

ii) Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ με παράγωγο $g''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}$



Είναι $g''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}<0$ για κάθε $x<1$ άρα g κοίλη στο $(-\infty,1)$.

Η $(\varepsilon): y=-4x$ τέμνει τους άξονες στην αρχή των αξόνων. Για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ η C_g βρίσκεται κάτω από την (ε) εκτός του σημείου επαφής, δηλαδή $g(x)\le -4x \Leftrightarrow g(x)+4x\le 0$

$$E=\int_0^{\frac{1}{2}}\left|g(x)+4x\right|dx=-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(g(x)+4x\right)dx=-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x-1}+4x\right)dx=$$

$$-\left[\ln|x-1|+2x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\ =-\left[\ln(1-x)+2x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\ln 2-\frac{1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

29. α) $f(x)=x^3-2x^2+x+\dfrac{1}{12}-\int_0^1 f(x)dx$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Θέτουμε $I=\int_0^1 f(x)dx$ τότε $f(x)=x^3-2x^2+x+\dfrac{1}{12}-I$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Είναι $I=\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow I=\int_0^1\left(x^3-2x^2+x+\dfrac{1}{12}-I\right)dx \Leftrightarrow$

$$I=\int_0^1\left(x^3-2x^2+x+\frac{1}{12}\right)dx-\int_0^1 I\,dx \Leftrightarrow I=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{12}x\right]_0^1-I(1-0)\Leftrightarrow$$

$$I=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{12}x\right]_0^1-I \Leftrightarrow 2I=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\Leftrightarrow$$

$$2I=\frac{3-8+6+1}{12}\Leftrightarrow I=\frac{1}{12}.$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=x^3-2x^2+x=x\left(x^2-2x+1\right)=x(x-1)^2$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=3x^2-4x+1$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0 \quad,\ \Delta=4\ ,\ x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{6}=\begin{cases}1\\ \frac{1}{3}\end{cases}$$

Είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x<\frac{1}{3}$ άρα $f\nearrow\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$, $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{1}{3},1\right)$ άρα $f\searrow\left[\frac{1}{3},1\right]$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x>1$ άρα $f\nearrow[1,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=\frac{1}{3}$ το $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}$ και τοπικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=0$.

γ) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f''(x)=6x-4$

Είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x<\frac{2}{3}$ άρα f κοίλη στο $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x>\frac{2}{3}$ άρα η f κυρτή στο $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$. Η f παρουσιάζει καμπή για $x=\frac{2}{3}$ το $\left(\frac{2}{3},f\left(\frac{2}{3}\right)\right)\equiv\left(\frac{2}{3},\frac{2}{27}\right)$.

δ) $3f(x)-3f\left(\frac{2}{3}\right)=3f'\left(\frac{2}{3}\right)x-2f'\left(\frac{2}{3}\right)\Leftrightarrow f(x)=f'\left(\frac{2}{3}\right)x-\frac{2}{3}f'\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής είναι η

$$y=f'\left(\frac{2}{3}\right)x-\frac{2}{3}f'\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right).$$

Επειδή f κοίλη στο $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]$ είναι $f(x)\le f'\left(\frac{2}{3}\right)x-\frac{2}{3}f'\left(\frac{2}{3}\right)+-f\left(\frac{2}{3}\right)$ με την

ισότητα να ισχύει μόνον για $x=\frac{2}{3}$. Επειδή f κυρτή στο $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$ είναι

$f(x)\geq f'\left(\frac{2}{3}\right)x-\frac{2}{3}f'\left(\frac{2}{3}\right)+-f\left(\frac{2}{3}\right)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=\frac{2}{3}$.

Άρα $f(x)=f'\left(\frac{2}{3}\right)x-\frac{2}{3}f'\left(\frac{2}{3}\right)+-f\left(\frac{2}{3}\right)$ μόνον για $x=\frac{2}{3}$.

ε) i) Για το πεδίο ορισμού της h πρέπει: $\begin{cases}x\in D_f\\ x\in D_g\\ f(x)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x\in\mathbb{R}\\ x(x-1)^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 1\end{cases}$

Άρα $D_h=\mathbb{R}-\{0,1\}$ και $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2+2x-2}{x(x-1)^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$

ii) $h(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{(x-1)^2}\Leftrightarrow\frac{x^2+2x-2}{x(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+\Gamma x}{x(x-1)^2}\Leftrightarrow$

$\frac{x^2+2x-2}{x(x-1)^2}=\frac{Ax^2-2Ax+A+Bx^2-Bx+\Gamma x}{x(x-1)^2}\Leftrightarrow$

$\frac{x^2+2x-2}{x(x-1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-B+\Gamma)x+A}{x(x-1)^2}$

Πρέπει $\begin{cases}A+B=1\\ -2A-B+\Gamma=2\\ A=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=3\\ \Gamma=1\\ A=-2\end{cases}$. Άρα $h(x)=-\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$

iii) $\int_2^3 h(x)dx=\int_2^3\left(-\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=\left[-2\ln|x|+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}\right]_2^3=$

$=\left[-2\ln x+3\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}\right]_2^3=-2\ln 3+3\ln 2-\frac{1}{2}+2\ln 2+1=-2\ln 3+5\ln 2+\frac{1}{2}$

30. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x-4^x+\frac{14}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3^x-4^x}{x}+\frac{14}{x^2}\right)=-\infty$ γιατί

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x-4^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4^x\left(\left(\frac{3}{4}\right)^x-1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{4^x}{x}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^x-1\right)\right]=+\infty(0-1)=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4^x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4^x\ln 4}{1}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{14}{x^2}\overset{x^2=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{14}{u}=0$

Άρα η f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(3^x-4^x+\dfrac{14}{x}\right)=1-1+(+\infty)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{14}{x}\overset{x=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{14}{u}=+\infty$

Άρα η $x=0$ δηλαδή ο άξονας y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Είναι $f(0)=0$ άρα το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με την ασύμπτωτή της είναι το κέντρο των αξόνων.

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3^x-4^x+\frac{14}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{3^x-4^x}{x}+\dfrac{14}{x^2}\right)=+\infty$ γιατί

- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3^x-4^x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3^x\ln3-4^x\ln4}{1}=\ln3-\ln4=\ln\dfrac{3}{4}$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{14}{x^2}\overset{x^2=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{14}{u}=+\infty$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 επομένως δεν δέχεται εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων.

2ος τρόπος: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(3^x-4^x+\dfrac{14}{x}\right)=+\infty$ άρα η f δεν είναι συνεχής στο μηδέν επομένως δεν είναι και παραγωγίσιμη.

β) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο: $f'(x)=3^x\ln3-4^x\ln4-\dfrac{14}{x^2}<0$ γιατί

- $1<3<4\Rightarrow0<3^x<4^x$ και $1<3<4\Leftrightarrow0<\ln3<\ln4$ επομένως $3^x\ln3<4^x\ln4$
- $x^2>0$ για κάθε $x>0$ άρα $-\dfrac{14}{x^2}<0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και συνεχής άρα:

$f((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=\mathbb{R}$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(3^x - 4^x + \frac{14}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[4^x\left(\left(\frac{3}{4}\right)^x - 1\right) + \frac{14}{x}\right] = -\infty$$

Για να είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της πρέπει για κάθε $x_1, x_2 \geq 0$ με $x_1 < x_2$ να ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Για $x_1 = 0$ υπάρχει $x_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$x_1 = 0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow 0 < f(x_2)$ αφού η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος: Παρατηρούμε ότι $f(1) = 3 - 4 + 14 = 13 > 0$ άρα

$0 < 1 \Rightarrow f(0) < f(1)$.

γ) Είναι $f(2) = 0$ και $f(0) = 0$.

Για $0 < x < 2 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x) > f(2) = 0$ και για $x > 2 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(2) = 0$.

δ) Είναι $g(x) = f(x) - 3^x + 4^x = \frac{14}{x}$, $x > 0$

Στο $[1,2]$ είναι $g(x) > 0$ (προφανώς και στο $[1,\lambda]$ αφού $1 < \lambda < 2$) άρα το εμβαδόν που διχοτομείται είναι:

$$E_1 = \int_1^2 |g(x)|dx = \int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 \frac{14}{x}dx = \left[14\ln|x|\right]_1^2 = \left[14\ln x\right]_1^2 = 14\ln 2 \text{ τ.μ.}$$

Άρα ισχύει $\int_1^\lambda g(x)dx = 7\ln 2 \Leftrightarrow \left[14\ln x\right]_1^\lambda = 7\ln 2 \Leftrightarrow 14\ln\lambda = 7\ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{2}$.

31. α) Επειδή η ευθεία ε εφάπτεται της C_f στο Α ισχύει ότι $f'(1) = \lambda_\varepsilon = 1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = \frac{\frac{\lambda}{\lambda x}\cdot x - \ln(\lambda x)}{x^2} = \frac{1-\ln(\lambda x)}{x^2}$,

οπότε $f'(1) = 1 \Leftrightarrow 1 - \ln\lambda = 1 \Leftrightarrow \ln\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

β) Είναι $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$.

Για κάθε $x \in (0,e)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (e,+\infty)$ είναι $f'(x) < 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$. Έχει ολικό μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e}$.

γ) Είναι $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x}\right) = -\infty(+\infty) = -\infty$, οπότε η ευθεία x = 0, δηλαδή ο άξονας y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ οπότε η ευθεία $y = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f. Επειδή η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

δ) $\alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^{\alpha} \Leftrightarrow \ln\alpha^{\alpha+1} > \ln(\alpha+1)^{\alpha} \Leftrightarrow (\alpha+1)\ln\alpha > \alpha\ln(\alpha+1) \Leftrightarrow$

$\dfrac{\ln\alpha}{\alpha} > \dfrac{\ln(\alpha+1)}{\alpha+1} \Leftrightarrow f(\alpha) > f(\alpha+1) \overset{\searrow(e,+\infty)}{\Leftrightarrow} \alpha < \alpha+1$ ισχύει

ε) $x^e \le \alpha^x \Leftrightarrow \ln x^e \le \ln\alpha^x \Leftrightarrow e\ln x \le x\ln\alpha \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} \le \dfrac{\ln\alpha}{e} \Leftrightarrow f(x) \le \dfrac{\ln\alpha}{e}$.

Είναι $f(x) \le \dfrac{1}{e}$, για κάθε $x > 0$, άρα πρέπει $\dfrac{1}{e} \le \dfrac{\ln\alpha}{e} \Leftrightarrow \ln\alpha \ge 1 \Leftrightarrow \alpha \ge e$.

στ) $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \dfrac{\ln x}{x}dx = \left[\dfrac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \dfrac{1}{2}$

32. α) Είναι $f(x) \ge 0$ οπότε για $\lambda > 1$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$E(\lambda) = \int_1^\lambda f(x)dx = \int_1^\lambda \dfrac{1}{x^2}dx = \left[-\dfrac{1}{x}\right]_1^\lambda = -\dfrac{1}{\lambda} + 1$ και για $0 < \lambda < 1$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx = \int_\lambda^1 \dfrac{1}{x^2}dx = \left[-\dfrac{1}{x}\right]_\lambda^1 = -1 + \dfrac{1}{\lambda}$.

β) Για $\lambda > 1$: $E(\lambda) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\lambda} + 1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -2 + 2\lambda = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$ δεκτή.

Για $0 < \lambda < 1$: $E(\lambda) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -1 + \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -2\lambda + 2 = \lambda \Leftrightarrow -3\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2}{3}$ δεκτή.

γ) $\lim\limits_{\lambda\to 0} E(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to 0^+}\left(-1 + \dfrac{1}{\lambda}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) = 1$

δ)i) Για $x \ne 0$: $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} + 1 = x^2 + 1$.

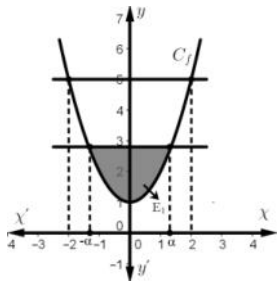
Είναι $g(x) \le 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 \le 5 \Leftrightarrow x^2 \le 4 \Leftrightarrow |x| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$.

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2+1) = 1 = g(0)$. Η g συνεχής στο $[-2,0)\cup(0,2]$ σαν πολυωνυμική. Άρα η g είναι συνεχής στο $[-2,2]$.

Το εμβαδόν που περικλείεται από την C_g και την ευθεία $y = 5$, είναι:

$E = \int_{-2}^2 (5 - x^2 - 1)dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2)dx =$

$$\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=\frac{32}{3}\text{ τ.μ.}$$



ii) Για τα σημεία τομής της ευθείας $y=\alpha^2+1$ με τη C_g, έχουμε:

$g(x)=\alpha^2+1\Leftrightarrow x^2+1=\alpha^2+1\Leftrightarrow x=\pm\alpha$.

Το χωρίο που περικλείεται από την ευθεία $y=\alpha^2+1$ και την C_f, έχει εμβαδόν:

$$E_1=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\alpha^2+1-f(x)\right)dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\alpha^2+1-x^2-1\right)dx=\left[\alpha^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\alpha}^{\alpha}=\frac{4\alpha^3}{3}.$$

Πρέπει $E_1=\frac{1}{2}E\Leftrightarrow\frac{4\alpha^3}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}\Leftrightarrow 4\alpha^3=16\Leftrightarrow\alpha^3=4\Leftrightarrow\alpha=\sqrt[3]{4}$.

33. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2\frac{\left(x^2-x+1\right)'}{2\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{1}=f'(1)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^2-x+1}-1-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+x}-1\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{x^2-x+1-x^2}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}-1\right)=-2$$

β) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x^2-x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-1}{x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(2\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}}=2$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=-2$, οπότε η ευθεία $y=2x-2$ |είναι

πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\sqrt{x^2-x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-1}{x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(-2\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}}=-2$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2\sqrt{x^2-x+1}-1+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)-1\right)=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2\dfrac{\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}-x}-1\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2\dfrac{\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}-1\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\cancel{x^2}-x+1-\cancel{x^2}}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\cancel{x}\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)}-1\right)=0$, οπότε

η ευθεία $y=-2x$ |είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επειδή η f έχει πλάγιες ασύμπτωτες, δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$, είναι $\lambda=f'(0)=-1$. Όμως $\lambda=\varepsilon\varphi\omega$, άρα $\varepsilon\varphi\omega=-1\Leftrightarrow\omega=135^{\circ}$.

δ) Είναι $f'(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} \Leftrightarrow f'(x)\sqrt{x^2-x+1}=2x-1$ (1) και

$f(x)=2\sqrt{x^2-x+1}-1 \Leftrightarrow f(x)+1=2\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{f(x)+1}{2}$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι

$f'(x)\dfrac{f(x)+1}{2}=2x-1 \Leftrightarrow f'(x)\big(f(x)+1\big)=4x-2$, άρα

$\Big[f'(x)\big(f(x)+1\big)\Big]'=(4x-2)' \Leftrightarrow f''(x)\big(f(x)+1\big)+f'(x)f'(x)=4 \Leftrightarrow$

$f''(x)\big(f(x)+1\big)+\big(f'(x)\big)^2=4$

ε) $f'(x)\geq 0 \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\geq 0 \Leftrightarrow 2x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{1}{2}$.

Για κάθε $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $1\leq x\leq 2$ είναι

$f(1)\leq f(x)\leq f(2) \Leftrightarrow 1\leq f(x)\leq 2\sqrt{3}-1$ και επειδή οι ισότητες ισχύουν μόνο για x = 1 και x = 2 αντίστοιχα, είναι $\int_1^2 1dx<\int_1^2 f(x)dx<\int_1^2\left(2\sqrt{3}-1\right)dx \Leftrightarrow$

$1<\int_1^2 f(x)dx<2\sqrt{3}-1$

34. Α. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Για να είναι η f συνεχής, πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0=0$, άρα

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^x+\lambda\right)=1+\lambda=f(0)$, άρα $1+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$.

Β. α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x}{x}=-\infty$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη

στο $x_0 = 0$.

β) Για $x < 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.

Για $x > 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \ln x + 1$.

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left(0, \frac{1}{e}\right]$ και για κάθε $x > \frac{1}{e}$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(0) = 0$ και τοπικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$

γ) $\alpha^\alpha + \beta^\beta \leq \frac{2}{\sqrt[e]{e}} \Leftrightarrow e^{\ln\alpha^\alpha} + e^{\ln\beta^\beta} \leq \frac{2}{\sqrt[e]{e}} \Leftrightarrow e^{\alpha\ln\alpha} + e^{\beta\ln\beta} \leq \frac{2}{\sqrt[e]{e}} \Leftrightarrow e^{f(\alpha)} + e^{f(\beta)} \leq \frac{2}{\sqrt[e]{e}}$

Στο $(0, +\infty)$ η f έχει ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ άρα $f(x) \geq -\frac{1}{e}$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{1}{e}$, οπότε

$f(\alpha) \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha\ln\alpha \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln\alpha^\alpha \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha^\alpha \geq e^{-\frac{1}{e}} \Leftrightarrow \alpha^\alpha \geq \frac{1}{\sqrt[e]{e}}$ (1) και

$f(\beta) \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow \beta\ln\beta \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln\beta^\beta \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow \beta^\beta \geq e^{-\frac{1}{e}} \Leftrightarrow \beta^\beta \geq \frac{1}{\sqrt[e]{e}}$ (2)

Από $(1)+(2) \Rightarrow$ $\alpha^\alpha + \beta^\beta \geq \frac{2}{\sqrt[e]{e}}$. Άρα η σχέση $\alpha^\alpha + \beta^\beta \leq \frac{2}{\sqrt[e]{e}}$ ισχύει μόνο όταν

$\alpha^\alpha = \frac{1}{\sqrt[e]{e}} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{e}$ και $\beta^\beta = \frac{1}{\sqrt[e]{e}} \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{e}$.

δ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega) = \int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e x\ln x\,dx = \int_1^e \ln x\left(\frac{x^2}{2}\right)'dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \left[\ln x\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x}^2}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}\,\tau.\mu.$$

Επίπεδο δυσκολίας Γ Θέματος

Επίπεδο Γ1

35. α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)-f(2x)+xf(0)}{x}=3\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(3x)-f(2x)}{x}+\dfrac{xf(0)}{x}\right)=3\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(3x)-f(0)-f(2x)+f(0)}{x}+f(0)\right)=3\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(3x)-f(0)}{x}-\dfrac{f(2x)-f(0)}{x}+f(0)\right)=3\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(3\dfrac{f(3x)-f(0)}{3x}-2\dfrac{f(2x)-f(0)}{2x}+f(0)\right)=3$ (1). Είναι

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)-f(0)}{x}\underset{x\to 0\Leftrightarrow u\to 0}{\overset{3x=u\Leftrightarrow x=\frac{u}{3}}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)-f(0)}{\frac{u}{3}}=\lim\limits_{u\to 0}3\dfrac{f(u)-f(0)}{u}=3f'(0)$ και

όμοια $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(0)}{x}=2f'(0)$, οπότε η (1) γίνεται

$3f'(0)-2f'(0)+f(0)=3\Leftrightarrow f'(0)+f(0)=3$

β) $xf''(x)+f'(x)=2xe^x+2e^x-4x\Leftrightarrow$

$\left(xf'(x)\right)'=\left(2xe^x-2x^2\right)'\Leftrightarrow xf'(x)=2xe^x-2x^2+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ είναι $0\cdot f'(0)=2\cdot 0\cdot e^0-2\cdot 0^2+c\Leftrightarrow c=0$, άρα $xf'(x)=2xe^x-2x^2$ και για $x\neq 0$ είναι $f'(x)=2e^x-2x$. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η f' είναι συνεχής στο $x=0$, οπότε

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2e^x-2x)=2$ και $2+f(0)=3\Leftrightarrow f(0)=1$.

2ος τρόπος: Από τη σχέση $xf''(x)+f'(x)=2xe^x+2e^x-4x$ έχουμε

$0+f'(0)=0+2-0\Leftrightarrow f'(0)=2$ και $2+f(0)=3\Leftrightarrow f(0)=1$

γ) Για κάθε $x<0$ είναι

$f'(x)=2e^x-2x=\left(2e^x-x^2\right)'\Leftrightarrow f(x)=2e^x-x^2+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$ και για

$x>0$ είναι $f'(x)=2e^x-2x=\left(2e^x-x^2\right)'\Leftrightarrow f(x)=2e^x-x^2+c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $x=0$, οπότε $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\Leftrightarrow$

$1=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2e^x-x^2+c_1\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(2e^x-x^2+c_2\right)\Leftrightarrow$

$1=2+c_1=2+c_2\Leftrightarrow c_1=c_2=-1$. Άρα

$f(x)=\begin{cases}2e^x-x^2-1, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}=2e^x-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$.

δ) Είναι $f''(x)=2e^x-2$. Για κάθε $x<0$ είναι $f''(x)<0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)>0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $[o,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f' έχει ελάχιστο το $f'(0)=2$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)>2$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος

$f'(x)=2e^x-2x=2\left(e^x-x\right)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(από τη σχέση $\ln x\le x-1<x$ έχουμε $\ln e^x<e^x\Leftrightarrow e^x>x$)

ε) $f(x)\ge(2e-2-\lambda)x+\lambda\Leftrightarrow f(x)-(2e-2-\lambda)x-\lambda\ge 0$ (2)

Έστω $h(x)=f(x)-(2e-2-\lambda)x-\lambda,\ x\ge 0$.

Παρατηρούμε ότι $h(1)=f(1)-(2e-2-\lambda)-\lambda=2e-2-2e+2-\lambda+\lambda=0$,

Η (2) γίνεται $h(x)\ge h(1)$, οπότε η h έχει ελάχιστο στο x = 1 το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=f'(x)-(2e-2-\lambda)$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι

$h'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)-2e+2+\lambda=0\Leftrightarrow 2e-2-2e+2+\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=0$

στ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-x^2-1\right)=0-\infty-1=-\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2e^x-x^2-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(2-\frac{x^2}{e^x}-e^{-x}\right)\right]=+\infty(2-0-0)=+\infty$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, άρα $A_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

Έστω $I=\int_1^{2e-2}f^{-1}(x)dx$, θέτω $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$. Για $x=1$ είναι $f(u)=1\Leftrightarrow\Leftrightarrow f(u)=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}u=0$ και για $x=2e-2$ είναι $f(u)=2e-2\Leftrightarrow f(u)=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}u=1$. Άρα

$$I=\int_1^{2e-2} f^{-1}(x)dx=\int_0^1 uf'(u)du=\int_0^1 u\left(2e^u-2u\right)du=2\int_0^1\left(ue^u-u^2\right)du \Leftrightarrow$$

$$I=2\int_0^1 ue^u\,du-2\int_0^1 u^2\,du=2\int_0^1 u\left(e^u\right)'du+2\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$I=2\left[ue^u\right]_0^1-2\int_0^1 e^u\,du-2\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$I=2\left[ue^u\right]_0^1-2\left[e^u\right]_0^1-2\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1=2e-2e+2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\,\tau.\mu.$$

36. α) Έστω ότι $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$, $\alpha_\nu\neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\alpha_\nu x^{\nu-2}.$$

Αν $\nu>2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\nu-2}=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=\begin{cases}+\infty \text{ αν } \alpha_\nu>0\\ -\infty \text{ αν } \alpha_\nu<0\end{cases}$ που απορρίπτεται.

Αν $\nu=0$ ή 1 τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0\neq 1$ απορρίπτεται. Άρα ν = 2, οπότε

$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=1\Leftrightarrow\alpha=1$

Έστω $\dfrac{f(x)}{x-1}=g(x)$, $x\neq 1$ με $\lim\limits_{x\to1}g(x)=-1$. Τότε

$f(x)=g(x)(x-1)\Leftrightarrow x^2+\beta x+\gamma=g(x)(x-1)\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+\beta x+\gamma\right)=\lim\limits_{x\to1}g(x)(x-1)\Leftrightarrow 1+\beta+\gamma=0\Leftrightarrow\gamma=-\beta-1$. Τότε

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+\beta x-\beta-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)+\beta(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1+\beta)}{\cancel{x-1}}=2+\beta.$$

Είναι $2+\beta=-1\Leftrightarrow\beta=-3$ και $\gamma=-(-3)-1=2$, οπότε

$f(x)=x^2-3x+2$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Έστω $N(x,f(x))$ σημείο της C_f.

Η απόσταση του Ν από την ευθεία ε: $y=-x\Leftrightarrow x+y=0$ είναι

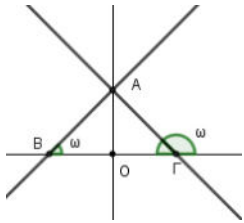
$$d(N,\varepsilon)=\frac{|x+f(x)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|x+x^2-3x+2|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|x^2-2x+2|$$

Το τριώνυμο x^2-2x+2 έχει $\Delta=-4<0$ άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$x^2-2x+2>0$, οπότε $d(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+2\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Η d είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $d'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(2x-2)$.

Για κάθε $x<1$ είναι $d'(x)<0$ και επειδή η d είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>1$ είναι $d'(x)>0$ και επειδή η d είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη για $x=1$, τότε $N(1,0)$.

γ) Έστω $K(x_0,f(x_0))$.



Επειδή το τρίγωνο που σχηματίζει η εφαπτομένη στο K με τους άξονες είναι ορθογώνιο, όταν θα είναι και ισοσκελές, οι οξείες γωνίες του θα είναι 45°. Τότε η γωνία κλίσης της εφαπτομένης θα είναι 45° ή 135°.

Άρα $\lambda=f'(x_0)=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$ ή $\lambda=f'(x_0)=\varepsilon\varphi 135^\circ=-1$

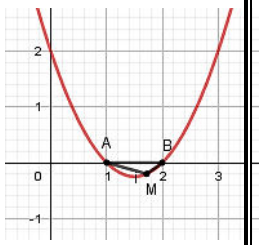
Είναι $f'(x)=2x-3$, άρα

$f'(x_0)=1\Leftrightarrow 2x_0-3=1\Leftrightarrow 2x_0=4\Leftrightarrow x_0=2$ ή

$f'(x_0)=-1\Leftrightarrow 2x_0-3=-1\Leftrightarrow 2x_0=2\Leftrightarrow x_0=1$. Οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι οι ευθείες $\varepsilon_1: y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=x-2$ και

$\varepsilon_2: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=-x+1$.

δ) Έστω M(x,f(x)) σημείο της C_f με $1<x<2$.



Το τρίγωνο MAB έχει εμβαδό

$E=\frac{1}{2}(AB)d(M,x'x)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot|f(x)|=\frac{1}{2}\left(-x^2+3x-2\right)$.

Έστω $E(x)=\frac{1}{2}\left(-x^2+3x-2\right)$, $x\in(1,2)$. Είναι

$E'(x)=\frac{1}{2}(-2x+3)$

$E'(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{1}{2}(-2x+3)\geq 0\Leftrightarrow -2x+3\geq 0\Leftrightarrow x\leq\frac{3}{2}$.

Για κάθε $x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ είναι $E'(x)>0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο $\left(1,\frac{3}{2}\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in\left(\frac{3}{2},2\right)$ είναι

$E'(x)<0$

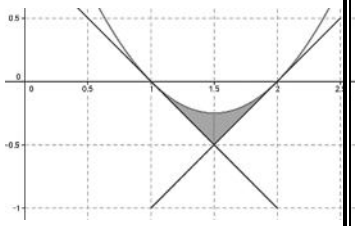
και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $\left[\frac{3}{2},2\right)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Το εμβαδόν Ε γίνεται μέγιστο για $x=\frac{3}{2}$, τότε

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\frac{3}{2}+2=-\frac{1}{4}$, άρα $M\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

ε) Επειδή το εμβαδόν περικλείεται από 3 συναρτήσεις χρειάζεται σχήμα.

Η f είναι μία παραβολή με κορυφή το $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ και ρίζες το 1 και το 2 .

Είναι $f''(x)=2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Οι δύο ευθείες τέμνονται στο $M\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :



$$E=\int_1^{\frac{3}{2}}\left|f(x)+x-1\right|dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left|f(x)-x+2\right|dx=$$

$$=\int_1^{\frac{3}{2}}\left(f(x)+x-1\right)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(f(x)-x+2\right)dx=$$

$$=\int_1^{\frac{3}{2}}\left(x^2-2x+1\right)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(x^2-4x+4\right)dx=\int_1^{\frac{3}{2}}(x-1)^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}(x-2)^2dx=$$

$$=\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{\frac{3}{2}}^{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}\ \text{τετραγωνικές μονάδες}$$

37. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$με

$$f'(x)=-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}-\sqrt{3}=-\varepsilon\varphi x-\sqrt{3}\ .$$

$$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow -\varepsilon\varphi x-\sqrt{3}\geq 0\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x\leq -\sqrt{3}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x\leq \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right)\overset{\varepsilon\varphi x\uparrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} x\leq -\frac{\pi}{3}\ .$$

Η f συνεχής στο πεδίο ορισμού της σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επομένως $f'(x)>0$ στο $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$, $f'(x)<0$ στο $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ άρα παρουσιάζει μέγιστο στο $-\frac{\pi}{3}$ το

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\ln\left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}=\ln\left(\text{συν}\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}=-\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\left(\ln(\text{συν}x)-\sqrt{3}\cdot x\right)=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\ln(\text{συν}x)\underset{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}^+\\u\to0^+}}{\overset{\text{συν}x=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\ln(\text{συν}x)-\sqrt{3}\cdot x\right)=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln(\text{συν}x)\underset{\substack{x\to\frac{\pi}{2}^-\\u\to0^+}}{\overset{\text{συν}x=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$

Έστω $A_1=\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$ και $A_2=\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$.Λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε :

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(x),\lim_{x\to-\frac{\pi}{3}}f(x)\right)=\left(-\infty,f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(-\infty,-\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x),f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(-\infty,-\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right]=\left(-\infty,-\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right].$$

Επομένως $f\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)=f(A_1)\cup f(A_2)=\left(-\infty,-\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right]$.

γ) Έχουμε : $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}>\frac{\pi}{2}>1=\ln e>\ln 2$ οπότε $-\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}>0$.

Για να τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x σε δύο ακριβώς σημεία πρέπει η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει δύο ακριβώς ρίζες. Το 0 ανήκει στα $f(A_1),f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1\in A_1,x_2\in A_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)=0$. Τα x_1,x_2 μοναδικά ,λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα A_1,A_2.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$k(x)=f(x)-x^2+\sqrt{3}\cdot x=\ln(\text{συν}(x))\cancel{-\sqrt{3}\cdot x}-x^2+\cancel{\sqrt{3}x}\Leftrightarrow$

$k(x)=\ln(\text{συν}(x))-x^2$. Η k είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,παραγωγίσιμη στο

$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$. Είναι $k\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\ln\left(\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)-\frac{\pi^2}{16}=\ln\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi^2}{16}=k\left(\frac{\pi}{4}\right)$

οπότε

ισχύει το θεώρημα Rolle οπότε υπάρχει $x_0\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιος ώστε

$k'(x_0)=0\Leftrightarrow -\varepsilon\varphi x_0-2x_0=0\Leftrightarrow -\varepsilon\varphi x_0=2x_0\Leftrightarrow$

$-\varepsilon\varphi x_0-\sqrt{3}=2x_0-\sqrt{3}\Leftrightarrow f'(x_0)=2x_0-\sqrt{3}$.

ε) Για την συνάρτηση f ισχύει το ΘΜΤ στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε :

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow -\varepsilon\varphi\xi-\sqrt{3}=\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu\beta)-\sqrt{3}\cdot\beta-\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)+\sqrt{3}\cdot\alpha}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow$$

$$-\varepsilon\varphi\xi-\cancel{\sqrt{3}}=\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu\beta)-\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)}{\beta-\alpha}-\cancel{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\xi=\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)-\ln(\sigma\upsilon\nu\beta)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow$$

$\varepsilon\varphi\xi=\dfrac{\ln\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta}}{\beta-\alpha}$.Όμως $\alpha<\xi<\beta \overset{\varepsilon\varphi\nearrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi\alpha<\varepsilon\varphi\xi<\varepsilon\varphi\beta\Leftrightarrow$

$$\varepsilon\varphi\alpha<\frac{\ln\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta}}{\beta-\alpha}<\varepsilon\varphi\beta\Leftrightarrow(\beta-\alpha)\varepsilon\varphi\alpha<\ln\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta}<(\beta-\alpha)\varepsilon\varphi\beta$$

στ) Θέτω $\sigma\upsilon\nu x=u$ τότε $-\eta\mu x\,dx=du$ και για $x=0$ είναι $u=1$ και για $x=\frac{\pi}{4}$ είναι $u=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Άρα $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x\,dx=-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\ln u\,du=-\left[u\ln u\right]_1^{\sqrt{2}/2}+\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}du=$

$$=-\left[u\ln u\right]_1^{\sqrt{2}/2}+\left[u\right]_1^{\sqrt{2}/2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln 2+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

Άρα $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\eta\mu x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\ln(\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x-\sqrt{3}x\eta\mu x\right)dx=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x\,dx-\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\,\eta\mu x\,dx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln 2+\frac{\sqrt{2}}{2}-1-\sqrt{3}\left(\left[-x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi/4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sigma\upsilon\nu x\,dx\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln 2+\frac{\sqrt{2}}{2}-1+\sqrt{3}\left[x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi/4}-\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sigma\upsilon\nu x\,dx=$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \sqrt{3}\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}\left[\eta\mu x\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \sqrt{3}\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\ln 2}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\pi\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2\ln 2 + 4 - 4\sqrt{2} + \pi\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\,\frac{\ln 4 - 4\sqrt{2} + \pi\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 4}{4}.$$

38. α) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α. Για να ταυτίζεται με την (δ) πρέπει

$$\lambda_{(\varepsilon)} = \lambda_{(\delta)} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{\sqrt[3]{\xi} + \sqrt[3]{\xi}}{\xi + 5\xi} \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}} = \frac{2\sqrt[3]{\xi}}{6\xi} \Leftrightarrow 6\xi = 6\sqrt[3]{\xi^3} \Leftrightarrow \xi = \xi$$

ισχύει.

β) i) $$\lim_{x\to 8}\frac{f(x)-2}{\sqrt{8x}-8} = \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{8x}-8} = \lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}^3 - 2^3\right)\left(\sqrt{8x}+8\right)}{\left(\sqrt{8x}^2 - 64\right)\left(\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4\right)} =$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)\left(\sqrt{8x}+8\right)}{(8x-64)\left(\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4\right)} = \lim_{x\to 8}\frac{(x-8)\left(\sqrt{8x}+8\right)}{8(x-8)\left(\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4\right)} =$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{8x}+8}{8\left(\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4\right)} = \frac{16}{96} = \frac{1}{6}.$$

ii) $$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(f(x+2)-f(x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}\right) \underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to 0^+}}{\overset{u=\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\ln u = -\infty$$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x+2}^3 - \sqrt[3]{x}^3}{\sqrt[3]{x+2}^2 + \sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x}^2} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}}{\sqrt[3]{x+2}^2 + \sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x}^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2}\cdot\frac{2}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}^2 + \sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} + 1} = 0$$

iii) $$\lim_{x\to 6}\left[\eta\mu\left(f(x+2)-2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+45}-9}\right] = \lim_{x\to 6}\left[\frac{\eta\mu\left(f(x+2)-2\right)}{f(x+2)-2}\cdot\frac{f(x+2)-2}{\sqrt{x^2+45}-9}\right] = \frac{1}{8}$$

αφού $\lim\limits_{x\to 6}\left[\dfrac{\eta\mu\left(f\left(x+2\right)-2\right)}{f\left(x+2\right)-2}\right]\overset{\substack{u=f(x+2)-2=\sqrt[3]{x+2}-2\\ x\to 6,\ u\to 0}}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$ και

$$\lim_{x\to 6}\frac{f\left(x+2\right)-2}{\sqrt{x^2+45}-9}=\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt[3]{x+2}-2}{\sqrt{x^2+45}-9}=\lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt[3]{x+2}^3-8\right)\left(\sqrt{x^2+45}+9\right)}{\left(\sqrt{x^2+45}^2-81\right)\left(\sqrt[3]{x+2}^2+2\cdot\sqrt[3]{x+2}+4\right)}=$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{\left(x+2-8\right)\left(\sqrt{x^2+45}+9\right)}{\left(x^2+45-81\right)\left(\sqrt[3]{x+2}^2+2\cdot\sqrt[3]{x+2}+4\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{\left(x-6\right)\left(\sqrt{x^2+45}+9\right)}{\left(x^2-36\right)\left(\sqrt[3]{x+2}^2+2\cdot\sqrt[3]{x+2}+4\right)}=$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{\cancel{\left(x-6\right)}\left(\sqrt{x^2+45}+9\right)}{\cancel{\left(x-6\right)}\left(x+6\right)\left(\sqrt[3]{x+2}^2+2\cdot\sqrt[3]{x+2}+4\right)}=$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x^2+45}+9}{\left(x+6\right)\left(\sqrt[3]{x+2}^2+2\cdot\sqrt[3]{x+2}+4\right)}=\frac{\overset{3}{\cancel{18}}}{\underset{2}{\cancel{12}}\cdot 12}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}.$$

γ) Για το πεδίο ορισμού της g έχουμε : $\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x^2\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in\mathbb{R}$. Επίσης

$$g\left(x\right)=\begin{cases}x^{\frac{2}{3}},x>0\\ 0,x=0\\ \left(-x\right)^{\frac{2}{3}},x<0\end{cases}$$. Η g είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα

$\left(-\infty,0\right),\left(0,+\infty\right)$ με παραγώγους αντίστοιχα

$g'\left(x\right)=-\dfrac{2}{3}\left(-x\right)^{-\frac{1}{3}}=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{-x}},g'\left(x\right)=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g\left(x\right)-g\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$ άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

δ) Για κάθε $x>0$ είναι $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}>0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο

$f''\left(x\right)=\dfrac{1}{3}\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'=-\dfrac{2}{9}\cdot x^{-\frac{5}{3}}=-\dfrac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^5}}<0$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα

στο $(0,+\infty)$. Για $x>1 \Leftrightarrow x^2>x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x^2)>f(x) \Leftrightarrow f(x)<f(x^2) \Rightarrow$

$\int_\alpha^\beta f(x)dx < \int_\alpha^\beta f(x^2)dx$ (1) και

$x>1 \Leftrightarrow x^2>x \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x^2)<f'(x) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f'(x^2)dx < \int_\alpha^\beta f'(x)dx$ (2).

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε

$\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta f'(x^2)dx < \int_\alpha^\beta f(x^2)dx + \int_\alpha^\beta f'(x)dx$.

39. α) Έστω $M(x,3\ln x)$ σημείο της γραφικής παράστασης της f .

Η απόσταση των σημείων A,M είναι ίση με $d(x)=(AM)=\sqrt{x^2+\left(3\ln x-\frac{1}{3}\right)^2}$

.

Η d είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$d'(x)=\frac{2x+2\frac{3\left(3\ln x-\frac{1}{3}\right)}{x}}{2\sqrt{x^2+(3\ln x-1)^2}}=\frac{x^2+9\ln x-1}{x\cdot\sqrt{x^2+(3\ln x-1)^2}}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^2+9\ln x-1,\ x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=2x+\frac{9}{x}>0$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα. Έχουμε $g(x)\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq g(1) \Leftrightarrow x\geq 1$. Η d είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.Είναι $d'(x)=\frac{g(x)}{x\sqrt{x^2+(3\ln x-1)^2}}>0$ για $x>1$,

$d'(x)=\frac{g(x)}{x\sqrt{x^2+(3\ln x-1)^2}}<0$ για $x<1$, οπότε η d είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $d(1)=\sqrt{2}$. Το ζητούμενο σημείο είναι το $(1,0)$.

β) Έστω $\Gamma(x_0,f(x_0)), x_0>0$ το σημείο επαφής της (ε) με την γραφική παράσταση της f.Η (ε) έχει εξίσωση:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-3\ln x_0=\frac{3}{x_0}(x-x_0) \Leftrightarrow$$

$y=\frac{3}{x_0}\cdot x+3\ln x_0-3$. Το σημείο Β ανήκει στην (ε) οπότε:

$3=3\ln x_0-3\Leftrightarrow 3\ln x_0=6\Leftrightarrow \ln x_0=2\Leftrightarrow x_0=e^2$ και $(\varepsilon):\ y=\frac{3}{e^2}x+3$.

γ) Έστω (ζ) κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων της

$g(x)=\frac{f(x)}{3}=\ln x$ και της παραβολής $h(x)=y=\frac{x^2}{2}$.

Έστω $\Delta\left(x_1,g(x_1)\right),x_1>0$, $E\left(x_2,h(x_2)\right)$, τα σημεία επαφής της (ζ) με τις γραφικές παραστάσεις των g, h αντίστοιχα. Η (ζ) έχει εξισώσεις αντίστοιχα

$\zeta: y-g(x_1)=g'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)\Leftrightarrow\ y=\frac{1}{x_1}\cdot x+\ln x_1-1.$

και $y-h(x_2)=h'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow y-\frac{x_2^2}{2}=x_2(x-x_2)\Leftrightarrow\ y=x_2\cdot x-\frac{x_2^2}{2}$.

Εφ' όσον πρόκειται για την ίδια ευθεία πρέπει : $\begin{cases}x_2=\frac{1}{x_1}\\ \ln x_1-1=-\frac{x_2^2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x_2=\frac{1}{x_1}\\ \ln x_1-1=-\frac{1}{2x_1^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\frac{1}{x_1}\\ 2x_1^2\ln x_1-2x_1^2+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=\frac{1}{x_1}\\ 2x_1^2(\ln x_1-1)+1=0(1)\end{cases}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=2x^2(\ln x-1)+1$.

Η k είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$k'(x)=4x(\ln x-1)+2x^2\cdot\frac{1}{x}=4x(\ln x-1)+2x\Leftrightarrow k'(x)=2x(2\ln x-1).$

Έχουμε : $k'(x)\geq 0\Leftrightarrow 2x(2\ln x-1)\geq 0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2\ln x-1\geq 0\Leftrightarrow 2\ln x\geq 1$

$\ln x>\frac{1}{2}\Leftrightarrow \ln x>\ln e^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x>e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

Η k συνεχής στο πεδίο ορισμού της σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $k'(x)>0$ στο $\left(\sqrt{e},+\infty\right)$, $k'(x)<0$ στο $\left(0,\sqrt{e}\right)$ οπότε η k είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\sqrt{e},+\infty\right)$, γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\sqrt{e}\right]$ άρα παρουσιάζει μέγιστο στο $\sqrt{e}$ το $k\left(\sqrt{e}\right)=2e\left(-\frac{1}{2}\right)+1=-e+1$.

Αν θεωρήσουμε τα διαστήματα $A_1=\left(0,\sqrt{e}\right],A_2=\left(\sqrt{e},+\infty\right)$ έχουμε λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα αυτά : $k(A_1)=\left[k\left(\sqrt{e}\right),\lim\limits_{x\to 0^+}k(x)\right)=[-e+1,-1)$,

$k(A_2)=\left[k\left(\sqrt{e}\right),\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)\right)=[-e+1,+\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x\to0^+}\left[2x^2(\ln x-1)\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x-1}{\frac{1}{2x^2}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-x^2\right)=0$ οπότε

$\lim\limits_{x\to0^+}k(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[2x^2(\ln x-1)-1\right]=0-1=-1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x^2(\ln x-1)-1\right]=+\infty\cdot(+\infty-1)-1=+\infty$.

Το 0 ανήκει μόνο στο $k(A_2)$ οπότε υπάρχει μοναδικός (λόγω της μονοτονίας της k) $\xi\in A_2$ τέτοιος ώστε $k(\xi)=0$. Άρα η εξίσωση $2x^2(\ln x-1)-1=0$ έχει μοναδική λύση ,οπότε υπάρχει μοναδική κοινή εφαπτομένη .

δ) $f'(x)=x\int_e^{e^2}\dfrac{f'(\ln t)}{t}dt\Leftrightarrow f'(x)=x\left[f(\ln t)\right]_e^{e^2}\Leftrightarrow$

$f'(x)=xf(2)-xf(1)\Leftrightarrow f'(x)-xf(2)=0$.

Έστω η συνάρτηση $b(x)=f'(x)-xf(2)=\dfrac{3}{x}-3x\ln2$, $x\in[1,3]$.

Είναι $b(1)=3-3\ln2=3(1-\ln2)>0$ και $b(3)=1-9\ln2=\ln e-\ln2^9<0$.

Επειδή $b(1)b(3)<0$ και η b είναι συνεχής στο $[1,3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, οπότε από θεώρημα Bolzano η εξίσωση

$b(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-xf(2)=0\Leftrightarrow f'(x)=x\int_e^{e^2}\dfrac{f'(\ln t)}{t}dt$ έχει ρίζα στο $(1,3)$.

Η b είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $b'(x)=-\dfrac{3}{x^2}-3\ln2<0$ για κάθε $x>0$ άρα η b είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

40. α) Με παραγώγιση της σχέσης που μας δίνεται κατά μέλη έχουμε :

$3f^2(x)f'(x)+2f(x)f'(x)+f'(x)=e^x-1\Leftrightarrow$

$\left(\underbrace{3f^2(x)+2f(x)+1}_{>0}\right)f'(x)=e^x-1\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{e^x-1}{3f^2(x)+2f(x)+1}$. (Θέτουμε $f(x)=\omega$ οπότε έχουμε το τριώνυμο $3\omega^2+2\omega+1$, το οποίο έχει διακρίνουσα $\Delta=-8<0$ άρα είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Επομένως $3f^2(x)+2f(x)+1>0$). Έχουμε $f'(x)\geq0\Leftrightarrow\dfrac{e^x-1}{3f^2(x)+2f(x)+1}\geq0\Leftrightarrow e^x-1\geq0\Leftrightarrow e^x\geq1\Leftrightarrow x\geq0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,άρα συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Όμως $f'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$, $f'(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$ γιατί

$$f^3(0)+f^2(0)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)\left(\underbrace{f^2(0)+f(0)+1}_{\neq 0}\right)=0 \Leftrightarrow f(0)=0 .$$

Θέτουμε $f(x)=\omega$ οπότε έχουμε το τριώνυμο $\omega^2+\omega+1$, το οποίο έχει διακρίνουσα $\Delta=-3<0$ άρα είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως $f^2(0)+f(0)+1\neq 0$)

β) Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 άρα $f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow f(x)\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 0, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

γ) Έστω $A_1=(-\infty,0)$ και $A_2=[0,+\infty)$.
Λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε :

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to 0^-}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left(f(0),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left(0,\lim_{x\to-\infty}f(x)\right),$$

$$f(A_2)=\left[\lim_{x\to 0^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[f(0),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[0,\lim_{x\to+\infty}f(x)\right).$$

Έστω $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=k\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l\in\mathbb{R}$. Από τη σχέση που μας δίνεται έχουμε :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f^3(x)+f^2(x)+f(x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-x-1\right)\Leftrightarrow k^3+k^2+k=+\infty \text{ άτοπο },$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f^3(x)+f^2(x)+f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{x}\right)=+\infty\Leftrightarrow$$

$l^3+l^2+1=+\infty$ άτοπο αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. Άρα

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

Τότε : $f(\mathbb{R})=f(A_1)\cup f(A_2)=(0,+\infty)\cup[0,+\infty)=[0,+\infty)$.

δ) Το $2024\in f(A_1),f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1\in A_1, x_2\in A_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)=2024$.

Τα x_1, x_2 μοναδικά λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα.

