Κορωνοκενά...

aftermathsgr.wordpress.com

20 Σεπτεμβρίου 2020

1 Θεωρία

1.1 Πολυώνυμα

Πριν πιάσουμε τις ασκήσεις, ας θυμηθούμε τους βασικούς ορισμούς για τα πολυώνυμα και τις ιδιότητές τους.
Ορισμός 1 (Μονώνυμο)
Μία παράσταση της μορφής ax^k, όπου το a είναι ένας πραγματικός αριθμός, το x είναι μία μεταβλητή και το k είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος ($k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$), θα λέγεται μονώνυμο μίας μεταβλητής (της x). Αν $a \neq 0$, τότε θα λέμε ότι ο βαθμός του μονωνύμου είναι ίσος με k, ενώ, αν $a = 0$, θα λέμε ότι ο βαθμός του μονωνύμου *δεν ορίζεται*.
Ορισμός 2 (Πολυώνυμο)
Θα ονομάζουμε πολυώνυμο μίας μεταβλητής κάθε παράσταση που μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μονωνύμων. Δηλαδή, η παράσταση $p(x)$ είναι ένα πολυώνυμο αν υπάρχει ένας μη αρνητικός ακέραιος $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ και συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k.$$

Θα ονομάζουμε βαθμό του πολυωνύμου τον μεγαλύτερο ακέραιο s, για τον οποίο ισχύει ότι $a_s \neq 0$. Αν όλοι οι συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_k$ είναι ίσοι με μηδέν, τότε ο βαθμός του πολυωνύμου δεν ορίζεται. Επίσης, θα λέμε ότι δύο πολυώνυμα είναι ίσα αν και μόνον αν οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους είναι ίσοι, δηλαδή, αν:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

και:

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m,$$

τότε:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow m = n \text{ και } a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n.$$

Δεχόμαστε, επίσης, χωρίς απόδειξη και το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1 (Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης)
Για κάθε δύο πολυώνυμα, $p(x)$ και $q(x)$, υπάρχουν δύο άλλα πολυώνυμα, $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, τέτοια ώστε:

1. $p(x) = \pi(x)q(x) + \upsilon(x)$,
2. $\upsilon(x) = 0$ ή $\deg(\upsilon(x)) < \deg(q(x))$.

Έχουμε, επίσης, και το ακόλουθο:
Θεώρημα 2
Ένα πολυώνυμο $p(x)$ έχει ως παράγοντα το $(x - \rho)$ **αν και μόνον αν** το ρ είναι ρίζα του, δηλαδή $p(\rho) = 0$.
Απόδειξη
($\Rightarrow$) Υποθέτουμε πρώτα ότι το $p(x)$ έχει το $(x-\rho)$ ως παράγοντα. Τότε, υπάρχει ένα πολυώνυμο $q(x)$ έτσι ώστε:

$$p(x) = (x - \rho)q(x).$$

Επομένως, έχουμε:

$$p(\rho) = (\rho - \rho)q(\rho) = 0,$$

άρα το ρ είναι ρίζα του $p(x)$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε τώρα ότι $p(\rho) = 0$. Από την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης του $p(x)$ με το $(x - \rho)$, έχουμε ότι υπάρχουν δύο πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε:

1. $p(x) = \pi(x)(x - \rho) + \upsilon(x)$,
2. είτε $\upsilon(x) = 0$ είτε $\deg(\upsilon(x)) < \deg((x - \rho)) = 1$.

Επομένως, αφού $\deg(\upsilon(x)) < 1$ ή $\upsilon(x) = 0$, έπεται ότι $\deg(\upsilon(x)) = 0$ ή $\upsilon(x) = 0$, δηλαδή, σε κάθε περίπτωση, $\upsilon(x) = c$, για κάποιον σταθερό αριθμό, $c \in \mathbb{R}$. Επομένως:

$$p(x) = \pi(x)(x - \rho) + c.$$

Τώρα, αφού $p(\rho) = 0$, έπεται ότι:

$$p(\rho) = 0 \Leftrightarrow \cancelto{0}{\pi(\rho)(\rho - \rho)} + c = 0 \Leftrightarrow c = 0.$$

Έτσι, έχουμε:

$$p(x) = \pi(x)(x - \rho),$$

δηλαδή, το $(x - \rho)$ είναι παράγοντας του $p(x)$.

