∀fter — maths

Μάρκος Βασίλης Αθηνα 2020

Λυμένα Παραδείγματα

Γ΄ Λυκείου: Όρια

Πρόλογος

Το παρόν αποτελεί μία συλλογή λυμένων παραδειγμάτων και θεμάτων πάνω στην ύλη της ενότητας των ορίων των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου. Στο παρόν δεν περιλαμβάνονται δύο κατηγορίες ορίων:

- όρια που υπολογίζονται αποκλειστικά με τη χρήση των κανόνων de l'Hôspital,
- όρια της μορφής $0(\pm\infty)$ μιας και ανάγονται σε όρια της μορφής $\frac{0}{0}$ ή/και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Το παρόν αποτελεί μέρος σειράς σημειώσεων, λυμένων παραδειγμάτων και, γενικότερα, διδακτικού υλικού για όλες τις τάξεις του λυκείου που μπορείτε να βρείτε στο **aftermathsgr.wordpress.com**. Για λάθη, διορθώσεις, παραλείψεις και προτάσεις επικοινωνήστε μαζί μου είτε μέσω e-mail στο `vassileiosmarkos@gmail.com` είτε μέσω της φόρμας επικοινωνίας: **https://aftermathsgr.wordpress.com/contact/**.

Καλό διάβασμα!

Περιεχόμενα

1 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $\frac{0}{0}$ 4

2 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $\infty - \infty$ 9

3 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 14

4 Όρια με αλλαγή μεταβλητής 17

5 Όρια των (απροσδιόριστων) μορφών $(\pm\infty)^0$, $0^{\pm\infty}$, 0^0, $(\pm\infty)^{\pm\infty}$ 20

6 Γενικές ασκήσεις 23

1 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $\frac{0}{0}$

Παράδειγμα 1.1. Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}.$$

Προσπαθούμε να απλοποιήσουμε την παράσταση:

$$\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=x+2,$$

οπότε τώρα εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

□

Παράδειγμα 1.2. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.$$

Εδώ δεν είναι τόσο προφανής η παραγοντοποίηση όσο θα ήταν σε μία ρητή συνάρτηση. Ωστόσο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή, δηλαδή την παράσταση $\sqrt{x}+1$. Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με αυτήν έχουμε:

$$\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\sqrt{x}+1.$$

Εδώ όμως δεν έχουμε πια την απροσδιόριστη μορφή, επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=1+1=2.$$

□

Παράδειγμα 1.3. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}.$$

Εδώ θα μιμηθούμε το παραπάνω «κόλπο» με τη συζυγή παράσταση απλώς, επειδή έχουμε δύο παραστάσεις με ριζικά, θα πολλαπλασιάσουμε και με τις δύο συζυγείς παραστάσεις $\sqrt{x^2+1}+1$ και $\sqrt{x+1}+1$:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$$

$$= \frac{(x^2+1-1)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{(x+1-1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \frac{x^2\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} =$$
$$= \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\sqrt{x^2+1}+1}.$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο απευθείας:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{0(1+1)}{1+1} = 0.$$

□

Παράδειγμα 1.4. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}.$$

Εδώ, πέρα από την απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, έχουμε και ένα άλλο πρόβλημα· δεν μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε όπως κάναμε σε άλλα παραδείγματα, λόγω των απολύτων. Γι΄ αυτό, είναι χρήσιμο να κατασκευάσουμε έναν πίνακα προσήμου των παραστάσεων μέσα στα απόλυτα και να δούμε πώς συμπεριφέρεται κοντά στο 2 (βλ. πίνακα 1). Επομένως,

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	-3	$-$	0	$+$	
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$	$\Vert$	$\frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+2}$	$\Vert$	$\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$	

Πίνακας 1: Πίνακας της $f(x) = \frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}$

αριστερά από το 2 ($x \to 2^-$), πρέπει να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+2}$$

ενώ, δεξιά από το 2 ($x \to 2^+$), το όριο:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}.$$

Για το πρώτο όριο, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+2} = \frac{(x-1)(x-2)}{-(x+1)(x-2)} = \frac{x-1}{-x-1},$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{-x-1} = -\frac{1}{3},$$