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(F(x)-F\left(\frac{x}{2}\right)\right)\eta\mu\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{F(x)-F\left(\frac{x}{2}\right)}{x}x\,\eta\mu\frac{1}{x}\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{F(x)-F\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\cdot\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u}{=}\lim\limits_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την F στο $\left[\frac{x}{2},x\right]$ και έχουμε ότι υπάρχει

$\xi\in\left(\frac{x}{2},x\right)$ τέτοιο ώστε

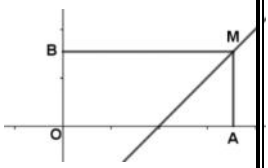
$$F'(\xi)=\frac{F(x)-F\left(\frac{x}{2}\right)}{x-\frac{x}{2}}\Leftrightarrow f(x)=2\frac{F(x)-F\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{2}=\frac{F(x)-F\left(\frac{x}{2}\right)}{x}.$$

Για $0\le\frac{x}{2}<\xi<x\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f\left(\frac{x}{2}\right)<f(\xi)<f(x)\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right)<\frac{F(x)-F\left(\frac{x}{2}\right)}{x}<f(x)$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\frac{x}{2}\right)\overset{\frac{x}{2}=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=+\infty$ άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)-F\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=+\infty.$$

41. α) Το σημείο $M(x,y)$ είναι σημείο της $y=x-2$ άρα είναι $M(x,x-2)$. Το εμβαδόν του ΟΑΜΒ είναι :



$E(x)=(AM)\cdot(BM)=|x-2||x|\Leftrightarrow$

$E(x)=|x(x-2)|=|x^2-2x|,\ x\in\mathbb{R}$

β) $f(x)=E(x)=x|x-2|=x(-x+2)=-x^2+2x=-x^2+2x-1+1\Leftrightarrow$

$f(x)=-(x-1)^2+1$, $x\in[0,1]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο $f'(x)=-2x+2=-2(x-1)>0$ για κάθε $0<x<1$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

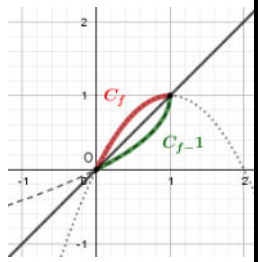
Ισχύει $0\le x\le 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0)\le f(x)\le f(1) \Leftrightarrow 0\le f(x)\le 1$. Έστω

$y=f(x) \overset{y\in[0,1]}{\Leftrightarrow} y=-(x-1)^2+1 \Leftrightarrow (x-1)^2=1-y \Leftrightarrow |x-1|=\sqrt{1-y} \overset{x<1}{\Leftrightarrow}$

$-x+1=\sqrt{1-y} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{1-y}$, $y\in[0,1]$

Άρα είναι $f^{-1}(y)=1-\sqrt{1-y}$, $y\in[0,1]$ και

$f^{-1}(x)=1-\sqrt{1-x}$, $x\in[0,1]$



γ)

δ) Είναι $f(x)\ge f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$E=\int_0^1 |f(x)-f^{-1}(x)|dx=\int_0^1 [f(x)-f^{-1}(x)]dx \Leftrightarrow$

$E=\int_0^1 \left[-(x-1)^2+\sqrt{1-x}\right]dx \Leftrightarrow$

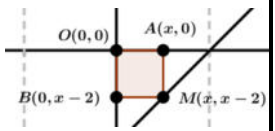
$E=\int_0^1 \left[-(x-1)^2+|1-x|^{\frac{1}{2}}\right]dx \Leftrightarrow E=\int_0^1 \left[-(x-1)^2+(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]dx \Leftrightarrow$

$E=\left[-\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ τ.μ.

ε) Αν $x\in[0,2]$ τότε

$E(x)=|x^2-2x|=-x^2+2x=$

$-x^2+2x-1+1=-(x-1)^2+1$



i) Για κάθε $x\in[0,2]$ είναι

$(x-1)^2\ge 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2\le 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2+1\le 1 \Leftrightarrow E(x)\le E(1)$, άρα το εμβαδό γίνεται μέγιστο για x = 1, τότε M(1,1) και το OAMB είναι τετράγωνο πλευράς 1.

ii) Είναι $d(M,y'y)=(OB)=|x|=x$ και

$d(M,x'x)=(OA)=|y|=|x-2|=(-x+2)$. Είναι

$d^2(M,y'y)+d^2(M,x'x)=x^2+(-x+2)^2=x^2+x^2-4x+4=2x^2-4x+4=$

$=2(x^2-2x+2)=2\left[(x-1)^2+1\right]$. Για κάθε $x\in[0,2]$ είναι

$(x-1)^2\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+1\ge 1 \Leftrightarrow 2\left[(x-1)^2+1\right]\ge 2 \Leftrightarrow$

$d^2(M,y'y)+d^2(M,x'x)=x^2+(-x+2)^2\ge 2$ με την ισότητα να ισχύει για x = 1,

Άρα το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του Μ από τους άξονες να γίνει ελάχιστο για x = 1, δηλαδή όταν Μ(1,1).

42. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}+1$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$.

β) $e^{-x}(\ln x+x)=-1 \Leftrightarrow \ln x+x=-\frac{1}{e^{-x}} \Leftrightarrow \ln x+x=-e^x \Leftrightarrow$

$\ln x+x+e^x=0 \Leftrightarrow f(x)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x+\ln x+x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+\ln x+x)=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $A=(0,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\mathbb{R}$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f που είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικό $x_1>0$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f^{-1}(x)=u \Leftrightarrow f(u)=x \Rightarrow f'(u)du=dx$

Για $x=e+1$ είναι $f(u)=e+1 \Leftrightarrow f(u)=f(1) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} u=1$

Για $x=e^e+e+1$ είναι $f(u)=e^e+e+1 \Leftrightarrow f(u)=f(e) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} u=e$

$$\int_{e+1}^{e^e+e+1} f^{-1}(x)\,dx=\int_1^e uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_1^e-\int_1^e f(u)du=$$

$$\left[uf(u)\right]_1^e-\int_1^e\left(e^u+\ln u+u\right)du=\left[uf(u)\right]_1^e-\int_1^e\left(e^u+u\right)du-\int_1^e \ln u\,du=$$

$$\left[uf(u)\right]_1^e-\left[e^u+\frac{u^2}{2}\right]_1^e-\left[u\ln u\right]_1^e+\int_1^e du=$$

$$=\left[uf(u)\right]_1^e-\left[e^u+\frac{u^2}{2}\right]_1^e-\left[u\ln u\right]_1^e+e-1=e^{e+1}+\frac{e^2}{2}-e^e+e-2$$

δ) Έστω $g(x)=f(x)-x^4,\ x\in[1,2]$.

Είναι $g(1)=f(1)-1=e>0$, $g(2)=f(2)-16=e^2+\ln 2+2-16=e^2+\ln 2-14$.

Είναι $e<3 \Leftrightarrow e^2<9$ και $\ln 2<\ln e=1$, άρα

$e^2+\ln 2<10 \Leftrightarrow e^2+\ln 2-14<-4 \Rightarrow g(2)<0$.

Επειδή $g(1)g(2)<0$ η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=x^4$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

ε) Έστω $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, $x_0 > 0$ σημείο της C_f. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'\left(x_0\right) = 1$ είναι αδύνατη. Είναι $f'\left(x_0\right) = e^{x_0} + \dfrac{1}{x_0} + 1 > 1$ γιατί $e^{x_0} > 0$ και $\dfrac{1}{x_0} > 0$, οπότε η εξίσωση $f'\left(x_0\right) = 1$ είναι αδύνατη.

στ) Είναι $f''\left(x\right) = e^x - \dfrac{1}{x^2}$ και $f^{(3)}\left(x\right) = e^x + \dfrac{2}{x^3}$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f^{(3)}\left(x\right) > 0 \Rightarrow f'' \nearrow \left(0, +\infty\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f''\left(x\right) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(e^x - \dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f''\left(x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(e^x - \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$.

Επειδή η f'' είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $f''\left(A\right) = \mathbb{R}$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f'' υπάρχει $x_1 \in \left(0, +\infty\right)$ τέτοιο, ώστε $f''\left(x_1\right) = 0$. Για κάθε $0 < x < x_1 \overset{f'' \nearrow}{\Rightarrow} f''\left(x\right) < f''\left(x_1\right) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left(0, x_1\right]$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > x_1 \overset{f'' \nearrow}{\Rightarrow} f''\left(x\right) > f''\left(x_1\right) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[x_1, +\infty\right)$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Η f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$.

43. α) Οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδία ορισμού $A_f = \left[1, +\infty\right)$ και $A_g = \left(0, +\infty\right)$.

Είναι $A_{f \circ g} = \left\{x \in A_g \,/\, g\left(x\right) \in A_f\right\} = \left\{x > 0 \,/\, \ln x \geq 1\right\} = \left\{x > 0 \,/\, x \geq e\right\} = \left[e, +\infty\right)$

και $\varphi\left(x\right) = \left(f \circ g\right)\left(x\right) = \sqrt{g\left(x\right) - 1} = \sqrt{\ln x - 1}$.

β) Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(e, +\infty\right)$ με $\varphi'\left(x\right) = \dfrac{\left(\ln x - 1\right)'}{2\sqrt{\ln x - 1}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x - 1}}$.

Για κάθε $x > e$ είναι $\varphi'\left(x\right) > 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[e, +\infty\right)$. Για $x \geq e \overset{\varphi \nearrow}{\Leftrightarrow} \varphi\left(x\right) \geq \varphi\left(e\right) = 0$ άρα για $x \geq e$ και $y \geq 0$:

$\varphi\left(x\right) = y \Leftrightarrow \sqrt{\ln x - 1} = y \Leftrightarrow \ln x - 1 = y^2 \Leftrightarrow$

$\ln x = y^2 + 1 \Leftrightarrow x = e^{y^2 + 1} \Leftrightarrow \varphi^{-1}\left(y\right) = e^{y^2 + 1}$, $y \geq 0$ άρα $\varphi^{-1}\left(x\right) = e^{x^2 + 1}$, $x \geq 0$

γ) $f\left(x\right) \leq g\left(x\right) \Leftrightarrow \sqrt{x - 1} \leq \ln x \Leftrightarrow x - 1 \leq \ln^2 x \Leftrightarrow \ln^2 x - x + 1 \geq 0$.

Έστω $h\left(x\right) = \ln^2 x - x + 1$, $x \geq 1$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left(1, +\infty\right)$ με $h'\left(x\right) = \dfrac{2\ln x}{x} - 1$ και

$h''(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$

Για κάθε $x\in(1,e)$ είναι $h''(x)>0$, ενώ για κάθε $x>e$ είναι $h''(x)<0$.

Επειδή η h ΄είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$. Η h ΄έχει μέγιστο το $h'(e)=\dfrac{2\ln e}{e}-1=\dfrac{2-e}{e}<0$, οπότε για κάθε $x>1$ είναι $h'(x)\le h'(e)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$. Για κάθε $x\ge 1$ είναι $h(x)\le h(1)=0\Leftrightarrow f(x)\le g(x)$.

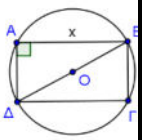
δ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_1^5\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_1^5\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_1^5\left(\ln x-\sqrt{x-1}\right)dx\Leftrightarrow$$

$$E=\int_1^5\ln x\,(x)'\,dx-\int_1^5(x-1)^{\frac{1}{2}}dx=\left[x\ln x\right]_1^5-\int_1^5 x\,\frac{1}{x}dx-\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^5\Leftrightarrow$$

$$E=5\ln 5-(5-1)-\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^5=5\ln 5-4-\frac{2}{3}\cdot 8=5\ln 5-\frac{28}{3}$$

44. α) Επειδή κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη από τη διάμετρο, ισχύει ότι: $0<x<2\rho=10$.



Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε: $A\Delta^2=\Delta B^2-AB^2=100-x^2\Leftrightarrow A\Delta=\sqrt{100-x^2}$

Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι:

$(AB\Gamma\Delta)=(A\Delta)\cdot(AB)=x\sqrt{100-x^2}$. Άρα $f(x)=x\sqrt{100-x^2}$, $0<x<10$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\sqrt{100-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=\frac{100-x^2-x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$f'(x)\ge 0\Leftrightarrow\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}\ge 0\overset{\sqrt{100-x^2}>0}{\Leftrightarrow}100-2x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\le 50\overset{x\in(0,10)}{\Leftrightarrow}x\le\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

Για κάθε $x\in\left(0,5\sqrt{2}\right)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left(0,5\sqrt{2}\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in\left(5\sqrt{2},10\right)$ είναι $f'(x)<0$,και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[5\sqrt{2},10\right)$ είναι γνησίως

φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5\sqrt{2}$, τότε $A\Delta = \sqrt{100-50} = 5\sqrt{2} = x$, οπότε το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{98x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{98}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x} =$

$$\frac{1}{98}\cdot f'(1) = \frac{1}{\cancel{98}}\cdot\frac{\cancel{98}}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

δ) Για κάθε $x\in[6,8]$ η f είναι συνεχής και $f(x)\geq 0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E(\Omega) = \int_6^8 f(x)dx = \int_6^8 x\cdot\sqrt{100-x^2}dx$

Θέτουμε $100-x^2 = u$, τότε $-2xdx = du$ και $xdx = -\dfrac{1}{2}du$.

Για x = 6 είναι $u = 100-36 = 64$ και για x = 8 είναι $u = 100-64 = 36$. Τότε

$$E(\Omega) = -\frac{1}{2}\int_{64}^{36}\sqrt{u}du = \frac{1}{2}\int_{36}^{64}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{36}^{64} = \frac{1}{3}\left[u\sqrt{u}\right]_{36}^{64} = \frac{296}{3}\ \tau.\mu.$$

45. α) $f(1-x) = \ln\dfrac{e^{1-x}+e}{e^{1-x}+1} = \ln\dfrac{\frac{e}{e^x}+e}{\frac{e}{e^x}+1} = \ln\dfrac{e\frac{1+e^x}{e^x}}{\frac{e+e^x}{e^x}} = \ln\left(e\dfrac{1+e^x}{e+e^x}\right)\Leftrightarrow$

$$f(1-x) = \ln e + \ln\frac{1+e^x}{e+e^x} = 1+\ln\left(\frac{e+e^x}{1+e^x}\right)^{-1} = 1-\ln\frac{e+e^x}{1+e^x} = 1-f(x).$$

β) Είναι $e^x+e > e^x+1 \Leftrightarrow \dfrac{e^x+e}{e^x+1} > 1 \Leftrightarrow \ln\dfrac{e^x+e}{e^x+1} > \ln 1 \Leftrightarrow f(x) > 0$. Από τη σχέση $f(1-x) = 1-f(x)$, προκύπτει: $\int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 1dx - \int_0^1 f(x)dx$ (1)

Θέτουμε $1-x = u$, τότε $dx = -du$. Για $x = 0$ είναι $u = 1$, ενώ για $x = 1$ είναι $u = 0$. Η σχέση (1) γίνεται: $-\int_1^0 f(u)du = \int_0^1 1dx - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_0^1 f(x)dx = 1-\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{2}$. Άρα $E = \dfrac{1}{2}$.

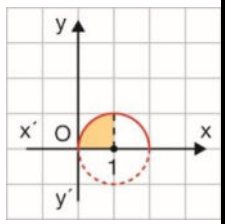
γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e}{e^x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$,άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x+e}{e^x+1}\overset{\frac{e^x+e}{e^x+1}=u}{=}\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$, άρα η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$, είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

δ) Έστω $g(x)=(x-1)f(x-1)-(2x-x^2)f(x)+x^2-x,\ x\in[1,2]$. Είναι $g(1)=-f(1)=-\ln\dfrac{2e}{e+1}<0,\ g(2)=f(1)+2>0$, δηλαδή $g(1)g(2)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,2]$, λόγω του θ.Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

46. α) Είναι $f^2(x)+x^2=2x\Leftrightarrow f^2(x)=2x-x^2\ \ (1)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)=0$ γίνεται $2x-x^2=0\Leftrightarrow x(2-x)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$.

β) Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,2)$ τότε αφού η f είναι συνεχής και θα υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,2)$ τέτοια ώρα $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$ από Θ. Bolzano θα υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Οπότε η (1) για $x=x_0$ γίνεται $2x_0-x_0^2=0\Leftrightarrow x_0(2-x_0)=0\Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=2$ (άτοπο) γιατί $x_0(0,2)$

γ) Οπότε αφού $f(x)\neq0$ για $x\in(0,2)$ και η f συνεχής στο $(0,2)$. Επειδή $f(1)=1>0$ τότε $f(x)>0$ για $x\in(0,2)$ άρα η (1) θα είναι $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$.



δ) Επειδή $f(x)>0$ τότε το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega)=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx$. Έστω $\sqrt{2x-x^2}=y\Leftrightarrow2x-x^2-y^2\Leftrightarrow x^2-2x+y^2=0\Leftrightarrow$ $x^2+2x+1+y^2=1\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=1$. Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου του κυκλικού δίσκου με κέντρο $K(1,0)$ και $\rho=1$.

$E=\dfrac{\pi\rho^2}{4}=\dfrac{\pi\cdot1^2}{4}=\dfrac{\pi}{4}$ οπότε $E(\Omega)=\dfrac{\pi}{4}$.

ε) Η $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ γίνεται $f(x)=\sqrt{1-1+2x-x^2}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{1-(1-x)^2}$.

Έστω $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1<x_2\Leftrightarrow1-x_1>1-x_2>0\Leftrightarrow(1-x_1)^2>(1-x_2)^2\Leftrightarrow$

$\sqrt{1-\left(1-x_1^2\right)}<\sqrt{1-\left(1-x_2^2\right)} \Leftrightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$ οπότε η $f\nearrow$ στο $[0,1]$ άρα και $1-1$ συνεπώς αντιστρέφεται. Έστω

$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{1-(1-x)^2}=y^2 \Leftrightarrow 1-(1-x)^2=y^2 \Leftrightarrow (1-x)^2=1-y^2 \Leftrightarrow$

$1-x=\pm\sqrt{1-y^2}$ αφού $x\le 1$ τότε $1-x>0$ άρα $1-x=\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow$

$x=1-\sqrt{1-y^2}$ με $\left.\begin{matrix} y\ge 0 \\ 1-y^2\ge 0 \end{matrix}\right\} y\in[0,1]$. Άρα $f^{-1}(x)=1-\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0,1]$.

47. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^{\alpha x+\beta}+\alpha x e^{\alpha x+\beta}=e^{\alpha x+\beta}(1+\alpha x)$.

Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο Α, ισχύει: $f(-1)=-e^2 \Leftrightarrow -e^{-\alpha+\beta}=-e^2 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=2 \quad (1)$.

Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2e^2x-e$, ισχύει: $f'(-1)=\lambda=2e^2 \Leftrightarrow e^{-\alpha+\beta}(1-\alpha)=2e^2 \Leftrightarrow e^2(1-\alpha)=2e^2 \Leftrightarrow 1-\alpha=2 \Leftrightarrow$ $\alpha=-1$. Τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $1+\beta=2 \Leftrightarrow \beta=1$.

β) Για $\alpha=-1$ και $\beta=1$ είναι $f(x)=xe^{1-x}$ και $f'(x)=e^{1-x}(1-x)$.

Για κάθε $x<1$ είναι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$.

Για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{1-x}=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{1-x} \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x-1}} \underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x-1}}=0$ και $f(1)=1$. Για το σύνολο τιμών του διαστήματος $\Delta_1=(-\infty,1]$, έχουμε:

$f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right]=(-\infty,1]$. Για το σύνολο τιμών του διαστήματος $\Delta_2=[1,+\infty)$, έχουμε: $f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right]=(0,1]$. Άρα

$f(A)=(-\infty,1]\cup(0,1]=(-\infty,1]$.

γ) Αρκεί να βρούμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=k$.

• Αν $k>1$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη, γιατί λόγω του συνόλου τιμών της f ισχύει: $f(x)\le 1$.

• Αν $k=1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=1$ $(f(1)=1)$.

• Αν $0<k<1$, τότε η εξίσωση έχει ακριβώς 2 ρίζες, μία στο $(-\infty,1)$ και μία στο $(1,+\infty)$.

• Αν $k<0$, τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα που βρίσκεται στο διάστημα $(-\infty,1)$.

δ) Για κάθε $0\le x\le 1$, είναι $f(0)\le f(x)\le f(1)\Leftrightarrow 0\le f(x)\le 1$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=\int_0^1 xe^{1-x}dx=-\int_0^1 x\left(e^{1-x}\right)'dx=-\left[xe^{1-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{1-x}dx=e-2\ \tau.\mu..$$

48. α) Αφού η f είναι συνεχής ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=f(\alpha)\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{e}=\ln\alpha$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\dfrac{\alpha}{e}=\ln\alpha$ έχει μοναδική ρίζα τη $\alpha=e$.

Έστω $g(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}$, $x>0$ με $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-x}{ex}\ge 0\Leftrightarrow x\le e$. Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow(0,e]$ και για κάθε $x>e$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\searrow[e,+\infty)$. Μέγιστο της g το $g(e)=0$. Άρα $g(x)\le 0$ για κάθε $x>0$ και το $=$ ισχύει μόνο για $x=e$. Συνεπώς $\alpha=e$ και $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e},\ x\le e\\ \ln x,\ x>e\end{cases}$

β) Για $x<e$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{e}$ και για $x>e$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x}$. Στο $x_0=e$ έχουμε $\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{\frac{x}{e}-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{x-e}{e(x-e)}=\dfrac{1}{e}$,

$\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{\ln x-1}{x-e}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\dfrac{1}{e}$. Άρα $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e},\ x\le e\\ \dfrac{1}{x},\ x>e\end{cases}$

γ) Από τον προηγούμενο τύπο διαπιστώνουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $f\nearrow$ οπότε και $1-1$ οπότε η f αντιστρέφεται. Για $x\le e$ είναι:

$\dfrac{x}{e}=y\Leftrightarrow x=ey$ με $ey\le e\Leftrightarrow y\le 1$ και για $x>e$ είναι $\ln x=y\Leftrightarrow x=e^y$ με $e^y>e\Leftrightarrow y>1$. Άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases}ex,\ x\le 1\\ e^x,\ x>1\end{cases}$

δ) Η f είναι συνεχής και το πρόσημό της δίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-e^2$		0		e		e^2
f		−		+		+	

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=-\int_{-e^2}^{0}\frac{x}{e}dx+\int_{0}^{e}\frac{x}{e}dx+\int_{e}^{e^2}\ln x dx=$

$$-\frac{1}{e}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-e^2}^{0}+\frac{1}{e}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{e}+\int_{e}^{e^2}(x)'\ln x dx=$$

$$\frac{e^4}{2e}+\frac{e^2}{2e}+\left[x\ln x\right]_{e}^{e^2}-\int_{e}^{e^2}1dx=...=\frac{e^3+2e^2+e}{2}\ \tau.\mu..$$

49. α) Επειδή η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=3$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$.

Αν $\alpha=2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{9}{x+\beta}=0\neq 3$ άρα $\alpha\neq 2$. Τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-2)x}{x}=\alpha-2$. Είναι $\alpha-2=3\Leftrightarrow\alpha=5$.

Επειδή $D_f=\mathbb{R}-\{-\beta\}$, αν η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη αυτή θα είναι η

$x=-\beta$, άρα $-\beta=-1\Leftrightarrow\beta=1$. Τότε $f(x)=\frac{3x+9}{x+1}$ και

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{3x+9}{x+1}=+\infty$$

β) Είναι $G'(x)=f(x)=\frac{3x+9}{x+1}=\frac{3x+3+6}{x+1}=3+\frac{6}{x+1}=\left(3x+6\ln(x+1)\right)'\Leftrightarrow$

$G(x)=3x+6\ln(x+1)+c$. Είναι $G(0)=3\Leftrightarrow c=3$, άρα

$G(x)=3x+6\ln(x+1)+3$

γ) $g(x)=\frac{G(x)}{x+1}=\frac{3(x+1)+\ln(x+1)}{x+1}=3+\frac{\ln(x+1)}{x+1}$, $x>-1$

$g'(x)=\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\geq 0\Leftrightarrow 1-\ln(x+1)\geq 0\Leftrightarrow\ln(x+1)\leq 1\Leftrightarrow x\leq e-1$

Για κάθε $x\in(0,e-1)$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow(0,e-1]$ και για κάθε $x>e-1$

είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\searrow[e-1,+\infty)$. Η g έχει μέγιστο το $g(e-1)=3+\frac{1}{e}$

δ) Για κάθε $x<0$ είναι $\ln x\leq x-1$. Αντικαθιστώντας όπου x το x+1 είναι:

$\ln(x+1)\leq x$, $x>-1$, άρα $6\ln(x+1)\leq 6x\Leftrightarrow 3x+3+6\ln(x+1)\leq 9x+3\Leftrightarrow$

$G(x) \le 9x+3$

ε) $(x+1)^{x+2} > (x+2)^{x+1} \Leftrightarrow \ln(x+1)^{x+2} > \ln(x+2)^{x+1} \Leftrightarrow$

$(x+2)\ln(x+1) > (x+1)\ln(x+2) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} > \dfrac{\ln(x+2)}{x+2} \Leftrightarrow$

$3+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} > 3+\dfrac{\ln(x+2)}{x+2} \Leftrightarrow g(x+1) > g(x+2) \overset{g\searrow(e,+\infty)}{\Leftrightarrow} x+1 < x+2$ ισχύει

50. α) Είναι $f(x) = \ln x$ με $D_f = (0,+\infty)$ και $g(x) = e^x - x$ με $D_g = \mathbb{R}$, οπότε $D_h = D_{f\circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} / e^x - x > 0\} = \mathbb{R}$ αφού όπως γνωρίζουμε $e^x > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(e^x - x) = \ln(e^x - x)$

β) Η $h(x) = \ln(e^x - x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$h'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$. Έχουμε $h'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

.

Η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$ το $h(0)=0$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^x - x)}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{e^x-1}{e^x-x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x-x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x} = 1$ Γιατί, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1} = +\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right)\right] = +\infty$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x - x) \overset{e^x-x=y}{=} \lim\limits_{y\to+\infty}\ln y = +\infty$

και

$\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(e^x - x) - \ln e^x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^x - x}{e^x}\right) \overset{\frac{e^x-x}{e^x}=\omega}{=} \lim\limits_{\omega\to1}\ln\omega = 0$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x - x}{e^x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x - 1}{e^x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x} = 1$.

Επομένως η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

δ) $L = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{h(\rho-1)x^3 + 2x - 11}{h(\rho+2)x^2 - 3x + 21}$. Γνωρίζουμε ότι $h(x) \ge 0$ και μηδενίζεται για

$x=0$.

- Αν $\rho-1\neq 0\Leftrightarrow \rho\neq 1$ και $\rho+2\neq 0\Leftrightarrow \rho\neq -2$ τότε $h(\rho-1)>0, h(\rho+2)>0$

άρα $\dfrac{h(\rho-1)}{h(\rho+2)}>0$ επομένως $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{h(\rho-1)}{h(\rho+2)}x=-\infty$

- Αν $\rho=1$ τότε

$$L=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-11}{h(3)x^2-3x+21}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-11}{h(3)x^2-3x+21}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{h(3)x}=0$$

- Αν $\rho=-2$ τότε

$$L=\lim_{x\to-\infty}\frac{h(-3)x^3+2x-11}{-3x+21}=\lim_{x\to-\infty}\frac{h(-3)x^3+2x-11}{-3x+21}=\lim_{x\to-\infty}\frac{h(-3)}{-3}x^2=-\infty$$

ε) Είναι $e^x>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $e^{x^2}>x^2$ συνεπώς

$$\int_0^1 e^{x^2}dx>\int_0^1 x^2dx\Leftrightarrow\int_0^1 e^{x^2}dx>\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\Leftrightarrow\int_0^1 e^{x^2}dx>\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3\int_0^1 e^{x^2}dx-1>0$$

στ) Η εξίσωση $h(x-f(x))=h(x+g(x))$ γίνεται

$h(x-\ln x)=h(x+e^x-x)\Leftrightarrow h(x-\ln x)=h(e^x)$ (1). Είναι $x-\ln x>0$ και $e^x>0$, επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ τότε θα είναι και 1-1 άρα από την (1) προκύπτει $x-\ln x=e^x\Leftrightarrow e^x+\ln x-x=0$. Έστω $\alpha(x)=e^x+\ln x-x, x>0$

Είναι $\alpha'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}-1=e^x-1+\dfrac{1}{x}>0$ γιατί για $x>0\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow e^x>1$

Επομένως, η συνάρτηση α είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ με σύνολο τιμών $\alpha(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}\alpha(x),\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ αφού

$\lim\limits_{x\to0^+}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(e^x+\ln x-x)=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}(e^x-x)=1$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+\ln x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{\ln x}{x}-1\right)\right]=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Επειδή το $0\in\alpha(A)$ η εξίσωση $\alpha(x)=0$ έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$, άρα και η ισοδύναμη εξίσωση $h(x-f(x))=h(x+g(x))$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

51. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x-2\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=1-\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^xe^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{\left(e^x+1\right)^2-\cancel{e^{2x}}-e^x+\cancel{e^{2x}}}{\left(e^x+1\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$f''(x)=\frac{e^{2x}+2e^x+1-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+e^x+1}{\left(e^x+1\right)^2}>0\Rightarrow f\cup\mathbb{R}\ .$$

β) Είναι $f\cup\mathbb{R}\Rightarrow f'\nearrow\mathbb{R}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)=+\infty-1=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1-e^{-x}\right)}=1$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το $f'(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Επειδή $0\in f'(\mathbb{R})$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Για κάθε $x<x_0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0\Rightarrow f\searrow(-\infty,x_0]$ και για κάθε

$x>x_0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_0)=0\Rightarrow f\nearrow[x_0,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0.

γ) Η f έχει ελάχιστο το $f(x_0)=x_0^2-2\ln\left(e^{x_0}+1\right)$.

Παρατηρούμε ότι $f'(0)=-\dfrac{1}{2}<0,\ f'(1)=1-\dfrac{e}{e+1}>0$, δηλαδή $f'(0)f'(1)<0$

και επειδή η f είναι συνεχής, λόγω του Θ.Bolzano, η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Όμως η f' έχει μοναδική ρίζα το x_0, άρα $x_0\in(0,1)$. Είναι $0<x_0<1\Leftrightarrow 0<x_0^2<1\ (1)$,

$e^0<e^{x_0}<e^1\Leftrightarrow 2<e^{x_0}+1<e+1\Leftrightarrow\ln 2<\ln\left(e^{x_0}+1\right)<\ln(e+1)\Leftrightarrow$

$-2\ln(e+1)<-2\ln\left(e^{x_0}+1\right)<-2\ln 2\ (2)$.

Από $(1)+(2)\Rightarrow -2\ln(e+1)<x_0^2-2\ln\left(e^{x_0}+1\right)<1-2\ln 2$, άρα $f(x_0)<0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2-2\ln\left(e^x+1\right)\right]=+\infty-2\cdot0=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1-2\dfrac{\ln\left(e^x+1\right)}{x^2}\right)\right] = +\infty(1-2\cdot 0) = +\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(e^x+1\right)}{x^2} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{e^x}{e^x+1}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{e^x}{2e^x\left(1+e^{-x}\right)}\right) = 0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, x_0)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = \left(f(x_0), +\infty\right)$. Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$, υπάρχει μοναδικό $x_1 < x_0$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

Είναι $f(0) = -2\ln 2 < 0$, οπότε $f\left((-\infty, 0)\right) = (-2\ln 2, +\infty)$. Επειδή $0 \in f\left((-\infty, 0)\right)$ η f έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty, 0) \subseteq (-\infty, x_0)$. Επειδή το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της f στο $(-\infty, x_0)$, είναι $x_1 < 0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = (x_0, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = \left(f(x_0), +\infty\right)$. Επειδή $0 \in f(\Delta_2)$, υπάρχει μοναδικό $x_2 > x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Τελικά η f έχει ακριβώς δύο ρίζες, μια θετική και μια αρνητική.

δ) Αρχικά θα βρούμε σημείο $A\left(\alpha, f(\alpha)\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\alpha) = \lambda_\varepsilon = -1$.

Επειδή $f'(0) = -1$, είναι $f'(\alpha) = f'(0) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} \alpha = 0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(0, f(0)\right)$ είναι η ευθεία ε_1 :

$y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = -x - 2\ln 2$.

ε) Επειδή η f είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από την ε_1 εκτός του σημείου Α, οπότε $f(x) \geq -x - 2\ln 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 (-x - 2\ln 2)dx = -\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 - 2\ln 2 = -\frac{1}{2} - 2\ln 2$$

52. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$f'(x) = 3x^2 + 6(\ln x - 2) + 6x\cdot\dfrac{1}{x} = 3x^2 + 6\ln x - 6$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = 6x + \dfrac{6}{x} > 0 \Rightarrow f' \nearrow (0, +\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(3x^2 + 6\ln x - 6\right) = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+6\ln x-6\right) = +\infty$. Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta=(0,+\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι $f'(\Delta)=\mathbb{R}$.

Επειδή $0\in f'(\Delta)$, υπάρχει $x_0\in\Delta=(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι η μοναδική της ρίζα.

Για κάθε $0<x<x_0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_0)=0 \Rightarrow f\searrow(0,x_0]$ και για κάθε $x>x_0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_0)=0 \Rightarrow f\nearrow[x_0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο x_0.

β) Είναι $f'(1)=3\cdot1^2+6\ln1-6=-3<0$ και

$f'(2)=12+6\ln2-6=6+6\ln2>0$, και επειδή η f' είναι συνεχής, η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$. Όμως το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f', άρα $x_0\in(1,2)$.

γ) $x\left(x^2+6\ln x\right)=2(6x-1)\Leftrightarrow x^3+6x\ln x-12x+2=0\Leftrightarrow$

$x^3+6x(\ln x-2)+2=0\Leftrightarrow f(x)=0$. Είναι

$1<x_0 \overset{f\searrow(0,x_0]}{\Rightarrow} f(x_0)<f(1)=-9<0$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[x^3+6x(\ln x-2)+2\right]=2$, γιατί

$$\lim_{x\to0^+} x(\ln x-2)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x-2}{\frac{1}{x}} \overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3+6x(\ln x-2)+2\right]=+\infty$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(0,x_0]$, το αντίστοιχο σύνολο τιμών της είναι το $f(\Delta_1)=\left[f(x_0),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=\left[f(x_0),2\right)$

Επειδή $0\in f(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[x_0,+\infty)$, το αντίστοιχο σύνολο τιμών της είναι: $f(\Delta_2)=\left[f(x_0),+\infty\right)$

Επειδή $0\in f(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό $x_2\in\Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

δ) Είναι $x_0\le x\le2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x_0)\le f(x)\le f(2)=12\ln2-14$ Επειδή

Όμως $2<e\Leftrightarrow\ln2<\ln e=1\Leftrightarrow12\ln2<12<14\Leftrightarrow12\ln2-14<0\Leftrightarrow f(2)<0$,

άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in[x_0,2]$.

Επειδή $1\le x\le x_0 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)\le f(1)=-9<0$, είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in[1,2]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\Omega)=-\int_1^2 f(x)dx=-\int_1^2\left[x^3+6x(\ln x-2)+2\right]dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=-\int_1^2 x^3dx-\int_1^2 6x\ln xdx+\int_1^2 12xdx-\int_1^2 2dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=-\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2-\int_1^2\left(3x^2\right)'\ln xdx+\left[6x^2\right]_1^2-2=$$

$$-\frac{15}{4}-\left[3x^2\ln x\right]_1^2+\int_1^2 3x^{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx+18-2 \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=-\frac{15}{4}+16-12\ln 2+\left[\frac{3x^2}{2}\right]_1^2=\frac{67}{4}-12\ln 2$$

53. α) Για $x=0$ είναι $f'(0)f(0)=-f'(0)\Leftrightarrow f'(0)=0$ οπότε το $x_0=0$ είναι κρίσιμο σημείο της f.

β) $f'(x)f(x)=x-f'(x)\Leftrightarrow f'(x)f(x)+f'(x)=x\Leftrightarrow f'(x)\left(f(x)+1\right)=x$ (1)

Επειδή $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f(x)+1>0$ Οπότε:

Αν $x>0$ από την (1) είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής (είναι παραγωγίσιμη), είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Αν $x<0$ από την (1) είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$.

γ) $f'(x)\left(f(x)+1\right)=x\Leftrightarrow 2\left(f'(x)+1\right)\left(f(x)+1\right)=2x\Leftrightarrow$

$$\left[\left(f(x)+1\right)^2\right]'=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow\left(f(x)+1\right)^2=x^2+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Επειδή $f(0)=0$ είναι $c=1$ οπότε

$\left(f(x)+1\right)^2=x^2+1\overset{f(x)\ge 0}{\Leftrightarrow} f(x)+1=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) $$I=2\int_0^1\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx=2\int_0^1\frac{x\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}dx=2\int_0^1\left(x-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx \Leftrightarrow$$

$$I=2\int_0^1\left(x-f'(x)\right)dx \Leftrightarrow$$

$$I=2\int_0^1 f(x)f'(x)dx=\int_0^1\left[f^2(x)\right]'dx=\left[f^2(x)\right]_0^1=f^2(1)=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

ε) Για κάθε $1 \le x \le 2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(1) \le f(x) \le f(2) \Leftrightarrow \sqrt{2}-1 \le f(x) \le \sqrt{5}-1$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [1,2]$ έχουμε:

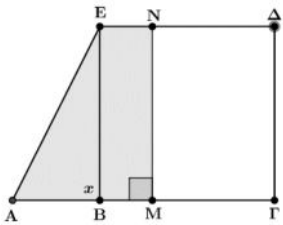
$$\int_1^2 (\sqrt{2}-1)dx < \int_1^2 f(x)dx < \int_1^2 (\sqrt{5}-1)dx \Leftrightarrow \sqrt{2}-1 < \int_1^2 f(x)dx < \sqrt{5}-1 .$$

54. α) Αν το Μ βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ τότε $0 < x \le 1$.
Τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΑΒΕ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και έχουν κοινή την γωνία Α.

Άρα ισχύει $\frac{(AM)}{(AB)} = \frac{(MN)}{(BE)} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{(MN)}{2} \Leftrightarrow (MN) = 2x$. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι

$$E(x) = \frac{1}{2}(AM)(MN) = \frac{1}{2}x(2x) = x^2 \ , \ 0 < x \le 1 .$$

Αν το Μ βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ τότε $1 < x \le 3$.
Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι



$$E(x) = \frac{1}{2}(AB)(BE) + (BM)(MN) =$$

$$= \frac{1}{2}2 + (x-1)2 = 1 + 2x - 2 = 2x - 1 \ , \ 1 < x \le 3$$

Άρα είναι $E(x) = \begin{cases} x^2 & , 0 < x \le 1 \\ 2x-1 & , 1 < x \le 3 \end{cases}$.

β) Η Ε είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $E'(x) = 2x > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Η Ε είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ με $E'(x) = 2 > 0$ για κάθε $x \in (1,3)$. Είναι $\lim\limits_{x \to 1^-} E(x) = E(1) = 1$ και $\lim\limits_{x \to 1^+} E(x) = 1$ άρα η Ε είναι συνεχής στο $x_1 = 1$.

Είναι και $\lim\limits_{x \to 3^-} E(x) = E(3) = 5$ επομένως η Ε είναι συνεχής στο $(0,3]$ και αφού $E'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,3)$ τότε η Ε είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,3]$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 3$ το $E(3) = 5$.

γ) Η Ε είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,3]$ άρα είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Η $E\nearrow(0,1]$ και συνεχής άρα $E((0,1]) = \left[\lim\limits_{x \to 0^+} E(x), E(1)\right) = (0,1]$.

Η $E\nearrow(1,3]$ και συνεχής άρα $E((1,3]) = \left[\lim\limits_{x \to 1^+} E(x), E(3)\right) = (1,5]$.

Για $0 < x \le 1$ και $0 < y \le 1$ είναι

$y = E(x) \Leftrightarrow y = x^2 \overset{0<y\le 1}{\Leftrightarrow} |x| = \sqrt{y} \overset{0<x\le 1}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{y}$

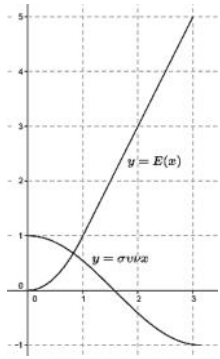
Για $1 < x \le 3$ και $1 < y \le 5$ είναι $y = E(x) \Leftrightarrow y = 2x - 1 \Leftrightarrow$

$2x = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$. Άρα $E^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & , 1 < x \le 5 \end{cases}$

δ) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = E(x) - \sigma\upsilon\nu x = x^2 - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in (0,1]$

Η g είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -1 < 0$ άρα υπάρχει $\alpha > 0$, πολύ κοντά στο μηδέν, τέτοιο ώστε $g(\alpha) < 0$.Είναι



$g(1) = 1 - \sigma\upsilon\nu 1 > 0$ αφού για

$0 < x \le 1 \overset{\sigma\upsilon\nu x \searrow (0,1]}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu 1 \le \sigma\upsilon\nu x < 1$.Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,1) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow E(x_0) = \sigma\upsilon\nu x_0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) με $g'(x) = 2x + \eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1] άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Είναι $E((1,3]) = \left(\lim\limits_{x\to 1^+} E(x), E(3)\right] = (1,5]$ και για

$1 < x < 3 < \pi \overset{\sigma\upsilon\nu x \searrow (1,\pi]}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu x < \sigma\upsilon\nu 1 < 1$ άρα η εξίσωση $E(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι αδύνατη στο $(1,3]$. Άρα η εξίσωση $E(x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει μοναδική λύση το $x_0 \in (\alpha,1) \subseteq (0,1)$.

ε) Για $0 < x \le 1$ είναι

$E(x) = E^{-1}(x) \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ απορρίπτεται}) \text{ ή } (x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ δεκτή})$

Για $1 < x \le 3$ είναι $E(x) = E^{-1}(x) \Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 1$ απορρίπτεται Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| E(x) - E^{-1}(x) \right| dx$

Για $\frac{1}{2}\le x\le 1$ είναι $E(x)<E^{-1}(x)\Leftrightarrow x^2<\sqrt{x}\Leftrightarrow x^4-x<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\left(x^3-1\right)<0 \overset{\frac{1}{2}<x\le 1}{\Leftrightarrow} x^3-1<0\Leftrightarrow x<1$ άρα είναι $E(x)<E^{-1}(x)$ για κάθε $\frac{1}{2}\le x\le 1$. Άρα $E(\Omega)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|E(x)-E^{-1}(x)\right|dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x^{1/2}-x^2\right)dx=\left[\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=$

$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\left(\frac{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3}}{3}-\frac{\frac{1}{8}}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}-\frac{\frac{2}{\sqrt{8}}}{3}=\frac{9}{24}-\frac{2}{3\sqrt{8}}=\frac{9}{24}-\frac{2}{6\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}-8}{24\sqrt{2}}$.

55. α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{1\}$ ως παραγωγίσιμη με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ άρα $f\nearrow(-\infty,0]$ ως συνεχής στο 0 και $f\nearrow(1,+\infty)$. Επίσης είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ άρα $f\searrow[0,1)$ ως συνεχής στο 0.

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=0$ το $f(0)=-1$.

Είναι επίσης $f'\searrow(-\infty,1)$ άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,1)$ και $f'\searrow(1,+\infty)$ άρα η f είναι κοίλη στο $(1,+\infty)$. Η f προφανώς δεν έχει σημεία καμπής.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(-1,f(-1))$ έχει εξίσωση:

$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y=f'(-1)x+f'(-1)+f(-1)$.

Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty,1)$ τότε η C_f στο διάστημα αυτό βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτόμενή της με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή $f(x)\le f'(-1)x+f'(-1)+f(-1)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=-1$ άρα για κάθε $x<-1$ είναι $f(x)<f'(-1)x+f'(-1)+f(-1)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f'(-1)x+f'(-1)+f(-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f'(-1)x\right]=-\infty$ επειδή $f'(-1)>0$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

γ) i) Είναι $f(x)\le f'(-1)x+f'(-1)+f(-1)$ για κάθε $x\in[-1,0]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=-1$ άρα είναι

$\int_{-1}^{0}f(x)dx<\int_{-1}^{0}\left[f'(-1)x+f'(-1)+f(-1)\right]dx=$

$$=\left[\frac{f'(-1)x^2}{2}+\left[f'(-1)+f(-1)\right]x\right]_{-1}^{0}=-\left[\frac{f'(-1)}{2}-f'(-1)-f(-1)\right]=$$

$$=-\frac{f'(-1)}{2}+f'(-1)+f(-1)=\frac{f'(-1)}{2}+f(-1)=\frac{f'(-1)+2f(-1)}{2}$$

ii) 1ος τρόπος: $\alpha\le x\le 0\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)\le f(0)=-1$ με το ίσον να ισχύει μόνον για x=0 άρα $\int_{\alpha}^{0}f(x)dx<-\int_{\alpha}^{0}dx=\alpha$

2ος τρόπος: Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο (0,0) έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=f(0)=-1$ αφού $f'(0)=0$ από το σχήμα

Η f είναι κοίλη στο $[\alpha,0]$ με $\alpha<0$ άρα $f(x)\le f(0)=-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για x=0 άρα $\int_{\alpha}^{0}f(x)dx<-\int_{\alpha}^{0}dx=\alpha$

δ) Πρέπει να βρούμε να πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες για κάθε $\lambda<-1$ άρα αφού η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0]$, $[0,1)$ και $(1,+\infty)$, τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα για κάθε $\lambda<-1$.

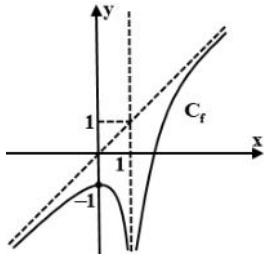
Είναι $f\nearrow(-\infty,0]$ και συνεχής άρα $f((-\infty,0])=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(0)\right]=(-\infty,-1]$ και στο διάστημα αυτό η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα.

Είναι $f\searrow(0,1)$ και συνεχής άρα $f((0,1))=\left(\lim\limits_{x\to1^-}f(x),f(0)\right)=\left(\lim\limits_{x\to1^-}f(x),-1\right)$ οπότε για να έχει στο διάστημα αυτό ρίζα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ για κάθε $\lambda<-1$ πρέπει $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$, άρα $f((0,1))=(-\infty,-1)$ και στο διάστημα αυτό η εξίσωση δεν έχει ρίζα. Είναι $f\nearrow(1,+\infty)$ και συνεχής άρα $f((1,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left(\lim\limits_{x\to1^+}f(x),+\infty\right)$ οπότε για να έχει στο διάστημα αυτό ρίζα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ για κάθε $\lambda<-1$ πρέπει $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$, άρα $f((1,+\infty))=\mathbb{R}$. Επομένως στο διάστημα αυτό η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 1 ρίζα άρα η C_f τέμνει τον x΄x σε 1 σημείο.

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$ άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=1$ και επειδή η C_f δέχεται πλάγια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε αυτή είναι η $y=x$.



56. α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=4x^3-4$.

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 4x^3-4\geq 0\Leftrightarrow 4x^3\geq 4\Leftrightarrow x^3\geq 1\Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $x<1$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=1-4+\ln^2\alpha=\ln^2\alpha-3$

β) Το ελάχιστο της f είναι το $\ln^2\alpha-3$.

Έστω $g(\alpha)=\ln^2\alpha-3,\ \alpha>0$. Είναι $g'(\alpha)=2\ln\alpha(\ln\alpha)'=\dfrac{2\ln\alpha}{\alpha}$.

Για κάθε $\alpha<1$ είναι $g'(\alpha)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(0,1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $\alpha>1$ είναι $g'(\alpha)>0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η g έχει ελάχιστο για α=1, οπότε το ελάχιστο της f παίρνει τη μικρότερη τιμή του για $\alpha=1$.

γ) i.Επειδή το ελάχιστο της f είναι το $\ln^2\alpha-3$, ισχύει ότι

$\ln^2\alpha-3=\alpha^2-2\alpha-2\Leftrightarrow\ln^2\alpha=\alpha^2-2\alpha+1\Leftrightarrow$

$\ln^2\alpha=(\alpha-1)^2\Leftrightarrow|\ln\alpha|=|\alpha-1|$ (1).

Αν $\alpha\geq 1$ τότε η (1) γίνεται $\ln\alpha=\alpha-1$ και αληθεύει μόνο για α=1 γιατί για κάθε x>0 είναι $\ln x\leq x-1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x=1.

Αν $0<\alpha<1$ τότε η (1) γίνεται $-\ln\alpha=-\alpha+1\Leftrightarrow\ln\alpha=\alpha-1$ και είναι αδύνατη στο διάστημα (0,1).

ii. $f(\xi)=3\xi^2-6\Leftrightarrow\xi^4-4\xi-3\xi^2+6=0$.

Έστω $h(x)=x^4-3x^2-4x+6,\ x\in[1,2]$. Παρατηρούμε ότι $h(1)=0$, οπότε από το σχήμα Horner παίρνουμε: $h(x)=(x-1)(x^3+x^2-2x-6)$.

Έστω $\varphi(x)=x^3+x^2-2x-6,\ x\in[1,2]$. Είναι $\varphi(1)=-6,\ \varphi(2)=2$, δηλαδή $\varphi(1)\varphi(2)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική,

σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\xi)=0$.

Τότε $h(\xi)=(\xi-1)\varphi(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=3\xi^2-6$

iii. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε τέτοια εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ και σημείο $A(0,\lambda)$, $\lambda>0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Για να διέρχεται από το Α πρέπει:

$\lambda-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0) \Leftrightarrow \lambda-x_0^4+4x_0=(4x_0^3-4)(-x_0) \Leftrightarrow$

$\lambda-x_0^4+\cancel{4x_0}=-4x_0^4+\cancel{4x_0} \Leftrightarrow 3x_0^4=-\lambda$ αδύνατη. Άρα καμία εφαπτόμενη δεν τέμνει τον θετικό ημιάξονα σε σημείο $A(0,\lambda)$, $\lambda>0$.