Ας περάσουμε τώρα και σε μερικά παραδείγματα, για να μην χάνουμε τη φόρμα μας.
Παράδειγμα 1 (Ο Ευκλείδειος Αλγόριθμος)
Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $p(x) = x^4 - 3x^3 + x$ με το πολυώνυμο $x^2 - 4$.

Ακολουθούμε πιστά τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο, οπότε παίρνουμε (βλ. σχήμα 1):

$$\pi(x) = x^2 - 3x + 4 \text{ και } \upsilon(x) = -11x + 16.$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\,3x^3 & +\,0x^2 & +\ x & +\ 0 & x^2 - 4 \\
\cline{6-6}
-\,x^4 & & +\,4x^2 & & & x^2 - 3x + 4 \\
\cline{1-3}
& -\,3x^3 & +\,4x^2 & +\ x & & \\
& +\,3x^3 & & -\,12x & & \\
\cline{2-4}
& & +\,4x^2 & -\,11x & & \\
& & -\,4x^2 & & +\,16 & \\
\cline{3-5}
& & & -\,11x & +\,16 &
\end{array}
$$

Σχήμα 1: Ο Ευκλείδειος Αλγόριθμος.

Εναλλακτικά, μπορούμε να κάνουμε την παραπάνω διαίρεση χρησιμοποιώντας τι σχήμα Horner, παρατηρώντας πρώτα ότι ο διαιρέτης, $x^2 - 4$, γράφεται ως $(x - 2)(x + 2)$. Έτσι, διαιρούμε πρώτα τον διαρετέο, $x^4 - 3x^3 + x$ με το $x - 2$, χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -3 & 0 & 1 & 0 & \rho = 2 \\
 & 2 & -2 & -4 & -6 & \\
\hline
1 & -1 & -2 & -3 & \boxed{-6} &
\end{array}
$$

Επομένως:

$$p(x) = (x - 2)\underbrace{(x^3 - x^2 - 2x - 3)}_{q(x)} - 6.$$

Διαιρούμε τώρα το πηλίκο της διαίρεσης, $q(x)$, με τον άλλον παράγοντα του διαιρέτη, $x + 2$, οπότε:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -1 & -2 & -3 & \rho = -2 \\
 & -2 & 6 & -8 & \\
\hline
1 & -3 & 4 & \boxed{-11} &
\end{array}
$$

Επομένως:

$$q(x) = (x + 2)(x^2 - 3x + 4) - 11.$$

Επιστρέφοντας στο $p(x)$, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= (x - 2)q(x) - 6 = \\
&= (x - 2)\Big[(x + 2)(x^2 - 3x + 4) - 11\Big] - 6 = \\
&= (x - 2)(x + 2)(x^2 - 3x + 4) - 11(x - 2) - 6 = \\
&= (x^2 - 4(x^2 - 3x + 4) - 11x + 22 - 6 = \\
&= (x^2 - 4)(x^2 - 3x + 4) - 11x + 16.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 2 (Πολυωνυμική εξίσωση)
Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^4 - 3x^3 + 2x = 0.$$

Στόχος μας είναι παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο $x^4 - 3x^3 + 2x$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων[1]. Αρχικά, βγάζουμε ως κοινό παράγοντα το x:

$$p(x) = x\underbrace{(x^3 - 3x^2 + 2)}_{p(x)}.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι $p(1) = 0$, επομένως το 1 είναι ρίζα του p, άρα το $(x - 1)$ είναι παράγοντάς του. Για να βρούμε την παραγοντοποίηση, χρησιμοποιούμε το σχήμα Horner:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -3 & 0 & 2 & \rho = 1 \\
 & 1 & -2 & -2 & \\
\hline
1 & -2 & -2 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

Επομένως:

$$p(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 2).$$

Έτσι, η εξίσωση γράφεται ως:

$$
\begin{aligned}
& x^4 - 3x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x - 1 = 0 \text{ ή } x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 1 + \sqrt{3} \text{ ή } x = 1 - \sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 3 (Πολυωνυμική ανίσωση)
Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{x^2 - 4}{1 - x} \leq \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 3x + 2}.$$

Αρχικά, παίρνουμε τους απαραίτητους περιορισμούς:

- $1 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$
- $x^2 - 3x + 2 \neq 0$. Επιλύουμε την εξίσωση:

  $$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 1,$$

  επομένως, $x \neq 1$ και $x \neq 2$.

