Επαναληπτικό Διαγώνισμα
Μέχρι και τη συνέχεια

Θέμα 1 (25 μονάδες)

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. (4 μονάδες)
2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (Θ.Ε.Τ.). (5 μονάδες)
3. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες** (3×1 μονάδες) και **να αιτολογήσετε** την απάντησή σας (3×3 μονάδες):

   (α′) Αν f είναι μία συνάρτηση ορισμένη κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:
   $$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 3 \text{ και } \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 6,$$
   τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

   (β′) Αν $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, όπου Δ διάστημα, τότε το $f(\Delta)$ είναι επίσης διάστημα.

   (γ′) Υπάρχουν ακριβώς δύο (2) συνεχείς συναρτήσεις που να ικανοποιούν τη σχέση $|f(x)| = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Αν f είναι μία συνάρτηση που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής (Θ.Μ.Ε.Τ.) σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ τότε (4 μονάδες):

   (α′) η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[a, b]$,

   (β′) η f ικανοποιεί και τις υποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών (Θ.Ε.Τ.) στο $[a, b]$,

   (γ′) υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $m < f(x) < M$ για κάθε $x \in [a, b]$,

   (δ′) τα (β′) και (γ′).

Θέμα 2 (25 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 - \eta\mu\, x$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (6 μονάδες)
2. Να μελετήσετε την εξίσωση $f(x) = a$ ως προς το πλήθος των ριζών της για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$. (6 μονάδες)
3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $g(x) = f(|x|)$. (5 μονάδες)
4. Αν $h : [0, \pi] \to [0, 1]$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi/2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\pi/2, \pi]$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και h έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία. (8 μονάδες)

Θέμα 3 (25 μονάδες)
Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \begin{cases} x^{a-1}\,\eta\mu(ax) + 2x^{a-1} & x > 0 \\ (-x)^{2-a} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} ,\ a \in \mathbb{R}.$$

1. Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. (6 μονάδες)
2. Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$. (5 μονάδες)
3. Να υπολογίσετε τα όρια:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x\to-\infty} f(x),$$
για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$. (6 μονάδες)
4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f για $a \in (1,2)$ (3 μονάδες) και να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:
$$f(\xi) = \frac{\sigma\upsilon\nu\,\xi}{(f(\xi))^2 + \pi},$$
για $a \in (1,2)$. (5 μονάδες)

Θέμα 4 (25 μονάδες)
Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [-1,1] \to [0,\pi]$ με:

$$2\,\sigma\upsilon\nu\, f(x) = x^3 + x.$$

1. Να υπλογίσετε τα $f(-1), f(0), f(1)$ (3 μονάδες) και να δείξετε ότι η f είναι «1-1» (5 μονάδες).
2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία (4 μονάδες) και να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε:
$$f(x) < x,$$
για κάθε $x \in (\xi, 1]$ (5 μονάδες).
3. Να δείξετε ότι $f(x) + f(-x) = \pi$ για κάθε $x \in [-1,1]$ (4 μονάδες) και ότι υπάρχει $\rho \in (0,1)$ τέτοιο ώστε (4 μονάδες):
$$3f(\rho) - 2\pi = f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 2f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Λύσεις

Λύση 1. Σ.Β., σελ. 74.

2. Σ.Β., σελ. 76.

3. (α΄) **Σωστό**. Θεωρούμε $g(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, οπότε, αφ¨ ενός $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x) = 3$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x) = 6$, αφ¨ ετέρου:

$$f(x) = g(x)(x-x_0) + f(x_0).$$

Παίρνοντας όρια στην παραπάνω σχέση, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 3\cdot 0 + f(x_0) = f(x_0),$$
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = 6\cdot 0 + f(x_0) = f(x_0),$$

επομένως $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

(β΄) **Λάθος**. Πρέπει η f να είναι μη σταθερή. Ως αντιπαράδειγμα, θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = 0.156$, η οποία είναι συνεχής στο $(0,\pi]$ αλλά έχει σύνολο τιμών $f((0,\pi]) = \{0.156\}$.

(γ΄) **Λάθος**. Υπάρχουν ακριβώς τέσσερις (4)· $x, -x, |x|, -|x|$. Προσπαθήστε να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχουν άλλες!