Τώρα θα εξετάσουμε αν υπάρχει εφαπτόμενη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων ώστε να επιβεβαιώνει ότι είναι της μορφής $y=\beta x$ με $\beta \in \mathbb{R}$.

Αν $\lambda=0$ δηλαδή το Α είναι η αρχή των αξόνων τότε καταλήγουμε στην σχέση $3x_0^4=0 \Leftrightarrow x_0=0$. Η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων είναι:

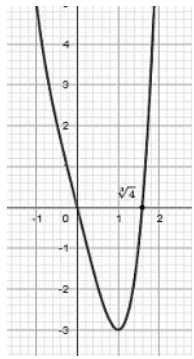
$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=-4x$ και είναι της παραπάνω μορφής. Επομένως $\beta=-4$.

iv. Είναι $f''(x)=12x^2>0$ για κάθε $x\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Είναι

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^4-4x=0 \Leftrightarrow x(x^3-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^3=4 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^4=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$



x	$-\infty$	1	$+\infty$
f″	+		+
f′	–		+
f	↘	-3	↗

v. Είναι $f(x)\geq f(1)=-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνον για x=1, άρα

$\int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 -3\,dx=[-3x]_0^1=-3$.

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ άρα κάθε εφαπτόμενη της βρίσκεται κάτω από την γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Άρα $f(x)\geq -4x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνον για x=0. Άρα

$\int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 -4x\,dx=\left[-2x^2\right]_0^1=-2=\frac{\beta}{2}$

57. α) Η f είναι συνεχής στο $[2,e]$, παραγωγίσιμη στο $(2,e)$, $f(2)=f(e)=0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2,e)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$.

β) Η k είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$k'(x)=e^x+(\ln x-1)e^x+e^x+x(\ln x-1)e^x \Leftrightarrow$

$k'(x)=e^x(1+\ln x-1+1+x\ln x-x) \Leftrightarrow k'(x)=e^x(1-x+(x+1)\ln x)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $l(x)=1-x+(x+1)\ln x, x>0$.

Η l είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$l'(x)=-1+\ln x+\dfrac{x+1}{x} \Leftrightarrow l'(x)=-1+\ln x+1+\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow l'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

Η l' είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $l''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow l''(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$.

Για $x>1$ έχουμε $l''(x)>0$,για $0<x<1$ έχουμε $l''(x)<0$,η l' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ οπότε η l' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $l'(1)=1$.

Επομένως $l'(x)\geq l'(1) \Leftrightarrow l'(x)\geq 1>0$ άρα η l είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Έχουμε $l(x)\geq 0 \Leftrightarrow l(x)\geq l(1) \overset{l\nearrow}{\Leftrightarrow} x\geq 1$ οπότε $k'(x)=e^x\cdot l(x)\geq 0$ για $x\geq 1$. Η k είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Είναι $k'(x)>0$ για $x>1$, $k'(x)<0$ για $x<1$ οπότε η k είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $k(1)=-e^2$.

Έστω $A_1=(0,1), A_2=[1,+\infty)$. Λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε :

$k(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to 1^-}k(x),\lim\limits_{x\to 0^+}k(x)\right)=\left(k(1),1-e^2\right)=\left(-e^2,1-e^2\right)$ και

$k(A_2)=\left[k(1),\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)\right)=\left[1-e^2,+\infty\right)$.

Επειδή $1-e^2<0$,το 0 ανήκει μόνο στο $k(A_2)$ οπότε υπάρχει μοναδικό λόγω της μονοτονίας η ,τέτοιο ώστε $k(\eta)=0$. Όπως φαίνεται από το $k(A_1)$,η k είναι αρνητική στο A_1. Για $1<x<\eta \overset{k\nearrow\text{στο}[1,+\infty)}{\Rightarrow} k(x)<k(\eta)=0$ και για $x>\eta \Leftrightarrow k(x)>k(\eta)>0$, άρα η k είναι αρνητική στο $(0,\eta)$ και θετική στο $(\eta,+\infty)$.

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{2(\ln x-1)\left(e^x-e^2\right)^2}{x}+2(\ln x-1)^2\left(e^x-e\right)e^x \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=2(\ln x-1)\left(e^x-e^2\right)\left[\frac{\left(e^x-e^2\right)}{x}+(\ln x-1)e^x\right]\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=2(\ln x-1)\left(e^x-e^2\right)\cdot\frac{k(x)}{x}.$$

Έχουμε : $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2(\ln x-1)\left(e^x-e^2\right)\cdot\frac{k(x)}{x}=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

x	$-\infty$	2	ξ	e	$+\infty$
$\ln x-1$	−	−	− 0	+	
e^x-e^2	− 0	+	+	+	
$k(x)$	−	− 0	+	+	
f'	− 0	+ 0	− 0	+	
f	↘ TE	↗ TM	↘ TE	↗	

$\left(\ln x-1=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e\right)$ ή

$\left(e^x-e^2=0 \Leftrightarrow e^x=e^2 \Leftrightarrow x=2\right)$ ή $\left(k(x)=0 \Leftrightarrow k=\eta\right)$.

Επομένως η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς τρείς πραγματικές ρίζες τις e,2,η.

Επειδή $2<\xi<e$, το ξ ταυτίζεται με το η.

δ) Έχουμε $\ln x-1\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq e$ και $e^x\geq e^2 \Leftrightarrow x\geq 2$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[2,\xi],[e,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,2],[\xi,e]$ οπότε παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα στα 2,e και τοπικό μέγιστο στο ξ.

ε) $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}k(\alpha x)dx-\frac{1}{\alpha^2}\int_1^{\alpha}x\,k(x)dx>0$.

$I_1=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}k(\alpha x)dx$, θέτουμε $u=\alpha x \Leftrightarrow x=\frac{u}{\alpha}$ τότε $dx=\frac{1}{\alpha}du$.

Για $x=\frac{1}{\alpha}$ είναι $u=1$ και για $x=1$ είναι $u=\alpha$, άρα

$I_1=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}k(\alpha x)dx=\frac{1}{\alpha}\int_1^{\alpha}k(u)du=\frac{1}{\alpha}\int_1^{\alpha}k(x)dx$. Άρα

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}k(\alpha x)dx-\frac{1}{\alpha^2}\int_1^{\alpha}x\,k(x)dx>0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\int_1^{\alpha}k(x)dx-\frac{1}{\alpha^2}\int_1^{\alpha}x\,k(x)dx>0\Leftrightarrow$$

$\frac{1}{\alpha^2}\left(\int_1^\alpha \alpha\, k(x)dx - \int_1^\alpha x\, k(x)dx\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2}\int_1^\alpha (\alpha - x)k(x)dx > 0$

Είναι $\alpha > \xi$ με $\xi \in (2,e)$ άρα $1 \le x \le \alpha \Rightarrow \alpha - x \ge 0$ και $k(x) > 0$ για κάθε $x > \eta = \xi$ άρα $(\alpha - x)k(x) \ge 0$ για κάθε $1 < x < \alpha$ με $\alpha > \xi$. Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \alpha$ είναι: $\int_1^\alpha (\alpha - x)k(x)dx > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2}\int_1^\alpha (\alpha - x)k(x)dx > 0$.

58. α) $x^2 f'(x) = (1 - \ln x) f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Leftrightarrow$

$\left(\ln f(x)\right)' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{\ln x}{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$. Για $x = 1$ είναι

$\ln f(1) = \frac{\ln 1}{1} + c \Leftrightarrow c = 0$ άρα

$\ln f(x) = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{1}{x}\ln x = \ln x^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f(x) = x^{\frac{1}{x}},\ x > 0$.

β) Είναι $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} \ge 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1 - \ln x \ge 0 \Leftrightarrow \ln x \le 1 \Leftrightarrow x \le e$.

Για κάθε $x \in (0,e)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x > e$ είναι $f'(x) < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι

$f(x) \le f(e) \Leftrightarrow f(x) \le e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}} \le \sqrt[e]{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = e$.

γ) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \le \sqrt[e]{e} \Leftrightarrow xf(x) \le x\sqrt[e]{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = e$. Άρα $\int_{\sqrt{2}}^2 xf(x)dx < \int_{\sqrt{2}}^2 x\sqrt[e]{e}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\sqrt[e]{e}\right]_{\sqrt{2}}^2 = 2\sqrt[e]{e} - \sqrt[e]{e} = \sqrt[e]{e}$

δ) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \le e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}} \le e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow$

$\ln x^{\frac{1}{x}} \le \ln e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow e\ln x \le x \Leftrightarrow \ln x^e \le \ln e^x \Leftrightarrow x^e \le e^x$

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} \overset{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = u = -\infty}{=} \lim\limits_{u\to -\infty} e^u = 0$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln x \cdot \dfrac{1}{x}\right) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$ άρα η f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \overset{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = u = 0}{=} \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$ γιατί

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f . Επειδή η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

στ) Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, e]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(e)\right] = \left(0, e^{\frac{1}{e}}\right]$.

Στο διάστημα $\Delta_2 = (e, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to e^+} f(x)\right) = \left(\lim_{x\to +\infty} f(x), f(e)\right) = \left(1, e^{\frac{1}{e}}\right).$$

Επειδή $f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2) = \left(1, e^{\frac{1}{e}}\right) \neq \varnothing$ η f δεν είναι 1-1, δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-\infty, 0), (0, +\infty)$ αντίστοιχα με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$ και παραγωγίσιμη στα (x_1, x_2) ή (x_2, x_1), εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$.

ζ) Αν $x \leq 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη . Για $x > 0$

$$\alpha^x - x = 0 \Leftrightarrow \alpha^x = x \Leftrightarrow x\ln\alpha = \ln x \Leftrightarrow \ln\alpha = \frac{1}{x}\ln x \Leftrightarrow \ln\alpha = \ln x^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$$

$$x^{\frac{1}{x}} = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha .$$

- Αν $\alpha \in (0,1] \cup \left\{e^{\frac{1}{e}}\right\}$ τότε $\alpha \in f(\Delta_1)$ και $\alpha \notin f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα που βρίσκεται στο $\Delta_1 = (0, e)$.

- Αν $\alpha \in \left(1, e^{\frac{1}{e}}\right)$ τότε $\alpha \in f(\Delta_1)$ και $\alpha \in f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1, Δ_2.
- Τέλος αν $\alpha \in \left(e^{\frac{1}{e}}, +\infty\right)$ τότε το α δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f, οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη.

59. α) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{x} - \alpha = \frac{1-\alpha x}{x}$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\alpha x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-\alpha x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{\alpha}$. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$ είναι $f'(x) < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{1}{\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$.

Η f έχει μέγιστο το $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \ln\frac{1}{\alpha} - \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + 1 = -\ln\alpha$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \leq -\ln\alpha$.

Για να είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, αρκεί $-\ln\alpha < 0 \Leftrightarrow \ln\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x - \alpha x + 1) = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - \alpha x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\left(\frac{\ln x}{x} - \alpha + \frac{1}{x}\right)\right] = +\infty(-\alpha) = -\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (-\infty, -\ln\alpha)$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = \left[\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (-\infty, -\ln\alpha]$.

- Αν $-\ln\alpha > 0 \Leftrightarrow \ln\alpha < 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$, τότε το 0 περιέχεται στο $f(\Delta_1)$ και στο $f(\Delta_2)$, οπότε λόγω της μονοτονίας, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες και απορρίπτεται η περίπτωση αυτή.
- Αν $-\ln\alpha < 0 \Leftrightarrow \ln\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$ τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ και

απορρίπτεται η περίπτωση αυτή.

- Τέλος αν $-\ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ τότε το μηδέν δεν περιέχεται στο $f(\Delta_1)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο Δ_1, ενώ περιέχεται στο $f(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικός $\rho \in \Delta_2$ τέτοιος ώστε $f(\rho) = 0$.

Άρα για α = 1 η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 1 ρίζα.

γ) i. Για κάθε x > 0 είναι $f(x) \le 1 - \alpha \Leftrightarrow f(x) \le f(1)$, οπότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο x = 1.Όμως η f παρουσιάζει μέγιστο στο $\frac{1}{\alpha}$, άρα $\frac{1}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

ii. Για να ορίζεται η $f \circ f$ πρέπει:

$\begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f(x) > f(1) \text{ άτοπο} \end{cases}$, οπότε δεν ορίζεται η $f \circ f$.

iii. Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_1^e |f(x)|dx = -\int_1^5 (\ln x - x + 1)dx = -\int_1^5 \ln x (x)' dx + \left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^e =$$

$$-[x\ln x]_1^e + \int_1^e x\frac{1}{x}dx + \frac{(e-1)^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$E = -e + (e-1) + \frac{(e-1)^2}{2} = \frac{(e-1)^2 - 2}{2} = \frac{e^2 - 2e - 1}{2} \text{ τ.μ.}$$

60. α) $x^2 f'(x) + xf(x) = 1 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (xf(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow$

$xf(x) = \ln x + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x + c}{x}$, $x > 0$, $c \in \mathbb{R}$. $f(1) = -1 \Leftrightarrow c = -1$ άρα

$f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}, x > 0$.

β) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}(\ln x - 1)\right] = -\infty$ άρα η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη. Επίσης

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 1}{x^2} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 1}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ οπότε η $y = 0$ δηλαδή ο άξονας x′x είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) Είναι $f(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x-1}{x}>0 \Leftrightarrow \ln x-1>0 \Leftrightarrow x>e$ οπότε στο $[\lambda,1]$ με $0<\lambda<1$ είναι $f(x)<0$ και το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\lambda)=-\int_{\lambda}^{1} f(x)\,dx=-\int_{\lambda}^{1}\frac{\ln x-1}{x}dx=\int_{\lambda}^{1}\frac{1}{x}dx-\int_{\lambda}^{1}(\ln x)'\ln x dx=$$

$$=\left[\ln|x|\right]_{\lambda}^{1}-\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\lambda}^{1}=-\ln\lambda+\frac{\ln^2\lambda}{2}\Leftrightarrow E(\lambda)=\frac{\ln^2\lambda}{2}-\ln\lambda .$$

δ) $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left[\lambda^2 E(\lambda)\right]=\lim\limits_{\lambda\to 0}\left[\dfrac{\lambda^2\ln^2\lambda}{2}-\lambda^2\ln\lambda\right]=0$ γιατί

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^2\ln^2\lambda=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\ln^2\lambda}{\frac{1}{\lambda^2}}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{2\ln\lambda\frac{1}{\lambda}}{-\frac{2}{\lambda^3}}=\lim_{\lambda\to 0}\left(-\frac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda^2}}\right)\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{\lambda\to 0}\left(-\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{2}{\lambda^3}}\right)=\lim_{\lambda\to 0}\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)=0$$

και $\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda^2\ln\lambda=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda^2}}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{2}{\lambda^3}}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(-\dfrac{\lambda^2}{2}\right)=0$

ε) $f\left(\dfrac{\ln x-1+(e+1)x}{x}\right)=0=f(e)\Leftrightarrow \dfrac{\ln x-1+(e+1)x}{x}=e\Leftrightarrow$

$\ln x-1+\cancel{ex}+x=\cancel{ex}\Leftrightarrow \ln x+x-1=0\,(1)$. Έστω $g(x)=\ln x+x-1,\ x>0$

είναι $g'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0\Rightarrow g\nearrow(0,+\infty)$. $(1)\Rightarrow g(x)=g(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=1$.

61. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\lambda$. Είναι $f(1)=-\lambda-2$, $f'(1)=1-\lambda$ και η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ευθεία $\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=(1-\lambda)x-3$.

β) Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\lambda=\dfrac{1-\lambda x}{x}$. $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 1-\lambda x\geq 0\Leftrightarrow x\leq\dfrac{1}{\lambda}$. Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{1}{\lambda}\right)$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\dfrac{1}{\lambda}\right]$.Για κάθε $x\in\left(\dfrac{1}{\lambda},+\infty\right)$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{1}{\lambda},+\infty\right)$.Η f έχει μέγιστο το $f\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)=\ln\dfrac{1}{\lambda}-\lambda\dfrac{1}{\lambda}-2=-\ln\lambda-3<0$, άρα $f(x)\leq f\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)<0$ για

κάθε $x>0$.

γ) Είναι $f''(x)=\left(\frac{1}{x}-\lambda\right)'=-\frac{1}{x^2}<0$, οπότε η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

δ) Επειδή η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Άρα η f βρίσκεται κάτω και από την ευθεία ε του α) ερωτήματος, δηλαδή $f(x)\le(1-\lambda)x-3$ για κάθε $x>0$.

ε) i. Είναι $f(x)\le(1-\lambda)x-3\Leftrightarrow(1-\lambda)x-3-f(x)\ge 0\Leftrightarrow$ $(1-\lambda)x-3-\ln x+\lambda x+2\ge 0\Leftrightarrow x-1-\ln x\ge 0$ για κάθε $x>0$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E(\lambda)=\int_1^{\lambda}\left[(1-\lambda)x-3-f(x)\right]dx=\int_1^{\lambda}(x-1-\ln x)dx\Leftrightarrow$

$$E(\lambda)=\int_1^{\lambda}x\,dx-\int_1^{\lambda}dx-\int_1^{\lambda}\ln x\,(x)'\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\lambda}-\lambda+1-\left[x\ln x\right]_1^{\lambda}+\int_1^{\lambda}x\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow$$

$$E(\lambda)=\frac{\lambda^2-1}{2}-\lambda+1-\lambda\ln\lambda+\lambda-1\Leftrightarrow E(\lambda)=\frac{1}{2}\left(\lambda^2-1-2\lambda\ln\lambda\right).$$

ii. $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\lambda^2-1-2\lambda\ln\lambda\right)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2}\lambda^2\left(1-\frac{1}{\lambda^2}-2\frac{\ln\lambda}{\lambda}\right)=+\infty$ γιατί

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln\lambda}{\lambda}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\frac{1}{\lambda}}{1}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}=0.$$

62. α) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2\alpha}{2\alpha e^{2\alpha+x}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\alpha e^{2\alpha+x}}=0,$$ οπότε η $y=0$

οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

β) $f'(x)=e^{2\alpha-x}\left(\frac{1}{2\alpha}-\frac{x}{2\alpha}-1\right)$ και $f''(x)=e^{2\alpha-x}\left(\frac{x}{2\alpha}+1-\frac{2}{2\alpha}\right)$

Ολικό μέγιστο. για $x=1-2\alpha$ και σημείο καμπής για $x=2-2\alpha$.

γ) $f(x)=f'(x)\Leftrightarrow\frac{1}{2\alpha}-\frac{x}{2\alpha}-1=\frac{x}{2\alpha}+1\Leftrightarrow x=\frac{1-4\alpha}{2}$ που είναι μοναδική.

δ) $d(\alpha)=\left|f(1)-f'(1)\right|=e^{2\alpha-1}\left(\frac{1}{2\alpha}+2\right)$

$d'(\alpha)=e^{2\alpha-1}\left(\frac{8\alpha^2+2\alpha-1}{2\alpha^2}\right)=e^{2\alpha-1}\frac{8\left(\alpha-\frac{1}{4}\right)\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{2\alpha^2}\geq 0 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha\geq\frac{1}{4}$.

Για $\alpha>\frac{1}{4}$, είναι $d'(\alpha)>0\Rightarrow d\nearrow\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$ και για $\alpha\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ είναι

$d'(\alpha)<0\Rightarrow d\searrow\left(0,\frac{1}{4}\right]$. Το τμήμα έχει το μικρότερο δυνατό μήκος για $\alpha=\frac{1}{4}$.

ε) Είναι $f(x)=(2x+1)e^{\frac{1}{2}-x}$.

$E(\lambda)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda}f(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda}(2x+1)e^{\frac{1}{2}-x}dx=-2(\lambda+1)e^{\frac{1}{2}-\lambda}+2e$ και

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(-2(\lambda+1)e^{\frac{1}{2}-\lambda}+2e\right)=2e$ γιατί

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(\lambda+1)e^{\frac{1}{2}-\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda+1}{e^{\lambda-\frac{1}{2}}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{e^{\lambda-\frac{1}{2}}}=0$.

63. α) $\frac{xf(x)+9}{2+f^2(x)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2xf(x)+18=2+f^2(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)=16\Leftrightarrow$

$f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+16\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)^2=x^2+16$.

Έστω $\varphi(x)=f(x)-x$ τότε αφού $\varphi^2(x)=x^2+16\neq 0$ θα είναι $\varphi(x)\neq 0$ και αφού η φ είναι συνεχής τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως

$\varphi(0)=f(0)=4>0$ άρα $\varphi(x)>0$ οπότε

$\varphi(x)=\sqrt{x^2+16}\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+16}$

β) i. Είναι $h(x)=\ln f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $x+\sqrt{x^2+16}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq 0$ άρα $A_h=\mathbb{R}$.

ii. $h'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+16}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+16}}>0$ άρα η h' είναι $\nearrow\mathbb{R}$ οπότε αντιστρέφεται. Έστω

$y=h(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)\Leftrightarrow e^y=x+\sqrt{x^2+16}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+16}=e^y-x\overset{e^y-x>0}{\Leftrightarrow}$,

οπότε $x^2+16=e^{2y}-2xe^y+x^2\Leftrightarrow 2xe^y=e^{2y}-16\Leftrightarrow x=\frac{e^{2y}-16}{2e^y}$ άρα

$h^{-1}(x)=\dfrac{e^{2x}-16}{2e^x}$. Πρέπει $e^y-x>0\Leftrightarrow e^y>\dfrac{e^{2y}-16}{2e^y}\Leftrightarrow e^{2y}>-16$ που αληθεύει πάντα, άρα $h^{-1}(x)=\dfrac{e^{2x}-16}{2e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) $I_1=\int_0^3\dfrac{1}{\sqrt{x^2+16}}dx=\int_0^3\left[h(x)\right]'dx=\left[h(x)\right]_0^3=h(3)-h(0)=$
$\ln f(3)-\ln f(0)=\ln 8-\ln 4=\ln 2$.

δ) $I_2+16I_1=\int_0^3\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}dx+16\int_0^3\dfrac{1}{\sqrt{x^2+16}}dx=\int_0^3\dfrac{x^2+16}{\sqrt{x^2+16}}dx=$
$\int_0^3\sqrt{x^2+16}\,dx=I_3$.

ε) $I_3=\int_0^3\sqrt{x^2+16}\,dx=\int_0^3(x)'\sqrt{x^2+16}\,dx=\left[x\sqrt{x^2+16}\right]_0^3-\int_0^3\dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx=$
$=15-\int_0^3\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}dx\Leftrightarrow I_3=15-I_2\Leftrightarrow I_3+I_2=15$.

στ) Είναι $\left.\begin{matrix}I_2+I_3=15\\ I_2-I_3=-16I_1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}I_2+I_3=15\\ I_2-I_3=-16\ln 2\end{matrix}$, οπότε $I_2=\dfrac{15}{2}-8\ln 2$ και
$I_3=\dfrac{15}{2}+8\ln 2$.

64. α) Επειδή $f'(x)<0\Rightarrow f\searrow$ στο $[2,5]$ άρα και $1-1$ οπότε η f είναι αντιστρέψιμη με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f. Είναι
$f(A)=\left[f(5),f(2)\right]=\left[f(5),5\right]$ άρα $D_{f^{-1}}=\left[f(5),5\right]$.

β) i. Είναι $\int_{f(2)}^{f(5)}f^{-1}(t)dt+\int_2^5 f(t)dt=0\quad(1)$

Θέτω $f^{-1}(t)=u\Leftrightarrow t=f(u)$ και $dt=f'(u)du$.

Άρα η (1) γίνεται: $\int_2^5 uf'(u)du+\int_2^5 f(t)dt=0\Leftrightarrow$

$\left[uf(u)\right]_2^5-\int_2^5 f(u)du+\int_2^5 f(t)dt=0\Leftrightarrow 5f(5)-2f(2)=0\Leftrightarrow$

$5f(5)=10\Leftrightarrow f(5)=2$.

ii. Θεωρούμε την $h(x)=f(x)+x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[2,5]$ άρα και συνεχής. Επίσης $h(2)=f(2)+2=5+2=7$, $h(5)=f(5)+5=2+5=7$, άρα $h(2)=h(5)$. Επίσης $h'(x)=f'(x)+1$. Άρα από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(2,5)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=-1$. Η ευθεία $\eta:\ x-y+1821=0$

έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\eta = 1$. Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon\varphi} = f'(\xi) = -1$. Επειδή $\lambda_\eta \cdot \lambda_{\varepsilon\varphi} = -1$ τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι κάθετη στην ευθεία (η).

iii. Θεωρούμε την $\varphi(x) = f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[2,5]$ με $\varphi(2) = f(2) - 2 = 5 - 2 = 3 > 0$ και $\varphi(5) = f(5) - 5 = -3 < 0$. Οπότε $\varphi(2) \cdot \varphi(5) < 0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho \in (2,5)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = \rho$. Επίσης $\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$ αφού $f'(x) < 0$ άρα η φ είναι $\searrow$ οπότε το ρ που βρήκαμε προηγουμένως είναι μοναδικό.

iv. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[2,\rho]$ και $[\rho,5]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (2,\rho)$ και $\xi_2 \in (\rho,5)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(\rho) - f(2)}{\rho - 2} = \dfrac{\rho - 5}{\rho - 2}$

και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(5) - f(\rho)}{5 - \rho} = \dfrac{2 - \rho}{5 - \rho}$. Άρα $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \dfrac{\rho - 5}{\rho - 2} \cdot \dfrac{2 - \rho}{5 - \rho} = 1$.

65. α) Το πεδίο ορισμού της f είναι : $A_f = (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty)$.

$f'(x) = -\dfrac{6x^5 + 1}{(x^6 + x)^2}$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$		0	$+\infty$
f′	+		+		−		−	
f	↗		↗		↘		↘	

$-\dfrac{6x^5 + 1}{(x^6 + x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 6x^5 + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 6x^5 \leq -1 \Leftrightarrow x^5 \leq -\dfrac{1}{6} \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}}$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα στα διαστήματα $(-\infty,-1), \left(-1, -\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[-\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}}, 0\right), (0,+\infty)$. παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $-\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}}$ το $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}}\right) = -\dfrac{6\sqrt[5]{6}}{5}$.

β) Έχουμε : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^6 + x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^6} = 0,$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^6+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^6} = 0,$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{1}{x^6+x} = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\underset{<0}{x^5+1}} = -1\cdot(-\infty) = +\infty,$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{x^6+x} = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\underset{>0}{x^5+1}} = -1\cdot(+\infty) = -\infty,$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^6+x} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^5+1}\cdot\dfrac{1}{x} = 1\cdot(-\infty) = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^6+x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^5+1}\cdot\dfrac{1}{x} = 1\cdot(+\infty) = +\infty$.

Αν θεωρήσουμε τα διαστήματα :

$\Delta_1 = (-\infty,-1), \Delta_2 = \left(-1,-\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}}\right], \Delta_3 = \left[-\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}},0\right)$ και $\Delta_4 = (0,+\infty)$,τότε :

$f(\Delta_1) \underset{\text{συνεχής}}{\overset{\nearrow}{=}} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)\right) = (0,+\infty)$,

$f(\Delta_2) \underset{\text{συνεχής}}{\overset{\nearrow}{=}} \left(\lim\limits_{x\to-1^+} f(x), f\left(-\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}}\right)\right] = \left(-\infty,-\dfrac{6}{5\sqrt[5]{6}}\right],$

$f(\Delta_3) \underset{\text{συνεχής}}{\overset{\searrow}{=}} \left(\lim\limits_{x\to0^-} f(x), f\left(-\dfrac{1}{\sqrt[5]{6}}\right)\right] = \left(-\infty,-\dfrac{6\sqrt[5]{6}}{5}\right]$ και

$f(\Delta_4) \underset{\text{συνεχής}}{\overset{\searrow}{=}} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to0^-} f(x)\right) = (0,+\infty)$.Άρα το σύνολο τιμών της f είναι

$f(A) = f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)\cup f(\Delta_4) = \left(-\infty,-\dfrac{6\sqrt[5]{6}}{5}\right]\cup(0,+\infty).$

γ) Το 2024 ανήκει μόνο στα $f(\Delta_1), f(\Delta_4)$ άρα υπάρχουν $\alpha_1\in\Delta_1, \alpha_2\in\Delta_4$ τέτοια ώστε $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 2024$.Τα α_1, α_2 είναι μοναδικά λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 2024$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.

δ) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ άρα έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$ ($x'x$) και στο $+\infty$ και στο $-\infty$ οπότε δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

ε) $f''(x)=-\dfrac{30x^4\left(x^6+x\right)^{\not 2}-\left(6x^5+1\right)\cdot 2\left(x^6+x\right)\left(6x^5+1\right)}{\left(x^6+x\right)^{\not 4_3}}=$

$$-\frac{30x^{10}+30x^5-72x^{10}-24x^5-2}{\left(x^6+x\right)^3}=\frac{42x^{10}-6x^5+2}{\left(x^6+x\right)^3}=\frac{2\left(21x^{10}-3x^5+1\right)}{\left(x^6+x\right)^3}.$$

$$f''(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{2\left(21x^{10}-3x^5+1\right)}{\left(x^6+x\right)^3}\geq 0\Leftrightarrow x^6+x>0\Leftrightarrow x<-1 \text{ ή } x>0.$$

(Αν θέσουμε $x^5=\beta$ στο πολυώνυμο $21x^{10}-3x^5+1$ έχουμε το τριώνυμο $21\beta^2-3\beta+1$,το οποίο έχει διακρίνουσα $\Delta=9-84=-75<0$ οπότε $21\beta^2-3\beta+1>0$ άρα $21x^{10}-3x^5+1>0$)

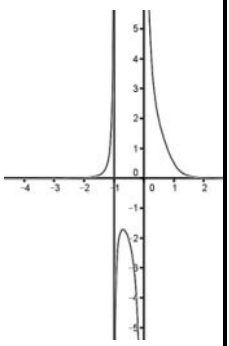
Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,-1),(0,+\infty)$ και κοίλη στο $(-1,0)$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	–		+
$f(x)$	∪	∩		∩

στ) Γνωρίζουμε ότι $\ln x\leq x-1$ και ότι το ίσο ισχύει για $x=1$. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $B\left(1,f(1)\right)\equiv B\left(1,\frac{1}{2}\right)$. Έστω (ε) η ζητούμενη εφαπτομένη. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{7}{4}x+\frac{9}{4}$.

ζ) Η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό .Άρα

$f(x)\geq -\frac{7}{4}x+\frac{9}{4}\Leftrightarrow 4f(x)\geq -7x+9$ για κάθε $x>0$.



η)

θ) $f(x)>0$ στο $[1,2]$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{1}{x^6+x}dx=\int_1^2\frac{6x^5+1-6x^5}{x^6+x}dx=$$

$$\int_1^2\left(\frac{6x^5+1}{x^6+x}-\frac{6x^5}{x^6+x}\right)dx=$$

$$\int_1^2\frac{6x^5+1}{x^6+x}dx-\int_1^2\frac{6x^5}{x^6+x}dx=\left[\ln\left(x^6+x\right)\right]_1^2-\int_1^2\frac{6x^{\not 5}}{\not x\left(x^5+1\right)}dx=$$

$$\ln 66-\ln 2-\frac{6}{5}\int_1^2\frac{5x^4}{x^5+1}dx=\ln 33-\frac{6}{5}\Big[\ln\left(x^5+1\right)\Big]_1^2=\frac{5\ln 33-6\ln 17+6\ln 2}{5}.$$

ι) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\eta\mu x+x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^6+x}\eta\mu x+x\eta\mu\frac{2024}{x}\right)=0+2024=2024.$

$$\left(\left|\frac{1}{x^6+x}\eta\mu x\right|\le\left|\frac{1}{x^6+x}\right|=\frac{1}{x^6+x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x^6+x}\le\frac{1}{x^6+x}\eta\mu x\le\frac{1}{x^6+x}\right.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^6+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^6}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^6+x}\right)$ άρα από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^6+x}\eta\mu x\right)=0\quad.$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\eta\mu\frac{2024}{x}\overset{u=\frac{2024}{x}}{\underset{x\to+\infty\Rightarrow u\to0^+}{=}}\lim_{u\to0^+}\frac{2024}{u}\eta\mu u=\lim_{u\to0^+}2018\frac{\eta\mu u}{u}=2024\cdot1=2024\ .)$$

$g(x)\ge0$ στο $[1,2]$ ($\ln x\ge0, f(x)>0, x^5+1>0$) άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι το

$$\int_1^e g(x)dx=\int_1^e 2024\left(x^5+1\right)f(x)\ln x dx=\int_1^e 2024\left(x^5+1\right)\frac{1}{x^6+x}\ln x dx=$$

$$\int_1^e 2024\cancel{\left(x^5+1\right)}\frac{1}{x\cancel{\left(x^5+1\right)}}\ln x dx=\int_1^e 2024\frac{1}{x}\ln x dx=1012$$

66. α) $f^2(x)=2xf(x)+9\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+9\Leftrightarrow$

$\left(f(x)-x\right)^2=x^2+9$ (1). Επειδή $x^2+9>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι

$g(x)=f(x)-x\ne0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $g(0)=f(0)=3>0$, είναι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η (1)

γίνεται: $f(x)-x=\sqrt{x^2+9}\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ x\in\mathbb{R}$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+9}}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$x^2<x^2+9\Leftrightarrow\sqrt{x^2}<\sqrt{x^2+9}\Leftrightarrow|x|<\sqrt{x^2+9}\Leftrightarrow-\sqrt{x^2+9}<x<\sqrt{x^2+9}\Rightarrow$

$x+\sqrt{x^2+9}>0\Leftrightarrow f(x)>0$ άρα $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=\frac{f'(x)\sqrt{x^2+9}-f(x)\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2}=\frac{\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+9}}\sqrt{x^2+9}-\frac{xf(x)}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}\Leftrightarrow$$

$$f''(x)=\frac{\frac{f(x)\sqrt{x^2+9}-xf(x)}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}=\frac{f(x)\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)}{\sqrt{x^2+9}\left(x^2+9\right)}=\frac{f(x)f(-x)}{\sqrt{x^2+9}\left(x^2+9\right)}>0\Rightarrow.$$

$f\cup\mathbb{R}$.

γ) $\sqrt{x^2+9}=\lambda-x\Leftrightarrow\sqrt{x^2+9}+x=\lambda\Leftrightarrow f(x)=\lambda$. Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-9}{x-\sqrt{x^2+9}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-9}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}\right)}=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=+\infty+\infty=+\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$.

- Αν $\lambda\le0$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda>0$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

δ) $x+\sqrt{x^2+9}+\sqrt{\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)^2+9}<9\Leftrightarrow f(x)+\sqrt{f^2(x)+9}<9\Leftrightarrow$

$f\left(f(x)\right)<f(4)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<4\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+9}<4\Leftrightarrow\sqrt{x^2+9}<4-x$ (2)

Αν $4-x<0\Leftrightarrow x>4$ τότε η (2) είναι αδύνατη. Αν $4-x\ge0\Leftrightarrow x\le4$ η (2) γίνεται: $\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2<(4-x)^2\Leftrightarrow x^2+9<16-8x+x^2\Leftrightarrow8x<7\Leftrightarrow x<\frac{7}{8}$ που είναι δεκτές τιμές.

ε) Είναι $f'(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+9}}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$, άρα

$$I=\int_0^4\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^4\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\left[\ln|f(x)|\right]_0^4=\ln f(4)-\ln f(0)=\ln9-\ln3=\ln3$$

στ) Είναι $M\left(x(t),y(t)\right)$, όπου $y(t)=x(t)+\sqrt{x^2(t)+9}$. Είναι $x'(t)=1$ και

$y'(t)=x'(t)+\frac{x(t)x'(t)}{\sqrt{x^2(t)+9}}$.. Είναι $(OM)(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$, οπότε

$(OM)'(t)=\frac{2x'(t)x(t)+2y(t)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$. Τη χρονική στιγμή t_0 που είναι

$x(t_0)=4$, $y(t_0)=9$ είναι:

$$(OM)'(t_0)=\frac{x'(t_0)x(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=\frac{1\cdot 4+9\left(1+\frac{4\cdot 1}{\sqrt{16+9}}\right)}{\sqrt{16+81}}=\frac{101}{5\sqrt{97}}\,cm/sec$$

ζ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+9}=y\Leftrightarrow\sqrt{x^2+9}=y-x$ (3)

Είναι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}>x\Leftrightarrow y-x>0$ οπότε η (3) γίνεται:

$x^2+9=(y-x)^2\Leftrightarrow x^2+9=y^2-2xy+x^2\Leftrightarrow 2xy=y^2-9\Leftrightarrow x=\frac{y^2-9}{2y}$, άρα

$f^{-1}(y)=\frac{y^2-9}{2y}$, $y\in(0,+\infty)$ οπότε $f^{-1}(x)=\frac{x^2-9}{2x}$, $x\in(0,+\infty)$.

η) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $E(\Omega)=\int_0^4 f(x)dx$. Θέτουμε

$f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και $dx=\left(f^{-1}\right)'(y)dy$. Για $x=0$ είναι $y=3$ και για $x=4$ είναι $y=9$.Τότε

$$E(\Omega)=\int_3^9 y\left(f^{-1}\right)'(y)dy=\left[yf^{-1}(y)\right]_3^9-\int_3^9 f^{-1}(y)dy=9\cdot 4-3\cdot 0-$$

$$\int_3^9\left(\frac{1}{2}y-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{y}\right)dy=36-\left[\frac{1}{4}y^2-\frac{9}{2}\ln y\right]_3^9=18+\frac{9}{2}\ln 3$$

θ) $(AB)=\sqrt{\left(x-f^{-1}(x)\right)^2+\left(f^{-1}(x)-x\right)^2}=\sqrt{2\left(x-f^{-1}(x)\right)^2}=2\left|x-f^{-1}(x)\right|$.

Επειδή $f(x)>x$ η C_f βρίσκεται πάνω από την $y=x$ και λόγω συμμετρίας η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $y=x$. Άρα

$$(AB)=2\left(x-f^{-1}(x)\right)=2\left(x-\frac{x^2-9}{2x}\right)=\frac{2x^2-x^2+9}{x}=\frac{x^2+9}{x}=x+\frac{9}{x}.$$

Είναι $(AB)'(x)=1-\frac{9}{x^2}=\frac{x^2-9}{x^2}$. Για κάθε $x\in(0,3)$ είναι

$(AB)'(x)<0\Rightarrow(AB)\searrow(0,3]$ και για κάθε $x>3$ είναι

$(AB)'(x) > 0 \Rightarrow (AB) \nearrow [3,+\infty)$. Η απόσταση ΑΒ γίνεται ελάχιστη για $x = 3$ με ελάχιστη απόσταση την $(AB) = 3 + \frac{9}{3} = 6$.

ι) Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x^2) \overset{\substack{x^2 = y \\ y \to +\infty}}{=} \lim\limits_{y \to +\infty} f(y) = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f^2(x) - \eta\mu^2 f(x) \right) = 0 \overset{\substack{u = f(x) \\ u \to 0^+}}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \left(u^2 - \eta\mu^2 u \right) = 0$ και επειδή

$|\eta\mu f(x)| < |f(x)| \Leftrightarrow \eta\mu^2 f(x) < f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - \eta\mu^2 f(x) > 0$, είναι

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x^2)}{f^2(x) - \eta\mu^2 f(x)} = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x^2) \cdot \frac{1}{f^2(x) - \eta\mu^2 f(x)} \right] = +\infty(+\infty) = +\infty$$

Επίπεδο δυσκολίας Δ Θέματος

Επίπεδο Δ1

67. α) Για $x=0:\ f(0)-e^{-f(0)}=-1\Leftrightarrow e^{-f(0)}-f(0)-1=0$ (1). Έστω $g(x)=e^{-x}-x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=-e^{-x}-1<0\Rightarrow g\searrow\mathbb{R}\Rightarrow g\ 1-1$

$(1)\Leftrightarrow g(f(0))=g(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(0)=0$.

β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε παραγωγίζοντας την σχέση $f(x)-e^{-f(x)}=x-1\ (*)$ έχουμε:

$$f'(x)+e^{-f(x)}f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)\left(1+e^{-f(x)}\right)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{1+e^{-f(x)}}\quad(2).$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη τότε από τη (2) προκύπτει ότι και η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=-\dfrac{\left(1+e^{-f(x)}\right)'}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^2}=\dfrac{e^{-f(x)}f'(x)}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^2}>0$ αφού η $f'(x)>0$

οπότε η f κυρτή άρα η f' γνησίως αύξουσα. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,x]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{f(x)}{x}$.

Είναι $0<\xi<x$ οπότε $f'(0)<f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<\dfrac{f(x)}{x}<f'(x)\Leftrightarrow$

$\dfrac{x}{2}<f(x)<xf'(x)\quad(3)$. Επίσης $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}<1$ οπότε για $x>0$ θα είναι $xf'(x)<x\quad(4)$. Άρα από (3) και (4) έχουμε $\dfrac{x}{2}<f(x)<xf'(x)<x$.

γ) Είναι $\dfrac{x}{2}<f(x)<x$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ άρα από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Ακόμη επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x)=1821$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{f(x)}}\overset{\substack{u=f(x)\\ x\to+\infty,\\ u\to+\infty}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{e^u}=0$. Από τη σχέση $(*)$ έχουμε:

$f(x)-(x-1)=e^{-f(x)}$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-f(x)}=0$ άρα η

$y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ε) Έστω $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x > 0$. Είναι $h'(x) = \dfrac{f'(x)x - f(x)}{x^2} > 0 \Rightarrow h \nearrow (0, +\infty)$

Είναι $2 \le t \le 3 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(2) \le h(t) \le h(3) \Rightarrow \int_2^3 h(2)dt < \int_2^3 h(t)dt < \int_2^3 h(3)dt$ (5)

Είναι $3 \le t \le 4 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(3) \le h(t) \le h(4) \Rightarrow \int_3^4 h(3)dt < \int_3^4 h(t)dt < \int_3^4 h(4)dt \Leftrightarrow$

$h(3) < \int_3^4 h(t)dt \le h(4)$ (6) (Οι ανισότητες

$h(2) \le h(t) \le h(3), h(3) \le h(t) \le h(4)$ ισχύουν μόνο για $x = 2,3,4$)

Από $(5),(6) \Rightarrow \int_2^3 h(t)dt < \int_3^4 h(t)dt \Leftrightarrow \int_2^3 \dfrac{f(t)}{t}dt < \int_3^4 \dfrac{f(t)}{t}dt$.

στ) Για κάθε $0 \le x \le 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) \le f(x) \le f(1) \Rightarrow f(x) \ge 0$, οπότε $E = \int_0^1 f(x)dx$.

Από την ανισότητα που αποδείξαμε στο β) έχουμε:

$\int_0^1 \dfrac{x}{2}dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 xf'(x)dx < \int_0^1 xdx \Leftrightarrow$

$\left[\dfrac{x^2}{4}\right]_0^1 < E < \left[xf(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx < \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} < E < f(1) - E < \dfrac{1}{2}$ (7)

Είναι $E < f(1) - E \Leftrightarrow 2E < f(1) \Leftrightarrow E < \dfrac{f(1)}{2}$ (8).

Από το β σκέλος για $x = 1$ προκύπτει $\dfrac{1}{2} < f(1) < f'(1) < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{4} < \dfrac{f(1)}{2} < \dfrac{1}{2}$ (9),

οπότε από $(7),(8),(9) \Rightarrow \dfrac{1}{4} < E < \dfrac{1}{2}f(1) < \dfrac{1}{2}$.

68. α) Είναι $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

οπότε είναι και $1-1$.

β) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = \mathbb{R}$, οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

γ) Για $x = y$ είναι $|x - y| = |f(x) - f(y)| = 0$.

Για $x < y$ από το ΘΜΤ στο $[x, y]$, υπάρχει $\xi \in (x, y)$:

$f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \Leftrightarrow 3\xi^2 + 1 = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$.

Όμως $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=\left|3\xi^2+1\right|=3\xi^2+1\geq 1\Rightarrow\left|f(x)-f(y)\right|\geq|x-y|$ (1)

Όμοια για $x>y$. Τώρα θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και όπου y το $f^{-1}(y)$:

$\left|f\left(f^{-1}(x)\right)-f\left(f^{-1}(y)\right)\right|\geq f(x)-f(y)\Leftrightarrow|x-y|\geq\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|$ (2).

Άρα από (1), (2) είναι $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|\leq|x-y|\leq\left|f(x)-f(y)\right|$. Όμοια για $x>y$.

δ) Αντικαθιστούμε $y=x_0$ και έχουμε: $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right|\leq|x-x_0|\Leftrightarrow$

$-|x-x_0|\leq f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\leq|x-x_0|\Leftrightarrow$

$f^{-1}(x_0)-|x-x_0|\leq f^{-1}(x)\leq f^{-1}(x_0)+|x-x_0|$. Από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to x_0}f^{-1}(x)=f^{-1}(x_0)$.

ε) $\lim\limits_{x\to 2}f^{-1}(x)\overset{f^{-1}\text{συνεχής}}{=}f^{-1}(2)=0$ γιατί $f(0)=2$ άρα $f^{-1}(2)=0$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu f^{-1}(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\eta\mu f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)}\cdot\frac{f^{-1}(x)}{x-2}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\eta\mu f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)}\cdot\frac{f^{-1}(x)}{f\left(f^{-1}(x)\right)-2}\right]$$

Θέτουμε $f^{-1}(x)=\omega$. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}f^{-1}(x)=0$ άρα $\omega\to 0$. Τότε

$$\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu f^{-1}(x)}{x-2}=\lim_{\omega\to 0}\left(\frac{\eta\mu\omega}{\omega}\cdot\frac{\omega}{f(\omega)-2}\right)=\lim_{\omega\to 0}\left(\frac{\eta\mu\omega}{\omega}\cdot\frac{\omega}{\omega^3+\omega}\right)=$$

$$\lim_{\omega\to 0}\left(\frac{\eta\mu\omega}{\omega}\cdot\frac{\not{\omega}}{\not{\omega}\left(\omega^2+1\right)}\right)=1\cdot 1=1.$$

στ) $f^{-1}(\xi)+2\xi=0\Leftrightarrow f^{-1}(\xi)=-2\xi\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}(\xi)\right)=f(-2\xi)\Leftrightarrow\xi=f(-2\xi)$.

Έστω $h(x)=f(-2x)-x$, $x\in[0,2]$. Η h είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(2)=f(-4)-2=-68<0$, $h(0)=f(0)=2>0$, άρα από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi)=0\Leftrightarrow f^{-1}(\xi)+2\xi=0$.

Είναι $h(x)=f(-2x)-x=-8x^3-2x+2-x=-8x^3-3x+2$ και

$h'(x)=-24x^2-3<0\Rightarrow h\searrow[0,2]$, οπότε το ξ είναι μοναδικό.

ζ) Είναι $f(x)-x=x^3+2>0$ για κάθε $x\in[2,4]$, άρα $f(x)>x>f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in[2,4]$. $E(\Omega)=\int_2^4\left(f(x)-f^{-1}(x)\right)dx=\int_2^4 f(x)dx-\int_2^4 f^{-1}(x)dx$.

Θέτουμε $f^{-1}(x)=u \Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$.

Για $x=2 \Rightarrow f(u)=2=f(0) \Leftrightarrow u=0$ και για

$x=4 \Rightarrow f(u)=4=f(1) \Leftrightarrow u=1$.

Οπότε $E(\Omega)=\int_2^4\left(x^3+x+2\right)dx-\int_0^1 uf'(u)du=\frac{275}{4}$.

69. α) Έστω $\frac{f(x)-x^2}{x-1}=\varphi(x),\ x\neq 1$ με $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=-3$.

Είναι $f(x)-x^2=\varphi(x)(x-1) \Leftrightarrow f(x)=\varphi(x)(x-1)+x^2$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο x = 1, οπότε:

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[\varphi(x)(x-1)+x^2\right]=1$

β) $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\varphi(x)(x-1)+x^2-1}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\varphi(x)(x-1)+(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(\varphi(x)+(x+1)\right)}{\cancel{x-1}}=-1$

γ) Είναι $f'(x)\leq -1 \Leftrightarrow f'(x)\leq f'(1)$, οπότε η f' έχει μέγιστο στο x = 1 που βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η f' είναι παραγωγίσιμη, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f''(1)=0$.

Επειδή η f'' είναι γνησίως φθίνουσα, είναι και 1-1 οπότε η x= 1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f''(x)=0$.

δ) Για κάθε $x<1 \overset{f''\searrow}{\Leftrightarrow} f''(x)>f''(1)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>1 \overset{f''\searrow}{\Leftrightarrow} f''(x)<f''(1)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

ε) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)\leq -1<0 \Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$.