[1] Αυτό μπορεί να γίνει πάντα, αν και δεν είναι πάντα εφικτό να βρεθεί η παραγοντοποίηση αυτή γνωρίζοντας μόνον τους συντελεστές του πολυωνύμου

Τώρα, επεξεργαζόμαστε την ανίσωση ως εξής:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2-4}{1-x} \le \frac{x^3-4x}{x^2-3x+2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2-4}{1-x} - \frac{x^3-4x}{x^2-3x+2} \le 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2-4}{-(x-1)} - \frac{x^3-4x}{(x-1)(x-2)} \le 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \frac{4-x^2}{(x-1)} - \frac{x^3-4x}{(x-1)(x-2)} \le 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(4-x^2)(x-2)-(x^3-4x)}{(x-1)(x-2)} \le 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \frac{4x-8-x^3+2x^2-x^3+4x}{(x-1)(x-2)} \le 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \frac{-2x^3+2x^2+8x-8}{(x-1)(x-2)} \le 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \underbrace{(-2x^3+2x^2+8x-8)(x-1)(x-2)}_{p(x)} \le 0.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το 1 είναι ρίζα του $-2x^3+2x^2+8x-8$, επομένως, από του ακόλουθο σχήμα Horner:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-2 & 2 & 8 & -8 & \rho=1 \\
 & -2 & 0 & 8 & \\
\hline
-2 & 0 & 8 & \boxed{0} &
\end{array}$$

έπεται ότι η ανισότητα γράφεται ως:

$$\begin{aligned}
&(x-1)(-2x^2+8)(x-1)(x-2) \le 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &(x-1)^2(-2x^2+8)(x-2) \le 0.
\end{aligned}$$

Για το τριώνυμο $-2x^2+8$, παρατηρούμε ότι οι ρίζες του είναι οι -2 και 2, επομένως, κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου 1, λαμβάνοντας υπ¨ όψιν και τους περιορισμούς $x \neq 1$ και $x \neq 2$.

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
$-2x^2+8$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$-$	
$p(x)$		$+$	|	$-$	||	$-$	||	$+$	

Πίνακας 1: Ο πίνακας προσήμου του $p(x)$.

Επομένως, οι λύσεις τις ανισότητας είναι οι:

$$x \in [-2,1) \cup (1,2).$$

1.2 Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις

1.2.1 Εκθετικές συναρτήσεις

Υπνεθυμίζουμε πρώτα τους ορισμούς των δυνάμεων με ρητό εκθέτη, για να προχωρήσουμε, στη συνέχεια, στον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης.
Ορισμός 3 (Θετικός εκθέτης — μη αρνητική βάση)
Για κάθε $a \in [0,+\infty)$, $\mu \in \mathbb{N}$ και $\nu \in \mathbb{N}$ με $\mu, \nu \neq 0$ ορίζουμε:

$$a^{\mu/\nu} = \sqrt[\nu]{a^\mu}.$$

Ορισμός 4 (Πραγματικός εκθέτης — θετικός βάση)
Για κάθε $a \in (0,+\infty)$, $\mu \in \mathbb{Z}$ και $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \neq 0$ ορίζουμε:

$$a^{\mu/\nu} = \sqrt[\nu]{a^\mu}.$$

Προσέξτε ότι η ουσιαστικότερη διαφορά μεταξύ των δύο ορισμών είναι ότι στην πρώτη περίπτωση γίνεται λόγος για τον αριθμό:

$$0^{\mu/\nu} = \sqrt[\nu]{0^\mu} = 0,$$

ενώ στη δεύτερη αυτό δεν επιτρέπεται, μιας και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι αρνητικός, θα είχαμε διαίρεση με το 0. Για παράδειγμα:

$$0^{-2/3} = \sqrt[3]{0^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{0}},$$

που δεν έχει νόημα.