ενώ, για το δεύτερο όριο, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x-2)}=\frac{x-3}{x+1},$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x+1}=-\frac{1}{3}.$$

Αφού έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}=-\frac{1}{3},$$

έπεται ότι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}=-\frac{1}{3}.$$

□

Παράδειγμα 1.5. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{|x-1|}.$$

Όπως και παραπάνω, πρέπει να βρούμε τον τύπο της $f(x)=\frac{1-x^2}{|x-1|}$ κοντά στο 1. Στην προκειμένη, έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-x^2}{x-1} & x>1\\ \frac{1-x^2}{1-x} & x<1\end{cases}$$

οπότε πρέπει να υπολογίσουμε τα όρια:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x^2}{x-1}$$

και

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{1-x}.$$

Για το πρώτο όριο, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\frac{1-x^2}{x-1}=\frac{(1-x)(1+x)}{-(1-x)}=-1-x,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(-1-x)=-2.$$

Για το άλλο όριο, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\frac{1-x^2}{1-x}=\frac{(1-x)(1+x)}{1-x}=1+x,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}1+x=2,$$

επομένως, αφού τα δύο πλευρικά όρια διαφέρουν:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \neq -2 = \lim_{x\to 1^+} f(x),$$

το όριο $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{|x-1|}$ δεν υπάρχει.

□

Παράδειγμα 1.6. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}^2 x}{x}.$$

Εδώ, παρατηρούμε ότι το εν λόγω όριο μοιάζει με το γνωστό όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}\, x}{x} = 0,$$

οπότε θα ήταν λογικό να προσπαθήσουμε να το εμφανίσουμε μέσα από παραγοντοποιήσεις/αλγεβρικά τεχνάσματα. Στην προκειμένη:

$$\frac{1-\text{συν}^2 x}{x} = \frac{(1-\text{συν}\, x)(1+\text{συν}\, x)}{x} = \frac{1-\text{συν}\, x}{x}(1+\text{συν}\, x),$$

και επειδή τα όρια:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}\, x}{x}, \lim_{x\to 0}(1+\text{συν}\, x)$$

υπάρχουν, από την άλγεβρα των ορίων θα υπάρχει και το όριο του γινομένου τους:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}\, x}{x}(1+\text{συν}\, x),$$

οπότε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}^2 x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}\, x}{x}(1+\text{συν}\, x) = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}\, x}{x} \cdot \lim_{x\to 0}(1+\text{συν}\, x) = 0 \cdot 2 = 0,\end{aligned}$$

επομένως,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}^2 x}{x} = 0.$$

□

Παράδειγμα 1.7. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{5^x + e^x}{2^x + 3^x}.$$

Εδώ πρέπει να σκεφτούμε ως εξής: η συνάρτηση a^x έχει όριο 0 στο $-\infty$ για $a > 1$, ωστόσο αυτό δεν μπορούμε να το αξιοποιήσουμε άμεσα γιατί το εν λόγω όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$. Θα ήταν εύλογο να επιδιώξουμε με κάποιον τρόπο να κάνουμε λιγότερα τα εκθετικά που εμφανίζονται στην παράσταση. Για να το πετύχουμε αυτό θα παραγοντοποιήσουμε βγάζοντας ως κοινό παράγοντα τον όρο με την μικρότερη βάση, ως εξής:

$$\frac{5^x + e^x}{2^x + 3^x} = \frac{e^x\left((5/e)^x + 1\right)}{2^x\left(1 + (3/2)^x\right)},$$

οπότε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x + e^x}{2^x + 3^x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\left((5/e)^x + 1\right)}{2^x\left(1 + (3/2)^x\right)} = \\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^x\frac{(5/e)^x + 1}{1 + (3/2)^x} = \\ &= 0\frac{0+1}{1+0} = 0.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 1.8 (Θεωρητική άσκηση). Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 7} f(x),$$

αν γνωρίζετε ότι:

$$\lim_{x\to 7}\frac{f(x)+3}{x^2 - 12x + 35} = 2019.$$

Εδώ τα πράγματα είναι περίεργα. Δεν έχουμε τον τύπο της συνάρτησης, αλλά έχουμε ένα άλλο όριο, που περιέχει τη συνάρτηση f. Παρατηρώντας τον παρονομαστή, βλέπουμε ότι $\lim_{x\to 7}(x^2 - 12x + 35) = 0$, άρα θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχουμε τρεις επιλογές:

1. το όριο του παρονομαστή $\lim_{x\to 7}(f(x)+3)$ να είναι ίσο με 0,
2. το όριο του παρονομαστή $\lim_{x\to 7}(f(x)+3)$ να είναι ίσο με $\lambda \neq 0$ και
3. το όριο του παρονομαστή $\lim_{x\to 7}(f(x)+3)$ να είναι ίσο με $\pm\infty$.