στ) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ έχει εξίσωση

ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=-x+2$.

Επειδή η f είναι κοίλη στο $[1,+\infty)$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\leq -x+2$ για κάθε $x\geq 1$.

η) Για κάθε $x\geq 1$ είναι: $f(x)\leq -x+2 \Leftrightarrow xf(x)\leq -x^2+2x$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για x = 1, έχουμε:

$\int_1^3 xf(x)dx<\int_1^3\left(2x-x^2\right)dx \Leftrightarrow \int_1^3 xf(x)dx<\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^3 \Leftrightarrow$

$\int_1^3 xf(x)dx < 9-9-\left(1-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3\int_1^3 xf(x)dx < -2$

η) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x)' f(x)dx = \left[xf(x)\right]_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = 1 - \int_0^1 xf'(x)dx$

Για κάθε $x \in$ [illegible] είναι $f'(x) \le -1$, οπότε για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει ότι

$xf'(x) \le -x \Rightarrow \int_0^1 xf'(x)dx \le -\int_0^1 xdx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$-\int_0^1 xf'(x)dx \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \int_0^1 xf'(x)dx \ge \frac{3}{2}$, άρα $\int_0^1 f(x)dx \ge \frac{3}{2}$.

θ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο $[x, x+1]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$

τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$.

Είναι $x < \xi < x+1 \overset{f' \searrow [1,+\infty)}{\Rightarrow} f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) > f(x+1) - f(x)$

70. α) $xf'(x) = -f^2(x) \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow$

$\frac{1}{f(x)} = \ln x + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\ln x + c}$. $f(e) = 1 \Leftrightarrow c = 0$ άρα $f(x) = \frac{1}{\ln x}$.

β) Η εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$

$y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$. Αυτή τέμνει τους άξονες στα σημεία

$A\left(-\frac{f(x_0) - x_0 f'(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right)$ και $B(0, f(x_0) - x_0 f'(x_0))$.

$E_{OAB} = \frac{1}{2}\left|f(x_0) - x_0 f'(x_0)\right| \left|-\frac{f(x_0) - x_0 f'(x_0)}{f'(x_0)}\right| \Leftrightarrow$

$\frac{15}{2} = \frac{1}{2}\frac{\left(f(x_0) - x_0 f'(x_0)\right)^2}{\left|f'(x_0)\right|} \underset{x_0 > e}{\overset{f'(x_0)<0}{\Rightarrow}} -15f'(x_0) = \left(f(x_0) - x_0 f'(x_0)\right)^2$

Αρκεί να δείξουμε ότι συνάρτηση $h(x) = \left(f(x) - xf'(x)\right)^2 + 15f'(x)$ έχει ρίζα

στο (e, e^2). Είναι $f(e) = 1$, $f'(e) = -\frac{1}{e}$, $f(e^2) = \frac{1}{2}$ και $f'(e^2) = -\frac{1}{4e^2}$. Οπότε

$h(e) = 4 - \frac{15}{e} = \frac{4e-15}{e} < 0$ και $h(e^2) = \frac{9}{16} - \frac{15}{4e^2} = \frac{9e^2 - 60}{16e^2} > 0$ γιατί

$3e > 8 \Leftrightarrow 9e^2 > 64 \Leftrightarrow 9e^2 - 60 > 0$, οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (e, e^2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$.

γ) Έστω F μία αρχική της f, τότε $F'(x) = f(x)$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την F στο $[x, x+1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(x+1) - F(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow \frac{1}{\ln \xi} = \int_x^{x+1} f(t)\,dt \quad (3).$$

Όμως $x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \ln x < \ln \xi < \ln(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{\ln \xi} > \frac{1}{\ln(x+1)} \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$

$\frac{1}{\ln x} > \int_x^{x+1} f(t)\,dt > \frac{1}{\ln(x+1)}$. Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln(x+1)} = 0$

οπότε από κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} f(t)\,dt = 0$.

δ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$. Είναι

$f'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x}$, $f''(x) = \frac{\ln x (\ln x + 2)}{x^2 \ln^4 x} > 0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Είναι $\alpha < \xi < \beta \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha} < \frac{\frac{1}{\ln \beta} - \frac{1}{\ln \alpha}}{\beta - \alpha} < -\frac{1}{\beta \ln^2 \beta} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\beta - \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\ln^2 \alpha} < \frac{\ln \alpha - \ln \beta}{\ln \alpha \ln \beta} < -\frac{\beta - \alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{\ln^2 \beta} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{\ln \beta \cancel{\ln \alpha}}{\cancel{\ln^2 \alpha}} < \ln \frac{\alpha}{\beta} < \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \frac{\ln \alpha \cancel{\ln \beta}}{\cancel{\ln^2 \beta}} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{\ln \beta}{\ln \alpha} < \ln \frac{\alpha}{\beta} < \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$$

71. α) Είναι $\int_1^e f(t)\,dt = \lambda \in \mathbb{R}$, οπότε:

$$f(x) = \ln x + \int_1^e \frac{f(t)}{(3-e)x}\,dt - 1 = \ln x + \frac{1}{(3-e)x} \int_1^e f(t)\,dt - 1 = \ln x + \frac{\lambda}{(3-e)x} - 1$$

και $\int_1^e f(t)\,dt = \lambda \Leftrightarrow \int_1^e \left(\ln t + \frac{\lambda}{(3-e)t} - 1 \right) dt = \lambda \Leftrightarrow$

$\int_1^e \ln t dt + \frac{\lambda}{(3-e)}\int_1^e \frac{1}{t} dt - e + 1 = \lambda \Leftrightarrow$

$\int_1^e \ln t (t)' dt + \frac{\lambda}{(3-e)}[\ln t]_1^e - e + 1 = \lambda \Leftrightarrow [t \ln t]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} \cdot t dt + \frac{\lambda}{(3-e)} - e + 1 = \lambda \Leftrightarrow$

$\cancel{e} - [t]_1^e - \cancel{e} + 1 = \lambda - \frac{\lambda}{3-e} \Leftrightarrow 2 - e = \lambda\left(1 - \frac{1}{3-e}\right) \Leftrightarrow \cancel{2-e} = \lambda \frac{\cancel{2-e}}{3-e} \Leftrightarrow \lambda = 3 - e$

και $f(x) = \ln x + \frac{\cancel{3-e}}{\cancel{(3-e)}x} - 1 = \ln x + \frac{1}{x} - 1,\ x > 0$.

β) $x \ln x + 1 = x(\alpha + 1) \Leftrightarrow x \ln x + 1 = x\alpha + x \Leftrightarrow x \ln x + 1 - x = \alpha x \Leftrightarrow$

$\ln x + \frac{1}{x} - 1 = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$.Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$. Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$. Είναι

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(\ln x + \frac{1}{x} - 1\right) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left[(x \ln x + 1 - x)\frac{1}{x}\right] = 1(+\infty) = +\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to 0^+} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+}(-x) = 0$ και

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\ln x + \frac{1}{x} - 1\right) = +\infty + 0 - 1 = +\infty$. Στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x \to 1^-} f(x), \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)\right) = (f(1), +\infty) = (0, +\infty)$. Στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x \to 1^+} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right) = (f(1), +\infty) = (0, +\infty)$.

- Αν $\alpha < 0$ τότε το α δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f, οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha = 0$ τότε $\alpha \notin f(\Delta_1)$ και $\alpha \notin f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη στα διαστήματα Δ_1, Δ_2. Επειδή $f(1) = 0$, η εξίσωση $f(x) = \alpha = 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα την $x = 1$.

- Αν $\alpha>0$ τότε $\alpha\in f(\Delta_1)$ και $\alpha\in f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1 και ακριβώς μια ρίζα στο Δ_2, οπότε έχει ακριβώς δύο ρίζες.

γ) Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow e^x+\ln x=\frac{xe^x+x-1}{x}\Leftrightarrow \cancel{e^x}+\ln x=\cancel{e^x}+1-\frac{1}{x}\Leftrightarrow f(x)=0$$

.Επειδή για κάθε $x\in\Delta_1\cup\Delta_2$ είναι $f(x)>0$ και $f(1)=0$, η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=h(x)$. Είναι $g(1)=e^1+\ln 1=e$, οπότε το σημείο τομής τους είναι το $(1,e)$.

δ) Είναι $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$, $f'(e)=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}=\frac{e-1}{e^2}$ και $f(e)=\frac{1}{e}$.Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(e,\frac{1}{e}\right)$ είναι η ευθεία ε:

$$y-f(e)=f'(e)(x-e)\Leftrightarrow y=\frac{e-1}{e^2}x-1+\frac{2}{e}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{-x+2}{x^3}$.

Για κάθε $x>2$ είναι $f''(x)<0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[2,+\infty)$ και βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x)\le\frac{e-1}{e^2}x-1+\frac{2}{e}\Leftrightarrow e^2f(x)\le(e-1)x-e^2+2e\Leftrightarrow$

$$e^2\left(\ln x+\frac{1}{x}-1\right)\le(e-1)x-e^2+2e\Leftrightarrow e^2\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)-\cancel{e^2}\le(e-1)x-\cancel{e^2}+2e\Leftrightarrow$$

$e^2\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)\le(e-1)x+2e$ για κάθε $x\ge 2$.

ε) $\left(\frac{4}{5}\right)^{20}<e^{-1}\Leftrightarrow\ln\left(\frac{4}{5}\right)^{20}<\ln e^{-1}\Leftrightarrow 20(\ln 4-\ln 5)<-1\Leftrightarrow\ln 4-\ln 5<-\frac{1}{20}\Leftrightarrow$

$$\ln 4<\ln 5-\frac{1}{20}\Leftrightarrow\ln 4+\frac{1}{4}-1<\ln 5+\frac{1}{4}-1-\frac{1}{20}\Leftrightarrow f(4)<\ln 5-1+\frac{1}{5}\Leftrightarrow$$

$f(4)<f(5)$ που ισχύει αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

στ) $x\varphi'(x)+2\varphi(x)=2f(x)\Leftrightarrow x^2\varphi'(x)+2x\varphi(x)=2x\left(\ln x+\frac{1}{x}-1\right)\Leftrightarrow$

$$\left(x^2\varphi(x)\right)'=2x\ln x+2-2x\Leftrightarrow\left(x^2\varphi(x)\right)'=\left(x^2\right)'\ln x+x+2-3x\Leftrightarrow$$

$$\left(x^2\varphi(x)\right)'=\left(x^2\ln x+2x-\frac{3}{2}x^2\right)'\Leftrightarrow$$

$x^2\varphi(x)=x^2\ln x+2x-\frac{3}{2}x^2+c \Leftrightarrow \varphi(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{3}{2}+\frac{c}{x^2}$, $c\in\mathbb{R}$.

$\varphi(1)=2-\frac{3}{2}+c \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}+c \Leftrightarrow c=0$ και $\varphi(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{3}{2}$, $x>0$.

ζ) $f(x)\le\frac{(x-1)^2}{x} \Leftrightarrow \ln x+\frac{1}{x}-1\le\frac{x^2-2x+1}{x} \Leftrightarrow \ln x+\frac{1}{x}-1\le x-2+\frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$\ln x\le x-1$ ισχύει.

η) $f(x)+(x-1)^{10}=0$

Είναι $(x-1)^{10}\ge 0$ για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Επίσης $f(x)\ge 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, άρα $f(x)+(x-1)^{10}>0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$. Επειδή $f(1)+(1-1)^{10}=0$, η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)+(x-1)^{10}=0$.

θ) Έστω $M(x(t),y(t))$, όπου $y(t)=\ln x(t)+\frac{1}{x(t)}-1$ με

$y'(t)=\frac{x'(t)}{x(t)}-\frac{x'(t)}{x^2(t)}$. Η απόσταση του Μ από την αρχή των αξόνων είναι

$s(t)=(OM)(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$.

Είναι $s'(t)=\frac{2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το Β, τότε $x(t_0)=1$ και $y(t_0)=0$. Επειδή το Μ απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα 2 μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο ισχύει ότι $s'(t_0)=2$,

άρα $\frac{x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=2 \Leftrightarrow \frac{1\cdot x'(t_0)+0\cdot y'(t_0)}{\sqrt{1+0}}=2 \Leftrightarrow x'(t_0)=2$

μ.μ./sec

72. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f'(x)=2x\ln(x+1)+\frac{x^2-1}{x+1}-2x\ln x-x^{\not 2}\frac{1}{\not x}+1 \Leftrightarrow$

$f'(x)=2x\ln(x+1)+\not x-\not 1-2x\ln x-\not x+\not 1=2x\ln\frac{x+1}{x}=2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Για κάθε $x>0$ είναι

$1+\frac{1}{x}>1 \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>0 \Leftrightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$.

β) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f''(x)=2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+2x\frac{x}{x+1}\left(1+\frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$f''(x)=2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{2\cancel{x^2}}{x+1}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)=2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x+1}.$$

Η f'' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f^{(3)}(x)=2\frac{\cancel{x}}{x+1}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)+\frac{2}{(x+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$f^{(3)}(x)=-\frac{2}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)^2}<0 \Rightarrow f''\searrow(0,+\infty).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x+1}\right]=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f''(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x+1}\right]=0.$$

Επειδή η f'' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, έχει σύνολο τιμών το $f''((0,+\infty))=(0,+\infty)$, άρα $f''(x)>0 \Rightarrow f\cup(0,+\infty)$.

γ) $(x^2-1)\ln(x+1)+x-1=x^2\ln x+\lambda \Leftrightarrow f(x)=\lambda$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{2}{\cancel{x^3}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0$, άρα

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\ln(x+1)-\ln(x+1)-x^2\ln x+x-1\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\frac{x+1}{x}+\left(x-\ln(x+1)-1\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\left(1-\frac{\ln(x+1)}{x}-\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty+\infty(1-0-0)=+\infty \quad \text{γιατί}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=0$ και

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} \underset{u\to 0^+}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}} \lim_{u\to 0^+} \frac{\ln(1+u)}{u^2} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{u\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+u}}{2u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{2u^2+2u} = +\infty .$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει σύνολο τιμών το $f\left((0,+\infty)\right) = (-1,+\infty)$.

- Αν $\lambda \le -1$ τότε $\lambda \notin f\left((0,+\infty)\right)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda > -1$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) Είναι $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{f'(x)} = e^2$ γιατί

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{u\to 0^+}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}} \lim_{u\to 0^+} \frac{2\ln(1+u)}{u} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{u\to 0^+} \frac{\frac{2}{1+u}}{1} = 2$$

ε) Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x, x+1]$, $x > 0$, οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f(x+1)-f(x)$.

Είναι

$$x < \xi < x+1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x) < f(x+1)-f(x) < f'(x+1) .$$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 2$ και $\lim_{x\to\infty} f'(x+1) \underset{u\to+\infty}{\overset{x+1=u}{=}} \lim_{u\to+\infty} f'(u) = 2$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right) = 2$.

στ) Για κάθε $1 \le x \le 2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(1) \le f'(x) \le f'(2) \Leftrightarrow 2\ln 2 \le f'(x) \le 4\ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$$\ln 2^2 \le f'(x) \le \ln\left(\frac{3}{2}\right)^4 \Leftrightarrow \ln 4 \le f'(x) \le \ln\frac{81}{16} \Leftrightarrow 4 \le e^{f'(x)} \le \frac{81}{16}.$$

Επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [1,2]$, η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\int_1^2 4dx < \int_1^2 e^{f'(x)}dx < \int_1^2 \frac{81}{16}dx \Leftrightarrow 4 < \int_1^2 e^{f'(x)}dx < \frac{81}{16}$$

ζ) $1 \le x \le 2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(1) \le f(x) \le f(2)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [1,2]$ είναι:

$$\int_1^2 f(1)dx < \int_1^2 f(x)dx < \int_1^2 f(2)dx \Leftrightarrow f(1) < \int_1^2 f(x)dx < f(2) \quad (1)$$

$2 \le x \le 3 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(2) \le f(x) \le f(3)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε

$x\in[2,3]$ είναι:

$\int_2^3 f(2)dx<\int_2^3 f(x)dx<\int_2^3 f(3)dx\Leftrightarrow f(2)<\int_2^3 f(x)dx<f(3)$ (2)

Από (1),(2) $\Rightarrow$ $\int_1^2 f(x)dx<\int_2^3 f(x)dx$

73. α) Έστω ότι η f παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο τότε θα έχουμε $f(x)\geq f(x_0)\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)\geq 0$ και για κάθε $x<x_0\Leftrightarrow x-x_0<0$ έχουμε ότι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$ άρα $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε ισχύει:

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Rightarrow f'(x_0)\leq 0$ άτοπο.

β) $f(x)(f'(x)-1)=\frac{1}{2}-\frac{f'(2x)}{2}+xf'(x)-x\Leftrightarrow$

$f(x)(f'(x)-1)=\frac{1}{2}-\frac{f'(2x)}{2}+x(f'(x)-1)\Leftrightarrow$

$f(x)(f'(x)-1)-x(f'(x)-1)=\frac{1}{2}-\frac{f'(2x)}{2}\Leftrightarrow$

$(f(x)-x)(f'(x)-1)=\frac{1}{2}-\frac{f'(2x)}{2}\Leftrightarrow$

$2(f(x)-x)(f'(x)-1)=1-f'(2x)\Leftrightarrow\left((f(x)-x)^2\right)'=\left(x-\frac{f(2x)}{2}\right)'\Leftrightarrow$

$(f(x)-x)^2=x-\frac{f(2x)}{2}+c$, $c\in\mathbb{R}$ Για $x=0$ είναι $c=\frac{1}{2}$ άρα τελικά έχουμε

$(f(x)-x)^2=x+\frac{1}{2}-\frac{f(2x)}{2}$, $x\leq x_0$

γ) Επειδή $(f(x)-x)^2\geq 0$ με την ισότητα να μην ισχύει για κάθε $x\leq x_0$ αφού για $x=0$ είναι $1=0$ που είναι αδύνατο, έχουμε ότι

$x-\frac{f(2x)}{2}+\frac{1}{2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{f(2x)}{2}\leq x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow f(2x)\leq 2x+1\Rightarrow$

$\int_0^{\frac{x_0}{2}}f(2x)dx<\int_0^{\frac{x_0}{2}}(2x+1)dx\Leftrightarrow\int_0^{\frac{x_0}{2}}f(2x)dx<\left[x^2+x\right]_0^{\frac{x_0}{2}}\Leftrightarrow$

$\int_0^{\frac{x_0}{2}}f(2x)dx<\frac{x_0^2}{4}+\frac{x_0}{2}$ (1). Θέτουμε $2x=u\Rightarrow 2dx=du$. Για $x=0$ είναι

$u=0$ ενώ για $x=\frac{x_0}{2}$ είναι $u=x_0$.Η (1) γίνεται: $\int_0^{x_0} f(x)dx < \frac{x_0^2}{8}+\frac{x_0}{4}$

δ) $g''(x)=(g'(x))^2 \Leftrightarrow g''(x)=g'(x)\cdot g'(x) \Leftrightarrow g''(x)-g'(x)\cdot g'(x)=0 \Leftrightarrow$

$e^{-g(x)}g''(x)-e^{-g(x)}g'(x)\cdot g'(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^{-g(x)}g'(x)\right)'=0 \Leftrightarrow e^{-g(x)}g'(x)=c_1$ με

$c_1 \in \mathbb{R}$. Για $x=-1: e^{-g(-1)}g'(-1)=c_1 \Leftrightarrow c_1=e^0\cdot 1 \Leftrightarrow c_1=1$ άρα

$e^{-g(x)}g'(x)=1 \Leftrightarrow \left(-e^{-g(x)}\right)'=(x)' \Leftrightarrow$

$-e^{-g(x)}=x+c_2 \Leftrightarrow e^{-g(x)}=-x-c_2$ με $c_2 \in \mathbb{R}$.

Για $x=-\frac{1}{2}:\ e^{-g\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}-c_2 \Leftrightarrow e^{-\ln 2}=\frac{1}{2}-c_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$.

Άρα τελικά $g(x)=-\ln(-x), x<0$.

ε) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f'(x)x-f(x)}{x^3} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{f'(x)}{x^2}-\frac{f(x)}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f'(x)\frac{1}{x^2}-f(x)\frac{1}{x^3}\right)=$

$=f'(0)(+\infty)-(-1)(+\infty)=+\infty+\infty=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=-1$ επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν ως παραγωγίσιμη.

Είναι $f(0)(f'(0)-1)=\frac{1}{2}-\frac{f'(0)}{2} \Leftrightarrow \frac{f'(0)}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(0)=1>0$.

74. α) Η f γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)<f(\beta)$ άρα $f\nearrow[\alpha,\beta]$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\alpha$ το $f(\alpha)=1$ και ολικό μέγιστο για $x=\beta$ το $f(\beta)=2$.

β) Έστω ότι η αντίστροφή f^{-1} με πεδίο ορισμού το $f([\alpha,\beta])=[f(\alpha),f(\beta)]=[1,2]$ δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$ τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2 \in [1,2]$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$f^{-1}(x_1)\geq f^{-1}(x_2) \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(x_1)\right)\geq f\left(f^{-1}(x_2)\right) \Rightarrow x_1\geq x_2$ άτοπο.

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$.

γ) Θέτουμε $f^{-1}(x)=u \Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$. Για $x=1$ είναι

$f(u)=1 \Leftrightarrow f(u)=f(\alpha) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} u=\alpha$ και για $x=2$ είναι

$f(u)=2 \Leftrightarrow f(u)=f(\beta) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} u=\beta$.

Τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 2\beta-\alpha-\int_1^2 f^{-1}(x)dx \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx = 2\beta-\alpha-\int_\alpha^\beta uf'(u)du \Leftrightarrow$

$\cancel{\int_\alpha^\beta f(x)dx} = 2\beta-\alpha-\left[uf(u)\right]_\alpha^\beta + \cancel{\int_\alpha^\beta f(u)du} \Leftrightarrow 0 = 2\beta-\alpha-\beta f(\beta)+\alpha f(\alpha) \Leftrightarrow$

$2\beta-\alpha-2\beta+\alpha=0$ ισχύει.

δ) i) Πρέπει $1\le x^2\le 2 \Leftrightarrow 1\le|x|\le\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \text{ ή } x\ge 1 \\ -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow$

$x\in\left[-\sqrt{2},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{2}\right]$ και $1\le 2x-1\le 2 \Leftrightarrow 2\le 2x\le 3 \Leftrightarrow 1\le x\le\dfrac{3}{2}$

Άρα η εξίσωση $f^{-1}\left(x^2\right)+e^{x^2-1}-x^2=f^{-1}(2x-1)$ ορίζεται για $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$.

Αφού $\alpha=0$ τότε $f(0)=1\Leftrightarrow f^{-1}(1)=0$ και παρατηρούμε ότι η $x=1$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης.

Ισχύει $e^x\ge x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.

Για x το x^2-1 είναι $e^{x^2-1}\ge x^2$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για

$x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$ άρα για $x\in\left(1,\sqrt{2}\right]$ είναι

$e^{x^2-1}>x^2\Leftrightarrow e^{x^2-1}-x^2>0$ (1)

Επίσης ισχύει $(x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow x^2-2x+1\ge 0\Leftrightarrow x^2\ge 2x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$. Δηλαδή για $x\in\left(1,\sqrt{2}\right]$ είναι

$x^2>2x-1\overset{f^{-1}\nearrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}\left(x^2\right)>f^{-1}(2x-1)$ (2)

Προσθέτοντας τις (1),(2) κατά μέλη προκύπτει ότι για $x\in\left(1,\sqrt{2}\right]$ είναι

$f^{-1}\left(x^2\right)+e^{x^2-1}-x^2>f^{-1}(2x-1)$.

Άρα η $x=1$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

ii) Όπως στο ερώτημα γ) είναι $I=\int_1^2 f^{-1}(x)dx=\int_\alpha^\beta uf'(u)du=\int_0^\beta xf'(x)dx$

Άρα $\int_0^\beta f(x)dx=\int_1^2 f^{-1}(x)dx\Leftrightarrow\int_0^\beta f(x)dx=\int_0^\beta xf'(x)dx\Leftrightarrow$

$\int_0^\beta\left[f(x)-xf'(x)\right]dx=0$.

Έστω η συνάρτηση $k(x)=f(x)-xf'(x)$, $x\in[0,\beta]$, η οποία είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Αν $k(x)\ne 0$ για κάθε $x\in[0,\beta]$ τότε η k διατηρεί πρόσημο άρα:

αν $k(x)>0\Rightarrow\int_0^\beta k(x)dx>0$ άτοπο ή αν $k(x)<0\Rightarrow\int_0^\beta k(x)dx<0$ άτοπο.

Επομένως υπάρχει $x_0\in[0,\beta]$ τέτοιο ώστε $k(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-x_0f'(x_0)=0$

Αν $x_0 = 0$ τότε $f(0) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ αδύνατο.

Άρα υπάρχει $x_0 \in (0,\beta]$ τέτοιο ώστε $k(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \overset{x_0 \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f}{x}\right)'(x_0) = 0 .$$

75. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Όταν $x \in (0,1)$, είναι $f'(x) > 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$. Όταν $x \in (1,+\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

β) Έστω $y = \lambda x$ η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επειδή τέμνει την C_f στα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, ισχύει:

$$\begin{cases} f(\alpha) = \lambda\alpha \\ f(\beta) = \lambda\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{f(\alpha)}{\alpha} \\ \lambda = \frac{f(\beta)}{\beta} \end{cases}, \text{ άρα } \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\ln\alpha + 1}{\alpha^2} = \frac{\ln\beta + 1}{\beta^2} \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 \ln\alpha + \beta^2 = \alpha^2 \ln\beta + \alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2 \ln\alpha - \alpha^2 \ln\beta = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\ln\alpha^{\beta^2} - \ln\beta^{\alpha^2} = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \ln\frac{\alpha^{\beta^2}}{\beta^{\alpha^2}} = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^{\beta^2}}{\beta^{\alpha^2}} = e^{\alpha^2 - \beta^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^{\beta^2}}{\beta^{\alpha^2}} = \frac{e^{\alpha^2}}{e^{\beta^2}} \Leftrightarrow e^{\beta^2}\alpha^{\beta^2} = e^{\alpha^2}\beta^{\alpha^2} \Leftrightarrow (e\alpha)^{\beta^2} = (e\beta)^{\alpha^2} .$$

γ) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[x, x+1]$, $x > 0$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ με: $g'(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{\ln x + 1}{x} = f(x)$, άρα λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε:

$g'(\xi) = \frac{g(x+1) - g(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow g'(\xi) = g(x+1) - g(x)$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, η g' είναι γνησίως φθίνουσα. Είναι $x < \xi < x+1$ και

$$g'(x+1) < g'(\xi) < g'(x) \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)+1}{x+1} < g(x+1) - g(x) < \frac{\ln x + 1}{x} .$$

δ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, ισχύει: $1 \leq x \leq e \Leftrightarrow$

$f(1)\geq f(x)\geq f(e)\Leftrightarrow \frac{2}{e}\leq f(x)\leq 1$. Δηλαδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,e]$.Το εμβαδόν είναι: $E=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{\ln x+1}{x}dx=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx+\int_1^e \frac{1}{x}dx\Leftrightarrow$

$E=\int_1^e \ln x(\ln x)'dx+[\ln x]_1^e=\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ τ.μ..

ε) $\ln x-kx+1=0\Leftrightarrow f(x)=k$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left((\ln x+1)\frac{1}{x}\right)=-\infty(+\infty)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$.Είναι $f((0,1))=(-\infty,1)$ και $f((1,+\infty))=(0,1)$.Αν $k\leq 0$ τότε $k\in f((0,1))$ και $k\notin f((1,+\infty))$, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$. Αν $k\in(0,1)$ ότε $k\in f((0,1))$ και $k\in f((1,+\infty))$, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1),(1,+\infty)$.Αν $k\geq 1$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

76. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $f'(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x\right)=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

β) $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$. Όταν $x>1$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Όταν $0<x<1$ είναι $f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=2\sqrt{1}(\ln 1-2)=2(-2)=-4$.

γ) $\sqrt{\alpha}\ln\alpha+\sqrt{\beta}\ln\beta=2\sqrt{\alpha}+2\sqrt{\beta}-4\Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha}\ln\alpha-4\sqrt{\alpha}+2\sqrt{\beta}\ln\beta-4\sqrt{\beta}=-8\Leftrightarrow$ $f(\alpha)+f(\beta)=-8$ (1). Επειδή $f(x)\leq -4$ για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, είναι $f(\alpha)+f(\beta)\leq -8$, οπότε $(1)\Leftrightarrow \alpha=\beta=1$.

δ) Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $f''(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$.

$f''(x)\geq 0\Leftrightarrow 2-\ln x\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq 2\Leftrightarrow x\leq e^2$. Όταν $0<x<e^2$ είναι $f''(x)>0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0,e^2]$. Όταν $x>e^2$ είναι $f''(x)<0$, άρα η f είναι κοίλη στο $[e^2,+\infty)$. Η f έχει σημείο καμπής το $(e^2,f(e^2))\equiv(e^2,0)$.

ε) Είναι $x_1=1,\ x_2=e^2$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in(1,e^2)$, άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E(\Omega)=-\int_1^{e^2}f(x)dx=-2\int_1^{e^2}\sqrt{x}(\ln x-2)dx\Leftrightarrow$

$$E(\Omega)=-2\int_1^{e^2}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)'(\ln x-2)dx=-\frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}(\ln x-2)\right]_1^{e^2}+\frac{4}{3}\int_1^{e^2}x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=-\frac{4}{3}\left[e^3(2-2)-(-2)\right]+\frac{4}{3}\int_1^{e^2}x^{\frac{1}{2}}dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^{e^2}=-\frac{8}{3}+\frac{8}{9}(e^3-1)=\frac{8(e^3-2)}{9}\ \text{τ.μ.}.$$

στ) $x^2-5x-1=2\sqrt{x}\sqrt{x}(\ln x-2)\Leftrightarrow x^2-5x-1=2x\ln x-4x\Leftrightarrow$

$x^2-2x\ln x-x-1=0$. Έστω $g(x)=x^2-2x\ln x-x-1,\ x>0.$ Είναι

$g'(x)=2x-2\ln x-3$ και $g''(x)=2\dfrac{x-1}{x}$. Για κάθε $0<x<1$ είναι

$g''(x)<0\Rightarrow g'\searrow(0,1]$. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}g'(x)=+\infty$ και $g'(1)=-1$, οπότε στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ η g' έχει σύνολο τιμών το $g'(\Delta_1)=[-1,+\infty)$, άρα υπάρχει

$x_1\in(0,1):\ g'(x_1)=0$.Για κάθε $0<x<x_1\overset{g'\searrow}{\Rightarrow}g'(x)>g'(x_1)=0\Rightarrow g\nearrow(0,x_1]$

.Είναι $g'(x_1)=0\Leftrightarrow 2x_1-2\ln x_1-3=0\Leftrightarrow 2\ln x_1=2x_1-3$ (1). Είναι

$$g(x_1)=x_1^2-x_1 2\ln x_1-x_1-1\overset{(1)}{=}x_1^2-x_1(2x_1-3)-x_1-1=-(x_1-1)^2<0\ ,$$

$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=-1$, οπότε στο διάστημα $A_1=(0,x_1]$ η g έχει σύνολο τιμών το $g(A_1)=(-1,g(x_1)]$.

Επειδή $0\notin g(A_1)$ η $g(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο A_1.

Για κάθε $x_1<x<1\overset{g'\searrow}{\Rightarrow}g'(x)<g'(x_1)=0\Rightarrow g\searrow[x_1,1]$, οπότε $g(x)<g(x_1)<0$ για κάθε $x\in[x_1,1]$. Για κάθε $x>1$ είναι $g''(x)>0\Rightarrow g'\nearrow[1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(2-2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{3}{x}\right)\right]=+\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$ η g' έχει σύνολο τιμών το $g'(\Delta_2)=[-1,+\infty)$, άρα υπάρχει $x_2\in(1,+\infty):\ g'(x_2)=0$. Είναι

$g'(x_2)=0\Leftrightarrow 2x_2-2\ln x_2-3=0\Leftrightarrow 2\ln x_2=2x_2-3\,(2)$ και

$g(x_2)=x_2^2-x_2 2\ln x_2-x_2-1\overset{(2)}{=}-(x_2-1)^2<0$. Για κάθε

$1<x<x_2\overset{g'\nearrow}{\Rightarrow} g'(x)<g'(x_2)<0\Rightarrow g\searrow[1,x_2]$, άρα $g(x)<g(1)=-1$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1-2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=+\infty$.

Στο διάστημα $A_2=[x_2,+\infty)$ η f έχει σύνολο τιμών το $g(A_2)=[g(x_2),+\infty)$.

Επειδή $0\in g(A_2)$ η $g(x)=0$ έχει μία ρίζα στο A_2.

77. α) Επειδή οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, ισχύει:

$\left(f^2(x)+g^2(x)\right)'=(4)'$ ή $2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)=0$. Επειδή

$f'(x)=g^2(x)$, είναι

$2f(x)g^2(x)+2g(x)g'(x)=0\Leftrightarrow 2g(x)g'(x)=-2f(x)g^2(x)\Leftrightarrow$

$g'(x)=\dfrac{\cancel{2}f(x)g^{\cancel{2}}(x)}{\cancel{2}\,\cancel{g(x)}}\Leftrightarrow g'(x)=-f(x)g(x)$.

β) Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής και αφού $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $g(0)=2>0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=g^2(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι $f^2(0)+g^2(0)=4\overset{g(0)=2}{\Leftrightarrow} f^2(0)+4=4\Leftrightarrow$

$f^2(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$. Για $x<0$ είναι

$f(x)<f(0)=0\overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)g(x)<0\Leftrightarrow -f(x)g(x)>0\Leftrightarrow g'(x)>0$ και g γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$. Για $x>0$ είναι

$f(x)>f(0)=0\overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)g(x)>0\Leftrightarrow -f(x)g(x)<0\Leftrightarrow g'(x)<0$ και g γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $g(0)=2$.

γ) Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η f' είναι παραγωγίσιμη με:

$f''(x)=\left(g^2(x)\right)'=2g(x)g'(x)$. Για $x<0$ είναι $g'(x)>0$ και αφού $g(x)>0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) > 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$. Για $x > 0$ είναι $g'(x) < 0$, οπότε $f''(x) < 0$ και f κοίλη στο $[0, +\infty)$.

Η f έχει σημείο καμπής το $(0, f(0)) \equiv (0,0)$.

δ) Η εφαπτομένη της C_f στο Ο είναι η ευθεία $\varepsilon : y - f(0) = f'(0)(x-0)$.

Όμως $f'(0) = g^2(0) = 4$, άρα ε: $y = 4x$.

ε) Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Δηλαδή $f(x) \le 4x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = \int_0^1 |f(x) - 4x| dx = \int_0^1 (4x - f(x)) dx \Leftrightarrow$

$$E = \int_0^1 4x dx + \int_0^1 \frac{g'(x)}{g(x)} dx = 2\left[x^2\right]_0^1 + \left[\ln g(x)\right]_0^1 = 2 + (\ln g(1) - \ln g(0)) = 2 - \ln 2$$

78. α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, \lambda]$ και $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [1, \lambda]$, ισχύει: $E(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx = \int_1^\lambda \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx \Leftrightarrow$

$$E(\lambda) = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^\lambda - \int_1^\lambda \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{\lambda^3}{3} \ln \lambda - \frac{1}{3} \int_1^\lambda x^2 dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{\lambda^3}{3} \ln \lambda - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^\lambda = \frac{\lambda^3}{3} \ln \lambda - \frac{\lambda^3 - 1}{9} = \frac{1}{9}(3\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3 + 1).$$

β) Η συνάρτηση $E(\lambda)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$E'(\lambda) = \frac{1}{9}\left(9\lambda^2 \ln \lambda + 3\lambda^3 \frac{1}{\lambda} - 3\lambda^2\right) = \lambda^2 \ln \lambda > 0$ για κάθε $\lambda \in (1, +\infty)$, άρα η $E(\lambda)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Είναι

$\lim\limits_{\lambda \to 1^+} E(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to 1^+} \frac{1}{9}(3\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3 + 1) = 0$ και $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{9}(3\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3 + 1)$

$= \lim\limits_{\lambda \to +\infty}\left[\frac{1}{9}\lambda^3\left(3 \ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda^3}\right)\right] = +\infty$.

Για το σύνολο τιμών της Ε ισχύει: $E((1, +\infty)) = \left(\lim\limits_{\lambda \to 1^+} E(\lambda), \lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)\right) = (0, +\infty)$.

Αν $\alpha \le 0$, τότε η εξίσωση $E(\lambda) = \alpha$ είναι προφανώς αδύνατη.

Αν $\alpha > 0$, τότε επειδή το α ανήκει στο σύνολο τιμών της Ε και η Ε είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση $E(\lambda) = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα.

γ) Αρκεί $x^{x^2} \geq e^{-\frac{1}{2e}} \Leftrightarrow \ln x^{x^2} \geq \ln e^{-\frac{1}{2e}} \Leftrightarrow x^2 \ln x \geq -\frac{1}{2e} \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{1}{2e}$.

Είναι $f'(x) = x(2\ln x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{2}}$.

Για κάθε $x > e^{-\frac{1}{2}}$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)$ και για κάθε $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left(0, e^{-\frac{1}{2}} \right]$. Η f έχει ελάχιστο το $f\left(e^{-\frac{1}{2}} \right) = -\frac{1}{2e}$, άρα $f(x) \geq -\frac{1}{2e} \Leftrightarrow x^2 \ln x \geq -\frac{1}{2e} \Leftrightarrow x^{x^2} \geq e^{-\frac{1}{2e}}$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = e^{-\frac{1}{2}}$, είναι και: $\int_1^e x^{x^2} dx > \int_1^e e^{-\frac{1}{2e}} dx$.

δ) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{f(x)\left(e^x - 1\right)}{x^2} \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x^{\not 2} \ln x \left(e^x - 1\right)}{x^{\not 2}} \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x \ln x \cdot \dfrac{e^x - 1}{x} \right) = 0$ γιατί

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x - 1}{x} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x}{1} = 1$

79. α) Είναι $e^{f(1)} + f(1) = 1$ (1). Έστω $g(x) = e^x + x,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι

$g'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow g\ 1-1$. $(1) \Leftrightarrow g(f(1)) = g(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(1) = 0$

β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)}$, οπότε και $e^{f(x_1)} + f(x_1) = e^{f(x_2)} + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f\ 1-1$.

Έστω $f(x) = y$, τότε $e^y + y = x$, άρα $f^{-1}(y) = e^y + y,\ y \in \mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x) = e^x + x,\ x \in \mathbb{R}$.

γ) Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(x) = e^x + x > x$, οπότε λόγω συμμετρίας είναι $f(x) < x$, άρα $f^{-1}(x) > x > f(x)$ και οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} δεν τέμνονται.

δ) Είναι $\left(e^{f(x)} + f(x) \right)' = (x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{e^{f(x)} + 1}$, άρα

$f'(1) = \dfrac{1}{e^{f(1)} + 1} = \dfrac{1}{2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ έχει εξίσωση

$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

Είναι $f''(x)=-\dfrac{\left(e^{f(x)}+1\right)'}{\left(e^{f(x)}+1\right)^2}=-\dfrac{e^{f(x)}f'(x)}{\left(e^{f(x)}+1\right)^2}<0\Rightarrow f\cap\downarrow\mathbb{R}$ οπότε η C_f βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, εκτός του σημείου επαφής τους, άρα

$f(x)\le\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Είναι $\int_4^6 e^{f(x)}dx=\int_4^6\left(x-f(x)\right)dx=\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_4^6-\int_4^6 f(x)dx=10-\int_4^6 f(x)dx$

.Επειδή στη σχέση (2) η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, είναι:

$\int_4^6 f(x)dx<\int_4^6\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\right)dx=\left[\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{2}x\right]_4^6=4\Leftrightarrow\ -\int_4^6 f(x)dx>-4\Leftrightarrow$

$10-\int_4^6 f(x)dx>6\Leftrightarrow\ \int_4^6 e^{f(x)}dx>6$

στ) Είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$. Για κάθε $x\ge1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)\ge f(1)=0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega)=\int_1^{e+1}f(x)dx$. Θέτουμε

$f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και $dx=\left(f^{-1}\right)'(y)dy$.

Για $x=1$ είναι $f^{-1}(y)=1=f^{-1}(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}y=0$ και για $x=e+1$ είναι

$f^{-1}(y)=e+1=f^{-1}(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}y=1$. Τότε

$E(\Omega)=\int_0^1 y\left(f^{-1}\right)'(y)dy=\left[yf^{-1}(y)\right]_0^1-\int_0^1 f^{-1}(y)dy=f^{-1}(1)-\int_0^1\left(e^y+y\right)dy\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=e+1-\left[e^y+\dfrac{y^2}{2}\right]_0^1=\cancel{e}+1-\cancel{e}-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$ τ.μ.

80.α) $e^x\left(f(x)-2\right)+f'(x)\left(e^x+1\right)=0 \Leftrightarrow e^x f(x)-2e^x+f'(x)\left(e^x+1\right)=0 \Leftrightarrow$

$\left(e^x+1\right)' f(x)+f'(x)\left(e^x+1\right)=2e^x \Leftrightarrow \left[\left(e^x+1\right)f(x)\right]'=\left(2e^x\right)' \Leftrightarrow$

$\left(e^x+1\right)f(x)=2e^x+c \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2e^x+c}{e^x+1}$.

Είναι $f(0)=1 \Leftrightarrow \dfrac{2+c}{2}=1 \Leftrightarrow c=0$, άρα $f(x)=\dfrac{2e^x}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) $e^x(2-\alpha)-\alpha=0 \Leftrightarrow 2e^x-\alpha e^x-\alpha=0 \Leftrightarrow 2e^x-\alpha\left(e^x+1\right)=0 \Leftrightarrow$

$2e^x=\alpha\left(e^x+1\right) \Leftrightarrow \dfrac{2e^x}{e^x+1}=\alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha$. Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f για να διαπιστώσουμε αν υπάρχουν $x \in A$ ώστε $f(x)=\alpha$.

Είναι $f'(x)=\dfrac{2e^x}{\left(1+e^x\right)^2}>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\frac{1}{e^x}+1}=2$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x}{1+e^x}=\dfrac{0}{1+0}=0$. Είναι $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(0,2)$

.

• Αν $\alpha \in (0,2)$, τότε υπάρχει μοναδικός $x_0 \in A=\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\alpha$.

• Αν $\alpha \le 0$ ή $\alpha \ge 2$ η εξίσωση $f(x)=\alpha$ είναι αδύνατη.

γ) Επειδή $\dfrac{3}{2} \in f(A)$ υπάρχει μοναδικό $k \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(k)=\dfrac{3}{2}$. Τότε:

$f\left(\dfrac{3e^x+1}{1+e^x}\right)=f(k) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \dfrac{3e^x+1}{1+e^x}=k \Leftrightarrow 3e^x+1=k+ke^x \Leftrightarrow 3e^x-ke^x=k-1 \Leftrightarrow$

$e^x(3-k)=k-1$ (3). Είναι $f(1)=\dfrac{2e}{1+e}<\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 4e<3+3e \Leftrightarrow e<2$ ισχύει, άρα

$f(1)<f(k) \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} 1<k$. Επίσης $f(2)=\dfrac{2e^2}{1+e^2}>\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 4e^2>3+3e^2 \Leftrightarrow e^2>3$

ισχύει, άρα $f(k)<f(2) \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} k<2$, οπότε $k \in (1,2)$ και η (3) γίνεται:

$e^x=\dfrac{k-1}{3-k}>0 \Leftrightarrow x=\ln\dfrac{k-1}{3-k}$

δ) Είναι $f'(0)=\dfrac{2e^0}{\left(1+e^0\right)^2}=\dfrac{1}{2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση:

$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x+1$. Είναι $f''(x)=\dfrac{2e^x\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3}$. Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f''(x)>0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0,1]$, επομένως βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Δηλαδή $f(x)\le\dfrac{1}{2}x+1$ για κάθε $x\in[0,1]$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x+1-f(x)\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^1 xdx+\int_0^1 dx-\int_0^1\frac{2e^x}{1+e^x}dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+1-2\int_0^1\frac{\left(1+e^x\right)'}{1+e^x}dx=\frac{1}{4}+1-2\left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^1\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\frac{5}{4}-2\left(\ln(1+e)-\ln 2\right)=\frac{5}{4}-2\ln\frac{1+e}{2}\ \tau.\mu..$$

81.α) Θεωρούμε την $g(x)=f(x)-3$, συνεχής στο $[0,9]$ με $g(0)=f(0)-3=-3<0$ και $g(9)=f(9)-3=9-3=6>0$ άρα $g(0)\cdot g(9)<0$ και από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,9)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=3$.

β) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[0,x_0]$ και $[x_0,9]$ οπότε υπάρχουν $x_1\in(0,x_0)$ και $x_2\in(x_0,9)$ τέτοια ώστε:

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=\frac{3}{x_0}\Leftrightarrow\frac{1}{f'(x_1)}=\frac{x_0}{3}\quad(1)\ \text{και}$$

$$f'(x_2)=\frac{f(9)-f(x_0)}{9-x_0}=\frac{9-3}{9-x_0}\Leftrightarrow\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{9-x_0}{6}\Leftrightarrow\frac{2}{f'(x_2)}=\frac{18-2x_0}{6}\quad(2).$$

Οπότε προσθέτοντας (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{2}{f'(x_2)}=\frac{x_0}{3}+\frac{18-2x_0}{6}=\frac{2x_0+18-2x_0}{6}=3.$$

γ) i. Αφού η f είναι κοίλη τότε η $f'\searrow$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[0,3]$ και $[3,9]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(0,3)$ και $\xi_2\in(3,9)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3}=\dfrac{f(3)}{3}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(9)-f(3)}{9-3}=\dfrac{9-f(3)}{6}$

$\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{f(3)}{3} > \dfrac{9-f(3)}{6} \Leftrightarrow 2f(3) > 9 - f(3) \Leftrightarrow f(3) > 3$.

ii. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \Leftrightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(x)}{x}$. Όμως $\xi < x$ και $f'\searrow$ άρα $f'(\xi) > f'(x)$ δηλαδή $\dfrac{f(x)}{x} > f'(x) \overset{x>0}{\Rightarrow} f(x) > xf'(x) \Leftrightarrow f(x) - xf'(x) > 0$.

iii. Είναι $f(x) - xf'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,9]$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, έχουμε: $\int_0^9 (f(x) - xf'(x))dx > 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^9 f(x)dx - \int_0^9 xf'(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^9 f(x)dx - \left[xf(x)\right]_0^9 + \int_0^9 f(x)dx > 0 \Leftrightarrow$

$2\int_0^9 f(x)dx - 9f(9) > 0 \Leftrightarrow 2\int_0^9 f(x)dx > 81 \Leftrightarrow \int_0^9 f(x)dx > \dfrac{81}{2}$.

iv. Επειδή $f(x) \geq 0$ και $f(x) \geq xf'(x)$ για κάθε $x \in [0,9]$, είναι και $f^2(x) \geq xf'(x)f(x)$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, έχουμε:

$$\int_0^9 f^2(x)dx > \int_0^9 xf'(x)f(x)dx = \int_0^9 x\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]'dx = \left[x\frac{f^2(x)}{2}\right]_0^9 - \int_0^9 \frac{f^2(x)}{2}dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^9 f^2(x)dx + \int_0^9 \frac{f^2(x)}{2}dx > 9\frac{f^2(9)}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\int_0^9 f^2(x)dx > \frac{729}{2} \Leftrightarrow$$

$\int_0^9 f^2(x)dx > 243$

v. Λόγω του Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχει $\xi \in (0,9)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(9)-f(0)}{9} = 1$. Έστω $g(x) = f(x) - x,\ x \in [0,9]$. Είναι

$g'(x) = f'(x) - 1$. Για κάθε $0 < x < \xi \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(\xi) = 1 \Leftrightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow$

$g\nearrow[1,\xi]$. Για κάθε $0 < x \leq \xi \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) = 0$. Για κάθε

$\xi < x < 9 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(\xi) = 1 \Leftrightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g\searrow[\xi,9]$. Για κάθε

$\xi < x < 9 \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(x) > g(9) = 0$. Άρα για κάθε $x \in (0,9)$ είναι

$g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > x$.

82.α) $f(x) = (2x-1)e^x \Leftrightarrow f(x)e^{-x} - 2x + 1 = 0$.

Έστω $g(x) = f(x)e^{-x} - 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} - 2$

και $g''(x)=f''(x)e^{-x}-f'(x)e^{-x}-f'(x)e^{-x}+f(x)e^{-x} \Leftrightarrow$

$g''(x)=e^{-x}\left(f''(x)-2f'(x)+f(x)\right)=0 \Leftrightarrow g'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$.