Ως τώρα, έχουμε ορίσει το σύμβολο a^x, με $a > 0$, μόνον στην περίπτωση που ο x είναι ρητός, αλλά, ως φυσικοί πλεονέκτες και άπληστοι, θα θέλαμε να το ορίσουμε και για όλους τους άρρητους αριθμούς $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, σκεφτόμαστε το εξής: Αν πάρουμε έναν άρρητο, π.χ. το π, τότε ξέρουμε ότι αυτό γράφεται σε δεκαδική μορφή με κάποιον τρόπο. Στην περίπτωσή μας:

$$\pi = 3.141592653589793\ldots.$$

Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι, διαβάζοντας τους αριθμούς:

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \ldots,$$

«πλησιάζουμε» τον αριθμό π. Παρατηρούμε, επίσης, ότι όλοι οι παραπάνω αριθμοί μπορούν να γραφούν σαν δεκαδικά κλάσματα, όπως για παράδειγμα:

$$3.141 = \frac{3141}{1000}.$$

Έτσι, όλοι οι παραπάνω αριθμοί είναι ρητοί, επομένως έχει νόημα να μιλήσουμε για τους αριθμούς:

$$4^3, 4^{3.1}, 4^{3.14}, 4^{3.141}, 4^{3.1415}, \dots,$$

αφού $4^{3.1415} = 4^{31415/10000}$ κ.λπ.. Παρατηρούμε, επίσης, ότι, όπως φαίνεται και στον πίνακα 2, καθώς παίρνουμε όλο και περισσότερα δεκαδικά ψηφία του π, φαίνεται το αποτέλεσμα που παίρνουμε να προσεγγίζει κάποιον αριθμό μιας και από ένα σημείο και μετά φαίνεται κάποια από τα ψηφία να σταθεροποιούνται[2].

$\approx \pi$	$\approx 4^{\pi}$
3	64
3.1	73.51466
3.14	77.70575
3.141	77.81413
3.1415	77.86739

Πίνακας 2: Ο αριθμός 4^{π}.

Ανάλογα μπορούμε να εργαστούμε και για τους υπόλοιπους αριθμούς[3] a^x, με $a > 0$ και $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης, για τους νέους αυτούς, πραγματικούς, εκθέτες ισχύουν οι συνήθεις ιδιότητες των εκθετών, όπως φαίνεται στον πίνακα 3.

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x a^y \\ a^{x-y} &= \frac{a^x}{a^y} \\ a^x b^x &= (ab)^x \\ (a^x)^y &= a^{xy}. \end{aligned}$$

Πίνακας 3: Οι ιδιότητες των εκθετικών.

Τέλος, στο σχήμα 2 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = a^x$, για τις διάφορες τιμές του[4] $0 < a \neq 1$.

Ας δούμε τώρα και κάποια παραδείγματα, για να ξεσκάσουμε.

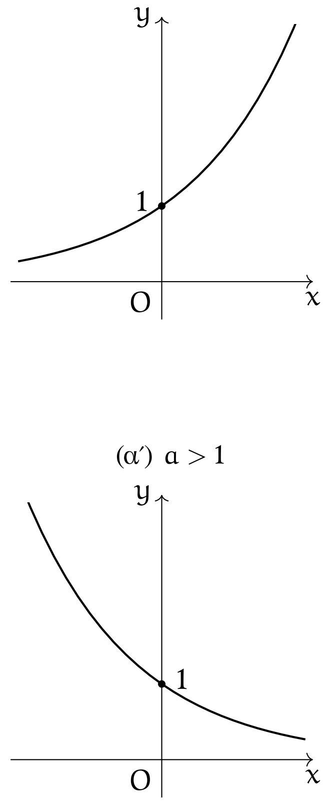
Παράδειγμα 4 (Επίλυση εξισώσεων)
Να λύσετε την εξίσωση:

$$4^{x-4} = 64.$$

[2]Μπορείτε να δοκιμάσετε να υπολογίσετε και άλλα ψηφία, πέρα από αυτά του πίνακα 2.

[3]Και πού το ξέρουμε ότι θα δουλέψει αυτό για όλους τους αριθμούς;

[4]Όπως έχουμε πει και στην τάξη, δε θα ασχοληθούμε με την περίπτωση $a = 1$, γιατί είναι βαρετή (και, ίσως, γιατί δεν είναι «1-1»).



(α′) $a > 1$

(β′) $0 < a < 1$

Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της $f(x) = a^x$.