4. Η σωστή απάντηση είναι η (γ΄).

Λύση 1. Γνώσεις Β¨ λυκείου. Στο $[0,\pi/2]$ η $\eta\mu\, x$ είναι γνησίως αύξουσα και στο $[\pi/2,\pi]$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Έστω $x_1, x_2 \in [0,\pi/2]$ με $x_1 < x_2$, οπότε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \eta\mu\, x_1 < \eta\mu\, x_2 \Leftrightarrow -\eta\mu\, x_1 > -\eta\mu\, x_2 \Leftrightarrow 1-\eta\mu\, x_1 > 1-\eta\mu\, x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi/2]$.

- Έστω $x_1, x_2 \in [\pi/2,\pi]$ με $x_1 < x_2$, οπότε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \eta\mu\, x_1 > \eta\mu\, x_2 \Leftrightarrow -\eta\mu\, x_1 < -\eta\mu\, x_2 \Leftrightarrow 1-\eta\mu\, x_1 < 1-\eta\mu\, x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

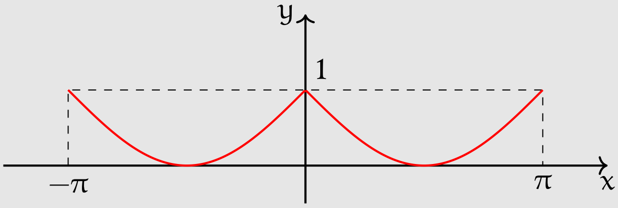
άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\pi/2,\pi]$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\pi/2$, το $f(\pi/2) = 0$ και ολικά μέγιστα στα 0 και 1 τα $f(0) = f(1) = 1$ — συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.

2. Από τα παραπάνω, έχουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,1]$, και:

- Για $a \in (-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Για $a = 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = \pi/2$.
- Για $a \in (0,1]$ η εξίσωση έχει ακριβώς δύο λύσεις, μία στο $(0,\pi/2)$ και μία στο $(\pi/2,\pi)$. Η ύπαρξη έπεται από το Θ.Ε.Τ. και η μοναδικότητα από την μονοτονία της f στο κάθε διάστημα.

3. Η γραφική παράσταση της g είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1:



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της f.

4. Έστω $a(x) = f(x) - h(x)$. Τότε, η a είναι συνεχής στο $[0, \pi/2]$ ως διαφορά συνεχών και:

   - $a(0) = f(0) - h(0) = 1 - h(0) \geq 0$,
   - $a(\pi/2) = f(\pi/2) - h(\pi/2) = -h(\pi/2) \leq 0$,

   διότι $0 \leq h(x) \leq 1$. Αν $a(0) = 0$ ή $a(\pi/2) = 0$ τότε έχουμε βρει μία ρίζα της a στο $[0, \pi/2]$. Αν όχι, τότε:
   $$a(0) > 0 \text{ και } a(\pi/2) < 0,$$
   οπότε, από το Θεώρημα του Bolzano έπετει ότι υπάρχει $x_0 \in (0, \pi/2)$ με $a(x_0) = 0$. Σε κάθε περίπτωση, η a έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0, \pi/2]$.

   Για την μοναδικότητα παρατηρούμε ότι η a είναι γνησίως φθίνουσα. Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in [0, \pi/2]$ με $x_1 < x_2$ οπότε $f(x_1) > f(x_2)$ και $h(x_1) < h(x_2)$, άρα $-h(x_1) > -h(x_2)$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:
   $$f(x_1) - h(x_1) > f(x_2) - h(x_2) \Leftrightarrow a(x_1) > a(x_2),$$
   άρα η a είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η ρίζα που βρήκαμε στο $[0, \pi/2]$ είναι μοναδική.

   Ομοίως εργαζόμαστε και στο $[\pi/2, \pi]$, οπότε βρίσκουμε μία δεύτερη ρίζα της a, άρα η a έχει ακριβώς δύο ρίζες, συνεπώς οι γραφικές παραστάσεις των f, h τέμνονται σε ακριβώς δύο σημεία.