$g'(1)=f'(1)e^{-1}-f(1)e^{-1}-2=0 \Leftrightarrow c=0$ και $g'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$

.Είναι $g(1)=0 \Leftrightarrow c_1=0$ άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)=0 \Leftrightarrow$

$f(x)e^{-x}-2x+1=0 \Leftrightarrow f(x)=(2x-1)e^{x}$

β) $xe^{x}=\frac{1}{2}\left(\alpha+e^{x}\right) \Leftrightarrow 2xe^{x}-e^{x}=\alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha$ (1). Είναι $f'(x)=(2x+1)e^{x}$.

Για κάθε $x<-\frac{1}{2}$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ και για κάθε $x>-\frac{1}{2}$ είναι

$f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$. Η f έχει ελάχιστο το $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{\sqrt{e}}=-\frac{2\sqrt{e}}{e}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{e^{-x}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Στο διάστημα $A_1=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ είναι $f(A_1)=\left(-\frac{2\sqrt{e}}{e},0\right)$ και στο

$A_2=\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ είναι $f(A_2)=\left(-\frac{2\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$.Αν $\alpha<-\frac{2\sqrt{e}}{e}$ τότε $\alpha\notin f(A)$

και η (1) είναι αδύνατη.

Αν $\alpha=-\frac{2\sqrt{e}}{e}$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση την $x=-\frac{1}{2}$.

Αν $\alpha\in\left(-\frac{2\sqrt{e}}{e},0\right)$ τότε $\alpha\in f(A_1),\ \alpha\in f(A_2)$ οπότε η (1) έχει μια ρίζα σε

καθένα από τα A_1,A_2 .

Αν $\alpha\geq 0$, τότε $\alpha\in f(A_2)$ και η (1) έχει ακριβώς μια ρίζα.

γ) $g(x)=\frac{f(x)}{2x-1}=e^{x}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$, η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη

της C_g στο $-\infty$. Έστω $\lambda<0$. Είναι $E(\lambda)=\int_{\lambda}^{o}e^{x}dx=1-e^{\lambda}$ και το ζητούμενο

εμβαδό είναι $E(\Omega)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\left(1-e^{\lambda}\right)=1$

δ) $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-e=3ex-3e \Leftrightarrow y=3ex-2e$

ε) $f'(x)=2e^{x}+(2x-1)e^{x}=(2x+1)e^{x}$,

$f''(x)=2e^{x}+(2x+1)e^{x}=(2x+3)e^{x}>0$,άρα f κυρτή στο $(0,+\infty)$, οπότε

βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός βέβαια από το σημείο επαφής. Δηλαδή $f(x) \geq 3ex - 2e$.

στ) $E(\Omega) = \int_1^2 \left(f(x) - 3ex + 2e\right)dx = \int_1^2 (2x-1)e^x dx - \left[\frac{3e}{2}x^2\right]_1^2 + 2e =$

$= \left[(2x-1)e^x\right]_1^2 - \int_1^2 2e^x dx - \frac{9e}{2} + 2e = 3e^2 - e - 2e^2 + 2e - \frac{9e}{2} + 2e = e^2 - \frac{3e}{2}$.

83.α) Είναι (1) $f(x)f'(x) = f'(x) - x$ για κάθε $x \in (-3,3)$ και παραγωγίζοντας την (1) έχουμε: $\left[f'(x)\right]^2 + f(x)f''(x) = f''(x) - 1$ (2). Αν η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = x_0 \in (-3,3)$ τότε αφού η f είναι συνεχής στο $[-3,3]$ πρέπει $f''(x_0) = 0$. Στην (2) για $x = x_0$ προκύπτει

$\left[f'(x_0)\right]^2 + 0 = 0 - 1 \Leftrightarrow \left[f'(x_0)\right]^2 = -1$ (άτοπο). Άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

β) $(1) \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 2f'(x) - 2x \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)' = \left(2f(x) - x^2\right)' \Leftrightarrow$

$f^2(x) = 2f(x) - x^2 + c$. Για $x = 0$ είναι $16 = 8 + c \Leftrightarrow c = 8$ άρα (3)

$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 8 = 0$, $x \in (-3,3)$

γ) Από $(3) \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) + 1 = 9 - x^2 \Leftrightarrow \left(f(x) - 1\right)^2 = 9 - x^2$.

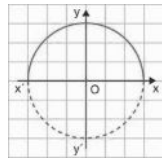
Έστω $h(x) = f(x) - 1$ τότε $h^2(x) = 9 - x^2 > 0$ για κάθε $x \in (-3,3)$, άρα $h(x) \neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3,3)$.

Επειδή $h(0) = f(0) - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$ τότε $h(x) > 0$. Οπότε από

$h(x) = \sqrt{9 - x^2}$ δηλαδή $f(x) - 1 = \sqrt{9 - x^2} \Leftrightarrow f(x) = 1 + \sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-3,3]$.

Είναι $f(-x) = 1 + \sqrt{9 - (-x)^2} = 1 + \sqrt{9 - x^2} = f(x)$ οπότε η f είναι άρτια.

Επίσης $I = \int_{-\alpha}^{0} f(t)dt$. Θέτω $t = -u$ οπότε $dt = -du$. Οπότε



$I = \int_{\alpha}^{0} f(-u)(-du) = \int_0^{\alpha} f(-u)du \overset{f_{αρτ}}{=} \int_0^{\alpha} f(u)dx = \int_0^{\alpha} f(t)dt$.

ε) Είναι $f(x) - 1 = \sqrt{9 - x^2} \geq 0$ όταν $x \in [-3,3]$. Άρα

$E(\Omega) = \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}dx$.

Έστω $\sqrt{9 - x^2} = y \Leftrightarrow 9 - x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό του ημικυκλίου με κέντρο $O(0,0)$ και $\rho = 3$.

$E(\Omega)=\dfrac{\pi\cdot 3^2}{2}=\dfrac{9\pi}{2}$ τ.μ.

84.α) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}\Leftrightarrow f(x)\left(x^2+4\right)-4x=0$**.**

Έστω $g(x)=f(x)\left(x^2+4\right)-4x,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι

$g'(x)=f'(x)\left(x^2+4\right)+2xf(x)-4$ και

$g''(x)=f''(x)\left(x^2+4\right)+4xf'(x)+2f(x)=0\Leftrightarrow g'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$.Επειδή η ευθεία $y=x$ εφάπτεται της C_f στο Ο, είναι $f(0)=0$ και $f'(0)=1$, οπότε $g'(0)=0\Leftrightarrow c=0$, άρα $g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$. Είναι $g(0)=0\Leftrightarrow c_1=0$, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)=0\Leftrightarrow$

$f(x)\left(x^2+4\right)-4x=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$.

β) Είναι $f'(x)=\dfrac{4\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^2}$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα είναι $(-\infty,-2],[2,+\infty)$ και $\nearrow[-2,2]$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(-2)=-1$ και τοπικό μέγιστο το $f(2)=1$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{x^2+4}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. Στο $A_1=(-\infty,-2]$ είναι $f(A_1)=[-1,0)$, στο $A_2=[-2,2]$ είναι $f(A_2)=[-1,1]$ και στο $A_3=[2,+\infty)$ είναι $f(A_3)=[-1,0)$.Είναι $f(A)=[-1,1]$

γ) Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες και αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ τότε η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f .

δ) i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\eta\mu x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{4x}{x^2+1}\dfrac{\eta\mu x}{2x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x^2+1}\cdot\eta\mu x\right]$.

Είναι $\left|\dfrac{2}{x^2+1}\eta\mu x\right|\le\dfrac{2}{x^2+1}$ και από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\eta\mu x}{2x}=0$.

ii. $\int_0^{\frac{1}{x}}f(t)dt=\int_0^{\frac{1}{x}}\dfrac{4t}{t^2+4}dt=2\left[\ln\left|t^2+4\right|\right]_0^{\frac{1}{x}}=2\left[\ln\left(\dfrac{1}{x^2}+4\right)-\ln 4\right]=2\ln\dfrac{4x^2+1}{4x^2}$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2\int_0^{\frac{1}{x}}f(t)dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[4x^2\ln\dfrac{4x^2+1}{4x^2}\right]=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}{\frac{1}{4x^2}}=\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}\overset{\frac{0}{0}}{=}1.$$

ε) Για κάθε $t\in\mathbb{R}$ $-1\le f(t)\le 1$ άρα $\int_x^y -1dt\le\int_x^y\frac{4t}{t^2+4}dt\le\int_x^y dt\Leftrightarrow$

$$-(y-x)\le 2\left[\ln\left(t^2+4\right)\right]_x^y\le y-x\Leftrightarrow$$

$$-\left(\frac{y-x}{2}\right)\le\ln\frac{y^2+4}{x^2+4}\le\frac{y-x}{2}\Leftrightarrow\left|\ln\frac{y^2+4}{x^2+4}\right|\le\frac{y-x}{2}.$$

στ) είναι $-1\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(-2)=-1$ άρα η εξίσωση $f(x)=-1$ έχει μοναδική λύση $x=-2$.

ζ) Είναι $f(x)\ge -1\ \forall x\in\mathbb{R}$ άρα $f(x_1)+1\ge 0$, $f(x_2)+1\ge 0$ και είναι $f(x)=-1$ μόνο για $x=-2$. Άρα $\left[f(x_1)+1\right]+\left[f(x_2)+1\right]=0\Leftrightarrow x_1=x_2=-2$.

η) Είναι $f(-2)=-1\ne 1=f(2)$ και f συνεχής στο $[-2,2]$.

Αφού για παράδειγμα $-1<\frac{\sqrt{12}}{5}<1$, $-1<\frac{\sqrt{13}}{5}<1$ τότε από ΘΕΤ υπάρχουν $\alpha,\beta\in(-2,2)$ τέτοια ώστε $f(\alpha)=\frac{\sqrt{12}}{5}$ και $f(\beta)=\frac{\sqrt{13}}{5}$. Τότε

$$f^2(\alpha)+f^2(\beta)=\frac{12}{25}+\frac{13}{25}=1.$$

85.α) i. $f'(x)=2f^2(x)-6f(x)+9\Leftrightarrow f'(x)=f^2(x)+f^2(x)-6f(x)+9\Leftrightarrow$

$(1)\Rightarrow f'(x)=f^2(x)+(f(x)-3)^2>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ οπότε η f είναι $\nearrow$ στο $[\alpha,\beta]$.

ii. Αφού $\alpha<\beta\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(\alpha)<f(\beta)\Leftrightarrow f(\alpha)<3f(\alpha)\Leftrightarrow 2f(\alpha)>0\Leftrightarrow f(\alpha)>0$ και για $x\ge\alpha$ θα είναι $f(x)\ge f(\alpha)>0$ άρα $f(x)>0$.

iii. Από την (1) προκύπτει ότι $f'(x)>f^2(x)$ και αφού $f(x)>0$ τότε

$$\frac{f'(x)}{f(x)}>f(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}-f(x)>0$$ οπότε και

$\int_\alpha^\beta \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - f(x) \right) dx > 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{f(x)} dx - \int_\alpha^\beta f(x) dx > 0 \Leftrightarrow$

$\left[\ln f(x) \right]_\alpha^\beta > \int_\alpha^\beta f(x) dx \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x) dx < \ln \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \ln 3$.

β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε από την (1) θα είναι και η f' παραγωγίσιμη με $f''(x) = 2f(x)f'(x) + 2\left[f(x) - 3 \right] f'(x) = 2f'(x)\left[2f(x) - 3 \right]$. Αν $f(\alpha) > 2$ τότε $f(x) \geq f(\alpha) > 2 \Leftrightarrow 2f(x) > 4 \Leftrightarrow 2f(x) - 3 > 1 > 0$ οπότε η $f''(x) = 2f'(x)\left[2f(x) - 3 \right] > 0$ αφού και $f'(x) > 0$, συνεπώς η f κυρτή.

γ) Έστω ότι υπάρχουν 3 σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ με $x_1 < x_2 < x_3$ τα οποία είναι συνευθειακά. Τότε $AB // B\Gamma$ δηλαδή $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ (2). Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$. Τότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_2}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$. Από (2) θα είναι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ (άτοπο) αφού $\xi_1 < \xi_2$ και η $f' \nearrow$.

86.α) Είναι $f'(x)f(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2x$ ή

$\left(f^2(x) \right)' = \left(x^2 \right)' \Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + c$.

Για $x = 0$ προκύπτει $c = 1$ άρα $f^2(x) = x^2 + 1 \neq 0$. Άρα $f(x) \neq 0$ και αφού η f συνεχής τότε διατηρεί πρόσημο και αφού $f(0) = 1 > 0$ τότε $f(x) > 0$ άρα $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

β) i. Είναι $\left| \frac{\eta\mu x}{f(x)} \right| = \left| \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Όμως $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)} = 0$.

ii. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{f(x) - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x \left(\sqrt{x^2 + 1} + 1 \right)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{x} \right]$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\right]=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\right]=+\infty$.Οπότε δεν υπάρχει το

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{f(x)-1}$.

γ) Είναι $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Η f είναι $\nearrow$ στο $(-\infty,0]$ και $\nearrow$ στο $[0,+\infty)$. Έχει ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=1$.

δ) i. $I_0=\int_0^1\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx=\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$

$I_1=\int_0^1\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1 x^2\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1 x^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx=$

$\left[x^2\sqrt{x^2+1}\right]_0^1-\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\sqrt{2}-\int_0^1\left(x^2+1\right)'\sqrt{x^2+1}\,dx=$

$\sqrt{2}-\left[\dfrac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\sqrt{2}-\dfrac{2}{3}\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3\right]_0^1=\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$.

ii. Είναι $I_\nu=\int_0^1\dfrac{x^{2\nu+1}}{f(x)}dx=\int_0^1 x^{2\nu}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1 x^{2\nu}\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx=$

$=\left[x^{2\nu}\sqrt{x^2+1}\right]_0^1-\int_0^1 2\nu x^{2\nu-1}\sqrt{x^2+1}\,dx=\sqrt{2}-2\nu\int_0^1 x^{2\nu-1}f(x)dx$.

iii. Για $\nu=2$ $I_2=\sqrt{2}-4\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$. Θέτω $x^2+1=u\Leftrightarrow x^2=u-1$ και $2xdx=du$. Άρα $I_2=\sqrt{2}-2\int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}\cdot 2xdx=\sqrt{2}-2\int_1^2(u-1)\sqrt{u}\,du=$

$\sqrt{2}-2\int_1^2 u^{3/2}du+2\int_1^2 u^{1/2}du=\sqrt{2}-2\left[\dfrac{4^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^2+2\left[\dfrac{4^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\sqrt{2}-\dfrac{4}{5}\left[\sqrt{4^5}\right]_1^2+\dfrac{4}{3}\left[\sqrt{4^3}\right]_1^2=$

$\sqrt{2}-\dfrac{4}{5}\left(4\sqrt{2}-1\right)+\dfrac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)=\dfrac{7\sqrt{2}-8}{15}$.

87. α) $\int_0^x\left(t^2+1\right)f''(t)dt+2\int_0^x tf'(t)dt+\int_0^2 xtf(x)dt=0\Leftrightarrow$

$\int_0^x \left(t^2+1\right) f''(t)\,dt + 2\int_0^x tf'(t)\,dt + xf(x)\int_0^2 tdt = 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^x \left[\left(t^2+1\right) f''(t) + 2tf'(t)\right] dt + xf(x)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^x \left[\left(t^2+1\right) f'(t)\right]' dt + 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\left(t^2+1\right) f'(t)\right]_0^x + 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\left(x^2+1\right) f'(x) - 2 + 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\left(x^2+1\right) f(x) - 2x\right]' = 2 \Leftrightarrow$

$\left(x^2+1\right) f(x) = 2x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$. Για $x = 0$ είναι $f(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$ και

$\left(x^2+1\right) f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $\left|h(x)+x-3\right| \le \left|f(x)\right| \Leftrightarrow -\left|f(x)\right| \le h(x)+x-3 \le \left|f(x)\right|$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|f(x)\right| = \lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{2x}{x^2+1}\right| = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|f(x)\right|\right)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)+x-3\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)-(-x+3)\right) = 0$.

Άρα η ευθεία $y = -x+3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$.

γ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = \int_0^3 \left|h(x)-(-x+3)\right| dx$.

Είναι $\left|h(x)+x-3\right| \le \left|f(x)\right|$, άρα και $\int_0^3 \left|h(x)+x-3\right| dx \le \int_0^3 \left|f(x)\right| dx$.

Όμως $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \ge 0$ για κάθε $x \in [0,3]$, άρα

$\int_0^3 \left|h(x)+x-3\right| dx \le \int_0^3 \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^3 = \ln 10$.

88. α) Έστω $g(x)=e^{-x}f(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)-1=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)-e^{x}\right)>0$ άρα η $g\nearrow$

οπότε για $x>0$ είναι

$g(x)>g(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)-x>0\Leftrightarrow e^{-x}f(x)>x\Leftrightarrow f(x)>xe^{x}\quad(1)$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-2e^{x-1}$ έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με

$h'(x)=f'(x)-2e^{x-1}>f(x)+e^{x}-2e^{x-1}>xe^{x}+e^{x}-2e^{x-1}\Leftrightarrow$

$h'(x)>e^{x}\underbrace{\left(x+1-\frac{2}{e}\right)}_{\substack{\geq 0\\ >0}}>0$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

Είναι $h(0)=f(0)-2e^{-1}=-\frac{2}{e}<0$ και $h(1)=f(1)-2>0$

γιατί αν στην (1) θέσουμε όπου $x=1$ είναι $f(1)>e>2\Leftrightarrow f(1)-2>0$.

Οπότε $h(0)\cdot h(1)<0$ Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα από Θ. Bolzano υπάρχει λύση της εξίσωσης $h(x)=0$ στο $(0,1)$, η οποία αφού η h είναι γνησίως αύξουσα, είναι μοναδική.

γ) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την f στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1}\Leftrightarrow f'(\xi)=f(1)$. Από την (1) για $x=1$ είναι $f(1)>e$. Άρα $f'(\xi)>e$.

δ) Αφού $f(x)>xe^{x}$ τότε για $x>0$ είναι $f(x)>xe^{x}>0\Leftrightarrow f(x)>0$ οπότε $E(\lambda)=\int_0^{\lambda}f(x)dx$. Από τη σχέση $f(x)>xe^{x}$ προκύπτει ότι

$\int_0^{\lambda}f(x)dx>\int_0^{\lambda}xe^{x}dx\Leftrightarrow E(\lambda)>\left[xe^{x}\right]_0^{\lambda}-\int_0^{\lambda}e^{x}dx\Leftrightarrow E(\lambda)>\lambda e^{\lambda}-e^{\lambda}+1$ και

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\lambda e^{\lambda}-e^{\lambda}+1\right)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[(\lambda-1)e^{\lambda}+1\right]=+\infty$ άρα και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=+\infty$.

ε) Είναι $f(x)>xe^{x}$ για κάθε $x>0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{x}=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Είναι $f'(x)-f(x)>e^{x}\Leftrightarrow f'(x)>f(x)+e^{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+e^{x}\right)=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

στ) Είναι $f'(x)>f(x)+e^{x}$ και επειδή $f(x)\geq xe^{x}\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$, είναι $f'(x)f(x)\geq f^{2}(x)+e^{x}f(x)$ (2). Για κάθε $x\geq 0$ είναι

$f(x)\geq xe^{x}\Leftrightarrow e^{x}f(x)\geq xe^{2x}$, οπότε η (2) γίνεται:

$f'(x)f(x) \geq f^2(x)+e^x f(x) \geq f^2(x)+xe^{2x} \Leftrightarrow f^2(x) \leq f'(x)f(x)-xe^{2x}$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, ισχύει ότι:

$$\int_0^1 f^2(x)dx < \int_0^1 \left[f(x)f'(x)-xe^{2x}\right]dx = \left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f^2(x)dx < \frac{f^2(1)}{2} - \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{f^2(1)}{2} - \frac{e^2}{2} + \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f^2(x)dx < \frac{f^2(1)}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2-1}{4} = \frac{1}{4}\left(2f^2(1)-e^2-1\right)$$

89. α) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1} \Leftrightarrow f(x)\left(x^2-1\right)-2x=0$. Έστω $g(x)=f(x)\left(x^2-1\right)-2x,\ x \in \mathbb{R}-\{\pm 1\}$. Είναι

$g'(x)=f'(x)\left(x^2-1\right)+2xf(x)-2$ (1),

$$g''(x)=f''(x)\left(x^2-1\right)+4xf'(x)+2f(x)=0 \Leftrightarrow \ g'(x)=\begin{cases} c_1,\ x<-1 \\ c_2,\ -1<x<1 \\ c_3,\ x>1 \end{cases}.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x=0$ έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y=f'(0)x+f(0)$. Επειδή όμως είναι η ε_1, ισχύει ότι $f'(0)=-2$ και $f(0)=0$.Η εφαπτομένη της C_f στο $x=2$ έχει εξίσωση $y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y=f'(2)x+f(2)-2f'(2)$.

Επειδή όμως είναι η ε_2 , ισχύει ότι $f'(2)=-\dfrac{10}{9}$ και

$$f(2)-2f'(2)=\frac{32}{9} \Leftrightarrow f(2)+2\frac{10}{9}=\frac{32}{9} \Leftrightarrow f(2)=\frac{4}{3}\ .$$

Για κάθε $x \neq \pm 1$ είναι $f(-x)=-f(x) \Rightarrow f'(-x)=f'(x)$, οπότε

$$f(-2)=-f(2)=-\frac{4}{3} \text{ και } f'(-2)=f'(2)=-\frac{10}{9}.$$

Από τη σχέση (1) για $x=-2,0,2$ προκύπτει ότι $g'(-2)=g'(0)=g'(2)=0$

οπότε $c_1=c_2=c_3=0$ και $g'(x)=0$ για $x \neq -1,1$ άρα $g(x)=\begin{cases} c_4,\ x<-1 \\ c_5,\ -1<x<1 \\ c_6,\ x>1 \end{cases}.$

Για τις τιμές των $f(-2), f(0), f(2)$ που βρήκαμε προκύπτει ότι

$g(-2)=g(0)=g(2)=0$ οπότε $c_4=c_5=c_6=0$ και

$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)\left(x^2-1\right)-2x=0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$, $x\neq\pm1$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{\pm1\}$ έχουμε

$$f'(x)=\frac{2\left(x^2-1\right)-2x\cdot2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}<0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left[\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{2x}{x-1}\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{2x}{x-1}\right)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ οπότε $f(A)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

δ) Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ τότε η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ οπότε δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

Από το προηγούμενο ερώτημα η $x=1$ και $x=-1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες.

ε) Η f είναι συνεχής και $f(x)>0$ στο $\left[e,e^2\right]$ οπότε

$$E(\Omega)=\int_e^{e^2}f(x)dx=\int_e^{e^2}\frac{2x}{x^2-1}dx=\left[\ln\left|x^2-1\right|\right]_e^{e^2}=\ln\left(e^4-1\right)-\ln\left(e^2-1\right)\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\ln\frac{e^4-1}{e^2-1}=\ln\frac{\cancel{\left(e^2-1\right)}\left(e^2+1\right)}{\cancel{e^2-1}}\Leftrightarrow E(\Omega)=\ln\left(e^2+1\right)\text{ τ.μ.}.$$

στ) Έστω $\varphi(x)=f(x)\text{συν}2x$, $x\in(-1,1)$. Είναι

$$\varphi(-x)=f(-x)\text{συν}(-2x)=\frac{2(-x)}{(-x)^2-1}\cdot\text{συν}2x=-\frac{2x}{x^2-1}\text{συν}2x=$$

$-f(x)\text{συν}2x=-\varphi(x)$. Άρα η φ είναι περιττή οπότε

$\int_{-p}^{p}\varphi(x)d(x)=\int_{-p}^{0}\varphi(x)d(x)+\int_0^p\varphi(x)d(x)=I_1+I_2$, όμως

$$I_1=\int_{-p}^{0}\varphi(x)dx\underset{\substack{x=-\rho\Rightarrow u=\rho,\\ x=0\Rightarrow u=0}}{\overset{\substack{x=-u,\\ dx=-du}}{=}}\int_p^0\varphi(-u)(-du)=\int_0^p\varphi(-u)du=-\int_0^p\varphi(u)du=-I_2.$$

Άρα $\int_{-p}^{p}\varphi(x)dx=-I_2+I_2=0$.

ζ) $\int_3^{\lambda}\frac{x^3-3x}{x^2-1}dx=8+\int_{\lambda}^{3}f(x)dx\Leftrightarrow\int_3^{\lambda}\frac{x^3-3x}{x^2-1}dx+\int_3^{\lambda}f(x)dx=8\Leftrightarrow$

$\int_3^{\lambda}\left(\frac{x^3-3x}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2-1}\right)dx=8\Leftrightarrow\int_3^{\lambda}\frac{x^3-x}{x^2-1}dx=8\Leftrightarrow\int_3^{\lambda}\frac{x\cancel{\left(x^2-1\right)}}{\cancel{x^2-1}}dx=8\Leftrightarrow$

$\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^{\lambda}=8\Leftrightarrow\frac{\lambda^2-9}{2}=8\Leftrightarrow\lambda^2-9=16\Leftrightarrow\lambda^2=25\overset{\lambda>1}{\Leftrightarrow}\lambda=5$

90. α) $\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)=\frac{1}{2}e^x\Leftrightarrow\left[f'(x)f(x)\right]'=\left(\frac{e^x}{2}\right)'\Leftrightarrow$

$f'(x)f(x)=\frac{e^x}{2}+c_1$, για $x=0$ τότε $c_1=-\frac{1}{2}$, οπότε $f'(x)f(x)=\frac{e^x-1}{2}\Leftrightarrow$

$2f'(x)f(x)=e^x-1\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(e^x-x\right)'\Leftrightarrow f^2(x)=e^x-x+c_2$.

Για $x=0$ προκύπτει $c_2=0$. Άρα $f^2(x)=e^x-x$.

β) Έστω $h(x)=e^x-x$ είναι $h'(x)=e^x-1$. Για κάθε $x<0$ είναι $h'(x)<0$ και για κάθε $x>0$ είναι $h'(x)>0$. Επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Η h έχει ελάχιστο το $h(0)$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h(x)\geq h(0)=1$, άρα $h(x)>0$. Οπότε $f^2(x)=e^x-x\neq 0$ και αφού η f είναι συνεχής τότε η f θα διατηρεί πρόσημο.

Είναι $f(0)=1>0$ άρα $f(x)>0$, οπότε $f(x)=\sqrt{e^x-x}$.

γ) Είναι $I=\int_{\ln 3}^{2}\frac{f(x)f''(x)}{e^x-1}dx$, $x>0$ όμως $f(x)f''(x)=\frac{1}{2}e^x-\left[f'(x)\right]^2$ όπου

$f'(x)=\frac{e^x-1}{2\sqrt{e^x-x}}$. Άρα $I=\int_{\ln 3}^{2}\frac{\frac{1}{2}e^x-\left[f'(x)\right]^2}{e^x-1}dx=\int_{\ln 3}^{2}\frac{\frac{1}{2}e^x-\frac{\left(e^x-1\right)^2}{4\left(e^x-x\right)}}{e^x-1}dx=$

$\frac{1}{2}\int_{\ln 3}^{2}\frac{e^x}{e^x-1}dx-\frac{1}{4}\int_{\ln 3}^{2}\frac{e^x-1}{e^x-x}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left|e^x-1\right|\right]_{\ln 3}^{2}-\frac{1}{4}\left[\ln\left|e^x-x\right|\right]_{\ln 3}^{2}=$

$=\frac{1}{2}\ln\left(e^2-1\right)-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\ln\left(e^2-2\right)+\frac{1}{4}\ln(3-\ln 3)$.

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f^2(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{\text{DLH}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f^2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x - x\right) = 0+\infty = +\infty$

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^2(x)}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x}{x^2+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{2x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2} = +\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^2(x)}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-x}{x^2+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{2x} = 0$.

ε) $e^x + \sqrt{e^x - x} = x+2 \Leftrightarrow f^2(x)+f(x)-2=0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{f(x)+2}_{\neq 0}\right)\left(f(x)-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$f(x)=1 \Leftrightarrow f^2(x)=1 \Leftrightarrow h(x)=h(0) \Leftrightarrow x=0$

91. α) Είναι $f\left(g(x)\right) \geq g(x) \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)-g(x)\geq 0\ (1)$

Έστω $h(x)=f\left(g(x)\right)-g(x),\ x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$h(3)=f\left(g(3)\right)-g(3)=f(0)=0$, οπότε η (1) γίνεται: $h(x)\geq h(3)$. Δηλαδή η συνάρτηση h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=3$.

Επειδή το $x_0=3$ είναι στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της h και η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=f'\left(g(x)\right)g'(x)-g'(x)$, λόγω του θεωρήματος Fermat είναι: $h'(3)=0 \Leftrightarrow f'\left(g(3)\right)g'(3)-g'(3)=0 \Leftrightarrow g'(3)\left[f'(0)-1\right]=0$ (2). Επειδή $f'(x)g'(x)>0$ τα $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι ομόσημοι, άρα $g'(3)\neq 0$ και η (2) γίνεται: $f'(0)-1=0 \Leftrightarrow f'(0)=1$.

β) Για κάθε $x\in(1,2)$ είναι $\dfrac{f(1821)}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=0 \Leftrightarrow f(1821)(x-2)+x-1=0$.

Έστω $g(x)=f(1821)(x-2)+x-1,\ x\in[1,2]$. Είναι

$g(1)=f(1821)(1-2)+1-1=-f(1821)$ και

$g(2)=f(1821)(2-2)+2-1=1>0$. Επειδή $f'(x)g'(x)>0$, είναι $f'(x)\neq 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f'(0)=1>0$, είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή $1821>0$, είναι $f(1821)>f(0)=0$, άρα $g(1)<0$ και $g(1)g(2)<0$. Επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,2]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(1821)(x-2)+x-1=0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$, οπότε και η εξίσωση $\dfrac{f(1821)}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον

μια ρίζα στο $(1,2)$.

γ) Για κάθε $x \geq 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(0) = 0$. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες και την ευθεία $x = 1$ είναι $E = \int_0^1 f(x)dx$, άρα $\int_0^1 f(x)dx = 1821$. Έστω F αρχική της f στο $[0,1]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, η F είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $F'(x) = f(x)$, οπότε είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(1) - F(0)}{1-0} \Leftrightarrow f(\xi) = \int_0^1 f(t)dt \Leftrightarrow f(\xi) = 1821.$$

Είναι $0 < \xi < 1$ και f γνησίως αύξουσα, άρα $f(\xi) < f(1) \Leftrightarrow 1821 < f(1)$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 0$ ενώ για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0$. Επειδή $f'(x)g'(x) > 0$ και $f'(x) > 0$, είναι και $g'(x) > 0$, άρα g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x > 3$ είναι $g(x) > g(3) = 0$, ενώ για κάθε $x < 3$ είναι $g(x) < g(3) = 0$.

ε) Έστω $\int_0^3 2xg(x)dx = \lambda \in \mathbb{R}$ (3), τότε από τη σχέση $\int_0^3 2xg(x)dx + x + 6 = g(x)$, έχουμε: $\lambda + x + 6 = g(x)$. Η σχέση (3) γίνεται:

$$\int_0^3 2x(\lambda + x + 6)dx = \lambda \Leftrightarrow \int_0^3 (2\lambda x + 2x^2 + 12x)dx = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\left[\lambda x^2 + \frac{2}{3}x^3 + 6x^2\right]_0^3 = \lambda \Leftrightarrow 9\lambda + 18 + 54 = \lambda \Leftrightarrow 8\lambda = -72 \Leftrightarrow \lambda = -9.$$ Τότε $g(x) = -9 + x + 6 = x - 3$.

92. α) Έστω $I = \int_0^2 f^2(x)dx + \int_0^2 (f'(x))^2 dx = f^2(0) - f^2(2)$ (1), τότε

$$I = \int_0^2 f^2(x)dx + \int_0^2 (f'(x))^2 dx + \int_0^2 2f(x)f'(x)dx - \int_0^2 2f(x)f'(x)dx =$$

$$= \int_0^2 \left[f^2(x) + (f'(x))^2 + 2f(x)f'(x)\right]dx - \int_0^2 \left[f^2(x)\right]' dx =$$

$$= \int_0^2 (f(x) + f'(x))^2 dx - \left[f^2(x)\right]_0^2 =$$

$$\int_0^2 (f(x) + f'(x))^2 dx - (f^2(2) - f^2(0)) \Leftrightarrow$$

$I=\int_0^2\left(f(x)+f'(x)\right)^2dx+I\Leftrightarrow\int_0^2\left(f(x)+f'(x)\right)^2dx=0$.

Είναι $\left(f(x)+f'(x)\right)^2\geq 0$ για κάθε $x\in[0,2]$ αν υπάρχει $x_0\in[0,2]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)+f'(x_0)\neq 0$ τότε $\int_0^2\left(f(x)+f'(x)\right)^2dx>0$ άτοπο.

Άρα $f(x)+f'(x)=0\quad(2)$ για κάθε $x\in[0,2]$.

β) Είναι $\int_0^2\left(f'(x)\right)^2dx=\int_0^2f'(x)\cdot f'(x)dx\overset{(2)}{=}\int_0^2f'(x)\left(-f(x)\right)dx=$

$=-\int_0^2f'(x)f(x)dx=-\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(f^2(0)-f^2(2)\right)\quad(3)$.

Άρα η σχέση (1) με βάση την (3) γίνεται

$\int_0^2f^2(x)dx+\frac{1}{2}\left(f^2(0)-f^2(2)\right)=f^2(0)-f^2(2)\Leftrightarrow$

$\int_0^2f^2(x)dx=\frac{1}{2}\left(f^2(0)-f^2(2)\right)\quad(4)$.

Από (3) και (4) προκύπτει ότι $\int_0^2f^2(x)dx=\int_0^2\left(f'(x)\right)^2dx=\frac{1}{2}\left(f^2(0)-f^2(2)\right)$

γ) Είναι $f(x)+f'(x)=0\overset{e^x}{\Leftrightarrow}e^xf'(x)+e^xf(x)=0\Leftrightarrow$

$\left(e^xf(x)\right)'=0\Leftrightarrow e^xf(x)=c$.

Για $x=1$ προκύπτει $c=e^2$, άρα $e^xf(x)=e^2\Leftrightarrow f(x)=e^{2-x}$, $x\in[0,2]$.

93. α) Είναι $f(\alpha)+f(\beta)=2f(\gamma)\Leftrightarrow\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=f(\gamma)$. Έστω ότι η f είναι συνάρτηση 1-1.

1ος τρόπος:

- Αν $f(\alpha)<f(\beta)\Rightarrow f(\alpha)<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}<f(\beta)$ τότε από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε
  $f(\xi)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\Leftrightarrow f(\xi)=f(\gamma)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}\xi=\gamma$ άτοπο γιατί $\alpha<\xi<\beta<\gamma$.
- Ομοίως αν $f(\alpha)>f(\beta)\Rightarrow f(\alpha)>\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}>f(\beta)$.
- Αν $f(\alpha)=f(\beta)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}\alpha=\beta$ άτοπο.

2ος τρόπος: Από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής, η f έχει μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m στο $[\alpha,\beta]$. Από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών είναι $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Άρα $m \le f(\alpha) \le M$ (1) και $m \le f(\beta) \le M$ (2). Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει

$2m \le f(\alpha)+f(\beta) \le 2M \Leftrightarrow m \le \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \le M$. Άρα υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \Leftrightarrow f(\xi) = f(\gamma) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} \xi = \gamma$ άτοπο γιατί $\alpha \le \xi \le \beta < \gamma$.

β) Αφού f όχι 1-1 τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Από το Θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2]$ υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Επειδή η f είναι κοίλη τότε η $f' \searrow \mathbb{R}$ άρα το $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι μοναδικό.

γ) Για $x < x_0 \overset{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0$ άρα η $f \nearrow (-\infty, x_0]$.

Για $x > x_0 \overset{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$ άρα η $f \searrow [x_0, +\infty)$.

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το $f(x_0)$.

δ) Έστω $\kappa < x_0$ πάρα πολύ κοντά στο $-\infty$, τότε $\kappa < x_0 \overset{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(\kappa) > f'(x_0) = 0$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x = \kappa$ είναι η ευθεία: $y = f'(\kappa)x - \kappa f'(\kappa) + f(\kappa)$.

Επειδή η f είναι κοίλη τότε $f(x) \le y \Leftrightarrow f(x) \le f'(\kappa)x - \kappa f'(\kappa) + f(\kappa)$

Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f'(\kappa)x - \kappa f'(\kappa) + f(\kappa) \right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[f'(\kappa)x \right] = -\infty$ αφού $f'(\kappa) > 0$.

Άρα είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

ε) i) 1ος τρόπος: Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο: $g'(x) = e^{-2024 f(x)} f'(x)$. Για

$x < x_0 \overset{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow e^{-2024 f(x)} f'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow (-\infty, x_0]$.

Για

$x > x_0 \overset{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow e^{-2024 f(x)} f'(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [x_{0,+\infty})$

Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το $g(x_0)$.

Άρα $g(x) \le g(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = x_0$.

Άρα $\int_0^{x_0+1} g(x)\,dx < \int_0^{x_0+1} g(x_0)\,dx = x_0 g(x_0) + g(x_0)$

2ος τρόπος: Είναι $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = x_0$.

$f(x) \le f(x_0) \Leftrightarrow -2024f(x) \ge -2024f(x_0) \Leftrightarrow e^{-2024f(x)} \ge e^{-2024f(x_0)} \Leftrightarrow$

$-\frac{e^{-2024f(x)}}{2024} \le -\frac{e^{-2024f(x_0)}}{2024} \Leftrightarrow g(x) \le g(x_0)$

Άρα $\int_0^{x_0+1} g(x)\,dx < \int_0^{x_0+1} g(x_0)\,dx = x_0 g(x_0) + g(x_0)$

ii) $\int_0^{x_0+1} xg'(x)dx > 0 \Leftrightarrow \left[xg(x)\right]_0^{x_0+1} - \int_0^{x_0+1} g(x)dx > 0 \Leftrightarrow$

$x_0 g(x_0) + g(x_0) - \int_0^{x_0+1} g(x)dx > 0$ το οποίο ισχύει σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

94. α) $f^2(x) = \ln^4 x + 2\ln^2 x + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = \left(\ln^2 x + 1\right)^2$. Επειδή $\left(\ln^2 x + 1\right)^2 > 0$ για κάθε $x > 0$, είναι $f^2(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) \ne 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

Επειδή $f(1) = 1 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα $f(x) = \ln^2 x + 1,\ x > 0$.

β) $g'(x) = \frac{g(x)}{x} + 2 \Leftrightarrow xg'(x) = g(x) + 2x \Leftrightarrow xg'(x) - g(x) = 2x \Leftrightarrow$

$\frac{xg'(x) - g(x)}{x^2} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{g(x)}{x}\right)' = (2\ln x)' \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x} = 2\ln x + c \Leftrightarrow$.

$g(x) = 2x\ln x + cx,\ x > 0, c \in \mathbb{R}$ $g(1) = 0 \Leftrightarrow c = 0$ άρα $g(x) = 2x\ln x$.

γ) $\kappa^\kappa \cdot \lambda^\lambda \ge e^{-\frac{2}{e}} \Leftrightarrow \ln\left(\kappa^\kappa \cdot \lambda^\lambda\right) \ge \ln e^{-\frac{2}{e}} \Leftrightarrow \ln\kappa^\kappa + \ln\lambda^\lambda \ge -\frac{2}{e} \Leftrightarrow$

$\kappa\ln\kappa + \lambda\ln\lambda \ge -\frac{2}{e} \Leftrightarrow 2\kappa\ln\kappa + 2\lambda\ln\lambda \ge -\frac{4}{e} \Leftrightarrow g(\kappa) + g(\lambda) \ge -\frac{4}{e}$.

Είναι $g'(x) = 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2(\ln x + 1)$.

$g'(x) \ge 0 \Leftrightarrow 2(\ln x + 1) \ge 0 \Leftrightarrow \ln x \ge -1 \Leftrightarrow x \ge e^{-1}$.

Για κάθε $x \in (0, e^{-1})$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow \left(0, e^{-1}\right]$ και για κάθε $x > e^{-1}$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow \left[e^{-1}, +\infty\right)$. Η g έχει ελάχιστο το $g\left(e^{-1}\right) = 2e^{-1}\ln e^{-1} = -\frac{2}{e}$,

οπότε $g(x) \ge -\frac{2}{e}$ για κάθε $x > 0$.

Είναι $g(\kappa)\geq -\frac{2}{e}$, $g(\lambda)\geq -\frac{2}{e}$ και με πρόσθεση κατά μέλη $g(\kappa)+g(\lambda)\geq -\frac{4}{e}$.

δ) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \ln^2 x+1=2x\ln x\Leftrightarrow \ln^2 x-2x\ln x+1=0$

Έστω $h(x)=\ln^2 x-2x\ln x+1$, $x\in(0,+\infty)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$h'(x)=2\ln x(\ln x)'-\left(2\ln x+2x\frac{1}{x}\right)+1=2\frac{\ln x}{x}-2\ln x-1=2\frac{\ln x}{x}-2\ln x-1$$

και $h''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{2}{x}=2\frac{1-\ln x-x}{x^2}$.

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f'' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $1-\ln x-x$. Έστω $\varphi(x)=1-\ln x-x$, $x\in(0,+\infty)$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $\varphi'(x)=-\frac{1}{x}-1$. Είναι $\varphi'(x)<0$ άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $\varphi(1)=0$. Για κάθε $x>1$ είναι $\varphi(x)<\varphi(1)=0$, άρα $h''(x)<0$ και η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Άρα $h'(x)<h'(1)=-1<0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Για κάθε $0<x<1$ είναι $\varphi(x)>\varphi(1)=0$, άρα $h''(x)>0$ και η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$. Άρα $h'(x)<h'(1)=-1<0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.Επειδή η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln^2 x-2x\ln x+1\right)=+\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln^2 x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$.

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\ln^2 x}{x}-2\ln x+\frac{1}{x}\right)\right]=-\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$. Για το σύνολο τιμών της h έχουμε:

$$h((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to+\infty}h(x),\lim_{x\to 0^+}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}.$$

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της h και η h είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$.

ε) $x\ln x \geq x-1 \Leftrightarrow 2x\ln x \geq 2x-2 \Leftrightarrow g(x) \geq 2x-2$. Είναι $g'(x)=2\ln x+2$ και $g'(1)=2$. Η εφαπτομένη της C_g στο $x=1$ είναι η ευθεία $y-g(1)=g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=2x-2$.

Είναι $g''(x)=\dfrac{2}{x}>0 \Rightarrow g \cup (0,+\infty)$. Επειδή η g είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $g(x) \geq 2x-2$.

στ) Έστω $t(x)=2x^2\ln x-3x^2+4x-1$, $x>0$. Η t είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $t'(x)=4x\ln x+2x-6x+4=4x\ln x-4x+4=4(x\ln x-x+1)$

Για κάθε $x \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι $t'(x)>0$ και επειδή η t είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^+} t(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2x^2\ln x-3x^2+4x-1)=-1$,

$\lim\limits_{x\to +\infty} t(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[x^2\left(2\ln x-3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=+\infty$.

Για το σύνολο τιμών της t έχουμε: $t(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} t(x), \lim\limits_{x\to +\infty} t(x)\right)=(-1,+\infty)$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της t και η t είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$,η εξίσωση $t(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

ζ) i. $I_\nu = \int_1^e \left(f(x)-1\right)^{\frac{\nu}{2}}dx = \int_1^e \left(\ln^2 x+1-1\right)^{\frac{\nu}{2}}dx = \int_1^e \ln^\nu x\,dx = \int_1^e \ln^\nu x\cdot(x)'\,dx =$

$\left[x\ln^\nu x\right]_1^e - \int_1^e \cancel{x}\cdot\nu\ln^{\nu-1}x\cdot\dfrac{1}{\cancel{x}}dx = e-\nu\int_1^e \ln^{\nu-1}x\,dx = e-\nu I_{\nu-1}$

ii. Για $\nu=3$ είναι: $I_3=e-3I_2$

Για $\nu=2$ είναι: $I_2=e-3I_1=e-3$ και

$I_3=e-3I_2=e-3(e-3)=e-3e+9=-2e+9$.

($I_1=\int_1^e \ln x\,dx=\int_1^e x'\ln x\,dx=\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e dx=e-[x]_1^e=e-e+1=1$.)

η) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $E=\int_1^e |f(x)-g(x)|dx=\int_1^e |h(x)|dx$.

Για κάθε $e\leq x\leq e^2 \overset{h\searrow}{\Leftrightarrow} h(e)\geq h(x)\geq h(e^2) \Leftrightarrow 2-2e\geq h(x)\geq 5-4e^2$ άρα $h(x)<0$, οπότε:

$$E=-\int_e^{e^2} h(x)dx=-\int_e^{e^2}\left(\ln^2 x-2x\ln x+1\right)dx=-\int_e^{e^2}\ln^2 xdx+\int_e^{e^2}2x\ln xdx-\left[x\right]_e^{e^2}=$$

$$=-\int_e^{e^2}(x)'\ln^2 xdx+\int_e^{e^2}\left(x^2\right)'\ln xdx-e^2+e=$$

$$-\left[x\ln^2 x\right]_e^{e^2}+\int_e^{e^2}\cancel{x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx+\left[x^2\ln^2 x\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}x^{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx-e^2+e=$$

$$=-4e^2+e+2\int_e^{e^2}(x)'\ln xdx+4e^4-e^2-\left[x\right]_e^{e^2}-e^2+e=$$

$$=4e^4-7e^2+3e+2\left[x\ln x\right]_e^{e^2}-2\int_e^{e^2}\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx=$$

$$4e^4-7e^2+3e+4e^2-2e-2\left[x\right]_e^{e^2}=4e^4-5e^2+3e\ \text{τ.μ.}$$

θ) Για κάθε $x\ge 1\overset{h\searrow}{\Leftrightarrow}h(x)\le h(1)\Leftrightarrow f(x)-g(x)\le 1\Leftrightarrow f(x)\le g(x)+1\Leftrightarrow$.

$\frac{f(x)}{x}\le\frac{g(x)}{x}+\frac{1}{x}$. Επειδή η ισότητα στη τελευταία σχέση ισχύει μόνο για $x=1$, έχουμε: $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx<\int_1^e\left(\frac{g(x)}{x}+\frac{1}{x}\right)dx\Leftrightarrow$

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx<\int_1^e\frac{g(x)}{x}dx+\int_1^e\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx<\int_1^e\frac{g(x)}{x}dx+\left[\ln x\right]_1^e\Leftrightarrow$$

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx<\int_1^e\frac{g(x)}{x}dx+1$$

ι) $g(x)=e^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow 2x\ln x-e^{\frac{1}{x}}=0$. Έστω $\alpha(x)=2x\ln x-e^{\frac{1}{x}}$, $x\in[1,+\infty)$.

Είναι $\alpha(1)=-e<0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x\ln x-e^{\frac{1}{x}}\right)=+\infty-1=+\infty$ άρα υπάρχει $\beta>1$ τέτοιο ώστε $\alpha(\beta)>0$. Επειδή $\alpha(1)\alpha(\beta)<0$ και η α είναι συνεχής στο $[1,\beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θ.Bolzano, η εξίσωση $\alpha(x)=0\Leftrightarrow 2x\ln x=e^{\frac{1}{x}}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,\beta)$.

95. α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$, λόγω του θεωρήματος Μέγιστης-Ελάχιστης τιμής, παρουσιάζει μέγιστο στο διάστημα αυτό.
β) Έστω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος $[0,\pi]$. Τότε λόγω του θεωρήματος Fermat, είναι $f'(x_0)=0$.
Είναι $f(x_0)<\eta\mu x_0 f'(x_0)=0$, οπότε για κάθε $x\in[0,\pi]$ είναι

$f(x)\le f(x_0)<0$. Αν η f έχει μέγιστο στο 0 ή στο π, τότε επειδή

$f(0)<\eta\mu 0\cdot f'(0)=0$, $f(\pi)<\eta\mu\pi\cdot f'(\pi)=0$, είναι $f(x)\le f(0)<0$ και

$f(x)\le f(\pi)<0$.Οπότε σε κάθε περίπτωση είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$.