Διαδοχικά, έχουμε:

$$\begin{aligned} & 4^{x-4} = 64 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 4^{x-4} = 4^3 \overset{4^x:«1\text{-}1»}{\Longleftrightarrow} \\ & \Leftrightarrow x - 4 = 3 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = 7. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5 (Επίλυση ανσώσεων)
Να λύσετε την ανίσωση:

$$6^{2x+4} < 36^{x+1}.$$

Διαδοχικά, έχουμε:

$$\begin{aligned} & 6^{2x+4} < 36^{3x+1} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 6^{2x+4} < (6^2)^{3x+1} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 6^{2x+4} < 6^{6x+2} \overset{6^x:\uparrow}{\Longleftrightarrow} \\ & \Leftrightarrow 2x + 4 < 6x + 2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 4x > 2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a x^s = s \log_a x$$

Πίνακας 4: Οι ιδιότητες των λογαρίθμων.

1.2.2 Λογαριθμικές συναρτήσεις

Οι λογαριθμικές συναρτήσεις έρχονται να απαντήσουν στην ερώτηση:

> «Σε ποιον αριθμό πρέπει να υψώσω το 2 για να πάρω 5;»

Με άλλα λόγια, αναζητούμε μια λύση της εξίσωσης:

$$2^x = 5.$$

Δεδομένου ότι η 2^x είναι «1-1», η εξίσωση αυτή έχει *το πολύ μία λύση*. Αν, προς το παρόν, δεχθούμε ότι η εξίσωση έχει λύση[5], τότε, θα συμβολίζουμε αυτήν τη λύση με $\log_2 5$. Γενικότερα, έχουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 5 (Λογαρίθμου)
Αν $0 < a \neq 1$ και $x > 0$, τότε ορίζουμε ως *λογάριθμο του* x *με βάση* a και τον συμβολίζουμε με $\log_a x$ τον αριθμό εκείνο στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον a θα πάρουμε x.

Προφανώς, από τον ορισμό του λογαρίθμου, ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$a^{\log_a x} = x.$$

Άμεσο είναι και το εξής[6]:

$$\log_a a^x = x,$$

αφού, ο αριθμός στον οποίο πρέπει να υψώσουμε το a έτσι ώστε να πάρουμε a^x είναι το x.

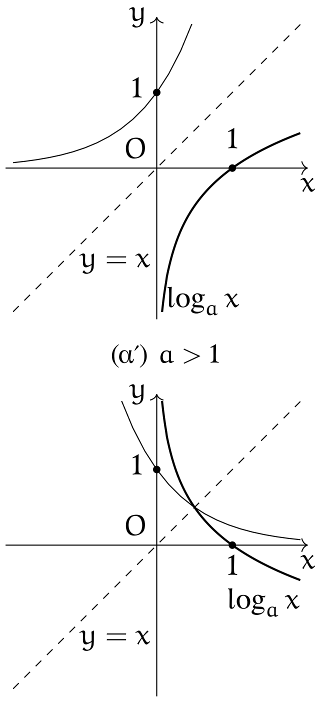
Από τις ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων μπορούμε να αποδείξουμε άμεσα τις ιδιότητες των λογαρίθμων που φαίνονται στον πίνακα 4 (όπου $x, y > 0$, $s \in \mathbb{R}$ και $0 < a \neq 1$).

Επίσης, ισχύει και ο εξής τύπος αλλαγής βάσης μεταξύ λογαρίθμων:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.}$$

[5]Πράγματι έχει, αλλά το *γιατί* έχει λύση, είναι μία άλλη συζήτηση.

[6]Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = a^x$ και $g(x) = \log_a x$, τότε οι δύο αυτές σχέσει γράφονται ως $f(g(x)) = x$ και $g(f(x)) = x$, αντίστοιχα (κρατήστε αυτή τη σχέση για το άμεσο μέλλον).



(α′) $a > 1$

(β′) $0 < a < 1$

Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της $f(x) = \log_a x$.

Τέλος, στο σχήμα 3 φαίνοναι οι γραφικές παραστάσεις των λογαρίθμων σε σχέση με αυτές των αντίστοιχων εκθετικών συναρτήσεων.

Να αναφέρουμε και ότι θα χρησιμοποιούμε για ευκολία τους συμβολισμούς $\ln x = \log_e x$ *και* $\log x = \log_{10} x$.

Χωρίς πολλές περιστροφές, περνάμε στα παραδείγματα.