Έπειτα, κοιτώντας τους πίνακες για τα όρια της μορφής $\frac{\lambda}{0}$, $\lambda \neq 0$ και $\frac{\pm\infty}{0}$ (περιπτώσεις 2 και 3) θα μπορούσαμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα και... ΛΑΘΟΣ! Δεν είναι μόνο αυτές οι περιπτώσεις που έχουμε! Υπάρχει πάντα η περίπτωση το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ να *μην υπάρχει*. Επομένως, πρέπει, πρώτα να δείξουμε με κάποιον τρόπο ότι το εν λόγω όριο υπάρχει και στη συνέχεια να το υπολογίσουμε.

Γι΄ αυτόν τον σκοπό, θέτουμε:

$$g(x) = \frac{f(x)+3}{x^2 - 12x + 35}$$

για την οποία συνάρτηση, από τα δεδομένα μας ξέρουμε ότι:

$$\lim_{x\to 7} g(x) = 2019.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι, για $x \neq 7$ και x κοντά στο 7 ισχύει ότι:

$$g(x) = \frac{f(x)+3}{x^2-12x+35} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x) = g(x)(x^2-12x+35)-3.$$

Αφού τα όρια $\lim\limits_{x\to 7} g(x)$ και $\lim\limits_{x\to 7}(x^2-12x+35)$ υπάρχουν έπεται, από την άλγεβρα των ορίων, ότι και το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ υπάρχει και, μάλιστα:

$$\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7}(g(x)(x^2-12x+35)-3) = 2019\cdot 0 - 3 = -3,$$

δηλαδή:

$$\lim_{x\to 7} f(x) = -3.$$

□

Σχόλιο

Κατά τον υπολογισμό ενός ορίου σε κάποιο x_0 μπορούμε να περιοριζόμαστε σε τιμές οσοδήποτε κοντά θέλουμε στο x_0, μιας και αυτές οι τιμές της x μας απασχολούν για να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$

2 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $\infty - \infty$

Παράδειγμα 2.1. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^{2018}} - \frac{1}{x^{2020}}\right).$$

Εδώ μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ως εξής:

$$\frac{1}{x^{2018}} - \frac{1}{x^{2020}} = \frac{x^2-1}{x^{2020}} = \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^{2020}} =$$
$$= \frac{1}{x^{2018}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right),$$

οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^{2018}} - \frac{1}{x^{2020}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2018}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty,$$

διότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2018}} = +\infty,\quad \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty.$$

□

Παράδειγμα 2.2. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^5}\right).$$

Παρόμοια με το προηγούμενο, παραγοντοποιούμε ως εξής:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^5} = \frac{(x-1)^4-2}{(x-1)^5} =$$

$$= \frac{(x-1)^4\left(1-\frac{2}{(x-1)^4}\right)}{(x-1)^5} = \frac{1}{x-1}\left(1-\frac{2}{(x-1)^4}\right),$$

οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^5}\right) = \lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{2}{(x-1)^4}\right) =$$
$$= \lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\left(1-\frac{2}{(x-1)^4}\right).$$

Εδώ έχουμε ένα θέμα με το $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}$, καθώς:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

ενώ

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^5}\right) = +\infty,$$

και

$$\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^5}\right) = -\infty,$$

άρα το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

□

Παράδειγμα 2.3. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right).$$

Εδώ τα πράγματα είναι πιο σκούρα, μιας και δεν έχουμε κάποιον άμεσο τρόπο να παραγοντοποιήσουμε. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε τη συζυγή παράσταση $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}$ και να πάρουμε το εξής:

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}} =$$
$$= \frac{x^2+1-(2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}} =$$
$$= \frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}}.$$

Κι εδώ όμως δεν έχουμε και πολλά να πούμε μιας και έχουμε μια απροσδιοριστία της μορφής $\frac{-\infty}{+\infty}$. Οπότε μπορούμε να συνεχίσουμε, προσπαθώντας να απλοποιήσουμε λίγο τις παραστάσεις εντός των ριζικών:

$$\frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}} = \frac{-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-x^2}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \\
&= \frac{-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \\
&= \frac{-x^2}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)} = \\
&= \frac{-x^2}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)} = \\
&= \frac{-x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}.
\end{aligned}
$$

Κάτσε, ώπα! Γιατί διώξαμε το απόλυτο; Αφού δεν ισχύει $|x| = x$, γενικά! Πράγματι, εν γένει $x \leq |x|$, αλλά, στην προκειμένη περίπτωση, όλες αυτές οι πράξεις και οι τούμπες και οι μετασχηματισμοί γίνονται για να υπολογίσουμε το όριο καθώς $x \to +\infty$. Και τι σημαίνει $x \to +\infty$; Σημαίνει ότι, τελικά, η x θα παίρνει τιμές μεγαλύτερες από το 0, άρα τελικά $x > 0$, δηλαδή $|x| = x$. Σε αυτήν την τελευταία μορφή είναι εύκολο να υπολογίσουμε το όριο:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)} = \\
&= -\infty,
\end{aligned}
$$

διότι:

$$
\lim_{x\to+\infty}(-x) =_{\infty}, \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right) = 1+\sqrt{2}.
$$

□

Παράδειγμα 2.4. Να υπολογισθεί το όριο:

$$
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+x\right).
$$

Εδώ μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής, κατ΄ αναλογία με το προηγούμενο:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{4x^2-3x+2}+x &= \sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+x = \\
&= \sqrt{x^2}\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x = \\
&= |x|\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x = \\
&= x\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x =
\end{aligned}
$$

$$= x\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right),$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)=$$
$$=+\infty,$$

διότι:

$$=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)=3.$$

□

Παράδειγμα 2.5. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}-2x\right).$$

Εδώ το προηγούμενο τέχνασμα δε δουλεύει (δοκιμάστε το για να πειστεί-τε) αν και η μόνη διαφορά είναι ένας αριθμός. Θα χρειαστεί, πρώτα, να πολλαπλασιάσουμε με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{4x^2-3x+2}+2x$, οπότε και θα πάρουμε:

$$\sqrt{4x^2-3x+2}-2x=\frac{\left(\sqrt{4x^2-3x+2}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x}=$$
$$=\frac{4x^2-3x+2-4x^2}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x}=\frac{-3x+2}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x}.$$

Από εδώ συνεχίζουμε με το συνηθισμένο, πια, τέχνασμα:

$$\frac{-3x+2}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x}=\frac{-3x+2}{\sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2x}=$$
$$=\frac{-3x+2}{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2x}=$$
$$=\frac{-3x+2}{|x|\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2x}=$$
$$=\frac{x\left(-3+\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2x}=$$
$$=\frac{x\left(-3+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2\right)}=$$

$$= \frac{-3+\frac{2}{x}}{\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2},$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}-2x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{2}{x}}{\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2} = \\ &= \frac{-3+0}{\sqrt{4-0+0}+2} = -\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2.6. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+4x}-3x^2.$$

Ας προχωρήσουμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τη συζυγή παράσταση $\sqrt{9x^2+4x}+3x^2$:

$$\begin{aligned}\sqrt{9x^2+4x}-3x^2 &= \frac{\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x^2\right)\left(\sqrt{9x^2+4x}+3x^2\right)}{\sqrt{9x^2+4x}+3x^2} = \\ &= \frac{9x^2+4x-9x^4}{\sqrt{9x^2+4x}+3x^2} = \\ &= \frac{x^4\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x^2} = \\ &= \frac{x^4\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x^2} = \\ &= \frac{x^4\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{|x|\sqrt{\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x^2} = \\ &= \frac{x^4\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{x\sqrt{\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x^2} = \\ &= \frac{x^4\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{x\left(\sqrt{\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x\right)} = \\ &= \frac{x^3\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{\sqrt{\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x},\end{aligned}$$

και τώρα κάναμε μια τρύπα στο νερό, γιατί φτάσαμε σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Επομένως, πρέπει να ακολουθήσουμε άλλο μονοπάτι.