γ) Είναι $f(x)<\eta\mu x f'(x)\Rightarrow\int_0^{\pi/2}f(x)dx<\int_0^{\pi/2}\eta\mu x f'(x)dx\Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi/2}f(x)dx<\left[\eta\mu x f(x)\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu x f(x)dx\Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi/2}f(x)dx+\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu x f(x)dx<f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\int_0^{\pi/2}(1+\sigma\upsilon\nu x)f(x)dx<f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

δ) Επειδή $f(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$, η σχέση $f(x)<\eta\mu x f'(x)$ γίνεται:

$2f(x)f(x)>2\eta\mu x f(x)f'(x)\Leftrightarrow 2f^2(x)>\eta\mu x\left(f^2(x)\right)'\Rightarrow$

$\int_0^{\pi/2}2f^2(x)dx>\int_0^{\pi/2}\eta\mu x\left(f^2(x)\right)'dx\Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi/2}2f^2(x)dx>\left[\eta\mu x f^2(x)\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu x f^2(x)dx\Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi/2}2f^2(x)dx+\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu x f^2(x)dx>f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi/2}\left[2f^2(x)+\sigma\upsilon\nu x f^2(x)\right]dx>f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\int_0^{\pi/2}(2+\sigma\upsilon\nu x)f^2(x)dx>f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ε) $f(x)<\eta\mu x f'(x)\overset{\substack{f(x)<0,\eta\mu x>0\\ x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]}}{\Leftrightarrow}\frac{1}{\eta\mu x}>\frac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{f'(x)}{f(x)}dx<\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{\eta\mu x}dx$ (1)

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\eta\mu x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx\overset{\substack{\sigma\upsilon\nu x=u\\ \eta\mu x dx=-du\\ x=\frac{\pi}{3}\to u=\frac{1}{2}\\ x=\frac{\pi}{2}\to u=0}}{=}\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-du}{1-u^2}=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{u^2-1}du$

$\frac{1}{u^2-1}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}=\frac{Au+A+Bu-B}{(u-1)(u+1)}=\frac{(A+B)u+A-B}{u^2-1}$

Για να ισχύει η ισότητα για κάθε $u\ne\pm1$ πρέπει: $\begin{cases}A+B=0\\ A-B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\ B=-\frac{1}{2}\end{cases}$, άρα

$\frac{1}{u^2-1}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}=\frac{\frac{1}{2}}{u-1}-\frac{\frac{1}{2}}{u+1}$, οπότε:

$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{u^2-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u+1}\right)dx=\left[\frac{1}{2}\ln|u-1|-\frac{1}{2}\ln|u+1|\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\ln 3$

και $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x} dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2-1} du = \frac{1}{2}\ln 3$. Η σχέση (1) γίνεται:

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{f'(x)}{f(x)} dx < \frac{1}{2}\ln 3 \Leftrightarrow \left[\ln|f(x)|\right]_{\pi/3}^{\pi/2} < \frac{1}{2}\ln 3 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| - \ln\left|f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| < \ln 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \ln\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{3}\right)} < \ln\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{3}\right)} < \sqrt{3} \overset{f\left(\frac{\pi}{3}\right)<0}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{\pi}{2}\right) > \sqrt{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

96. **α)** Έστω $\rho \in \mathbb{R}$ ρίζα της f, τότε $f(\rho) = 0$.

Η σχέση $f^3(x) + x^2 f(x) = 2x^3$ (1) για $x = \rho$ γίνεται:

$f^3(\rho)^{0} + \rho^2 f(\rho)^{0} = 2\rho^3 \Leftrightarrow 2\rho^3 = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$,άρα το $\rho = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της f.

$f^3(x) + x^2 f(x) = 2x^3 \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x) + x^2\right) = 2x^3$ και για $x \neq 0$ είναι

$f(x) = \frac{2x^3}{f^2(x) + x^2}$.Επειδή για κάθε $x \neq 0$ είναι $f^2(x) + x^2 > 0$, έχουμε:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3}{f^2(x) + x^2} > 0 \Leftrightarrow 2x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3}{f^2(x) + x^2} < 0 \Leftrightarrow 2x^3 < 0 \Leftrightarrow x < 0 .$$

β) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f^2(x) + x^2 > x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x) + x^2} < \frac{1}{x^2}$ και

- αν $x > 0$ τότε $\frac{2x^3}{f^2(x) + x^2} < \frac{2x^3}{x^2} \Leftrightarrow f(x) < 2x$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι $0 < f(x) < 2x$.

- αν $x < 0$ τότε $\frac{2x^3}{f^2(x) + x^2} > \frac{2x^3}{x^2} \Leftrightarrow f(x) > 2x$, οπότε για κάθε $x < 0$ είναι $2x < f(x) < 0$.

γ) Για κάθε $x \neq 0$ είναι

$$|f(x)|=\left|\frac{2x^3}{f^2(x)+x^2}\right|=\frac{2|x|^3}{f^2(x)+x^2}\le\frac{2x^2|x|}{x^2}\Leftrightarrow -2|x|\le f(x)\le 2|x|$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(-2|x|)=\lim\limits_{x\to 0}2|x|=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

δ) Αντικαθιστούμε στην (1) όπου x το – x και προκύπτει:

$$f^3(-x)+(-x)^2f(-x)=2(-x)^3\Leftrightarrow f^3(-x)+x^2f(-x)=-2x^3\ (2)$$

Από $(1)+(2)\Rightarrow\ f^3(x)+f^3(-x)+x^2f(x)+x^2f(-x)=0\Leftrightarrow$

$$\big(f(x)+f(-x)\big)\big[f^2(x)-f(x)f(-x)+f^2(-x)\big]+x^2\big(f(x)+f(-x)\big)=0\Leftrightarrow$$

$$\big(f(x)+f(-x)\big)\big[f^2(x)-f(x)f(-x)+f^2(-x)+x^2\big]=0\ (3)$$

Για κάθε $x\ne 0$ είναι $f^2(x)>0,\ f^2(-x)>0$.

Αν $x>0\ \Leftrightarrow\ -x<0$, τότε $f(x)>0,\ f(-x)<0\Leftrightarrow -f(-x)>0$, οπότε

$f^2(x)-f(x)f(-x)+f^2(-x)+x^2>0$ και λόγω της (3) είναι

$f(x)+f(-x)=0\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)\ (4)$.

Αν $x<0\ \Leftrightarrow\ -x>0$, τότε $f(x)<0\Leftrightarrow -f(x)>0,\ f(-x)>0$, οπότε

$f^2(x)-f(x)f(-x)+f^2(-x)+x^2>0$ και λόγω της (3) είναι

$f(x)+f(-x)=0\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)\ (4)$

Επειδή $f(0)=0$, από τις (4), (5) προκύπτει ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι περιττή.

ε) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, είναι

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$. Για $x\ne 0$ είναι

$$\frac{f^3(x)}{x^3}+\frac{x^2f(x)}{x^3}=\frac{2x^3}{x^3}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\frac{f(x)}{x}=2\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\frac{f(x)}{x}\right]=2\Leftrightarrow$$

$$\big[f'(0)\big]^3+f'(0)-2=0\Leftrightarrow\big(f'(0)-1\big)\big[\big(f'(0)\big)^2+f'(0)+2\big]=0\Leftrightarrow\ f'(0)=1\ \text{ή}$$

$\big(f'(0)\big)^2+f'(0)+2=0$ αδύνατη αφού είναι 2ου βαθμού με $\Delta<0$.

στ) 1) Για $x=1$ η σχέση (1) γίνεται:

$$f^3(1)+f(1)=2\Leftrightarrow f^3(1)+f(1)-2=0\Leftrightarrow\big(f(1)-1\big)\big(f^2(1)+f(1)+2\big)=0\Leftrightarrow$$

$f(1)=1$ ή $f^2(1)+f(1)+2=0$ αδύνατη ($\Delta<0$)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οι παραστάσεις $f^3(x),\ x^2f(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε:

$\left(f^3(x)+x^2f(x)\right)'=\left(2x^3\right)'\Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)+2xf(x)+x^2f'(x)=6x^2$ (6) και για $x=1$ είναι

$3f^2(1)f'(1)+2f(1)+f'(1)=6\Leftrightarrow 3f'(1)+2+f'(1)=6\Leftrightarrow 4f'(1)=4\Leftrightarrow f'(1)=1.$

Η εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=x-1\Leftrightarrow y=x$

2) Έστω $\alpha\in(0,+\infty)$ λύση της εξίσωσης $f(x)=6$. Για $x=\alpha$ η (1) γίνεται:

$f^3(\alpha)+\alpha^2f(\alpha)=2\alpha^3\Leftrightarrow 6^3+\alpha^2\cdot 6=2\alpha^3\Leftrightarrow \alpha^3-3\alpha^2-108=0\Leftrightarrow$

$(\alpha-6)(\alpha^2+3\alpha+18)=0\Leftrightarrow \alpha=6$ ή $\alpha^2+3\alpha+18=0$ αδύνατη (Δ<0). Άρα $f(6)=6$.Έστω τώρα ότι η εξίσωση $f(x)=6$ έχει λύση και τον $0<\beta\neq\alpha$, τότε για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[\alpha,\beta]$ ή $[\beta,\alpha]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ή (β,α) τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.Για $x=\xi$ η σχέση (6) γίνεται:

$3f^2(\xi)f'(\xi)+2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)=6\xi^2\Leftrightarrow 2\xi f(\xi)=6\xi^2\Leftrightarrow f(\xi)=3\xi$ και η (1) γίνεται: $f^3(\xi)+\xi^2f(\xi)=2\xi^3\Leftrightarrow(3\xi)^3+\xi^2\cdot 3\xi=2\xi^3\Leftrightarrow 27\xi^3+3\xi^3=2\xi^3\Leftrightarrow$

$28\xi^3=0\Leftrightarrow\xi=0$ αδύνατο.

Άρα η εξίσωση $f(x)=6$ έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$ το $x=6$.

3) $\int_1^6\frac{f'(x)}{f^2(x)+f(x)}dx=\int_1^6\frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+1)}dx$

Θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε το κλάσμα $\frac{1}{x(x+1)}$ σε απλούστερα κλάσματα.

Έστω $A,B\in\mathbb{R}$ με $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{Ax+A+Bx}{x(x+1)}=\frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$

Για να ισχύει η τελευταία ισότητα για κάθε $x\neq 0$ και $x\neq -1$ πρέπει

$\begin{cases}A+B=0\\A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=-1\\A=1\end{cases}$, άρα $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ και

$\frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+1)}=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{f'(x)}{f(x)+1}$, οπότε

$\int_1^6\frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+1)}dx=\int_1^6\left[\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{f'(x)}{f(x)+1}\right]dx=\left[\ln f(x)-\ln(f(x)+1)\right]_1^6=$

$\ln f(6)-\ln(f(6)+1)-\ln f(1)+\ln(f(1)+1)=\ln 6-\ln 7-\cancel{\ln 1^0}+\ln 2=\ln\frac{12}{7}$

97. α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$f'(x)=-(\alpha+1)e^{\beta-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0\in\mathbb{R}$ έχει εξίσωση

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+f(x_0)-x_0f'(x_0)$

Επειδή η εφαπτομένη στο $x_0\in\mathbb{R}$ είναι η ευθεία $y=-6x+36$ τότε:

$$\begin{cases}f'(x_0)=-6\\ f(x_0)=-6x_0+36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-(\alpha+1)e^{\beta-x_0}=-6\\ (\alpha+1)e^{\beta-x_0}=-6x_0+36\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}e^{\beta-x_0}=\dfrac{6}{\alpha+1}\\ 6=-6x_0+36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta-x_0=\ln\left(\dfrac{6}{\alpha+1}\right)\\ 6x_0=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\ln\left(\dfrac{6}{\alpha+1}\right)+5\\ x_0=5\end{cases}.$$

(από τη σχέση $-(\alpha+1)e^{\beta-x_0}=-6\Leftrightarrow(\alpha+1)e^{\beta-x_0}=6$ έχουμε

$\alpha+1>0\Leftrightarrow\alpha>-1$ αφού $e^{\beta-x_0}>0,6>0$)

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+2^{-x}}{2^{\beta-x}+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha+1)e^{\beta-x}+2^{-x}}{2^{\beta-x}+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha+1)e^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5-x}+2^{-x}}{2^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5-x}+e^{-x}}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha+1)e^{-x}\cdot e^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5}+2^{-x}}{2^{-x}\cdot 2^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5}+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2^{-x}}\left[\left(\frac{e}{2}\right)^{-x}(\alpha+1)e^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5}+1\right]}{\cancel{2^{-x}}\left[2^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5}+\left(\frac{e}{2}\right)^{-x}\right]}=\frac{1}{2^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5}}$$

γιατί $\dfrac{e}{2}>1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e}{2}\right)^{-x}\overset{u=-x}{=}\lim\limits_{u\to-\infty}\left(\dfrac{e}{2}\right)^{u}=0$. Άρα είναι

$$\frac{1}{2^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5}}=2^{-\ln 6-5}\Leftrightarrow 2^{-\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)-5}=2^{-\ln 6-5}\Leftrightarrow-\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)-5=-\ln 6-5\Leftrightarrow\alpha=0$$

και ισχύει $\beta=\ln 6+5$. Άρα $f(x)=e^{\ln 6+5-x}=e^{\ln 6}e^{5-x}=6e^{5-x}$, $x\in\mathbb{R}$ και

πράγματι ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+2^{-x}}{2^{\beta-x}+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\ln 6+5-x}+2^{-x}}{2^{\ln 6+5-x}+e^{-x}}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\cdot e^{\ln 6+5}+2^{-x}}{2^{-x}\cdot 2^{\ln 6+5}+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2^{-x}}\left[\left(\frac{e}{2}\right)^{-x}e^{\ln 6+5}+1\right]}{\cancel{2^{-x}}\left[2^{\ln 6+5}+\left(\frac{e}{2}\right)^{-x}\right]}=\frac{1}{2^{\ln 6+5}}$$

β) Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$f''(x)=\left(-6e^{5-x}\right)'=6e^{5-x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι κυρτή και

επομένως η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτόμενη με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Άρα $f(x) \geq -6x+36$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = x_0 = 5$.

Για $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ είναι $\ln x < 0$ και $f(x) > -6x+36$ άρα

$\ln x f(x) < \ln x(-6x+36)$ οπότε

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x f(x)\, dx < \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x(-6x+36)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}(-6x\ln x + 36\ln x)dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} -6x\ln x\, dx + \int_{0}^{1} 36\ln x\, dx = \left[-3x^2\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{3x^{\not 2}}{\not x} dx + 36\left[x\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} -$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{36\not x}{\not x} dx = \frac{3}{4}\ln\frac{1}{2} + \left[\frac{3x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - 18\ln\frac{1}{2} - 36\left(1-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{69}{4}\ln 2 + \frac{3}{2} - \frac{3}{8} - 18 = \frac{69}{4}\ln 2 - \frac{63}{8} = \frac{1}{8}(138\ln 2 + 63).$$

γ) Έστω $\varphi(x) = (5-x)f(x) + 6 = 6(5-x)e^{5-x} + 6,\ x \in \mathbb{R}$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$\varphi'(x) = -6e^{5-x} - 6(5-x)e^{5-x} = 6e^{5-x}(-1-5+x) = 6e^{5-x}(x-6)$.

Για κάθε $x < 6$ είναι $\varphi'(x) < 0$ και για κάθε $x > 6$ είναι $\varphi'(x) > 0$, επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 6]$ και γνησίως αύξουσα στο $[6, +\infty)$. Η φ έχει ελάχιστο το $\varphi(6) = -6e^{-1} + 6 = 6\left(1-\frac{1}{e}\right)$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi(x) \geq \varphi(6) > 0$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ άρα ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Έστω η κατακόρυφη ευθεία $x = \lambda > 5$. Τότε επειδή $f(x) > 0$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\lambda) = \int_5^{\lambda} f(x)dx = \int_5^{\lambda} 6e^{5-x}\, dx = \left[-6e^{5-x}\right]_5^{\lambda} = -6e^{5-\lambda} + 6$

Όταν $\lambda \to +\infty$ είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = 6$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι 6τ.μ.

ε) $I = \int_{\ln 6}^{5} \frac{2f^4(x) - 7f^3(x) + 6f^2(x) + f(x)}{f^2(x) - 4f(x) + 3} dx =$

$$\int_{\ln 6}^{5} \frac{2f^3(x) - 7f^2(x) + 6f(x) + 1}{f^2(x) - 4f(x) + 3} f(x)\, dx$$

Θέτουμε $f(x) = u$ οπότε $f'(x)dx = du \Leftrightarrow -f(x)dx = du$. Για $x = \ln 6$ είναι

$u=e^5$ και για $x=5$ είναι $u=6$.

Άρα $I=-\int_{e^5}^{6}\frac{2u^3-7u^2+6u+1}{u^2-4u+3}du=\int_{6}^{e^5}\frac{2u^3-7u^2+6u+1}{u^2-4u+3}du$

Εκτελούμε την διαίρεση των πολυωνύμων $2u^3-7u^2+6u+1$ και u^2-4u+3:

Είναι $2u^3-7u^2+6u+1=(2u+1)(u^2-4u+3)+4u-2$ άρα:

$$I=\int_{6}^{e^5}\frac{2u^3-7u^2+6u+1}{u^2-4u+3}du=\int_{6}^{e^5}\frac{(2u+1)(u^2-4u+3)+4u-2}{u^2-4u+3}du=$$

$\int_{6}^{e^5}\left(2u+1+\frac{4u-2}{u^2-4u+3}\right)du$ Είναι

$$\frac{4u-2}{u^2-4u+3}=\frac{4u-2}{(u-1)(u-3)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u-3}=\frac{Au-3A+Bu-B}{(u-1)(u-3)}=\frac{(A+B)u-3A-B}{(u-1)(u-3)}$$

Πρέπει $\begin{cases}A+B=4\\-3A-B=-2\end{cases}\Leftrightarrow A=-1$ και $B=5$.

Άρα $I=\int_{6}^{e^5}\left(2u+1+\frac{4u-2}{u^2-4u+3}\right)du=\int_{6}^{e^5}\left(2u+1+\frac{1}{u-1}+\frac{5}{u-3}\right)du=$

$$=\left[u^2+u+\ln(|u-1|)+5\ln(|u-3|)\right]_6^{e^5}=$$

$$e^{10}+e^5+\ln(e^5-1)+5\ln(e^5-3)-36-6-\ln 5-5\ln 3=$$

$$=e^{10}+e^5+\ln(e^5-1)+5\ln(e^5-3)-42-\ln 5-5\ln 3.$$

98. α) Η κατακόρυφη απόσταση των C_f και C_g δίνεται από τον τύπο $d(x)=|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$, $x>0$, καθώς $f(x)>g(x)$. Άρα $d(x)=e^x-\ln x$, $x>0$ και η d είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $d'(x)=e^x-\frac{1}{x}=\frac{xe^x-1}{x}$. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $d'(x_0)=0$.

1ος τρόπος:

Έστω η συνάρτηση $k(x)=xe^x-1$, $x\geq 0$ με παράγωγο $k'(x)=e^x+xe^x>0$ για κάθε $x\geq 0$ άρα $k\nearrow[0,+\infty)$. Η k είναι συνεχής στο $[0,1]$, $k(0)=-1<0$, $k(1)=e-1>0$ δηλαδή $k(0)k(1)<0$ επομένως από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $k(x_0)=0$ και επειδή η k είναι γνησίως αύξουσα είναι μοναδικό.

2ος τρόπος

Η d είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με δεύτερη παράγωγο

$d''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$.Επομένως η d΄ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα

$d'((0,1))=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}d'(x),\lim\limits_{x\to 1^-}d'(x)\right)=(1-\infty,e-1)=(-\infty,e-1)$

Το $0\in d'((0,1))$ άρα μοναδικό υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $d'(x_0)=0$.

Για $0<x<x_0\overset{k\nearrow}{\Rightarrow}k(x)<0\Rightarrow d'(x)<0$ και η d συνεχής στο $(0,x_0]$ άρα $d\searrow(0,x_0]$.

Για $x>x_0\overset{k\nearrow}{\Rightarrow}k(x)>0\Rightarrow d'(x)>0$ και η d συνεχής στο $[x_0,+\infty)$ άρα $d\nearrow[x_0,+\infty)$. Η d παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0\in(0,1)$.

β) Είναι $d'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)=g'(x_0)$ και το $x_0\in(0,1)$ μοναδικό.

γ) Είναι $M(\alpha,\beta)\equiv M(\alpha,e^\alpha)$ και $N(\beta,\alpha)\equiv N(\beta,\ln\beta)$ δηλαδή

$e^\alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha=\ln\beta$.

1ος τρόπος:

$(MN)=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2}|\beta-\alpha|=\sqrt{2}|\beta-\ln\beta|=\sqrt{2}(\beta-\ln\beta)$

γιατί είναι $\ln\beta\le\beta-1\Leftrightarrow\beta-\ln\beta\ge1$ (1) για κάθε $\beta>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\beta=1$.

Άρα είναι $(1)\Leftrightarrow\sqrt{2}(\beta-\ln\beta)\ge\sqrt{2}\Leftrightarrow(MN)\ge\sqrt{2}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\beta=1$. Επομένως $(MN)_{min}=\sqrt{2}$

2ος τρόπος:

$(MN)=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}|\alpha-\beta|=\sqrt{2}|\alpha-e^\alpha|=\sqrt{2}(e^\alpha-\alpha)$

γιατί είναι $e^\alpha\ge\alpha+1\Leftrightarrow\alpha-e^\alpha\le-1<0$ και $e^\alpha\ge\alpha+1\Leftrightarrow e^\alpha-\alpha\ge1$ (2) για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\alpha=0$.

Άρα $(1)\Leftrightarrow\sqrt{2}(e^\alpha-\alpha)\ge\sqrt{2}\Leftrightarrow(MN)\ge\sqrt{2}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\alpha=0$. Επομένως $(MN)_{min}=\sqrt{2}$. Προφανώς τα σημεία όταν η απόσταση είναι ελάχιστη είναι $M(0,1)$ και $N(1,0)$.

δ) 1ος τρόπος: Λόγω συμμετρίας των C_f,C_g ως προς την $y=x$, τότε αφού $(MN)_{min}=\sqrt{2}$ τότε $d(M,\varepsilon)_{min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2ος τρόπος: Έχουμε την ευθεία $y=x\Leftrightarrow x-y=0$.

Η απόσταση του $M(\alpha,\beta)$ από την ευθεία δίνεται από τον τύπο:

$d(M,\varepsilon)=\dfrac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}=\dfrac{\alpha-e^{\alpha}}{\sqrt{2}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ άρα $d(M,\varepsilon)_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ε) Είναι $f(x)=e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ και έχει μοναδική ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$

Έστω $\lambda_1<0$ τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E_1=\lim\limits_{\lambda_1\to-\infty}E(\lambda_1)$ όπου

$E(\lambda_1)=\int_{\lambda_1}^{0}|f(x)|dx=\int_{\lambda_1}^{0}e^x\,dx=\left[e^x\right]_{\lambda_1}^{0}=1-e^{\lambda_1}$ άρα $E_1=\lim\limits_{\lambda_1\to-\infty}E(\lambda_1)=1$ τετραγωνική μονάδα

Είναι $g(x)=\ln x$, $x>0$, $f(1)=0$ και έχει μοναδική ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$ και $g(x)\leq 0$ για κάθε $x\in(0,1]$. Έστω $\lambda_2>0$ τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E_2=\lim\limits_{\lambda_2\to0^+}E(\lambda_2)$ όπου

$E(\lambda_2)=\int_{\lambda_2}^{1}|g(x)|dx=-\int_{\lambda_2}^{1}\ln x\,dx=-\left[x\ln x\right]_{\lambda_2}^{1}+\int_{\lambda_2}^{1}dx=\lambda_2\ln(\lambda_2)+1-\lambda_2$ άρα $E_2=\lim\limits_{\lambda_2\to0^+}E(\lambda_2)=1$ τετραγωνική μονάδα γιατί

$$\lim_{\lambda_2\to0^+}\left[\lambda_2\ln(\lambda_2)\right]=\lim_{\lambda_2\to0^+}\frac{\ln(\lambda_2)}{\frac{1}{\lambda_2}}\overset{\text{DLH}}{=}\lim_{\lambda_2\to0^+}\frac{\frac{1}{\lambda_2}}{-\frac{1}{\lambda_2^{\,2}}}=\lim_{\lambda_2\to0^+}(-\lambda_2)=0$$

Άρα $E_1=E_2=1$ τ.μ.

99. α) Έστω $c=\int_1^e\dfrac{\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)}{x}dx$ με $c\in\mathbb{R}$, τότε

$g(x)=f(x)+c=x\ln x+\ln 2$, $x\geq1$. Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x)=\ln x+1>0$ για κάθε $x\geq1$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και επειδή g συνεχής είναι:

$g([1,+\infty))=\left[g(1),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=[\ln 2,+\infty)$ άρα $g(x)\geq\ln 2>0$ για κάθε $x\geq1$.

β) $f(x)=x\ln x+\ln 2-c$, $x\geq1$. Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=\ln x+1>0$ για κάθε $x\geq1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f([1,+\infty))$. Έστω ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in f([1,+\infty))$ τέτοια ώστε

$f^{-1}(x_1)\geq f^{-1}(x_2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x_1\geq x_2$ άτοπο. Άρα και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Η $f^{-1}\left(f(x)\right)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Είναι $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ και παραγωγίζοντας έχουμε $\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)f'(x)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)=\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{\ln x+1}$ αφού $f'(x)>0$ για κάθε $x\geq 1$.Είναι

$$c=\int_1^e\frac{\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\frac{1}{\ln x+1}dx=\int_1^e\frac{(\ln x+1)'}{\ln x+1}dx=\left[\ln\left(|\ln x+1|\right)\right]_1^e=\ln 2\,.$$

Άρα $f(x)=x\ln x$, $x\geq 1$.

δ) $f(x)\left(x^3+x-4\right)-2x^3\ln 2-2x\ln 2+8\ln 2=0\Leftrightarrow$

$f(x)\left(x^3+x-4\right)-2\ln 2\left(x^3+x-4\right)=0\Leftrightarrow\left(f(x)-2\ln 2\right)\left(x^3+x-4\right)=0$

Έστω η συνάρτηση $k(x)=x^3+x-4$, $x\in[1,2]$.

Η k είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική, $g(1)=-2<0$, $g(2)=6>0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$.

Η k είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $k'(x)=3x^2+1>0$ άρα $k\nearrow[1,2]$ και το $\xi\in(1,2)$ είναι μοναδικό.

Είναι $f(x)-2\ln 2=0\Leftrightarrow f(x)=f(2)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=2$

Επομένως $\left(f(x)-2\ln 2\right)\left(x^3+x-4\right)=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x=\xi$. Άρα η εξίσωση $f(x)\left(x^3+x-4\right)-2x^3\ln 2-2x\ln 2+8\ln 2=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(1,2]$.**ε)** Η f' είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x\geq 1$ άρα η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ είναι η ευθεία $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=x-1$ και επειδή η f είναι κυρτή ισχύει $f(x)\geq x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$. Άρα

$$\int_1^e f(x)dx>\int_1^e(x-1)dx=\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^e=\frac{(e-1)^2}{2}$$

στ) i) Είναι $f(x)=x\ln x\geq 0$ για κάθε $x\geq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E\left[\alpha(t)\right]=\int_1^{\alpha(t)}|f(x)|dx=\int_1^{\alpha(t)}x\ln x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\alpha(t)}-\int_1^{\alpha(t)}\frac{x}{2}dx=$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\alpha(t)} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\alpha(t)} = \frac{\alpha^2(t)}{2}\ln\left[\alpha(t)\right] - \frac{\alpha^2(t)}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2\alpha^2(t)\ln\left[\alpha(t)\right] - \alpha^2(t) + 1}{4}$$

ii) Επειδή το $M\left(\alpha(t),0\right)$ απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με ταχύτητα 1cm/sec και κινείται πάνω στον άξονα x΄x τότε την χρονική στιγμή $t=2$ sec θα είναι $\alpha'(t)=1 \Leftrightarrow \alpha'(t)=t' \Leftrightarrow \alpha(t)=t+c, c\in\mathbb{R}$.

Για $t=0$: c=0 οπότε $\alpha(t)=t$ άρα $\alpha'(t)=1$.

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι

$$\left(E\left[\alpha(t)\right]\right)' = \frac{4\alpha(t)\alpha'(t)\ln\left[\alpha(t)\right] + \frac{2\alpha^{\not 2}(t)}{\not\alpha(t)}\alpha'(t) - 2\alpha(t)\alpha'(t)}{4} =$$

$\alpha(t)\alpha'(t)\ln\left[\alpha(t)\right]$. Τη χρονική στιγμή $t=2$ sec θα είναι

$\left(E\left[\alpha(2)\right]\right)' = \alpha(2)\alpha'(2)\ln\left[\alpha(2)\right] = 2\cdot 1\cdot \ln 2 = 2\ln 2$. μ/ sec

100. α) Έστω ότι η f δεν είναι 1-1 τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε: $f(x_1) = f(x_2) \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} f\left(f(x_1)\right) = f\left(f(x_2)\right) \Leftrightarrow$

$x_1{}^2 f(x_1) = x_2{}^2 f(x_2) \overset{f(x_1)=f(x_2)}{\Leftrightarrow} x_1{}^2 = x_2{}^2 \Leftrightarrow |x_1| = |x_2| \overset{x_1,x_2>0}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$ άτοπο. Άρα η f είναι συνάρτηση 1-1.

β) Είναι $f^{(3)}(x) > 0 \Rightarrow f''\nearrow(0,+\infty)$.

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (0,+\infty) : f''(x_0) = 0$ τότε:

Για $0 < x < x_0 \overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $(0, x_0]$. Για $x > x_0 \overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι κυρτή στο $[x_0, +\infty)$.

Άρα η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = x_0$ που είναι άτοπο.

Άρα $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και επειδή f'' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ τότε $f'\nearrow(0,+\infty) \Rightarrow f' : 1-1$.

Αν $f''(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ τότε $f'\searrow(0,+\infty) \Rightarrow f' : 1-1$.

Άρα σε κάθε περίπτωση η f' είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1.

γ) Η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$ επομένως αντίστοιχα

το ίδιο ισχύει και για την f^{-1}. Είναι $f\left(f\left(x\right)\right)=x^2f\left(x\right)$ για κάθε $x>0$ άρα βάζοντας όπου x το $f^{-1}\left(x\right)>0$ προκύπτει:

$$f\left(f\left(f^{-1}\left(x\right)\right)\right)=\left[f^{-1}\left(x\right)\right]^2f\left(f^{-1}\left(x\right)\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)=\left[f^{-1}\left(x\right)\right]^2x\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\left[f^{-1}\left(x\right)\right]^2=\frac{f\left(x\right)}{x}$$

και επειδή $f^{-1}\left(x\right)>0$, $f\left(x\right)>0$ και $x>0$ άρα τελικά είναι $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt{\frac{f\left(x\right)}{x}}$

$$\int_1^2\left(\left[f^{-1}\left(x\right)\right]^2\right)'f^{-1}\left(x\right)dx=\int_1^2\left(\frac{f\left(x\right)}{x}\right)'\sqrt{\frac{f\left(x\right)}{x}}\,dx\quad(1)$$

Θέτουμε $\frac{f\left(x\right)}{x}=u>0$ και είναι $\left(\frac{f\left(x\right)}{x}\right)'dx=du$. Για $x=1$ είναι $u=1$ και για $x=2$ είναι $u=\frac{1}{4}$.

$$\text{Άρα }(1)=\int_1^{\frac{1}{4}}\sqrt{u}\,du=\left[\frac{3u^{\frac{3}{2}}}{2}\right]_1^{\frac{1}{4}}=\left[\frac{3u\sqrt{u}}{2}\right]_1^{\frac{1}{4}}=\frac{3\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{2}-\frac{3}{2}=\frac{3}{16}-\frac{3}{2}=-\frac{21}{16}$$

δ) Είναι $M\left(x\left(t\right),f\left[x\left(t\right)\right]\right)$ με $x\left(t\right)>0$.

Απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με ταχύτητα 1m/sec άρα $x'\left(t\right)=1$ m/sec.

Είναι $\left(\varepsilon\right):y=-\frac{3}{4}x-3\Leftrightarrow4y=-3x-12\Leftrightarrow3x+4y+12=0$ και έχουμε ότι:

$$\frac{3x\left(t\right)+4f\left(x\left(t\right)\right)+12}{5}$$

$$d\left(M,\varepsilon\right)=d\left(x\left(t\right)\right)=\frac{\left|3x\left(t\right)+4f\left(x\left(t\right)\right)+12\right|}{\sqrt{9+16}}=\frac{\left|3x\left(t\right)+4f\left(x\left(t\right)\right)+12\right|}{5}=H$$

συνάρτηση d είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$d'\left(x\left(t\right)\right)=\frac{3x'\left(t\right)+4f'\left(x\left(t\right)\right)x'\left(t\right)}{5}=\frac{3+4f'\left(x\left(t\right)\right)}{3}$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που διέρχεται από το $A\left(1,1\right)$ είναι $x\left(t_0\right)=1$.

$$\text{Άρα }d'\left(x\left(t_0\right)\right)=\frac{3+4f'\left(x\left(t_0\right)\right)}{3}=\frac{3+4f'\left(1\right)}{3}=\frac{3-4}{3}=-\frac{1}{3}\text{ m/sec γιατί}$$

παραγωγίζοντας την σχέση $f\left(f\left(x\right)\right)=x^2f\left(x\right)$ έχουμε

$f'\left(f\left(x\right)\right)f'\left(x\right)=2xf\left(x\right)+x^2f'\left(x\right)$ και για x=1 είναι

$\left[f'\left(1\right)\right]^2-2f'\left(1\right)-2=0\Leftrightarrow f'\left(1\right)=2$ απορρίπτεται ή $f'\left(1\right)=-1\Rightarrow f'\left(1\right)=-1$

101. α) $\rho^{\rho}=e^{\rho+1}\Leftrightarrow\ln\rho^{\rho}=\ln e^{\rho+1}\Leftrightarrow\rho\ln\rho=\rho+1\Leftrightarrow g\left(\rho\right)=0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ με $g'\left(x\right)=\ln x+1-1=\ln x$.

Για κάθε $x\in\left(0,1\right)$ είναι $g'\left(x\right)<0$ και για κάθε $x\in\left(1,+\infty\right)$ είναι $g'\left(x\right)>0$, επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,1\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[1,+\infty\right)$. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-x\right)=0$,

οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\ln x-x-1\right)=-1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln x-x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\ln x-1-\dfrac{1}{x}\right)\right]=+\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1=\left(0,1\right]$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g\left(\Delta_1\right)=\left[-2,-1\right)$. Επειδή το 0 δεν περιέχεται στο $g\left(\Delta_1\right)$, η εξίσωση $g\left(x\right)=0$ είναι αδύνατη στο Δ_1.

Στο διάστημα $\Delta_2=\left(1,+\infty\right)$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g\left(\Delta_2\right)=\left(-2,+\infty\right)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $g\left(\Delta_2\right)$ υπάρχει μοναδικό $\rho\in\Delta_2$ (λόγω μονοτονίας) τέτοιο, ώστε $g\left(\rho\right)=0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ με

$f'\left(x\right)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\left(x+1\right)-\ln x}{\left(x+1\right)^2}=\dfrac{x+1-x\ln x}{x\left(x+1\right)^2}=\dfrac{-g\left(x\right)}{x\left(x+1\right)^2}$. Για κάθε $x\in\left(0,1\right]$ είναι

$g\left(x\right)<0$, άρα $f'\left(x\right)>0$ και για κάθε $1<x<\rho\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g\left(x\right)<g\left(\rho\right)=0$, άρα $f'\left(x\right)>0$. Δηλαδή για κάθε $x\in\left(0,\rho\right)$ είναι $f'\left(x\right)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\rho\right]$. Για κάθε $x>\rho$ είναι $g\left(x\right)>g\left(\rho\right)=0\Rightarrow f'\left(x\right)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\rho,+\infty\right)$. Η f έχει μέγιστο το $f\left(\rho\right)=\dfrac{\ln\rho}{\rho+1}$. Όμως

$g(\rho)=0 \Leftrightarrow \rho\ln\rho=\rho+1 \Leftrightarrow \ln\rho=\dfrac{\rho+1}{\rho}$, άρα $f(\rho)=\dfrac{\cancel{\rho+1}}{\rho}=\dfrac{1}{\cancel{\rho+1}}=\dfrac{1}{\rho}$, οπότε για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\le\dfrac{1}{\rho}$.

γ) $\int_1^e f(x)dx+\int_1^e \dfrac{\ln(x+1)}{x}dx=\int_1^e \dfrac{\ln x}{x+1}dx+\int_1^e \dfrac{\ln(x+1)}{x}dx=$

$\int_1^e \ln x\left(\ln(x+1)\right)'dx+\int_1^e \dfrac{\ln(x+1)}{x}dx=$

$\left[\ln x\cdot\ln(x+1)\right]_1^e-\int_1^e \dfrac{1}{x}\ln(x+1)dx+\int_1^e \dfrac{\ln(x+1)}{x}dx=$

$\ln(e+1)-\int_1^e \dfrac{\ln(x+1)}{x}dx+\int_1^e \dfrac{\ln(x+1)}{x}dx=\ln(e+1)$

δ) Είναι $0,2022<1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0,2022)<f(1)=0$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$.

Στο διάστημα $\Delta=(\rho,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta)=\left(0,\dfrac{1}{\rho}\right)$. Επειδή το $f(0,2022)$ δεν περιέχεται στο $f(\Delta)$, η εξίσωση $f(x)=f(0,2022)$ είναι αδύνατη στο $(\rho,+\infty)$.

102. α) $f(x)=\dfrac{(3x+1)(e^x+1)+1}{e^x+1}=\dfrac{(3x+1)\cancel{(e^x+1)}}{\cancel{e^x+1}}+\dfrac{1}{e^x+1}=3x+1+\dfrac{1}{e^x+1}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{3e^{2x}+5e^x+3}{(e^x+1)^2}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+1+\dfrac{1}{e^x+1}\right)=-\infty+1+1=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x+1+\dfrac{1}{e^x+1}\right)=+\infty+1+0=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε υπάρχει μοναδικό

$\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)=0$.

β) Είναι $f(0)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>0$, οπότε $f((-\infty,0))=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f((-\infty,0))$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty,0)$. Όμως η f έχει μοναδική ρίζα το ρ, άρα $\rho<0$.

γ) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x)=2xf^2(x)+x^2\cdot 2f(x)f'(x)=2xf(x)\left(f(x)+xf'(x)\right)$.

Η h έχει ρίζες το 0 και το ρ. Θα αναζητήσουμε άλλη μία ρίζα.

Είναι $h(0)=0=h(\rho)$.

Η h συνεχής στο $[\rho,0]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $x_0\in(\rho,0)$ τέτοιο, ώστε $h'(x_0)=0$. Όμως το 2x έχει μοναδική ρίζα το 0, η $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα το ρ, οπότε το x_0 είναι ρίζα της συνάρτησης $g(x)=f(x)+xf'(x)$.

- Για κάθε $x<\rho$ είναι $x<0$, $f(x)<f(\rho)=0$, $f'(x)>0$, άρα $f(x)+xf'(x)<0$, οπότε $h'(x)<0$.

Η h συνεχής στο $(-\infty,\rho]$ άρα η h γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

- Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>f(0)>0$, $f'(x)>0$, άρα $f(x)+xf'(x)>0$, οπότε $h'(x)>0$.

Η h συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα η h γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=2f'(x)+xf''(x)$.

Είναι $f''(x)=\frac{e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$. Για κάθε $x\in(\rho,0)$ είναι $e^x<e^0=1\Leftrightarrow e^x-1<0$, οπότε $f''(x)<0$, άρα $g'(x)=2f'(x)+xf''(x)>0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(\rho,0)$. Άρα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$.

Για κάθε $\rho<x<x_0\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(x)<g(x_0)=0$. Είναι $x<0$, $f(x)>0$ οπότε $h'(x)>0$.

Η h είναι συνεχής στο $[\rho,x_0]$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[\rho,x_0]$.

Για κάθε $x_0<x<0\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(x)>g(x_0)=0$ οπότε $h'(x)<0$ αφού $x<0$, $f(x)>0$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_0,0]$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,0]$.

Επομένως η h έχει τοπικά ελάχιστο στο $x=\rho$, τοπικό μέγιστο στο $x = x_0$ και τοπικό ελάχιστο στο x = 0.

δ) Είναι $0 \le x \le 2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) \le f(x) \le f(2) \Leftrightarrow \frac{3}{2} \le f(x) \le 7 + \frac{1}{e^2+1}$.

Επειδή στη τελευταία σχέση η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [0,2]$, είναι

$$\int_0^2 \frac{3}{2}dx < \int_0^2 f(x)dx < \int_0^2 7 + \frac{1}{e^2+1}dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{2}(2-0) < \int_0^2 \left(3x+1+\frac{1}{e^x+1}\right)dx < \left(7+\frac{1}{e^2+1}\right)(2-0) \Leftrightarrow$$

$$3 < \left[3\frac{x^2}{2}+x\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{e^x+1}dx < \frac{7e^2+8}{e^2+1}\cdot 2 \Leftrightarrow\ 3 < 8 + \int_0^2 \frac{1}{e^x+1}dx < \frac{7e^2+8}{e^2+1}\cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$-5 < \int_0^2 \frac{1}{e^x+1}dx < \frac{14e^2+16}{e^2+1} - 8 \Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{e^x+1}dx < \frac{14e^2+16-8e^2-8}{e^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 \frac{1}{e^x+1}dx < \frac{6e^2+8}{e^2+1}.$$

2ος τρόπος

$\frac{1}{e^x+1} < \frac{1}{e^x}$ οπότε $\int_0^2 \frac{1}{e^x+1}dx < \int_0^2 \frac{1}{e^x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 \frac{1}{e^x+1}dx < -\frac{1}{e^2}+1$

άρα

$\int_0^2 \frac{1}{e^x+1}dx < \frac{6e^2+8}{e^2+1}$ αφού $\frac{6e^2+8}{e^2+1} = 6 + \frac{2}{e^2+1} > 1 > 1 - \frac{1}{e^2}$

103. α) Έστω $\frac{f(x)}{x} = h(x)$, $x>0$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \alpha$. Τότε $f(x) = xh(x)$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xh(x) = +\infty$. Είναι: $\alpha = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\text{DLH}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

β) Έστω $g(x) = (x-1)f(x)$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $g'(x) = f(x) + (x-1)f'(x)$ και $g(0) = g(1) = 0$, οπότε σύμφωνα με το Θ. Rolle, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + (\xi-1)f'(\xi) = 0$.

γ) i. Για $x=0$ ισχύει η ισότητα. Για $x>0$: Ισχύει για την f το ΘΜΤ στο $[0,x]$, οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(x)}{x}$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:

$0<\xi_1<x \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(0)<f'(\xi_1)<f'(x) \Leftrightarrow 1<\dfrac{f(x)}{x}<f'(x) \Leftrightarrow x<f(x)<xf'(x)$.

ii. Είναι $t \le f(t) \le tf'(t)$ για κάθε $t \ge 0$, οπότε και

$\int_0^x t\,dt \le \int_0^x f(t)\,dt \le \int_0^x tf'(t)\,dt \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2} \le \int_0^x f(t)\,dt \le \left[tf(t)\right]_0^x - \int_0^x f(t)\,dt$.Είναι

$\int_0^x f(t)\,dt \le xf(x) - \int_0^x f(t)\,dt \Leftrightarrow 2\int_0^x f(t)\,dt \le xf(x) \Leftrightarrow \int_0^x f(t)\,dt \le \dfrac{xf(x)}{2}$,

άρα $\dfrac{x^2}{2} \le \int_0^x f(t)\,dt \le \dfrac{xf(x)}{2}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2} = +\infty$, είναι και

$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = +\infty$.

104. α) Έστω ότι η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ. Τότε επειδή εφάπτεται της C_f στο Α είναι $f'(x_1)=\lambda$ και επειδή εφάπτεται της C_f στο Β είναι $f'(x_2)=\lambda$, άρα $f'(x_1)=f'(x_2)$. Επειδή η ευθεία ε ταυτίζεται με την ΑΒ, είναι: $\lambda_{AB} = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \lambda$. Άρα $f'(x_1)=f'(x_2)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (3).

β) Η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $f'(x)=4x^3+6\alpha x^2+6\beta x+1$, άρα λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Άρα $f'(x_1)=f'(x_2)=f'(\xi)$. Η f' είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1,\xi]$, $[\xi,x_2]$ και παραγωγίσιμη στα (x_1,ξ) και (ξ,x_2) με $f''(x)=12x^2+12\alpha x+6\beta=6\left(2x^2+2\alpha x+\beta\right)$. Λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1,\xi)$ και $\xi_2 \in (\xi,x_2)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)=0$ και $f''(\xi_2)=0$. Δηλαδή η f'' έχει τουλάχιστον 2 ρίζες. Όμως η f'' είναι 2ου βαθμού και έχει το πολύ 2 ρίζες, άρα η f'' έχει ακριβώς 2 ρίζες οπότε έχει $\Delta>0 \Leftrightarrow 4\alpha^2-8\beta>0 \Leftrightarrow 4\alpha^2>8\beta \Leftrightarrow \alpha^2>2\beta$.

γ) $\int_{x_1}^{x_2} xf''(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} x\left(f'(x)\right)'dx = \left[xf'(x)\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx \Leftrightarrow$

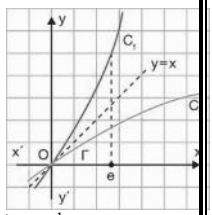
$\int_{x_1}^{x_2} xf''(x)\,dx = x_2f'(x_2) - x_1f'(x_1) - \left[f(x)\right]_{x_1}^{x_2} \overset{(3)}{=} 0$.

105. α) Η $f(x)=x+e^x-1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=1+e^x>0$ άρα $f\nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-e^x-1)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και αφού η $f\nearrow$ τότε το σύνολο τιμών $f(A)=\mathbb{R}$.

β) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και $1-1$ συνεπώς ορίζεται η f^{-1}.
$f(x)>x\Leftrightarrow x+e^x-1>x\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$.

γ) Αφού οι C_f, $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$ και η C_f είναι πάνω από την $y=x$ στο $[0,e]$ τότε η $C_{f^{-1}}$ θα είναι κάτω από την $y=x$. Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:



$E(\Omega)=\int_0^e f(x)-f^{-1}(x)dx=\int_0^e f(x)dx-\int_0^e f^{-1}(x)dx$.

Θέτω $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$ για $x=0$ είναι $f(u)=f(0)$ άρα $u=0$ ενώ για $x=e$ είναι $f(u)=e=f(1)$ άρα $u=1$ οπότε:

$$E(\Omega)=\int_0^e f(x)dx-\int_0^1 uf'(u)du=\int_0^e\left(x+e^x-1\right)dx-\left[uf(u)\right]_0^1+\int_0^1 f(u)du=$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^e+\left[e^x\right]_0^e-\left[x\right]_0^e-f(1)+\int_0^e\left(u+e^4-1\right)du=\frac{e^2}{2}+e^e-e-\frac{5}{2}.$$

δ) Είναι $e^{g(x)}+g(x)=x+\ln x\Leftrightarrow e^{g(x)}+g(x)-1=e^{\ln x}+\ln x-1$.

$f(g(x))=f(\ln x)$ και αφού η f είναι $1-1$ τότε $g(x)=\ln x$, $x>0$.

ε) Έστω G αρχική της $\frac{1}{g(x)}$ τότε, $G'(x)=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\ln x}$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την G στο $[x,x+1]$ οπότε υπάρχει $\xi\in[x,x+1]$ τέτοιο ώστε

$$G'(\xi)=\frac{G(x+1)-G(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow\frac{1}{\ln\xi}=\int_x^{x+1}\frac{1}{g(t)}dt$$

Είναι $x<\xi<x+1\Leftrightarrow\ln x<\ln\xi<\ln(x+1)\Leftrightarrow\frac{1}{\ln x}>\frac{1}{\ln\xi}>\frac{1}{\ln(x+1)}\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{g(x+1)}<\int_x^{x+1}\frac{1}{g(t)}dt<\frac{1}{g(x)}.$$

στ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την g στο $[e,\pi]$ οπότε υπάρχει $x_0\in(e,\pi)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=\frac{g(\pi)-g(e)}{\pi-e}\Leftrightarrow\frac{1}{x_0}=\frac{g(\pi)-1}{\pi-e}$ είναι

$0<e<x_0<\pi\Leftrightarrow\frac{1}{e}>\frac{1}{x_0}>\frac{1}{\pi}$ οπότε

$\frac{\pi}{e}-1>g(\pi)-1>1-\frac{e}{\pi}\Leftrightarrow\frac{\pi}{e}>g(\pi)>2-\frac{e}{\pi}$.