Παράδειγμα 6 (Επίλυση εξισώσεων)
Να λύσετε την εξίσωση:

$$4^x = \sqrt{27}.$$

Για τους υπολογισμούς σας, θεωρήστε δεδομένο ότι $\ln 3 = 1.1$ και ότι $\ln 2 = 0.69$.

Διαδοχικά, έχουμε:

$$4^x = \sqrt{27} \Leftrightarrow x = \log_4 \sqrt{27}.$$

Όλη η «μαγκιά» εδώ είναι να εκφράσουμε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας μόνο τον φυσικό λογάριθμο του 2 ($\ln 2$). Μετά από λίγη σκέψη, παρατηρούμε ότι:

$$\log_4 \sqrt{27} = \log_4 27^{1/2} = \frac{1}{2} \log_4 27 =$$
$$= \frac{1}{2} \log_4 3^3 = \frac{3}{2} \log_4 3.$$

Μια ανάσα πριν από τον τερματισμό, και το μόνο που μας ενοχλεί είναι η βάση του λογαρίθμου, που είναι 4 και όχι e. Εδώ έρχεται να μας βοηθήσει ο τύπος αλλαγής βάσης:

$$\begin{aligned}\log_4 3 &= \frac{\ln 3}{\ln 4} = \frac{\ln 3}{\ln 2^2} = \\ &= \frac{\ln 3}{2\ln 2} = \frac{1.1}{2\cdot 0.69} \approx \\ &\approx 0.8.\end{aligned}$$

Έτσι, η λύση της εξίσωσης είναι ίση με:

$$x = \frac{3}{2}\cdot 0.8 = 1.2.$$

Παράδειγμα 7 (Επίλυση ανισώσεων)
Να λύσετε την ανίσωση:

$$e^{2x} > 4.$$

Για τους υπολογισμούς σας, θεωρήστε δεδομένο ότι $\ln 2 = 0.69$.

Διαδοχικά, έχουμε:

$$\begin{gathered}e^{2x} > 4 \overset{\ln x:\uparrow}{\Longleftrightarrow} \ln(e^{2x}) > \ln 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x > \ln 2^2 \Leftrightarrow 2x \geq 2\ln 2 \Leftrightarrow x > 0.69.\end{gathered}$$

Παράδειγμα 8 (Εκτιμήσεις)
Να βρείτε πόσα ψηφία έχει ο αριθμός:

$$123456789^{123456789}.$$

Πρώτη απάντηση: πολλά! Αλλά, επειδή δεν είναι δεκτή ως απάντηση και ώριμη ως αντίδραση, ας προσπαθήσουμε να δούμε τι γίνεται. Πάμε στην αριθμομηχανή και κάνουμε τις πράξεις μας και λέει ότι δεν μπορεί να το υπολογίσει[7]. Κι εμείς τι θα κάνουμε; Ε, στο κεφάλαιο των λογαρίθμων είμαστε, οπότε, κάπως θα τους μπλέξουμε κι αυτούς εδώ μέσα. Ας θυμηθούμε ότι:

$$x = 10^{\log x}.$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε τον ζητούμενο αριθμό να τον εκφράσουμε ως:

$$123456789^{123456789} = 10^{\log 123456789^{123456789}}.$$

Αν παίξουμε λίγο με τον εκθέτη, παρατηρούμε ότι αυτός είναι ίσος με:

$$123456789 \log 123456789.$$

Με το φοβερό κομπιουτεράκι μας, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε αυτόν τον αριθμό, ο οποίος είναι περίπου 2300173036.62. Επομένως, ο αριθμός μας είναι περίπου:

$$10^{2300173036.62},$$

άρα, έχει περίπου 2300173036+1 ψηφία[8].
Παράδειγμα 9 (Το μάτι του γερακιού)
Να λύσετε την εξίσωση:

$$2^x + \ln x = 2.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2^x + \ln x$, $x > 0$. Θα δείξουμε πρώτα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έστω, λοιπόν, $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$\begin{aligned}&(1) \qquad x_1 < x_2 \overset{2^x:\uparrow}{\Longleftrightarrow} 2^{x_1} < 2^{x_2}\\ &(2) \qquad x_1 < x_2 \overset{\ln x:\uparrow}{\Longleftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2.\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$2^{x_1} + \ln x_1 < 2^{x_2} + \ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, επομένως είναι και «1-1».