Λύση 1. Παρατηρούμε ότι:

   - Για $a = 2$ έχουμε:
   $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \neq 0.$$
   - Για $a > 2 \Leftrightarrow 2 - a < 0$ έχουμε:
   $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x)^{2-a} = +\infty.$$
   - Για $a < 2 \Leftrightarrow 2 - a > 0$ έχουμε:
   $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x)^{2-a} = 0.$$

   Επίσης:

   - Για $a = 1$ έχουμε:
   $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (\eta\mu\, x + 2) = 2 \neq 0.$$
   - Για $a > 1 \Leftrightarrow a - 1 > 0$ έχουμε:
   $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^{a-1} \eta\mu(ax) + 2x^{a-1}) = 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0.$$

- Για $a < 1 \Leftrightarrow a - 1 > 0$ έχουμε:

$$f(x) = x^{a-1}(\eta\mu(ax) + 2).$$

Επίσης, για $x > 0$

$$\eta\mu(ax) \geq -1 \Leftrightarrow \eta\mu(ax) + 2 \geq 1 \Leftrightarrow x^{a-1}(\eta\mu(ax) + 2) \geq x^{a-1}$$

και:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{a-1} = +\infty,$$

επομένως $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Για να είναι συνεχής η f πρέπει:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0,$$

επομένως, από τα παραπάνω, πρέπει $a \in (1, 2)$.

2. Πρέπει $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \pm\infty$, επομένως, από τα παραπάνω, πρέπει:

$$a \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty).$$

3. Για το όριο στο $+\infty$ έχουμε:

- Αν $a = 1$ τότε:

$$f(x) = \eta\mu\, x + 2,$$

επομένως το όριο δεν υπάρχει καθώς, αν υπήρχε, θα υπήρχε και το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2) = \lim_{x \to +\infty} \eta\mu\, x,$$

που είναι γνωστό ότι δεν υπάρχει.

- Αν $a > 1$ τότε, αφού:

$$f(x) = x^{a-1}(\eta\mu(ax) + 2) \geq x^{a-1},$$

και $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{a-1} = +\infty$, έπεται ότι:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

- Αν $a < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{a-1} = 0$ επομένως (μηδενική επί φραγμένη):

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Για το όριο στο $-\infty$ έχουμε:

- Αν $a = 2$ τότε:

$$f(x) = 1,$$

επομένως $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

- Αν $a > 2$ τότε:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^{2-a} = 0.$$

- Αν $a < 2$ τότε:
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^{2-a} = +\infty.$$

4. Για το σύνολο τιμών της f, για $a \in (1,2)$ η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με:
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$
επομένως το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Πράγματι, αν πάρουμε ένα $y \in \mathbb{R}$ τότε, από τα δύο όρια συμπεραίνουμε (εξηγήστε γιατί) ότι υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ τέτοια ώστε $f(a) < y < f(b)$, οπότε, από το Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ με $f(x_0) = y$.

Για το άλλο, θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:
$$g(x) = f^3(x) + \pi f(x) - \text{συν}\, x,$$
η οποία είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης, αφού $-1 \leq \text{συν}\, x \leq 1$ έχουμε:
$$f^3(x) + \pi f(x) - 1 \leq g(x) \leq f^3(x) + \pi f(x) + 1,$$
και, δεδομένου ότι:
$$\lim_{x \to +\infty} (f^3(x) + \pi f(x) - 1) \xlongequal[y \to +\infty]{y=f(x)} \lim_{y \to +\infty} (y^3 + \pi y - 1) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} (f^3(x) + \pi f(x) + 1) \xlongequal[y \to -\infty]{y=f(x)} \lim_{y \to -\infty} (y^3 + \pi y + 1) = -\infty$$
έπεται ότι:
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty,$$
επομένως, όπως και με την f, έχουμε $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Αφού $0 \in \mathbb{R} = g(\mathbb{R})$ έπεται ότι υπάρχει $x \in D_g = \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$, από όπου έπεται και το ζητούμενο.

Λύση 1. Αντικαθιστούμε στην αρχική σχέση όπου $x = -1$ οπότε:
$$2\,\text{συν}\, f(-1) = -2 \Leftrightarrow \text{συν}\, f(-1) = -1 \xLeftrightarrow{f(-1) \in [0,\pi]} f(-1) = \pi.$$

Ανάλογα, βρίσκουμε ότι $f(0) = \pi/2$ και $f(1) = 0$.