ζ) $x+e^x+e^{x+e^x-1}=e-2\Leftrightarrow x+e^x-1+e^{x+e^x-1}-1=e\Leftrightarrow f(f(x))=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}$

$f(x)=1\Leftrightarrow f(x)=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=0$.

1ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα
Επίπεδο 1

Θέμα Α

Α1. Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=f(\alpha)$, $\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)=f(\beta)$.

Α3. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Α4. α) Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Λ

Θέμα Β

Β1. Η h ορίζεται όταν: $\begin{cases}x\in D_f\\ f(x)\in D_g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[0,\pi]\\ f(x)\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow x\in[0,\pi]$.

Είναι $h(x)=(g\circ f)(x)=f^2(x)+f(x)+1=\eta\mu^2x+\eta\mu x+1$, $x\in[0,\pi]$.

Β2. α) $\lim\limits_{x\to0}\frac{h^2(x)-1}{f^2(x)+4f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\eta\mu^2x+\eta\mu x+1)^2-1}{\eta\mu^2x+4\eta\mu x}=$

$$\lim_{x\to0}\frac{(\eta\mu^2x+\eta\mu x)(\eta\mu^2x+\eta\mu x+2)}{\eta\mu x(\eta\mu x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{\eta\mu x}(\eta\mu x+1)(\eta\mu^2x+\eta\mu x+2)}{\cancel{\eta\mu x}(\eta\mu x+4)}=\lim_{x\to0}\frac{(\eta\mu x+1)(\eta\mu^2x+\eta\mu x+2)}{\eta\mu x+4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{1}{x+1}\right)=1\cdot 1=1$.

Β3. Για την συνάρτηση g:

1ος τρόπος: Η g είναι τριώνυμο με $\alpha=\beta=\gamma=1$ και διακρίνουσα $\Delta=-3$.

Επομένως η g είναι μία παραβολή με κορυφή (ολικό ελάχιστο) για $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{1}{2}$ το $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{\Delta}{4\alpha}=\dfrac{3}{4}$. Επίσης $g\searrow\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$ και $g\nearrow\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

2ος τρόπος: Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x)=2x+1$

Είναι $g'(x)\geq 0\Leftrightarrow 2x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{2}$.Για κάθε $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ είναι $g'(x)<0$ και g συνεχής στο $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$ άρα $g\searrow\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$.

Για κάθε $x\in\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ είναι $g'(x)>0$ και g συνεχής στο $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ άρα $g\nearrow\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=-\dfrac{1}{2}$ το $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$.

Για την συνάρτηση h: Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με

$h'(x)=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x+1)$

Για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $0<\eta\mu x\leq 1\Leftrightarrow 1<2\eta\mu x+1\leq 3$. Επίσης $\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $\sigma\upsilon\nu x<0$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$. Επομένως $h'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και η h συνεχής άρα $h\nearrow\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και $h'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ και η h συνεχής άρα $h\searrow\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

Η h παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=0$ το $h(0)=1$, τοπικό μέγιστο για $x=\dfrac{\pi}{2}$ το $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$ και τοπικό ελάχιστο $x=\pi$ το $h(\pi)=1$.

Β4. $0\leq x\leq 1\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(x)\geq g(0)=1$ και $0\leq x\leq 1<\pi\Rightarrow 0\leq\eta\mu x\leq 1\Rightarrow f(x)\leq 1$.

Επομένως για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $g(x) \geq f(x)$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_0^1 |g(x) - f(x)| dx = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx =$

$= \int_0^1 (x^2 + x + 1 - \eta\mu x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \sigma\upsilon\nu x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \sigma\upsilon\nu 1 - 1 = \frac{5 + 6\sigma\upsilon\nu 1}{6}$ τ.μ.

Θέμα Γ

Γ1. Για κάθε $x > 0$ είναι $f^4(x) = x^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt[4]{x^2} \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{x}$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ αδύνατη άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής τότε διατηρεί πρόσημο στο $(0, +\infty)$. Είναι $f(1) = 1$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Δηλαδή $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής τότε $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ άρα

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Γ2. $g(x) = (x-1) f^2(x) f(x) = x(x-1)\sqrt{x}$, $x \geq 0$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως γίνομενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$g'(x) = (x-1)\sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{x(x-1)}{2\sqrt{x}}$. Είναι $g(0) = g(1) = 0$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Γ3. Έστω $M(x(t), y(t))$ με $y(t) = f(x(t)) = \sqrt{x(t)}$ το υλικό σημείο. Είναι $x'(t) = 0,5 \text{cm/sec}$.

Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ είναι $y'(t) = \frac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)}} = \frac{1}{4\sqrt{x(t)}}$.

Έστω $t = t_0$ η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το Α, τότε $x(t_0) = 4$,

οπότε $y'(t_0) = \frac{x'(t_0)}{2\sqrt{x(t_0)}} = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{8} \text{cm/sec}$.

Γ4. $f'(\beta) < \frac{1}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}} < f'(\alpha) \Leftrightarrow f'(\beta) < \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})} < f'(\alpha) \Leftrightarrow$

$f'(\beta) < \dfrac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta-\alpha} < f'(\alpha)$.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την f στο [α, β] άρα υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$f'(x_0) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} = \dfrac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta-\alpha}$.

Είναι $0 < \alpha < x_0 < \beta \Leftrightarrow 0 < \sqrt{\alpha} < \sqrt{x_0} < \sqrt{\beta} \Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{\alpha} < 2\sqrt{x_0} < 2\sqrt{\beta} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}} > \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} > \dfrac{1}{2\sqrt{\beta}} \Leftrightarrow f'(\beta) < f'(x_0) < f'(\alpha) \Leftrightarrow f'(\beta) < \dfrac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta-\alpha} < f'(\alpha)$.

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[2\ln(x-2) - x^2 + 4x + 1\right] = -\infty$ άρα υπάρχει $\alpha > 2$ πολύ κοντά στο 2 τέτοιο ώστε $f(\alpha) < 0$. Είναι $f(3) = 4 > 0$ και $f(5) = 2\ln 3 - 4 = \ln 8 - \ln e^4 < 0$ αφού $8 < e^4$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχουν $x_1 \in (2,3)$ και $x_2 \in (3,5)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο: $f'(x) = \dfrac{2}{x-2} - 2x + 4 = \dfrac{2-2x(x-2)+4(x-2)}{x-2} =$

$= \dfrac{2-2x^2+4x+4x-8}{x-2} = \dfrac{-2x^2+8x-6}{x-2} = -\dfrac{2(x^2-4x+3)}{x-2}$.

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$-2(x^2-4x+3)$	-	+	+	-	
$x-2$	-	-	+	+	
$f'(x)$	ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ		+	-	
f	ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ		↗	↘	

Ο.Μ.

Για $x \in (2,3)$ είναι $f'(x) > 0$ και η f είναι συνεχής στο $(2,3]$ επομένως $f \nearrow (2,3]$. Για $x \in (3,+\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[3,+\infty)$ επομένως $f \searrow [3,+\infty)$. Άρα τα x_1, x_2 είναι μοναδικά.

Δ2. $2\ln\left[(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)\right]+\alpha(4-\alpha)+\beta(4-\beta)+\gamma(4-\gamma)=9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ln(\alpha-2)+\alpha(4-\alpha)+2\ln(\beta-2)+\beta(4-\beta)+2\ln(\gamma-2)+\gamma(4-\gamma)=9\Leftrightarrow$

$2\ln(\alpha-2)+\alpha(4-\alpha)+1+2\ln(\beta-2)+\beta(4-\beta)+1+2\ln(\gamma-2)+\gamma(4-\gamma)+1=12\Leftrightarrow$

$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=12$.

Η f έχει μέγιστο το $f(3)=4$ άρα $f(x)\le f(3)=4$ για κάθε $x>2$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=3$.

Είναι $f(\alpha)\le f(3)=4$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\alpha=3$ (1)

Είναι $f(\beta)\le f(3)=4$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\beta=3$ (2)

Είναι $f(\gamma)\le f(3)=4$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\gamma=3$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(2),(3) προκύπτει $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\le 12$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\alpha=\beta=\gamma=3$.

Δ3. $f(x)\le 4\overset{x>2}{\Leftrightarrow}\dfrac{f(x)}{x}\le\dfrac{4}{x}$ για κάθε $x>2$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=3$. Άρα για κάθε $2<x_1<x_2$ είναι

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{f(x)}{x}dx>\int_{x_1}^{x_2}\frac{4}{x}dx=\left[4\ln x\right]_{x_1}^{x_2}=4\ln x_2-4\ln x_1=4\ln\frac{x_2}{x_1}\ .$$

Δ4. Αρκεί να εξετάσουμε αν η C_f έχει σημεία καμπής. Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο: $f''(x)=\left(\dfrac{2}{x-2}-2x+4\right)'=-\dfrac{2}{(x-2)^2}-2<0$ για κάθε $x>2$ άρα η f είναι κοίλη στο $(2,+\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής. Επομένως δεν υπάρχει εφαπτομένη που να την διαπερνά. Η εφαπτομένη της C_f για $x=5$ έχει εξίσωση: $y=f'(5)x+f(5)-5f'(5)$. Επειδή η f είναι κοίλη τότε $f(x)\le f'(5)x+f(5)-5f'(5)\Leftrightarrow f(x)+5f'(5)\le f'(5)x+f(5)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=5$. Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση το 5.

2ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα Επιπέδου 1

Θέμα Α

Α1. Για $x\ne x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$,οπότε

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot$

$\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως,

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

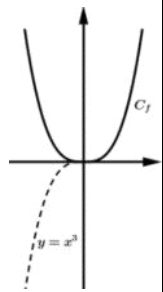
Α2. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g\circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(gof)(x)=g(f(x))$. Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία *x* του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1=\{x\in A/f(x)\in B\}$.

Α3. Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0,f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι $y-f(x_0)=\lambda(x-x_0)$, όπου $\lambda=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Α4. α) Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

Θέμα Β

Β1. $f(x)=|x|x^2=\begin{cases}-x^3\ ,\ x\le 0\\ x^3\ ,\ x\ge 0\end{cases}$. Για $x<0$ η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα x΄x με την $y=x^3$.



Για $x<0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-3x^2<0$ ενώ για $x>0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=3x^2>0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων τότε $f\searrow(-\infty,0]$ και $f\nearrow[0,+\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=0$.

Β2. $g(x)=\begin{cases}f(x)+1\ ,\ 0\le x\le 1\\ x^2+x\ \ ,\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow g(x)=\begin{cases}x^3+1\ ,\ 0\le x\le 1\\ x^2+x\ ,\ x>1\end{cases}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3+1\right) = 2 = g(1)$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+x\right) = 2$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = g(1)$, η g είναι συνεχής στο x = 1. Επιπλέον η g είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,1]$ και $(1,2]$ ως πολυωνυμική, οπότε η g είναι συνεχής στο $[0,2]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3+1-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+1\right)}{\cancel{x-1}} = 3$

και $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}} = 3$, οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο x = 1 με $g'(1) = 3$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $g'(x) = 3x^2$ και στο $(1,2)$ με $g'(x) = 2x+1$, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$. Επομένως για την g εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο $[0,2]$ και υπάρχει $\xi\in(0,2)$ για τα οποία $g'(\xi) = \dfrac{6-1}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Αν $\xi\in(0,1)$ τότε $g'(\xi) = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 3\xi^2 = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \xi^2 = \dfrac{5}{6} \overset{\xi>0}{\Leftrightarrow} \xi = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$.

Αν $\xi\in(1,2)$ τότε $g'(\xi) = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2\xi+1 = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2\xi = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \xi = \dfrac{3}{4} < 1$ απορρίπτεται.

Β3. α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{\not 3}}{x^{\not 2}} = -\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{g(x)}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1\right)} = \dfrac{1}{2}$.

Β4. Αν $f(x) = |x|x^2$, $x\in\mathbb{R}$ και $h(x) = x$, $x<0$ τότε η $h\circ f$ για να ορίζεται πρέπει: $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ f(x)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ |x|x^2<0 \ \text{αδύνατη} \end{cases}$ άρα τότε δεν ορίζεται η $h\circ f$.

Αν $f(x) = |x|x^2$, $x\in\mathbb{R}$ και $h(x) = 2x+1$, $x\ge 0$ τότε η $h\circ f$ ορίζεται όταν:

$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ |x|x^2 \geq 0 \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ άρα για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ είναι $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = 2f(x)+1 = 2|x|x^2+1 = \begin{cases} -2x^3+1, & x<0 \\ 2x^3+1, & x \geq 0 \end{cases}$.

Θέμα Γ

Γ1. Η f ορίζεται όταν $x>0$ και $x-\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \ln x$ **.** Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x>0$ είναι $\ln x \leq x-1 < x \Leftrightarrow x-\ln x > 0$, οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{x-\ln x - x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2} = \frac{\cancel{x}-\ln x-\cancel{x}+1}{(x-\ln x)^2} = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}.$$

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$. Για κάθε $x \in (0,e)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,e]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (e,+\infty)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[e,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει μέγιστο το $f(e) = \frac{e}{e-1}$.

Γ3. $\int_1^e \frac{1}{f(x)}dx = \int_1^e \frac{x-\ln x}{x}dx = \int_1^e \left(1-\frac{\ln x}{x}\right)dx = \int_1^e dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx =$

$= e-1-\frac{1}{2}\int_1^e 2(\ln x)'\ln x\,dx = e-1-\frac{1}{2}\left[\ln^2 x\right]_1^e = e-1-\frac{1}{2} = e-\frac{3}{2} = \frac{2e-3}{2}$**.**

Γ4. Είναι $f(1) = \frac{1}{1-\ln 1} = 1$. Αρχικά η ε διέρχεται από το σημείο Α οπότε $1 = \alpha+\beta$ (1). Επειδή η ε εφάπτεται της C_f στο Α, είναι $f'(1) = \lambda_\varepsilon = \alpha \Leftrightarrow 1 = \alpha$, τότε από τη σχέση (1) προκύπτει β=0.

Γ5. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x \cdot \frac{1}{x-\ln x}\right) = 0 \cdot 0 = 0$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = (0,e)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f(\Delta)=\left(0,\frac{e}{e-1}\right)$. Είναι $\frac{2}{3}<\frac{e}{e-1}\Leftrightarrow 2e-2<3e\Leftrightarrow e>-2$ ισχύει. Επειδή το 2/3 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f, η εξίσωση $f(x)=\frac{2}{3}$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα (0,e).

Θέμα Δ

Είναι $f(x)=1-x^{-x}=1-e^{\ln x^{-x}}=1-e^{-x\ln x}$, $x>0$

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=e^{-x\ln x}(\ln x+1)$.

Είναι $e^{-x\ln x}>0$ για κάθε $x>0$ και $\ln x+1\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq -1\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{e}$.

Άρα $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$, $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ άρα $f\searrow\left(0,\frac{1}{e}\right]$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ άρα $f\nearrow\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\frac{1}{e}$ το $f\left(\frac{1}{e}\right)=1-e^{\frac{1}{e}}$.

Δ2. Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f''(x)=-e^{-x\ln x}(\ln x+1)^2+\frac{e^{-x\ln x}}{x}=\ =-e^{-x\ln x}\left((\ln x+1)^2-\frac{1}{x}\right).$$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=(\ln x+1)^2-\frac{1}{x}$, $x>0$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις και σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $g'(x)=\frac{2(\ln x+1)}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{2x\ln x+2x+1}{x^2}$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=2x\ln x+2x+1$, $x>0$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις και σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $h'(x)=2\ln x+4$.

Είναι $h'(x)\geq 0\Leftrightarrow 2\ln x+4\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq -2\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{e^2}$.

Άρα $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e^2}$, $h'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$ άρα $h\searrow\left(0,\frac{1}{e^2}\right]$ και $h'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ άρα $h\nearrow\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$. Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\frac{1}{e^2}$ το $h\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{4}{e^2}+\frac{2}{e^2}+1=1-\frac{2}{e^2}>0$ (Πράγματι $1>\frac{2}{e^2}\Leftrightarrow e^2>2$). Επομένως $h(x)\geq h\left(\frac{1}{e^2}\right)>0$ για κάθε $x>0$.Άρα είναι $2x\ln x+2x+1>0$ και $x^2>0$ για κάθε $x>0$ επομένως $g'(x)>0$ για κάθε $x>0$ και $g\nearrow(0,+\infty)$.

Για $0<x<1\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(x)<g(1)=0$ άρα $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0,1]$. Για $x>1\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(1)=0$ άρα $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ άρα η f είναι κοίλη στο $[1,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει καμπή για $x=1$ και έχει σημείο καμπής το $A(1,f(1))\equiv A(1,0)$.

Δ3. Είναι $f(1)=0$ και $f'(1)=1$ άρα η εφαπτομένη είναι η $y=x-1$.

Η f είναι κυρτή στο $(0,1]$ άρα $f(x)\geq x-1$ για κάθε $x\in(0,1]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$. Αντίστοιχα η f είναι κοίλη στο $[1,+\infty)$ άρα $f(x)\leq x-1$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$. Άρα $f(x)=x-1$ μόνον για $x=1$.

Δ4. α) Από Δ1 ερώτημα είναι $f(x)\geq 1-e^{-\frac{1}{e}}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=\frac{1}{e}$.Για $x\in[1,2]$ είναι $f(x)\geq 1-e^{-\frac{1}{e}}\Leftrightarrow xf(x)\geq x\left(1-e^{-\frac{1}{e}}\right)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=\frac{1}{e}$. Άρα

$$\int_1^2 xf(x)dx>\int_1^2 x\left(1-e^{-\frac{1}{e}}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{e}}\right)\right]_1^2=2\left(1-e^{-\frac{1}{e}}\right)-\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{e}}\right)=\frac{3}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{e}}\right.$$

β) Η f είναι κοίλη για κάθε $x\geq 1$ άρα είναι $f(x)\leq x-1$ με την ισότητα να ισχύει

μόνον για $x=1$ άρα $\int_1^2 f(x)dx < \int_1^2 (x-1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2 = 2-2-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

3ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα
Επιπέδου 1

Θέμα Α

Α1. Η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$.

Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x)=F(x)+c$. (1)

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_\alpha^\alpha f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$. Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$, οπότε, για $x=\beta$, έχουμε $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(t)dt+G(\alpha)$ και άρα $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

Α2. Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

Α3. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Α4. α) Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ

Θέμα Β

Β1. Για $x<0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=2x$. Για $x>0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=3x^2$. Στο $x_0=0$ είναι: $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^{\not2}}{\not x}=0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^{\not2}}{\not x}=0$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

Β2. Παρατηρούμε ότι $f(-1)=(-1)^2=1$ και $f(1)=1^3=1$, δηλαδή $f(-1)=f(1)$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, οπότε εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[-1,1]$.

Β3. Επειδή $f(-1)=f(1)$ δεν εφαρμόζεται ο ορισμός του 1-1, οπότε η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

Β4. Έστω $M(x_1,f(x_1))$. Αν $x_1<0$, τότε η εφαπτομένη της C_f στο x_1 έχει εξίσωση $\varepsilon_1:\ y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y-x_1^2=2x_1(x-x_1)\Leftrightarrow y=2x_1x-x_1^2$

Η ε_1 διέρχεται από το Α, όταν: $-1=2x_1\cdot 0-x_1^2\Leftrightarrow x_1=\pm 1$. Επειδή $x_1<0$ είναι $x_1=-1$ και $\varepsilon_1:\ y=-2x-1$. Αν $x_1\geq 0$ τότε η εφαπτομένη της C_f στο x_1 έχει εξίσωση

$\varepsilon_2: y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y-x_1^3=3x_1^2(x-x_1)\Leftrightarrow y=3x_1^2x-2x_1^3$

Η ε_2 διέρχεται από το Α, όταν: $-1=3x_1^2\cdot 0-2x_1^3\Leftrightarrow x_1^3=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Τότε

$\varepsilon_2: y=3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 x-2\cdot\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}x-1$.

Β5. Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[-1,2]$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E=\int_{-1}^{0}x^2dx+\int_{0}^{2}x^3dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2}=\frac{1}{3}+4=\frac{13}{3}$.

Θέμα Γ

Γ1. α) Είναι $συνx+2f(\pi)\leq f'(x)\leq συνx+3f(\pi)\ \ (1)\Rightarrow$

$\int_0^{\pi}(συνx+2f(\pi))dx\leq\int_0^{\pi}f'(x)dx\leq\int_0^{\pi}(συνx+3f(\pi))dx\Leftrightarrow$

$\left[ημx+2f(\pi)x\right]_0^{\pi}\leq\left[f(x)\right]_0^{\pi}\leq\left[ημx+3f(\pi)x\right]_0^{\pi}\Leftrightarrow$

$2\pi f(\pi)\leq f(\pi)-\cancel{f(0)}^{0}\leq 3\pi f(\pi)\Leftrightarrow\begin{cases}2\pi f(\pi)-f(\pi)\leq 0\\ 3\pi f(\pi)-f(\pi)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}(2\pi-1)f(\pi)\leq 0\\ (3\pi-1)f(\pi)\geq 0\end{cases}\overset{\Leftrightarrow}{\substack{2\pi-1\geq 0\\ 3\pi-1\geq 0}}\begin{cases}f(\pi)\leq 0\\ f(\pi)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow f(\pi)=0$. Τότε η (1) γίνεται:

$συνx\leq f'(x)\leq συνx\Leftrightarrow f'(x)=συνx=(ημx)'\Leftrightarrow f(x)=ημx+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Επειδή $f(0)=0$ είναι $c=0$, οπότε $f(x)=\eta\mu x$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\not 2}\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\not x}=\lim\limits_{x\to 0}x\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$ γιατί

$\left|x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|=|x|\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\le|x|\Leftrightarrow -|x|\le x\eta\mu\dfrac{1}{x}\le|x|$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$,

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0}x\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$. Άρα

$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.Επειδή

$g(0)=0$ και $g'(0)=0$ η C_g εφάπτεται στον άξονα x΄x στο Ο.

γ) Για τα κοινά σημεία της C_f με τον x΄x έχουμε: $g(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ή

$x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}=0\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}\eta\mu\dfrac{1}{x}=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=\kappa\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\kappa\pi}$, $\kappa\in\mathbb{Z}^*$. Άρα κοινά σημεία είναι

το $O(0,0)$ και τα άπειρα σημεία της μορφής $\left(\dfrac{1}{\kappa\pi},0\right)$, $\kappa\in\mathbb{Z}^*$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\not 2}\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\not x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1=\lambda$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}-x\right)\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to 0^+}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu u}{u^2}-\dfrac{1}{u}\right)=$

$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u-u}{u^2}\overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}=0=\beta$, άρα η ευθεία $y=x$ είναι

ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. Όμοια στο $-\infty$.

Γ2. α) Η εφαπτομένη της C_f στο Ο είναι η ευθεία

$\varepsilon_1: y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y-0=1\cdot x\Leftrightarrow y=x$ και η εφαπτομένη της C_f στο Α

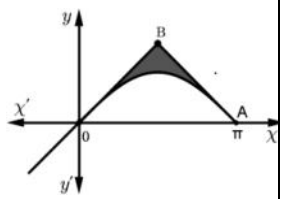
είναι η ευθεία $\varepsilon_2: y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi)\Leftrightarrow y-\pi=-x\Leftrightarrow y=-x+\pi$

β) Έστω Β το σημείο τομής των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, τότε:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x + \pi \\ y = -x + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + \pi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$ άρα $B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Το τρίγωνο ΟΑΒ έχει εμβαδόν:

$$(OAB) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$



Το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και τον x΄x έχει εμβαδόν: $E_1 = \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} = 2$, άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = (OAB) - E_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}.$$

Θέμα Δ

Δ1. Έστω ότι η πολυωνυμική f έχει βαθμό ν. Τότε η f' θα είναι ν-1 βαθμού και το άθροισμα $f + f'$ θα είναι ν βαθμού. Όμως το άθροισμα $f + f'$ είναι 4ου βαθμού, άρα $\nu = 4$.

Έστω $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon,\ \alpha \neq 0$. Είναι

$f'(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta$ και

$f(x) + f'(x) = 5x^4 + 20x^3 - 30x^2 - 40x + 25 \Leftrightarrow$

$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon + 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta = 5x^4 + 20x^3 - 30x^2 - 40x + 25 \Leftrightarrow$

$\alpha x^4 + (\beta + 4\alpha)x^3 + (\gamma + 3\beta)x^2 + (\delta + 2\gamma)x + \varepsilon + \delta = 5x^4 + 20x^3 - 30x^2 - 40x + 25$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta + 4\alpha = 20 \\ \gamma + 3\beta = -30 \\ \delta + 2\gamma = -40 \\ \varepsilon + \delta = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -30 \\ \delta = 20 \\ \varepsilon = 5 \end{cases}$$

. Άρα $f(x) = 5x^4 - 30x^2 + 20x + 5$.

Δ2. Είναι $f'(x) = 20x^3 - 60x + 20 = 20\left(x^3 - 3x + 1\right)$ και

$f''(x) = 20\left(3x^2 - 3\right) = 60\left(x^2 - 1\right)$.

Για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$. Για

κάθε $x \in (-1,1)$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f'2[-1,1]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(20x^3 - 60x + 20\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 20x^3 = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 20x^3 = +\infty$,

$f'(-1) = 60$ και $f'(1) = -20$. Τα παραπάνω παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f'	$-\infty$	↗	ΤΜ	↘	ΤΕ	↗	$+\infty$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty,-1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1) = (-\infty,60]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό x_1 στο εσωτερικό του Δ_1 τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [-1,1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2) = [-20,60]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο, ώστε $f'(x_2) = 0$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3 = [-1,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_3) = [-20,+\infty)$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_3)$ υπάρχει μοναδικό x_3 στο εσωτερικό του Δ_3 τέτοιο, ώστε $f'(x_3) = 0$.Για κάθε $x < x_1 \overset{f':\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow f\searrow(-\infty, x_1]$. Για κάθε $x_1 < x < -1 \overset{f':\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_1) = 0 \Rightarrow \Rightarrow f\nearrow[x_1,-1]$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(x_1)$. Για κάθε $-1 < x < x_2 \overset{f':\searrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_2) = 0 \Rightarrow f\nearrow[-1,x_2]$.Για κάθε $x_2 < x < 1 \overset{f':\searrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_2) = 0 \Rightarrow \Rightarrow f\searrow[x_2,1]$.Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(x_2)$.Για κάθε $1 < x < x_3 \overset{f':\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_3) = 0 \Rightarrow f\searrow[1,x_3]$ και για κάθε

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	ΤΕ	↗	ΤΜ	↘	ΤΕ	↗	$+\infty$

$x > x_3 \overset{f':\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_3) = 0 \Rightarrow \Rightarrow f \nearrow [x_3, +\infty)$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(x_3)$.Το πρόσημο της f′ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Δ3. $x^4 + 4x + 1 = 6x^2 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 4x + 1 = 0 \overset{\cdot 5}{\Leftrightarrow} 5x^4 - 30x^2 + 20x + 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$.

Είναι $x_1 < -1 \overset{f:1}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(-1) = -40 < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, x_1)$,έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1) = (f(x_1), +\infty)$. Επειδή $0 \in f(A_1)$ υπάρχει μοναδικό $\rho_1 \in A_1$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1) = 0$.

Είναι $x_2 < 1 \overset{f:\searrow}{\Leftrightarrow} f(x_2) > f(1) = 0 > 0$.Η f είναι συνεχής στο -1, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [x_1, x_2]$ και έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2) = [f(x_1), f(x_2)]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(A_2)$, υπάρχει μοναδικό ρ_2 στο εσωτερικό του A_2 τέτοιο, ώστε $f(\rho_2) = 0$.

Επειδή $f(1) = 0$, η εξίσωση έχει ρίζα το 1.Η f είναι συνεχής στο $x = 1$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_3 = [x_2, x_3]$ και η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της f στο διάστημα αυτό.

Είναι $x_3 > 1 \overset{f:\searrow[1,x_3]}{\Leftrightarrow} f(x_3) < f(1) = 0$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_4 = [x_3, +\infty)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_4) = [f(x_3), +\infty)$. Επειδή $0 \in f(A_4)$, η f έχει ρίζα ρ_3 στο A_4 . Τελικά η f έχει τέσσερις ρίζες.

Ακέραια ρίζα της f είναι το 1.Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 1, δηλαδή ± 1 .Είναι $f(-1) = -40 \neq 0$ άρα το -1 δεν είναι ρίζα.

Δ4. Τα κοινά σημεία των C_h, C_g είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ άρα τα $\{\rho_1, \rho_2, 1, \rho_3\}$.Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x = \rho_1$ πρέπει $h'(\rho_1) = g'(\rho_1) \Leftrightarrow h'(\rho_1) - g'(\rho_1) = 0 \Leftrightarrow f'(\rho_1) = 0$, που είναι άτοπο. Όμοια για τις $x = \rho_2$, $x = 1$ και $x = \rho_3$.Άρα δεν έχουν κοινή εφαπτομένη στα κοινά τους σημεία.

4	0	-30	16	10	ρ=1
↓	4	4	-26	-10	
4	4	-26	-10	0	

Δ5. Έχουμε $f(x)=g(x)-6 \Leftrightarrow f(x)-g(x)+6=0$

$\Leftrightarrow 5x^4-30x^2+20x+5-x^4-4x-1+6=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 4x^4-30x^2+16x+10=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(4x^3+4x^2-26x-10\right)=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 4x^3+4x^2-26x-10=0$.

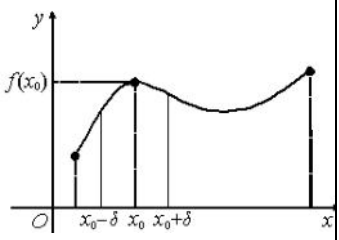
Έστω $t(x)=4x^3+4x^2-26x-10,\ x\in[1,3]$.Είναι

$t(1)=-28<0,\ t(3)=108+36-78-10=56>0$,δηλαδή $t(1)t(3)<0$ και επειδή η t είναι συνεχής στο $[1,3]$ ως πολυωνυμική, λόγω του Θ.Bolzano, η εξίσωση $t(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3+4x^2-26x-10=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,3)$.

4ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα Επιπέδου 2

Θέμα Α

Α1.Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και



$f(x)\le f(x_0)$,για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα

έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$ (2)

— αν $x\in(x_0,x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα

έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$. (3). Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε

$f'(x_0)=0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

Α2. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

Α3. Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Α4. α) Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ

Θέμα Β

Β1.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.Η ε έχει εξίσωση:

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)\Leftrightarrow y-\frac{1}{\xi}=-\frac{1}{\xi^2}(x-\xi)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{\xi^2}x+\frac{2}{\xi}$$

Για $y=0$ είναι $0=-\frac{1}{\xi^2}x+\frac{2}{\xi}\Leftrightarrow=\frac{1}{\xi^2}x=\frac{2}{\xi}\Leftrightarrow x=2\xi$ και για $x=0$ είναι

$y=\frac{2}{\xi}$, άρα $A(2\xi,0)$ και $B\left(0,\frac{2}{\xi}\right)$.Για να είναι το Μ μέσο του ΑΒ πρέπει

$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\Leftrightarrow 2\xi=2\xi+0$ ισχύει και $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}\Leftrightarrow 2\frac{1}{\xi}=0+\frac{2}{\xi}$ ισχύει.

β) Το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΟΑΒ είναι:

$$E=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}|2\xi|\left|\frac{2}{\xi}\right|=\frac{1}{2}\left|2\not{\xi}\frac{2}{\not{\xi}}\right|=2$$

Β2. Αρχικά παρατηρούμε ότι $f(1)=g(1)=1$, δηλαδή το Α είναι κοινό σημείο των C_f, C_g. Είναι $f'(1)=-1$ και $g'(x)=2x-3$, άρα $g'(1)=-1$. Επειδή $f'(1)=g'(1)$ οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο Α.

Β3. Έστω $\varphi(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-x^2+3x-3=\frac{1-x^3+3x^2-3x}{x}=-\frac{(x-1)^3}{x}$

Όταν $x<0$ ή $x>1$ είναι $\varphi(x)<0\Leftrightarrow f(x)<g(x)$, οπότε η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g.Όταν $0<x<1$ είναι $\varphi(x)>0\Leftrightarrow f(x)>g(x)$, οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.Τέλος για $x=1$ οι C_f, C_g τέμνονται.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$-(x-1)^3$	+	+	−	
x	−	+	+	
$\varphi(x)$	−	+	−	

Β4. $h(x)=\alpha x^3+g(x)+2x^2+4x-2=\alpha x^3+x^2-3x+3+2x^2+4x-2\Leftrightarrow$

$h(x)=\alpha x^3+3x^2+x+1$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=3\alpha x^2+6x+1$. Η h' είναι 2ου βαθμού με $\Delta=36-12\alpha=12(3-\alpha)$.

Αν $\Delta>0\Leftrightarrow 12(3-\alpha)>0\Leftrightarrow \alpha<3$, τότε η h' έχει δύο ρίζες και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν τους, οπότε η h δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αν $\Delta=0\Leftrightarrow 12(3-\alpha)=0\Leftrightarrow \alpha=3$, τότε $h'(x)=9x^2+6x+1=(3x+1)^2>0$ για

κάθε $x\neq -\frac{1}{3}$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αν $\Delta<0\Leftrightarrow 12(3-\alpha)<0\Leftrightarrow \alpha>3$, τότε $h'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τελικά η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ όταν $\alpha\geq 3$.

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=2\ln x\frac{1}{x}+\frac{2}{x}-2=\frac{2\ln x+2-2x}{x}=\frac{2(\ln x-x+1)}{x}.$$

Επειδή $\ln x\leq x-1$ για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Γ2. $\ln x(\ln x+2)=2(x+2)\Leftrightarrow \ln^2 x+2\ln x=2x+4\Leftrightarrow$

$\ln^2 x+2\ln x-2x+2=6\Leftrightarrow f(x)=6$ (1). Είναι

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln^2 x+2\ln x-2x+2\right)=\lim_{x\to 0^+}\left[\ln x(\ln x+2)-2x+2\right]=+\infty$$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\ln^2 x+2\ln x}{x}-2+\frac{2}{x}\right)\right]=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln^2 x+2\ln x}{x}-2+\frac{2}{x}\right)=-2$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x+2\ln x}{x}\overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}+\frac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+2}{x}\overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=0$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$, έχει σύνολο

τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$. Επειδή $6\in f(A)$ υπάρχει μοναδικός $x_1\in A$ τέτοιος ώστε $f(x_1)=6$, άρα η (1) έχει μοναδική ρίζα.

Γ3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f''(x)=2\frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)x-(\ln x-x+1)}{x^2}=2\frac{1-x-\ln x+x-1}{x^2}=-\frac{2\ln x}{x^2}.$$

Είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x>1$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Είναι $1<x<x+1\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x+1)$ (2),

$1<x^2<x^2+1\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x^2)>f'(x^2+1)$ (3). Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3) προκύπτει: $f'(x)+f'(x^2)>f'(x+1)+f'(x^2+1)$

Γ4. Έστω $g(x)=2xf(x)+f(x^2)+3\ln^2 2+6\ln 2-2xf(x+1)-f(x^2+1)-6,\ x\geq 1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$$g'(x)=2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x^2)-2f(x+1)-2xf'(x+1)-2xf'(x^2+1)\Leftrightarrow$$
$$g'(x)=2\left[f(x)-f(x+1)\right]+2x\left[f'(x)+f'(x^2)-f'(x+1)-f'(x^2+1)\right].$$

Είναι $1<x<x+1\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(x)>f(x+1)\Leftrightarrow f(x)-f(x+1)>0$ και

$f'(x)+f'(x^2)>f'(x+1)+f'(x^2+1)\Leftrightarrow f'(x)+f'(x^2)-f'(x+1)-f'(x^2+1)>0$ για κάθε $x>1$, άρα $g'(x)>0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Για κάθε $x>1$ είναι $g(x)>g(1)$, όμως

$$g(1)=2f(1)^0+f(1)^0+3\ln^2 2+6\ln 2-2f(2)-f(2)-6\Leftrightarrow$$
$$g(1)=-3f(2)+3\left(\ln^2 2+2\ln 2-2\right)=-3f(2)+3f(2)=0,\ \text{άρα}$$
$$g(x)>0\Leftrightarrow 2xf(x)+f(x^2)+3\ln^2 2+6\ln 2>2xf(x+1)+f(x^2+1)+6$$

Θέμα Δ

Δ1. Έστω $\int_0^{\pi}f(x)dx=\lambda\in\mathbb{R}$, τότε $f(x)=2x-\eta\mu x+\lambda+2-\pi^2$ και

$$\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}\left(2x-\eta\mu x+\lambda+2-\pi^2\right)dx\Leftrightarrow\lambda=\left[x^2+\sigma\upsilon x+\left(\lambda+2-\pi^2\right)x\right]_0^{\pi}\Leftrightarrow$$
$$\lambda=\pi^2-1+\lambda\pi+2\pi-\pi^3-1\Leftrightarrow\pi^3-\pi^2-2\pi+2=\lambda\pi-\lambda\Leftrightarrow$$

$\pi^2(\pi-1)-2(\pi-1)=\lambda(\pi-1)\Leftrightarrow \frac{\cancel{(\pi-1)}(\pi^2-2)}{\cancel{\pi-1}}=\lambda\Leftrightarrow \lambda=\pi^2-2$. Άρα

$\int_0^{\pi} f(x)dx=\pi^2-2$.

Δ2. Είναι $f(x)=2x-\eta\mu x+\cancel{\pi^2}-\cancel{2}+\cancel{2}-\cancel{\pi^2}=2x-\eta\mu x$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2-\sigma\upsilon\nu x$. Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1$, έχουμε: $f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

Δ3. $\eta\mu x=2x-1821\Leftrightarrow 1821=2x-\eta\mu x\Leftrightarrow f(x)=1821$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(2-\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right]=-\infty(2-0)=-\infty$ γιατί

για $x<0$ είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{-x}\le-\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le-\frac{1}{x}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(2-\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right]=+\infty(2-0)=+\infty$

(με την προηγούμενη διαδικασία $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$).

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=\mathbb{R}$, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R}$.

Επειδή $1821\in f(A)$ υπάρχει μοναδικός $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=1821$.

Δ4 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{4x-2\eta\mu x-\eta\mu(2x-\eta\mu x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2(2x-\eta\mu x)-\eta\mu(2x-\eta\mu x)}=$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2f(x)-\eta\mu f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{f(f(x))}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}}$

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(2-\frac{\eta\mu x}{x}\right)=2-1=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(f(x))}{f(x)} \underset{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=1$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{x}}=\dfrac{1}{1\cdot 1}=1$.

Δ5. Η g άρτια οπότε $g(-x)=g(x)$ για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$.

$$I=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}(2x-\eta\mu x)\cdot g(x)dx=-\int_{-\pi}^{\pi}(-2x-\eta\mu(-x))\cdot g(-x)dx=$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi}(-2x-\eta\mu(-x))\cdot g(-x)dx \underset{x=-\pi\to u=\pi \\ x=\pi\to u=-\pi}{\overset{u=-x \\ du=-dx}{=}} -\int_{-\pi}^{\pi}(2u-\eta\mu(u))\cdot g(u)du \Leftrightarrow$$

$$I=-I\Leftrightarrow 2I=0\Leftrightarrow I=0\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)dx=0$$

5ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα Επιπέδου 2

Θέμα Α

Α1. Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Α2. Επειδή η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη, η f΄ είναι παραγωγίσιμη αλλά δεν

γνωρίζουμε αν η f ΄΄ είναι συνεχής στο x_0 .

Α3. α) Ψευδής

β) Για τη συνάρτηση $f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$ παρατηρούμε ότι $f(x)\geq -2$ και γενικά από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό στη θέση του – 2, όμως το -2 δεν είναι ελάχιστο της f γιατί δεν υπάρχει σημείο της C_f με αυτή την τεταγμένη (δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=-2$)

2ο αντιπαράδειγμα

Έστω $f(x)=x^2+(x-1)^2,\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x^2\geq 0, (x-1)^2\geq 0$, άρα και $f(x)=x^2+(x-1)^2\geq 0$, όμως δεν υπάρχει τιμή του x για την οποία $f(x)=0$ αφού

$f(x)=0\Leftrightarrow x^2+(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=0$ και $(x-1=0\Leftrightarrow x=1)$ άτοπο.

Α4. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

Θέμα Β

Β1. Θέτουμε $x^3=\omega$, $\omega\in\mathbb{R}$ οπότε έχουμε:

$f(x^3)=x^5|x|=x^3\cdot x^2|x|=x^3\cdot|x|^2|x|=x^3|x^3|\Leftrightarrow f(\omega)=\omega|\omega|$

άρα $f(x)=x|x|,\ x\in\mathbb{R}$.

Β2. Είναι $f(x)=x|x|=\begin{cases}-x^2,\ x<0\\ x^2\ ,\ x\geq 0\end{cases}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$ με παράγωγο

$f'(x)=\begin{cases}-2x,\ x<0\\ 2x\ ,\ x>0\end{cases}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x\neq 0$ είναι

$f'(x)>0$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Για κάθε x < 0 είναι $y=-x^2\Leftrightarrow x^2=-y>0\underset{x<0}{\overset{y<0}{\Leftrightarrow}}-x=\sqrt{-y}\Leftrightarrow x=-\sqrt{-y}$.

Για κάθε $x\geq 0$ είναι $y=x^2\geq 0\Leftrightarrow x=\sqrt{y}$.

Άρα $f^{-1}(y)=\begin{cases}-\sqrt{-y},\ y<0\\ \sqrt{y},\ y\geq 0\end{cases}$, οπότε $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x},\ x<0\\ \sqrt{x},\ x\geq 0\end{cases}$.

Β3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη

στο 0 με παράγωγο $f'(0)=0$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\begin{cases}-2x, & x<0\\ 2x, & x\geq 0\end{cases}$.

Β4.Για να εφάπτεται η f΄ της f πρέπει να έχουν κοινό σημείο με θετική τετμημένη. Για x > 0 είναι

$$f(x)=f'(x)\Leftrightarrow x^2=2x\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow x(x-2)=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x-2=0\Leftrightarrow x=2$$

Η $C_{f'}$ εφάπτεται της C_f στο κοινό τους σημείο με τετμημένη 2, αν και μόνο αν $f'(2)=\lambda_{f'}\Leftrightarrow 2\cdot 2=2\Leftrightarrow 4=2$ που είναι αδύνατο.

Επομένως δεν υπάρχει σημείο της C_f με θετική τετμημένη στο οποίο να εφάπτεται η f΄.

Β5. Είναι $f(x)=1-x^5\Leftrightarrow x|x|=1-x^5\Leftrightarrow x^5+x|x|-1=0$.

Έστω $g(x)=x^5+x|x|-1,\ x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $g(0)=-1,\ g(1)=1$, δηλαδή $g(0)g(1)<0$.Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=1-x^5$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0, 1). Επομένως το ζητούμενο διάστημα είναι το $(0,1)$ για α = 0.

Θέμα Γ

Γ1. Στο σχήμα βλέπουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει ακρότατα. Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x<0$ είναι $f''(x)<0$, ενώ για $x>0$ είναι $f''(x)>0$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$ οπότε έχει σημείο καμπής το $(0,f(0))$.

Γ2. 1ος τρόπος: Έστω το σημείο $M(x_1,f(x_1))$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Μ, έχει εξίσωση:

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y=f'(x_1)x+f(x_1)-x_1f'(x_1).$$

Η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ οπότε βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός του σημείου επαφής τους, άρα

$f(x)\geq f'(x_1)x+f(x_1)-x_1f'(x_1)$ για κάθε $x\geq 0$.

Επειδή $f'(x_1)>0$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(x_1)x+f(x_1)-x_1f'(x_1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x_1)x=+\infty$,

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Έστω $K(x_2,f(x_2)),\ x_2<0$. Η εφαπτομένη στο Κ έχει

εξίσωση $y = f'(x_2)x + f(x_2) - x_2 f'(x_2)$. Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ οπότε βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \le f'(x_2)x + f(x_2) - x_2 f'(x_2)$ για κάθε $x \le 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f'(x_2)x + f(x_2) - x_2 f'(x_2)\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x_2)x = -\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2ος τρόπος: Η f ΄΄είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα $f''(x) = \lambda x$. Επειδή η f ΄΄σχηματίζει οξεία γωνία με τον x΄x, είναι $\lambda = \varepsilon\varphi\omega > 0$.

Είναι $f''(x) = \lambda x = \left(\lambda\dfrac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow f'(x) = \lambda\dfrac{x^2}{2} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$f'(x) = \left(\lambda\dfrac{x^3}{6} + c_1 x\right)' \Leftrightarrow f(x) = \lambda\dfrac{x^3}{6} + c_1 x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\lambda\dfrac{x^3}{6} + c_1 x + c_2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\lambda\dfrac{x^3}{6} = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\lambda\dfrac{x^3}{6} + c_1 x + c_2\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\lambda\dfrac{x^3}{6} = -\infty$

Γ3. 1ος τρόπος: Η f είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού, οπότε δεν έχει ασύμπτωτες.
2ος τρόπος: Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, η f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f'(x)}{1} = +\infty$ (σχήμα) και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{1} = +\infty$ (σχήμα), οπότε η f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

3ος τρόπος: Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, η f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.
Από τον 2ο τρόπο του Γ2 έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\lambda\frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\lambda\frac{x^3}{6}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\lambda}{6}\cdot x^2\right) = +\infty,$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lambda\frac{x^3}{6}+c_1x+c_2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lambda\frac{x^3}{6}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\lambda}{6}\cdot x^2\right)=+\infty$ οπότε η f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

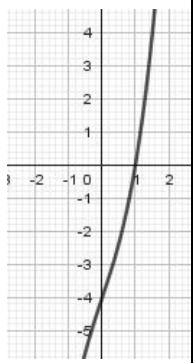
Γ4. α) Επειδή η $C_{f''}$ είναι ευθεία, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{6-0}{1-0}=6$ και εξίσωση $y=6x$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f''(x)=6x\Leftrightarrow f''(x)=\left(3x^2\right)'\Leftrightarrow f'(x)=3x^2+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$.

Είναι $f'(0)=3\Leftrightarrow c_1=3$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=3x^2+3\Leftrightarrow$

$f'(x)=\left(x^3+3x+c_2\right)'\Leftrightarrow f(x)=x^3+3x+c_2,\ c_2\in\mathbb{R}$. Είναι $f(0)=-4\Leftrightarrow$ $c_2=-4$, άρα $f(x)=x^3+3x-4,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(1)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}x=1$ οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(1,0)$.Από τα δεδομένα του Γ1 και του Γ4 έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση



γ) Για κάθε x> 0 είναι $|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα για x>0 έχουμε:

$f(\eta\mu x)<f(x)\Leftrightarrow f(\eta\mu x)-f(x)<0$ και

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(f(\eta\mu x)-f(x)\right)=0$ γιατί η f είναι συνεχής στο 0 οπότε

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{f(\eta\mu x)-f(x)}=-\infty$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f''\left(\frac{1}{x^2}\right)}{f(\eta\mu x)-f(x)}\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{6}{x^2}\cdot\dfrac{1}{f(\eta\mu x)-f(x)}\right)=+\infty(-\infty)=-\infty$ (1).

Για $x<0$ είναι $|\eta\mu x|<-x\Leftrightarrow x<\eta\mu x<-x$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα για x<0 έχουμε:

$f(x)<f(\eta\mu x)\Leftrightarrow f(\eta\mu x)-f(x)>0$ και $\lim\limits_{x\to0^-}\left(f(\eta\mu x)-f(x)\right)=0$ γιατί η f είναι συνεχής στο 0 οπότε $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{f(\eta\mu x)-f(x)}=+\infty$. Επομένως

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f''\left(\frac{1}{x^2}\right)}{f(\eta\mu x)-f(x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{6}{x^2}\frac{1}{f(\eta\mu x)-f(x)}=+\infty(+\infty)=+\infty \quad (2).$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f(x)=\frac{(3x+1)(e^x+1)+1}{e^x+1}=\frac{(3x+1)\cancel{(e^x+1)}}{\cancel{e^x+1}}+\frac{1}{e^x+1}=3x+1+\frac{1}{e^x+1}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=3-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{3(e^x+1)^2-e^x}{(e^x+1)^2}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{3e^{2x}+6e^x+3-e^x}{(e^x+1)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{3e^{2x}+5e^x+3}{(e^x+1)^2}.$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+1+\frac{1}{e^x+1}\right)=-\infty+1+1=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x+1+\frac{1}{e^x+1}\right)=+\infty+1+0=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε υπάρχει μοναδικό $\rho\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)=0$.

Δ2. Είναι $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\frac{3}{2}$, οπότε $f((-\infty,0))=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f((-\infty,0))$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty,0)$. Όμως η f έχει μοναδική ρίζα το ρ, άρα $\rho<0$.

