Διαγώνισμα τύπου προαγωγικών εξετάσεων

Άλγεβρας Α΄ Λυκείου

Επιμέλεια θεμάτων: Μαρία Γεροδήμου

E-mail: mairigerodhmou@gmail.com

Κιν: 6943680118

Θέμα Α

Α1. Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1) με $\alpha\neq 0$ και $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, η οποία έχει πραγματικές ρίζες x_1,x_2.

Να αποδείξετε ότι:

α) $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

β) $P=x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$

γ) η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα στην μορφή $x^2-Sx+P=0$

10 μονάδες

Α2. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή ή Λάθος καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η εξίσωση $(\alpha-1)x=\alpha(\alpha-1)$ έχει μοναδική λύση την $x=\alpha$.

β) Είναι $x^2+\lambda x+\lambda^2>0$ με $\lambda\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Οι ανισώσεις $\dfrac{x-1}{(x-2)^2}\geq 0$ και $x-1\geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

δ) Είναι $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

ε) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt[2021]{x^2+2021}+2022}{|x|+x}$ έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

15 μονάδες

Θέμα Β (Τράπεζα θεμάτων θέμα 1384)

Δίνεται η παράσταση $A=|x-1|+|y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$. Να αποδείξετε ότι:

Β1. $A=x-y+2$.

12 μονάδες

Β2. $0<A<4$.

13 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-\alpha\sqrt{x}+\beta+\gamma-3}{\sqrt{x}-\delta+1}$ με $\alpha=2\kappa$, $\beta=\kappa^2+1$, $\gamma=\delta=2$. Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (με την σειρά που δίνονται) και οι αριθμοί β,γ,δ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου (με την σειρά που δίνονται).

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 2$.

9 μονάδες

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f και να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x} - 1$ για κάθε $x \in A$.

9 μονάδες

Γ3. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες (αν υπάρχουν).

7 μονάδες

Θέμα Δ (Τράπεζα θεμάτων θέμα 1511)

Δίνεται η ανίσωση: $|x+1| < 4 \quad (1)$

Δ1. Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

7 μονάδες

Δ2. Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

3 μονάδες

Δ3. Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \leq 0$.

15 μονάδες

Μαρία Γεροδήμου

Κάθε Επιτυχία!

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. α) $S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta + \cancel{\sqrt{\Delta}} - \beta - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2\alpha} = -\frac{\cancel{2}\beta}{\cancel{2}\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$

β) $P = x_1 x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \Delta}{4\alpha^2} = \frac{\cancel{\beta^2} - \cancel{\beta^2} + 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\cancel{4\alpha}\gamma}{\cancel{4\alpha^2}} = \frac{\gamma}{\alpha}$

γ) $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \overset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$

Α2. **α)** Λάθος **β)** Σωστή **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Σωστή

Θέμα Β

Β1. Αφού $1 < x < 4$ ισχύει ότι $x - 1 > 0$ και $|x - 1| = x - 1$. Επειδή $2 < y < 3$, ισχύει ότι $y - 3 < 0$ και $|y - 3| = 3 - y$. Άρα $A = x - 1 + 3 - y = x - y + 2$.

Β2. Είναι $1 < x < 4$ (1) και $2 < y < 3 \Leftrightarrow -2 > -y > -3 \Leftrightarrow -3 < -y < -2 \Leftrightarrow -1 < -y + 2 < 0$ (2)
Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε: $0 < x - y + 2 < 4 \Leftrightarrow 0 < A < 4$

Θέμα Γ

Γ1. Αφού οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει:

$$2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \cancel{2}\left(\kappa^2 + 1\right) = \cancel{2}\kappa + \cancel{2} \Leftrightarrow \kappa^2 + \cancel{1} = \kappa + \cancel{1} \Leftrightarrow \kappa^2 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa(\kappa - 1) = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 1$$

Επειδή οι β,γ,δ είναι διαδοχικοί όροι γεωμερικής προόδου ισχύει:

$$\gamma^2 = \beta\delta \Leftrightarrow 4 = \left(\kappa^2 + 1\right)2 \Leftrightarrow \kappa^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow \kappa^2 = 1 \Leftrightarrow \kappa = \pm 1$$

Άρα τελικά για να ισχύουν και τα δύο είναι $\kappa = 1$ άρα $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 2$.

Γ2. Για $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 2$ είναι: $f(x) = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$

Πρέπει $\begin{cases} \sqrt{x} - 1 \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$ άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $A = [0,1) \cup (1,+\infty)$.

Για κάθε $x \in A$ είναι $f(x) = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{x} - 1}} = \sqrt{x} - 1$

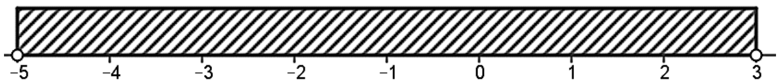
Γ3. Είναι $f(0) = -1$ άρα τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0,-1)$.

Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ αδύνατη γιατί πρέπει $x \in A$.

Άρα δεν τέμνει τον άξονα x΄x.

Θέμα Δ

Δ1. $|x+1|<4 \Leftrightarrow -4<x+1<4 \Leftrightarrow -5<x<3 \Leftrightarrow x\in(-5,3)$



Δ2. Οι ακέραιοι που βρίσκονται στο διάστημα $(-5,3)$ είναι οι -4,-3,-2,-1,0,1,2

Δ3. το τριώνυμο $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ είναι θετικό για κάθε $x\le 0$ και άρα $f(0)=\gamma>0$.

Αλλά από τους τύπους του Vieta για τις ρίζες του τριωνύμου x_1, x_2 έχουμε $P=x_1\cdot x_2=\gamma>0$ συνεπώς οι ρίζες που θα επιλέξουμε θα πρέπει να είναι ομόσημες (αυτόματα αποκλείεται η τιμή 0).
Δεν γίνεται να είναι οι ρίζες ίσες και αρνητικές γιατί τότε το τριώνυμο θα γίνεται μηδέν όταν η τιμή του x ταυτιστεί με την ρίζα αυτή.
Εξετάζουμε τώρα αν γίνεται να είναι ρίζες δύο διακεκριμένες αρνητικές τιμές του $A=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$.
Σε τέτοια περίπτωση, ισχύει ότι και προηγουμένως δηλαδή το τριώνυμο θα μηδενίζεται όταν η τιμή του x ταυτιστεί με μια από τις ρίζες .(Επί πλέον δε οι τιμές του τριωνύμου ανάμεσα στις ρίζες αυτές θα είναι
ετερόσημες του $\alpha=1>0$ που πάλι έρχεται σε αντίφαση με τις προϋποθέσεις της άσκησης).
Μετά από τα παραπάνω το τριώνυμο θα έχει για ρίζες είτε τις δύο διακεκριμένες θετικές τιμές του συνόλου A , δηλαδή τις $x_1=1$ και $x_2=2$

Οπότε θα έχουμε το τριώνυμο $f(x)=x^2-3x+2$. Είτε διπλή κάθε μια απ' αυτές και πράγματι τότε $f(x)=(x-1)^2$ ή $f(x)=(x-2)^2$ που είναι θετικό για κάθε $x\le 0$.