Έστω, τώρα $x_1, x_2 \in [-1,1]$ με $f(x_1) = f(x_2)$, οπότε έχουμε:
$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \text{συν}\, f(x_1) = \text{συν}\, f(x_2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\,\text{συν}\, f(x_1) = 2\,\text{συν}\, f(x_2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1^3 + x_1 = x_2^3 + x_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 + x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \text{ ή } x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$
διότι, αν δούμε το $x_1^2 + x_2x_1 + x_2^2 + 1$ ως τριώνυμο ως προς x_1, τότε παρατηρούμε ότι:
$$\Delta = x_2^2 - 4(x_2^2 + 1) = -3x_2^2 - 1 < 0,$$
άρα $x_1^2 + x_2x_1 + x_2^2 + 1 > 0$. Έτσι, η f είναι «1-1».

2. Έστω $x_1, x_2 \in [-1,1]$ με $x_1 < x_2$, οπότε και $x_1^3 < x_2^3$ και, προσθέτοντας κατά μέλη:

$$x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2 \Leftrightarrow 2\,\text{συν}\, f(x_1) < 2\,\text{συν}\, f(x_2) \Leftrightarrow \text{συν}\, f(x_1) < \text{συν}\, f(x_2).$$

Τώρα, αφού $f(x) \in [0,\pi]$, και η συνάρτηση $\text{συν}\, x$ είναι γνησίως φθίνουσα εκεί έπεται ότι:

$$f(x_1) > f(x_2),$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών. Επιπρόσθετα, έχουμε $g(-1) = f(-1) + 1 = \pi + 1 > 0$ και $g(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$, επομένως υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

Επίσης, αν $x_1, x_2 \in [-1,1]$ με $x_1 < x_2$ τότε $-x_1 > -x_2$ και $f(x_1) > f(x_2)$ οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι:

$$f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2),$$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$. Έστω τώρα $x \in (\xi, 1]$, οπότε:

$$x > \xi \Leftrightarrow g(x) < g(\xi) \Leftrightarrow f(x) - x < 0 \Leftrightarrow f(x) < x,$$

που ήταν το ζητούμενο.

3. Θέτουμε στην αρχική σχέση όπου x το $-x$ οπότε:

$$2\,\text{συν}\, f(-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -2\,\text{συν}\, f(x) \Leftrightarrow \text{συν}\, f(-x) = -\,\text{συν}\, f(x).$$

Τώρα, αφού $f(x) \in [0,\pi]$ έπεται ότι $\pi - f(x) \in [0,\pi]$, και:

$$\text{συν}(\pi - f(x)) = -\,\text{συν}\, f(x),$$

οπότε, αντικαθιστώντας έχουμε — θυμηθείτε ότι η $\text{συν}\, x$ είναι γνησίως φθίνουσα (άρα και «1-1») αν περιοριστούμε στο $[0,\pi]$:

$$\text{συν}\, f(-x) = \text{συν}(\pi - f(x)) \Leftrightarrow f(-x) = \pi - f(x) \Leftrightarrow f(x) + f(-x) = \pi,$$

που ήταν το ζητούμενο.

Για το δεύτερο, με βάση το παραπάνω, το ζητούμενο ξαναγράφεται ως:

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi - 2f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(\rho) &= \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\left(\pi - 2f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(\rho) &= \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{3}. \end{aligned}$$

Τώρα, από το Θ.Μ.Ε.Τ. για την f, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ για κάθε $x \in [0,1]$, ειδικότερα:

$$\begin{aligned} &f(x_1) \le f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \le f(x_2) \\ &f(x_1) \le f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \le f(x_2) \Leftrightarrow 2f(x_1) \le 2f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \le 2f(x_2), \end{aligned}$$

οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη και διαιρώντας με το 3:

$$f(x_1) \leq \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{3} \leq f(x_2).$$

Από το Θ.Ε.Τ. έπεται ότι υπάρχει ρ μεταξύ των x_1, x_2 — άρα $\rho \in (0,1)$ — τέτοιο ώστε:

$$f(\rho) = \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{3}.$$