Δ3. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x)=2xf^2(x)+x^2\cdot 2f(x)f'(x)=2xf(x)(f(x)+xf'(x))$.

Η h' έχει ρίζες το 0 και το ρ. Θα αναζητήσουμε άλλη μία ρίζα.

Είναι $h(0)=0=h(\rho)$. Η h συνεχής στο $[\rho,0]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $x_0\in(\rho,0)$ τέτοιο, ώστε $h'(x_0)=0$. Όμως το

2x έχει μοναδική ρίζα το 0, η $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα το ρ, οπότε το x_0 είναι ρίζα της συνάρτησης $g(x)=f(x)+xf'(x)$.

- Για κάθε $x<\rho$ είναι $x<0,\ f(x)<f(\rho)=0,\ f'(x)>0$, άρα $f(x)+xf'(x)<0$, οπότε $h'(x)<0$.

Η h συνεχής στο $(-\infty,\rho]$ άρα η h γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

- Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>f(0)>0,\ f'(x)>0$, άρα $f(x)+xf'(x)>0$, οπότε $h'(x)>0$.

Η h συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα η h γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=f'(x)+f'(x)+xf''(x)=2f'(x)+xf''(x)$.

Είναι $f''(x)=\dfrac{\left(6e^{2x}+5e^{x}\right)\cdot\left(e^{x}+1\right)^{2}-\left(3e^{2x}+5e^{x}+3\right)\cdot 2\cancel{\left(e^{x}+1\right)}\cdot e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{\cancel{4}3}}\Leftrightarrow$

$f''(x)=\dfrac{\cancel{6e^{3x}}+6e^{2x}+5e^{2x}+5e^{x}-\cancel{6e^{3x}}-10e^{2x}-6e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{3}}\Leftrightarrow f''(x)=\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{3}}\Leftrightarrow$

$f''(x)=\dfrac{e^{x}\left(e^{x}-1\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{3}}$.

Α τρόπος

$f''(x)=\dfrac{e^{x}\left(e^{x}-1\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{3}}$ οπότε $xf''(x)=x\dfrac{e^{x}\left(e^{x}-1\right)}{\left(e^{x}+1\right)^{3}}$ όμως $x,\left(e^{x}-1\right)$ για $x\neq 0$

είναι ομόσημοι οπότε $xf''(x)\geq 0$ η ισότητα μόνον για x =0. Τότε

$g'(x)=2f'(x)+xf''(x)>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα .

Άρα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$.

Για κάθε $x<x_0\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(x)<g(x_0)=0$. Για κάθε $x>x_0\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(x)>g(x_0)=0$

Β τρόπος

Για κάθε $x\in(\rho,0)$ είναι $e^{x}<e^{0}=1\Leftrightarrow e^{x}-1<0$, οπότε $f''(x)<0$, άρα $g'(x)=2f'(x)+xf''(x)>0$ επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(\rho,0)$.

Άρα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$.

Για κάθε $\rho < x < x_0 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x) < g(x_0) = 0$. Είναι $x < 0$, $f(x) > 0$ οπότε $h'(x) > 0$. Η h είναι συνεχής στο $[\rho, x_0]$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[\rho, x_0]$. Για κάθε $x_0 < x < 0 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x) > g(x_0) = 0$ οπότε $h'(x) < 0$ αφού $x < 0$, $f(x) > 0$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_0, 0]$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, 0]$.

Επομένως η h έχει τοπικά ελάχιστο στο $x = \rho$, τοπικό μέγιστο στο $x = x_0$ και τοπικό ελάχιστο στο x = 0.

Τα συμπεράσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	ρ	x_0	0	$+\infty$
2x	−	−	−	0	+
$f(x)$	−	0	+	+	+
$g(x)$	−	−	0	+	+
$h'(x)$	−	+	−	+	
$f(x)$	↘	T.E.	↗ T.M.	↘	T.E. ↗

Δ4. Είναι $0 \le x \le 2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) \le f(x) \le f(2) \Leftrightarrow \frac{3}{2} \le f(x) \le 7 + \frac{1}{e^2+1}$.

Επειδή στη τελευταία σχέση η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [0,2]$, είναι

$$\int_0^2 \frac{3}{2}dx < \int_0^2 f(x)dx < \int_0^2 \left(7 + \frac{1}{e^2+1}\right)dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{2}(2-0) < \int_0^2 \left(3x + 1 + \frac{1}{e^x+1}\right)dx < \left(7 + \frac{1}{e^2+1}\right)(2-0) \Leftrightarrow$$

$$3 < \left[3\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{e^x+1}dx < \frac{7e^2+8}{e^2+1} \cdot 2 \Leftrightarrow 3 < 8 + \int_0^2 \frac{1}{e^x+1}dx < \frac{7e^2+8}{e^2+1} \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$-5 < \int_0^2 \frac{1}{e^x+1}dx < \frac{14e^2+16}{e^2+1} - 8 \text{ άρα } \int_0^2 \frac{1}{e^x+1}dx < \frac{14e^2+16-8e^2-8}{e^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 \frac{1}{e^x+1}dx < \frac{6e^2+8}{e^2+1}.$$

6ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα
Επιπέδου 2

Θέμα Α

Α1. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

Α2. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$f(x_1) < f(x_2)$

Α3. α) Ψευδής

β) Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής συνάρτηση, έχει σύνολο τιμών μονοσύνολο και όχι διάστημα. Για παράδειγμα $f(x) = 1,\ x \in (2,3)$.

Α4. ΣΛΛΣΛ

Θέμα Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$

Τα εσωτερικά σημεία $-1, 1$ είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, η f είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά οπότε ισχύει το θεώρημα Fermat άρα :

$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha - 2\beta + \gamma = 0 (1)$ και $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 (2)$

Με αφαίρεση της σχέσης (1) από την (2) έχουμε $4\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$.

Β2. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με δεύτερη παράγωγο

$f''(x) = 6\alpha x + 2\beta \overset{\beta=0}{=} 6\alpha x$.

Έχουμε: $f(0) = 2 \Leftrightarrow \delta = 2$, $f''(1) = 6 \Leftrightarrow 6\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Από τη σχέση (1) έχουμε $3 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -3$ οπότε : $f(x) = x^3 - 3x + 2, x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

Για κάθε x < -1 ή x > 1 είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (-1,1)$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1], [1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο για x = -1 το $f(-1)=4$ και τοπικό ελάχιστο για x = 1 το $f(1)=0$.

Β3. Είναι $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^3-3x+2\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\Leftrightarrow$

$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}-\frac{6}{4}+\frac{8}{4}\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{4}.$

Β4. Είναι $\int_{-1}^0 h(x)dx=\int_{-1}^0\frac{x-1}{x^3-3x+2}dx=\int_{-1}^0\frac{\cancel{x-1}}{(x-1)^{\cancel{2}}(x+2)}dx\Leftrightarrow$

$\int_{-1}^0 h(x)dx=\int_{-1}^0\frac{1}{(x-1)(x+2)}dx.$ Είναι $h(x)=\frac{1}{(x-1)(x+2)}$, $x\in[-1,0]$.

Αναζητούμε αριθμούς Α,Β τέτοιους ώστε :

$\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}\Leftrightarrow 1=A(x+2)+B(x-1)\Leftrightarrow$

$1=Ax+2A+Bx-B\Leftrightarrow 1=(A+B)x+2A-B$ (1) για κάθε $x\in[-1,0]$.

Από τη σχέση (1) προκύπτει το σύστημα : $\begin{cases}A+B=0\ (2)\\2A-B=1(3)\end{cases}$.

Με πρόσθεση των σχέσεων (2) και (3) έχουμε $3A=1\Leftrightarrow A=\frac{1}{3}$ οπότε από τη σχέση (2) προκύπτει $\frac{1}{3}+B=0\Leftrightarrow B=-\frac{1}{3}$.Επομένως

$\int_{-1}^0 h(x)dx=\int_{-1}^0\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=\left[\frac{1}{3}\cdot\ln|x-1|-\frac{1}{3}\cdot\ln|x+2|\right]_{-1}^0\Leftrightarrow$

$\int_{-1}^0 h(x)dx=-\frac{2}{3}\cdot\ln 2$

Θέμα Γ

Γ1. α)Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$f'(x)=\frac{1}{x}-e^x$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=-\frac{1}{x^2}-e^x<0$ οπότε η f είναι κοίλη $(0,+\infty)$.

Γ2. Έστω (ε) η ζητούμενη εφαπτομένη και $(\alpha,f(\alpha))$ το σημείο επαφής της με τη C_f .

Η (ε) έχει εξίσωση

$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y-\ln\alpha+e^{\alpha}=\left(\frac{1}{\alpha}-e^{\alpha}\right)(x-\alpha)\Leftrightarrow$

$y=\left(\frac{1}{\alpha}-e^{\alpha}\right)\cdot x-1+\alpha e^{\alpha}+\ln\alpha-e^{\alpha}$. Το σημείο Α(0,-1) ανήκει στην (ε) οπότε

$-1=-1+\alpha e^{\alpha}+\ln\alpha-e^{\alpha}\Leftrightarrow(\alpha-1)e^{\alpha}+\ln\alpha=0.(1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=(x-1)e^{x}+\ln x, x>0$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$\varphi'(x)=e^{x}+(x-1)e^{x}+\frac{1}{x}=xe^{x}+\frac{1}{x}>0.$ Η φ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Από τη σχέση (1) έχουμε $\varphi(\alpha)=0\Leftrightarrow\varphi(\alpha)=\varphi(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}\alpha=1$.

Για α=1 η (ε) έχει εξίσωση $y=(1-e)x-1$.

Η f είναι κοίλη άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την (ε) εκτός από το σημείο επαφής οπότε $f(x)\le(1-e)x-1\Leftrightarrow\ln x-e^{x}\le x-ex-1\Leftrightarrow$

$\ln x\le e^{x}+x-ex-1$.

Γ3. Είναι $f''(x)<0$ στο $(0,+\infty)$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Το x_0 είναι μοναδικό αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως για $0<x<x_0$ είναι $f'(x)>f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x)>0$ και για $x>x_0$ είναι $f'(x)<f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x)<0$. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,+\infty)$. Άρα έχει μέγιστο στο x_0, το $f(x_0)$.

Είναι $f'(1)=1-e<0, f'\left(\frac{1}{2}\right)=2-\sqrt{e}>0$ οπότε $f'(1)\cdot f'\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

Η f' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Όμως η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το x_0 οπότε το ξ ταυτίζεται με

το x_0. Άρα $x_0 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$.

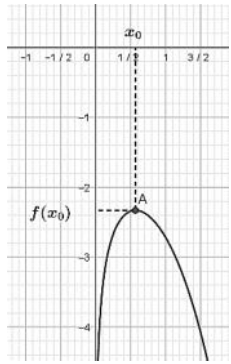
Γ4. 1ος τρόπος: Είναι $\frac{1}{2} < x_0 < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{2} < \ln x_0 < \ln 1 \Leftrightarrow -\ln 2 < \ln x_0 < 0$ (1)

$\frac{1}{2} < x_0 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{e} < e^{x_0} < e \Leftrightarrow -e < -e^{x_0} < -\sqrt{e}$ (2). Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $-\ln 2 - e < \ln x_0 - e^{x_0} < -\sqrt{e} \Leftrightarrow -\ln 2 - e < f(x_0) < -\sqrt{e}$ οπότε $f(x_0) < 0$.

Η f έχει μέγιστο το $f(x_0)$ άρα $f(x) \le f(x_0) < 0$ οπότε $f(x) < 0$ στο $(0,+\infty)$.

2ος τρόπος: Για x>0 ισχύει: $\ln x \le x - 1 < x + 1 \le e^x$ άρα $f(x) = \ln x - e^x < 0$.

Γ5. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x - e^x\right) = -\infty$ άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα x΄x. Επίσης



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln x - e^x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(\frac{\ln x}{e^x} - 1\right)\right] = -\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x} \overset{\text{D.L.h}}{\underset{+\infty}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x} = 0$. Άρα δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες. Ακόμη

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = 0 - \infty = -\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\text{D.L.H}}{\underset{+\infty}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} \overset{\text{D.L.H}}{\underset{+\infty}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

.Άρα δεν έχει ούτε πλάγιες ασύμπτωτες. Δεν τέμνει τους άξονες .
Επομένως έχει την παρακάτω γραφική παράσταση.

Θέμα Δ

Δ1. Μας δίνεται η σχέση : $\left|f(x) - xe^x - f(y) + ye^y\right| \le |x-y|^{2024}$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - xe^x$, $x \in \mathbb{R}$. Από τη σχέση (1) έχουμε

για $x \ne y$: $|h(x) - h(y)| \le |x-y|^{2024} \Leftrightarrow \frac{|h(x)-h(y)|}{|x-y|} \le |x-y|^{2023} \Leftrightarrow$

$$\left|\frac{h(x)-h(y)}{x-y}\right| \le |x-y|^{2023} \Leftrightarrow -|x-y|^{2023} \le \frac{h(x)-h(y)}{x-y} \le |x-y|^{2023}.$$

Για $y=x_0 \in \mathbb{R}$ και για $x \neq x_0$ έχουμε $-|x-x_0|^{2023} \leq \dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} \leq |x-x_0|^{2023}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-|x-x_0|^{2023}\right)=0=\lim\limits_{x\to x_0}\left(|x-x_0|^{2023}\right)$ οπότε από το Κριτήριο

Παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=0$. Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=0$ οπότε η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$h'(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η h είναι σταθερή άρα

$h(x)=c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)-xe^x=c \Leftrightarrow f(x)=xe^x+c, c \in \mathbb{R}$.

Για $x=1$ έχουμε : $f(1)=e+c \Leftrightarrow e=e+c \Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)=xe^x, x \in \mathbb{R}$

Δ2. Μας δίνεται : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}=(x+2)e^x \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x+h)-g'(x)+g'(x)-g'(x-h)}{2h}=(x+2)e^x \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{g'(x+h)-g'(x)}{2h}-\dfrac{g'(x-h)-g'(x)}{2h}\right)=(x+2)e^x \Leftrightarrow$ (2).

$\dfrac{g''(x)}{2}-\left(-\dfrac{g''(x)}{2}\right)=(x+2)e^x \Leftrightarrow \dfrac{g''(x)+g''(x)}{2}=(x+2)e^x \Leftrightarrow$

$\dfrac{2g''(x)}{2}=\left((x+1)e^x\right)' \Leftrightarrow g''(x)=\left((x+1)e^x\right)' \Leftrightarrow g'(x)=(x+1)e^x+c_1, c_1 \in \mathbb{R}$

. Για $x=1$ έχουμε : $g'(1)=2e+c_1 \Leftrightarrow 2e=2e+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$ οπότε

$g'(x)=(x+1)e^x \Leftrightarrow g'(x)=\left(xe^x\right)' \Leftrightarrow$

$g(x)=xe^x+c_2$. Για $x=1$ έχουμε : $g(1)=e+c_2 \Leftrightarrow e=e+c_2 \Leftrightarrow c_2=0$.

Επομένως $g(x)=xe^x, x \in \mathbb{R}$ άρα οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες.

Δ3. Είναι $h(x)=f\left(x^2\right)=x^2e^{x^2} \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ άρα: $E(\Omega)=$

$\int_0^1 f\left(x^2\right)dx=\int_0^1 x^2e^{x^2}dx=\int_0^1 x\cdot\left(xe^{x^2}\right)dx=\int_0^1 x\cdot\left(\dfrac{e^{x^2}}{2}\right)'dx=$

$$\left[x\cdot\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^{x^2}}{2}dx=\frac{e}{2}-\int_0^1\frac{e^{x^2}}{2}dx\,.$$

Όμως $0\le x\le 1\Leftrightarrow 0\le x^2\le 1\Leftrightarrow \frac{1}{2}\le\frac{e^{x^2}}{2}\le\frac{e}{2}$. Η ισότητα δεν ισχύει για όλες τιμές του x οπότε $\int_0^1\frac{1}{2}dx<\int_0^1\frac{e^{x^2}}{2}dx<\int_0^1\frac{e}{2}dx\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\int_0^1\frac{e^{x^2}}{2}dx<\frac{e}{2}\Leftrightarrow$

$$-\frac{e}{2}<-\int_0^1\frac{e^{x^2}}{2}dx<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<\frac{e}{2}-\int_0^1 e^{x^2}dx<\frac{e}{2}-\frac{1}{2}=\frac{e-1}{2}\ .$$

Δ4. Για την f ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\beta e^{\beta}-\alpha e^{\alpha}}{\beta-\alpha}=\frac{\beta e^{\beta}-\beta e^{\alpha}+\beta e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)=\frac{\beta\left(e^{\beta}-e^{\alpha}\right)+e^{\alpha}(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=\beta\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}+e^{\alpha}.\ (3)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=e^x$ με παράγωγο $\varphi'(x)=e^x$. Για την φ ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε

$$\varphi'(x_0)=\frac{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow e^{x_0}=\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}\ (4).$$

Από τις σχέσεις (3),(4) έχουμε το ζητούμενο $f'(\xi)=\beta\cdot e^{x_0}+e^{\alpha}$.

Δ5. Για $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$n(x)=x+e^{-x^2}\cdot\int_1^2\left(2\frac{f(x^2)}{x^2}\cdot n(x)\right)dx=x+e^{-X^2}\cdot\int_1^2\left(2\frac{\cancel{x^2}e^{x^2}}{\cancel{x^2}}\cdot n(x)\right)dx\Leftrightarrow$$

$$n(x)=x+e^{-x^2}\cdot\int_1^2\left(2e^{x^2}\cdot n(x)\right)dx.$$

Θέτουμε $c=\int_1^2\left(2e^{x^2}\cdot n(x)\right)dx$ (5) οπότε $n(x)=x+e^{-x^2}\cdot c$ (6).

Από τις σχέσεις (5),(6) έχουμε :

$$c=\int_1^2 2e^{x^2}\left(x+e^{-x^2}\cdot c\right)dx=\left[\int_1^2 2xe^{x^2}+2c\right]dx\Leftrightarrow$$

$$c=\left[e^{x^2}+2cx\right]_1^2\Leftrightarrow c=e^4+4c-e-2c\Leftrightarrow c=e-e^4$$ οπότε από τη σχέση (6)

έχουμε $n(x)=x+e^{-x^2}\cdot\left(e-e^4\right)\Leftrightarrow n(x)=x+\left(e-e^4\right)\cdot e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

7ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα
Επιπέδου 2

Θέμα Α

Α1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

• Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

• Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης

τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1)

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

• Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι. $f(x_1) = f(x_2)$.Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Α3. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και το θεώρημα που χρησιμοποιήθηκε εφαρμόζεται σε ένα διάστημα Δ και όχι σε ένωση διαστημάτων. Το σωστό θα ήταν να γραφεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

Α4. α) Σ β) Σ γ) Λ **Α5.** δ)

Θέμα Β

Β1. Είναι $f(x) = \lambda x^2\left(\lambda - \dfrac{x}{4}\right) = \lambda^2 x^2 - \dfrac{\lambda x^3}{4}$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2\lambda^2 x - \dfrac{3\lambda x^2}{4}, x \in \mathbb{R}$ και

$f''(x) = 2\lambda^2 - \dfrac{3\lambda x}{2}, x \in \mathbb{R}$. Η κλίση της f είναι η f' άρα η f' παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = \dfrac{4}{3}$ (εσωτερικό σημείο) οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f''\left(\dfrac{4}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - \dfrac{3\lambda \cdot \frac{4}{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

απορρίπτεται ή $\lambda = 1$.

Για λ=1 είναι $f(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - \frac{3x^2}{4}, x \in \mathbb{R}$ και

$f''(x) = 2 - \frac{3x}{2}, x \in \mathbb{R}$.

Η f' είναι τριώνυμο με ρίζες το 0 και το $\frac{8}{3}$ άρα είναι

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{3}, +\infty\right)$.

x	$-\infty$	0	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
f'	-	0	+	0 -
f	2	1		2

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $\left[\frac{8}{3}, +\infty\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{8}{3}\right]$. Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0) = 0$ και τοπικό μέγιστο στο $x = \frac{8}{3}$ το

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{9} - \frac{512}{27 \cdot 4} = \frac{64}{9} - \frac{512}{108} = \frac{768 - 512}{108} = \frac{256}{108} = \frac{64}{27}.$$

B2. Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$ και

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η f είναι κυρτή στο $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right]$ και κοίλη στο $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$. Η f παρουσιάζει καμπή στο $x = \frac{4}{3}$ και έχει σημείο καμπής το $K\left(\frac{4}{3}, f\left(\frac{4}{3}\right)\right) \equiv \left(\frac{4}{3}, \frac{32}{27}\right)$.

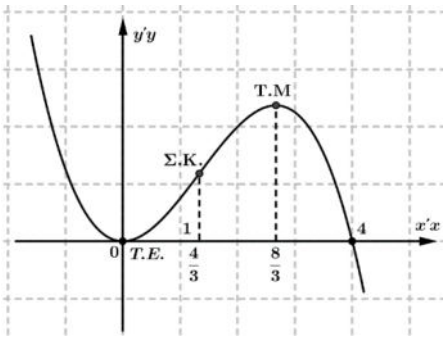
B3. Η f ως πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού δεν έχει ασύμπτωτες. Είνα $f(0) = 0$ άρα διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Είναι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{x^3}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2\left(1 - \frac{x}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2 = 0$ ή $\frac{x}{4} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 4$ άρα τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $A(4,0)$ και εφάπτεται στον x΄x στο σημείο $O(0,0)$.

Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών.

x	$-\infty$	0 **Τ.Ε.**	$\frac{4}{3}$ **Σ.Κ.**	$\frac{8}{3}$ **Τ.Μ.**	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	+	-	
$f''(x)$	+	0	-	-	
f	∪	∩	∩	∪	



Β4. Για $x \in [3,4]$ είναι $f(x) \geq 0$ και για $x > 4$ είναι $f(x) < 0$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_0^5 |f(x)|dx = \int_0^4 |f(x)|dx + \int_4^5 |f(x)|dx =$

$$= \int_0^4 \left(x^2 - \frac{x^3}{4}\right)dx - \int_4^5 \left(x^2 - \frac{x^3}{4}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{16}\right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{16}\right]_4^5 =$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{256}{16} - \frac{125}{3} + \frac{625}{16} + \frac{64}{3} - \frac{256}{16} = \frac{3}{3} + \frac{113}{16} = 1 + \frac{113}{16} = \frac{129}{16}$$ τετραγωνικές μονάδες.

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $\varphi(-2) = \frac{1}{e^2} > 0$, $\varphi(-1) = \frac{1}{e} + 1 - 2 = \frac{1}{e} - 1 < 0$, $\varphi(1) = e - 3 < 0$ και $\varphi(2) = e^2 - 4 > 0$. Η φ είναι συνεχής στα διαστήματα [-2,-1],[1,2] σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχουν $x_1 \in (-2,-1)$ και $x_2 \in (1,2)$ τέτοια ώστε $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $\varphi'(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$. Είναι $\varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.Για κάθε $x < 0$ είναι άρα $\varphi'(x) < 0$ και για

κάθε $x>0$ είναι $\varphi'(x)>0$, επειδή η φ είναι συνεχής, είναι $\varphi\searrow(-\infty,0]$ και $\varphi\nearrow[0,+\infty)$, επομένως τα x_1, x_2 είναι μοναδικά.

Γ2. Είναι $f(x)=\left|\ln(\varphi(x)+1)\right|=\left|\ln\left(e^x-x-1\right)\right|$, $x\neq 0$.

Πρέπει και αρκεί $e^x-x-1>0\Leftrightarrow e^x>x+1$, αληθής $\forall x\in\mathbb{R}^*$

Είναι $\ln\left(e^x-x-1\right)\geq 0\Leftrightarrow e^x-x-1\geq 1\Leftrightarrow e^x-x-2\geq 0\Leftrightarrow\varphi(x)\geq 0$ (2)

Για κάθε $x<x_1\overset{\varphi\searrow}{\Leftrightarrow}\varphi(x)>\varphi(x_1)=0$. Για κάθε $x_1<x\leq 0\overset{\varphi\searrow}{\Leftrightarrow}\varphi(x)<\varphi(x_1)=0$.

Για κάθε $0\leq x<x_2\overset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow}\varphi(x)<\varphi(x_2)=0$. Για κάθε

$x>x_2\overset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow}\varphi(x)>\varphi(x_2)=0$.

Άρα $(2)\Leftrightarrow x\in(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$ οπότε

$$f(x)=\begin{cases}\ln\left(e^x-x-1\right), & x\in(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)\\ -\ln\left(e^x-x-1\right), & x\in(x_1,x_2)\end{cases}$$

Είναι $f(x_2)=\varphi(x_2)=0$ οπότε $e^{x_2}-x_2-2=0\Leftrightarrow e^{x_2}-x_2=2$ άρα έχουμε:

$$\lim_{x\to x_2^-}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}=\lim_{x\to x_2^-}\frac{-\ln\left(e^x-x-1\right)}{x-x_2}\overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to x_2^-}\frac{-\frac{e^x-1}{e^x-x-1}}{1}=$$

$$-\frac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}-x_2-1}=-\frac{e^{x_2}-1}{2-1}=1-e^{x_2}\text{ και}$$

$$\lim_{x\to x_2^+}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}=\lim_{x\to x_2^+}\frac{\ln\left(e^x-x-1\right)}{x-x_2}\overset{\text{DLH}}{\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to x_2^+}\frac{\frac{e^x-1}{e^x-x-1}}{1}=$$

$$\frac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}-x_2-1}=\frac{e^{x_2}-1}{2-1}=e^{x_2}-1.$$

Είναι $1-e^{x_2}\neq e^{x_2}-1\Leftrightarrow 2e^{x_2}\neq 2\Leftrightarrow e^{x_2}\neq 1\Leftrightarrow x_2\neq 0$ ισχύει οπότε

$\lim\limits_{x\to x_2^-}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}\neq\lim\limits_{x\to x_2^+}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_2.

Γ3. Είναι $g(x)=f(x)=\ln\left(e^x-x-1\right)$, $x\geq x_2$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x_2,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x-1}$ οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $(x_2,+\infty)$ με παράγωγο

$g'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x-1}$, $x>x_2$. Είναι:

- $x>x_2>0$ οπότε $e^x>1\Leftrightarrow e^x-1>0$,
- $e^x>x+1\Leftrightarrow e^x-x-1>0$ για $x>0$ (από γνωστή ανισότητα)

Άρα $g'(x)>0$ για κάθε $x\geq x_2$,η g συνεχής σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $[x_2,+\infty)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_2,+\infty)$ άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Άρα έχει σύνολο τιμών το $g([x_2,+\infty))=\left[g(x_2),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=[0,+\infty)$, το οποίο είναι το πεδίο ορισμού της g^{-1} .

($\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}-e^{-x}\right)\right]=+\infty$, εφόσον

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x-x-1\right)\right]\overset{e^x-x-1=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}(\ln u)=+\infty$.

Γ4. Είναι $g'(x)=f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x-1}$.

Θέτω $g^{-1}(x)=y\Leftrightarrow x=g(y)\Rightarrow dx=g'(y)dy=\dfrac{e^y-1}{e^y-y-1}dy$.

Για x=0 είναι $g(y)=0=g(x_2)\Leftrightarrow y=x_2$ και για $x=\alpha$ είναι $y=g^{-1}(\alpha)$.

Είναι $\int_0^{\alpha}\left(1-\dfrac{g^{-1}(x)}{e^{g^{-1}(x)}-1}\right)dx=\int_{x_2}^{g^{-1}(\alpha)}\left(1-\dfrac{y}{e^y-1}\right)\dfrac{e^y-1}{e^y-y-1}dy=$

$\int_{x_1}^{g^{-1}(\alpha)}\dfrac{e^y-1-y}{\cancel{e^y-1}}\cdot\dfrac{\cancel{e^y-1}}{\cancel{e^y-y-1}}dy=\int_{x_2}^{g^{-1}(\alpha)}dy=g^{-1}(\alpha)-x_2$

Θέμα Δ

Δ1. Έστω h το ύψος του κυλίνδρου με ακτίνα βάσης x. Πρέπει $x>0$ και $h>0$.Το εμβαδόν κάθε βάσης είναι πx^2 άρα το εμβαδόν των βάσεων είναι $2\pi x^2$, ενώ το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι $2\pi x h$.

Για τον όγκο του κυλίνδρου ισχύει $V = 628 \Leftrightarrow \pi x^2 h = 628 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} h = \dfrac{628}{\pi x^2} > 0$.

Άρα το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι

$$2\pi x h = 2\cancel{\pi} x \frac{628}{\cancel{\pi} x^{\cancel{2}}} = \frac{1256}{x}$$

Το κόστος του υλικού των βάσεων είναι $K_1(x) = 2\pi x^2 \cdot 4 = 8\pi x^2$ λεπτά του ευρώ, ενώ το κόστος του υλικού της παράπλευρης επιφάνειας είναι

$$K_2(x) = \frac{1256}{x} \cdot 1,25 = \frac{1570}{x}$$

Άρα το συνολικό κόστος είναι $K(x) = K_1(x) + K_2(x) = 8\pi x^2 + \dfrac{1570}{x}$, $x > 0$

Ένα κουτί με ακτίνα βάσης 5 κοστίζει $K(5) = 8\pi \cdot 25 + \dfrac{1570}{5} = 200\pi + 314$

λεπτά του ευρώ.

Δ2. Η συνάρτηση Κ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

παράγωγο $K'(x) = 16\pi x - \dfrac{1570}{x^2} \Leftrightarrow$

$$K'(x) = \frac{16\pi x^3 - 1570}{x^2} \Leftrightarrow K'(x) = \frac{2\left(8\pi x^3 - 785\right)}{x^2}$$

$$K'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\left(8\pi x^3 - 785\right)}{x^2} \geq 0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} 8\pi x^3 - 785 \geq 0 \Leftrightarrow 8\pi x^3 \geq 785 \Leftrightarrow$$

$x^3 \geq \dfrac{785}{8\pi} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{785}{\pi}}$. Είναι $K'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{785}{\pi}}\right)$ και

$K'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{785}{\pi}}, +\infty\right)$ άρα $K \searrow \left(0, \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{785}{\pi}}\right]$ και

$K \nearrow \left[\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{785}{\pi}}, +\infty\right)$ ως συνεχής. Η Κ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{785}{\pi}}$.

Άρα έχουμε το ελάχιστο κόστος όταν το εμβαδόν των βάσεων του κυλίνδρου ισούται με $2\pi\left(\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{785}{\pi}}\right)^2 = \dfrac{\pi}{2}\left(\sqrt[3]{\dfrac{785}{\pi}}\right)^2$.

Δ3. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την Κ στο [α, β] οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο

ώστε $K'(\xi_1)=\dfrac{K(\beta)-K(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{8\pi\beta^2+\dfrac{1570}{\beta}-8\pi\alpha^2-\dfrac{1570}{\alpha}}{\beta-\alpha}=$

$=\dfrac{8\pi\cancel{(\beta-\alpha)}(\beta+\alpha)}{\cancel{\beta-\alpha}}+1570\dfrac{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}}{\beta-\alpha}=8\pi(\alpha+\beta)+1570\dfrac{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}}{\beta-\alpha}$ (A)

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$ στο [α, β] οπότε

υπάρχει $\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{\xi_2{}^2}=\dfrac{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}}{\beta-\alpha}$

Άρα η (A) γίνεται $K'(\xi_1)=8\pi(\alpha+\beta)-1570\cdot\dfrac{1}{\xi_2{}^2}$.

Δ4. 1ος τρόπος: Η G είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $G'(x)=K(x)>0$ για κάθε $x>0$ άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η G συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$ άρα $G([1,2])=[G(1),G(2)]$

Για $1\le t\le 2\overset{G\nearrow}{\Leftrightarrow}G(1)\le G(t)\le G(2)\overset{t>0}{\Leftrightarrow}2tG(1)\le 2tG(t)\le 2tG(2)\Leftrightarrow$

$\int_1^2 2tG(1)dt\le\int_1^2 2tG(t)dt\le\int_1^2 2tG(2)dt\Leftrightarrow$

$G(1)\left[t^2\right]_1^2\le\int_1^2 2tG(t)dt\le G(2)\left[t^2\right]_1^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3G(1)\le\int_1^2 2tG(t)dt\le 3G(2)\Leftrightarrow G(1)\le\int_1^2\dfrac{2tG(t)}{3}dt\le G(2)$

Το $\left(\int_1^2\dfrac{2tG(t)}{3}dt\right)\in G([1,2])$ άρα υπάρχει μοναδικό (αφού G γνησίως αύξουσα στο [1,2]) $x_1\in[1,2]$ τέτοιο ώστε $G(x_1)=\int_1^2\dfrac{2tG(t)}{3}dt$.

2ος τρόπος: Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=G(x)-\int_1^2\dfrac{2tG(t)}{3}dt$, $x\in[1,2]$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο (1,2) με $\varphi'(x)=G'(x)=K(x)>0$ για

κάθε $x \in (1,2)$ άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$. Είναι :

- $\varphi(1) = G(1) - \int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt \le 0$ γιατί για

$t \ge 1 \overset{G\nearrow}{\Leftrightarrow} G(t) \ge G(1) \overset{t\in[1,2]}{\Leftrightarrow} 2tG(t) \ge 2tG(1)$ οπότε

$\int_1^2 2tG(t)dt \ge \int_1^2 2tG(1)dt \Leftrightarrow \int_1^2 2tG(t)dt \ge G(1)\left[t^2\right]_1^2 \Leftrightarrow$

$\int_1^2 2tG(t)dt \ge 3G(1) \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt \ge G(1)$

- $\varphi(2) = G(2) - \int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt \ge 0$ γιατί για

$t \le 2 \overset{G\nearrow}{\Leftrightarrow} G(t) \le G(2) \overset{t\in[1,2]}{\Leftrightarrow} 2tG(t) \le 2tG(2)$ οπότε

$\int_1^2 2tG(t)dt \le \int_1^2 2tG(2)dt \Leftrightarrow \int_1^2 2tG(t)dt \le G(2)\left[t^2\right]_1^2 \Leftrightarrow$

$\int_1^2 2tG(t)dt \le 3G(2) \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt \le G(2)$. Άρα $\varphi(1)\varphi(2) \le 0$.

Αν $\varphi(1)\varphi(2) = 0$ τότε το 1 ή το 2 είναι ρίζες της εξίσωσης $\varphi(x) = 0$.

Αν $\varphi(1)\varphi(2) < 0$,η φ συνεχής στο $[1,2]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$\varphi(x_1) = 0 \Leftrightarrow G(x_1) = \int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt$.

Άρα υπάρχει μοναδικό (αφού G γνησίως αύξουσα στο [1,2]) $x_1 \in [1,2]$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_1) = 0 \Leftrightarrow G(x_1) = \int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt$.

8ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα Επιπέδου 2

Θέμα Α

Α1. Έστω $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

$\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ...\alpha_1 x + \alpha_0\right) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right) +$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right) + \lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha_1 x\right) + \lim\limits_{x\to x_0}\alpha_0 = \alpha_\nu \lim\limits_{x\to x_0} x^\nu +$

$\alpha_{\nu-1}\lim\limits_{x\to x_0}x^{\nu-1}+...+\alpha_1\lim\limits_{x\to x_0}x+\alpha_0=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0=P(x_0)$

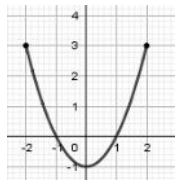
Α2. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $\mathbf{1-1}$, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1\neq x_2$, τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$.

α	β	γ	δ
Ε	Α	Β	Δ

Α3.

Α4. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x)=x^2-1,\ x\in[-2,2]$. Η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$,η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες τις -1, 1 στο $(-2,2)$ όμως $f(-2)=3,\ f(2)=3$ οπότε $f(-2)f(2)>0$



Α5.α) Σ β) i. Λ ii. Σ γ) Λ

Θέμα Β

Β1. Η συνάρτηση $f(x)=\ln(2e^x+1)-2$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{2e^x}{2e^x+1}>0$,άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε θα είναι και 1-1 , συνεπώς αντιστρέφεται. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x+1)=0+1=1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^x+1)=+\infty$ οπότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(2e^x+1)-2\right]\overset{\substack{u=2e^x+1\\ x\to-\infty,\\ u\to1,}}{=}\lim\limits_{u\to1}\ln u=0-2=-2$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(2e^x+1)-2\right]\overset{\substack{k=2e^x+1\\ x\to+\infty,\\ k\to+\infty,}}{=}\lim\limits_{k\to+\infty}\ln u=+\infty$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-2,+\infty)$. Για τον τύπο της συνάρτησης f^{-1} έχουμε :Για κάθε $x\in\mathbb{R},\ y>-2$ είναι

$f(x)=y\Leftrightarrow\ln(2e^x+1)-2=y\Leftrightarrow\ln(2e^x+1)=y+2\Leftrightarrow$

$2e^x+1=e^{y+2}\Leftrightarrow e^x=\dfrac{e^{y+2}-1}{2}\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{e^{y+2}-1}{2}$. Άρα

$f^{-1}(x)=\ln\dfrac{e^{x+2}-1}{2},x\in(-2,+\infty)$

B2. i) Είναι $f^{-1}(\ln 7-2)=\ln\frac{e^{\ln 7-2+2}-1}{2}=\ln\frac{e^{\ln 7}-1}{2}\ln\frac{7-1}{2}=\ln 3$ οπότε

$f(x)<f^{-1}(\ln 7-2)-2\Leftrightarrow f(x)<\ln 3-2\Leftrightarrow f(x)<f(0)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x<0$

ii) Η ανίσωση έχει έννοια όταν $x>0$.Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε $f(\ln x+x)<f(1)\Leftrightarrow\ln x+x<1\Leftrightarrow\ln x+x-1<0$ (1) .

Έστω $g(x)=\ln x+x-1, x>0$. Είναι $g'(x)=\frac{1}{x}+1>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.Είναι $g(1)=0$, συνεπώς από την (1) έχουμε $g(x)<g(1)\Leftrightarrow 0<x<1$.

B3. Η εξίσωση $f^{-1}\left(\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)-f^{-1}\left(\frac{e^x}{\eta\mu x}\right)=0$ ισοδύναμα γίνεται

$f^{-1}\left(\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=f^{-1}\left(\frac{e^x}{\eta\mu x}\right)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}\left(\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)\right)=f\left(f^{-1}\left(\frac{e^x}{\eta\mu x}\right)\right)\Leftrightarrow$

$\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{e^x}{\eta\mu x}\Leftrightarrow x\eta\mu x=e^x\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow x\eta\mu x-e^x\sigma\upsilon\nu x=0$ (2)

Έστω $h(x)=x\eta\mu x-e^x\sigma\upsilon\nu x$, η οποία είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων , $h(0)=-1<0$, $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$. Άρα $h(0)h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right): h(\rho)=0$. Επομένως, το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (2) και αφού $\rho\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ θα είναι ρίζα και της ισοδύναμης εξίσωσης

$f^{-1}\left(\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=f^{-1}\left(\frac{e^x}{\eta\mu x}\right)$.

B4. Η $f'(x)=\frac{2e^x}{2e^x+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=\frac{2e^x}{\left(2e^x+1\right)^2}>0$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Επομένως , η C_f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο εκτός του σημείου επαφής.

Β5. Είναι $f'(x)=\dfrac{2e^x}{2e^x+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε

$$E(\Omega)=\int_0^{\ln 2} f'(x)\,dx=\left[f(x)\right]_0^{\ln 2}=f(\ln 2)-f(0)=(\ln 5-2)-(\ln 3-2)=\ln\frac{5}{3}$$

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $x^2-4x+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $\Delta=-4<0$ και $\alpha=1>0$, οπότε $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+5}>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, με σύνολο τιμών $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.Συνεπώς δεν μπορεί να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.Επίσης , αφού $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ δεν μπορεί να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\alpha<0$ ή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ γιατί τότε θα υπάρχει $\beta<0$ τέτοιο, ώστε $f(\beta)<0$ (άτοπο).Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\gamma>0$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[xf(x)\right]\overset{-\infty\cdot\gamma}{=}-\infty$ (άτοπο).

Συνεπώς, επειδή το όριο υπάρχει είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

Γ2. Η $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f''(x)=-\frac{2x-4}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$$

Είναι $f''(x)>0\Leftrightarrow-\dfrac{2x-4}{\left(x^2-4x+5\right)^2}>0\Leftrightarrow 2x-4<0\Leftrightarrow x<2$,οπότε η f είναι κυρτή στο $(-\infty,2]$ και κοίλη στο $[2,+\infty)$. Η εξίσωση εφαπτομένης της της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ είναι $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{\pi}{8}$.

Γ3. Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,2]$ οπότε η C_f θα είναι πάνω από κάθε εφαπτομένη σε οπουδήποτε σημείο . Άρα $f(x)\geq\dfrac{x}{5}+\dfrac{\pi}{8}$ (1) με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Επίσης για $x\leq 0$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+4+1}=\dfrac{1}{(x-2)^2+1}<\dfrac{1}{(x-2)^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)<\dfrac{1}{(x-2)^2}\Leftrightarrow f'(x)-\dfrac{1}{(x-2)^2}<0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x-2}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0]$ με παράγωγο

$g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{(x-2)^2}<0$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο

$A_1=(-\infty,0]$ με σύνολο τιμών $g(A_1)=\left[g(0),\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right)=\left[\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2},0\right)$ γιατί

είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+\dfrac{1}{x-2}\right)=0$,άρα $g(x)<0$ στο

$(-\infty,0]$ δηλαδή $f(x)+\dfrac{1}{x-2}<0\Leftrightarrow f(x)<-\dfrac{1}{x-2}\Leftrightarrow f(x)<\dfrac{1}{2-x}$ (2). Από

(1),(2) προκύπτει $\dfrac{x}{5}+\dfrac{\pi}{8}\le f(x)<\dfrac{1}{2-x}$.

Γ4. Είναι $\dfrac{x}{5}+\dfrac{\pi}{8}\le f(x)<\dfrac{1}{2-x}$ και η αριστερή ισότητα ισχύει μόνο για x = 0

οπότε $\int_{-1}^{0}\left(\dfrac{x}{5}+\dfrac{\pi}{8}\right)dx<\int_{-1}^{0}f(x)dx<\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{2-x}dx\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{5}\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\dfrac{\pi}{8}<\int_{-1}^{0}f(x)dx<-\left[\ln(2-x)\right]_{-1}^{0}\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{10}<\int_{-1}^{0}f(x)dx<\ln\dfrac{3}{2}$.

Γ5. Αφού $f(x)>0$ τότε

$$E(\Omega)=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x)'f(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^2-\int_0^2 x\frac{1}{x^2-4x+5}dx=$$

$$=2f(2)-\frac{1}{2}\int_0^2\frac{2x-4+4}{x^2-4x+5}dx=2f(2)-\frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{2x-4}{x^2-4x+5}+\frac{4}{x^2-4x+5}\right)dx=$$

$$=2f(2)-\frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2-4x+5\right|\right]_0^2-2\int_0^2 f'(x)dx=2f(2)-\frac{1}{2}(\ln1-\ln5)-2\left[f(x)\right]_0^2$$

$$=2f(2)+\frac{1}{2}\ln5-2f(2)+2f(0)=\frac{1}{2}\ln5+\frac{\pi}{4}.$$

Θέμα Δ

Δ1. Η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln(x+1)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με

παράγωγο $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$. Επίσης, η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με

παράγωγο $f''(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}$. Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$.

- Για $-1<x<0\Leftrightarrow f'(x)<f'(0)=0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$.

- Για $x>0\Leftrightarrow f'(x)>f'(0)=0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=1$.

Δ2. Είναι $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left[e^x-\ln(x+1)\right]=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to -1^+}e^x=e^{-1}$ και

$\lim\limits_{x\to -1^+}\ln(x+1)\overset{x+1=u}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x-\ln(x+1)\right]=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-\frac{\ln(x+1)}{e^x}\right)\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+1)e^x}=0$

Συνεπώς, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-1,0]$ με σύνολο τιμών σε αυτό το διάστημα $f(A_1)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)\right)=[1,+\infty)$. Ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2=[0,+\infty)$ με σύνολο τιμών σε αυτό το διάστημα $f(A_2)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$. Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=[1,+\infty)$.

- Επειδή $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=+\infty$, τότε η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.
- Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, οπότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.
- Θα εξετάσουμε αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x-\ln(x+1)}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{x}-\frac{\ln(x+1)}{x}\right]=+\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$ οπότε η C_f δεν έχει

πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Δ3. Είναι $f(x)-e+\ln 2=0 \Leftrightarrow f(x)=e-\ln 2 \Leftrightarrow f(x)=f(1)$ (1) .

Προφανής λύση το $x=1$ στο διάστημα A_2. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2 οπότε το 1 μοναδική λύση της εξίσωσης (2) στο διάστημα αυτό .

Επίσης το $e-\ln 2 \in f(A_1)=[1,+\infty)$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα υπάρχει μοναδικό $\rho_1 \in (-1,0)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1)=e-\ln 2$.

Συνεπώς, η εξίσωση $f(x)=e-\ln 2$ έχει ακριβώς δυο ρίζες $\rho_1,\rho_2=1$ στο $(-1,+\infty)$ με $-1<\rho_1<0<\rho_2$.

Δ4. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f'(x)+f(x)-e+\ln 2$ η οποία είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$

ως άθροισμα συνέχων συναρτήσεων .

$h(\rho_1)=f'(\rho_1)+f(\rho_1)-e+\ln 2=f'(\rho_1)+0=f'(\rho_1)<0$ γιατί $\rho_1 \in (-1,0)$ και

$h(\rho_2)=h(1)=f'(1)+f(1)-e+\ln 2=f'(1)=e-\frac{1}{2}>0$.

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)+\ln 2=e-f(x_0)$

Όμως $h'(x)=f''(x)+f'(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}+e^x-\frac{1}{x+1}=2e^x-\frac{x}{(x+1)^2}$.

Αν $x \in (-1,0)$ τότε $-\frac{x}{(x+1)^2}>0$ οπότε $h'(x)>0$.

Αν $x \in (0,+\infty)$ τότε $f''(x)>0$, $f'(x)>0$ οπότε $h'(x)>0$.

Αν $x=0$, τότε $h'(0)=f'(0)+f''(0)=f''(0)>0$.

Άρα $h'(x)>0$, για κάθε $x \in (-1,+\infty)$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

β) Είναι

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)f'(\rho_1)-f'(\rho_2)}{f(x)-1}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{f(x)-1}\left((x+1)f'(\rho_1)-f'(\rho_2)\right)\right]=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-1\right)=f(0)-1=0$ και $f(x)>1$ για x κοντά στο 0, άρα

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)-1}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left((x+1)f'(\rho_1)-f'(\rho_2)\right)=f'(\rho_1)-f'(1)<0$

Γιατί $\rho_1 < 1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\rho_1) < f'(1) \Leftrightarrow f'(\rho_1) - f'(1) < 0$

Δ5. Η συνάρτησή g είναι συνεχής στο $[0,1]$, οπότε από ΘΜΕΤ θα έχει μέγιστη Μ και ελάχιστη τιμή m,δηλαδή $m \le g(x) \le M$ (3). Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ οπότε για

$0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{x} \le 1 \Leftrightarrow f(0) \le f\left(\sqrt{x}\right) \le f(1) \Leftrightarrow 1 \le f\left(\sqrt{x}\right) \le e - \ln 2$,οπότε

$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx > 0$. Από την (3) έχουμε $mf\left(\sqrt{x}\right) \le g(x) f\left(\sqrt{x}\right) \le Mf\left(\sqrt{x}\right)$ οπότε

$\int_0^1 mf\left(\sqrt{x}\right)dx \le \int_0^1 g(x) f\left(\sqrt{x}\right)dx \le \int_0^1 Mf\left(\sqrt{x}\right)dx \Leftrightarrow$

$m\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx \le \int_0^1 g(x) f\left(\sqrt{x}\right)dx \le M\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx \overset{\div \int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx > 0}{\Leftrightarrow}$

$$m \le \frac{\int_0^1 g(x) f\left(\sqrt{x}\right)dx}{\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx} \le M \ .$$

Το $\dfrac{\int_0^1 g(x) f\left(\sqrt{x}\right)dx}{\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx} \in [m, M]$ οπότε υπάρχει $\theta \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε

$$g(\theta) = \frac{\int_0^1 g(x) f\left(\sqrt{x}\right)dx}{\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx} \Leftrightarrow \int_0^1 g(x) f\left(\sqrt{x}\right)dx = g(\theta)\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx$$

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΤ

Οι εκδόσεις μας



ISBN 978-618-5528-31-7

ΤΙΜΗ ΛΙΑΝΙΚΗΣ ΠΩΛΗΣΗΣ: ??? €