Στη συνέχεια, παρατηρούμε[9] ότι $f(1) = 2^1 + \ln 1 = 2$, επομένως, η δοσμένη εξίσωση γράφεται ως:

$$2^x + \ln x = 2 \Leftrightarrow f(x) = f(1).$$

Όμως, αφού η f είναι 1-1, έπεται ότι:

$$f(x) = f(1) \overset{f:«1\text{-}1»}{\Longleftrightarrow} x = 1.$$

2 Ασκησούλες!

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης:

   (1) $p(x) = x^4 - 3x + 2$
   $q(x) = x^2 - 2x + 1$

   (2) $p(x) = x^7 - 4x^2 + x + 1$
   $q(x) = x + 5$

   (3) $p(x) = x^9 - x$
   $q(x) = x^4 + 2x - 2.$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   (α΄) $x^3 - 4x^2 + x = 0,$

[7] Η αριθμομηχανή του υπολογιστή μου λέει Invalid input, του κινητού λέει ∞, ενώ το παλιό κομπιουτεράκι του γραφείου με κοιτάζει σαν χάνος…

[8] Γιατί προσθέσαμε ένα;

[9] Εξ ου και το όνομα «το μάτι του γερακιού».

(β′) $-8x^3+13x-5=0$,

(γ′) $\dfrac{x^3-3x-4}{x^2-1}=2$.

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α′) $-4x^3+6x^2+2x>-4$,

(β′) $\dfrac{x^2+x}{x-1}<\dfrac{x^2-1}{x}$,

(γ′) $\dfrac{3x^2}{x-2}+\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{3x-1}{x^2-2x}$.

4. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

(α′) $f(x)=3^x$,

(β′) $g(x)=0.17^x$,

(γ′) $h(x)=\dfrac{2^x+1}{2^x}$.

5. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

(α′) $f(x)=4^x+5^x$,

(β′) $g(x)=-23^x+\log_{0.7}x$,

(γ′) $h(x)=\dfrac{2^x+4}{2^x+6}$.

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α′) $4^x=16$,

(β′) $3^{x^2+1}=9^x$,

(γ′) $8^x+4^x+2^x=3$.

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α′) $3^{x^2+3}>9^{2x}$,

(β′) $\dfrac{3^x-9}{9^x-3}>1$,

(γ′) $\dfrac{2^x+1}{2^x-1}>2^{-x}$.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α′) $2^x+\log(2x+1)=1$,

(β′) $x^3+\ln x=4-3^x$,

(γ′) $\log_2(2^x+1)=1$.

9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α′) $x+e^x<e$,

(β′) $\ln(x+2)+x\leq-1$,

(γ′) $\ln\dfrac{e^x+1}{e^x+2}<\ln\dfrac{2}{3}$.

10. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε κάποια οντότητα που κάνει πράξεις πέρα από τον εαυτό σας και με δεδομένα μόνο ότι: (α′) $\ln 2\approx 0.69$, (β′) $\ln 3\approx 1.01$, (γ′) $\ln 5\approx 1.61$, να υπολογίσετε τους αριθμούς:

- $\ln 4+\ln 9+\ln 25$,
- $\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}+\ln\frac{1}{5}$,
- $\ln 6+\ln 12+\ln 10$,
- $\ln 60$.

11. Με τις ίδιες υποθέσεις, να υπολογίσετε τους αριθμούς:

- $\ln 1.2+\ln 0.6$,
- $\ln 0.72$,
- $\ln 0.024$,
- $\ln 1.44$.

12. Να γράψετε τους αριθμούς σαν δυνάμεις του e:

- $\sqrt{2}$,
- $\sqrt{3}+\sqrt{5}$,
- $2^{\sqrt{2}}$,
- $\sqrt{5}^{0.5}$.

Θα σας φανεί χρήσιμη η σχέση $x=e^{\ln x}$.

13. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}.$$

(α′) Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

(β′) Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x^2+2}(e^{3x}+1)=e^{3x}(e^{x^2+2}+1).$$

(γ′) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $y\in\mathbb{R}$ έχει λύση (ως προς x) η εξίσωση:

$$f(x)=y.$$

Για όσες έχει, προσπαθήστε να τη βρείτε.

14. Με δεδομένη την ανισότητα $e^x\geq 1+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\ln x\leq x-1,\ \forall x>0.$$