Ας δοκιμάσουμε να κάνουμε κατευθείαν παραγοντοποίηση, χωρίς να αξιοποιήσουμε τη συζυγή παράσταση:

$$\begin{aligned}\sqrt{9x^2+4x}-3x^2 &= \sqrt{x^2\left(9+\frac{4}{x}\right)}-3x^2 = \\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x^2 = \\ &= |x|\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x^2 = \\ &= x\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x^2 = \\ &= x\left(\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x\right),\end{aligned}$$

και εδώ τα πράγματα είναι πιο εύκολα, μιας και έχουμε απλώς ένα γινόμενο απείρων, επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+4x}-3x^2 = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x\right) = -\infty,$$

διότι:

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x\right) = -\infty.$$

□

3 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Παράδειγμα 3.1. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x-3}{-3x^3+7x-5}.$$

Θα βγάλουμε κοινό παράγοντα σε αριθμητή και παρονομαστή τον μεγιστοβάθμιο όρο έτσι ώστε να εμφανίσουμε γνωστά μας όρια:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+4x-3}{-3x^3+7x-5} &= \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(-3+\frac{7}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)} = \\ &= \frac{1}{x^3}\frac{1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}{-3+\frac{7}{x^2}-\frac{5}{x^3}}.\end{aligned}$$

Οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x-3}{-3x^3+7x-5} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}\frac{1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}{-3+\frac{7}{x^2}-\frac{5}{x^3}} = 0,$$

διότι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\nu}}=0,\ \text{για κάθε}\ \nu\in\mathbb{N}.$$

□

Παράδειγμα 3.2. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}-x}{4x}.$$

Εδώ μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε τη δοσμένη συνάρτηση ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2-4}-x}{4x}&=\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}-x}{4x}=\\&=\frac{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}}-x}{4x}=\\&=\frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}}-x}{4x}=\\&=\frac{-x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1\right)}{4x}=\\&=-\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1\right),\end{aligned}$$

οπότε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}-x}{4x}&=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1\right)=\\&=-\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0}+1\right)=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3.3. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^x}{4^x+7^x}.$$

Εδώ θα ακολουθήσουμε το σκεπτικό των προηγούμενων παραδειγμάτων, αλλά, μιας και δεν έχουμε να κάνουμε με πολυώνυμα, πρέπει να σκεφτούμε λίγο διαφορετικά. Αν βγάλουμε κοινό παράγοντα το 2^x από τον αριθμητή (τον όρο με την μικρότερη βάση), τότε θα δημιουργηθεί ένας όρος της μορφής $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ οποίος τείνει στο $+\infty$ καθώς $x\to+\infty$, επομένως δε μας συμφέρει[1]. Συνεπώς, ίσως εξυπηρετεί να βγάλουμε κοινούς παράγοντες σε αριθμητή και παρονομαστή τους μεγιστοβάθμιους όρους:

$$\frac{2^x+3^x}{4^x+7^x}=\frac{3^x\left((2/3)^x+1\right)}{7^x\left((4/7)^x+1\right)},$$

[1]Όλη η δουλειά γίνεται για να ξεφορτωθούμε τα $+\infty$ από το κλάσμα.

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^x}{4^x+7^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left((2/3)^x+1\right)}{7^x\left((4/7)^x+1\right)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^x\frac{(2/3)^x+1}{(4/7)^x+1}=$$
$$=0\cdot\frac{0+1}{0+1}=0.$$

□

Παράδειγμα 3.4. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(1/2)^x}{(1/3)^x+(1/\pi)^x}.$$

Εδώ, αναλόγως με το προηγούμενο, θα βγάλουμε κοινό παράγοντα από τον παρονομαστή τον όρο με την μικρότερη βάση[2]:

$$\frac{(1/2)^x}{(1/3)^x+(1/\pi)^x}=\frac{(1/2)^x}{(1/\pi)^x\left((\pi/3)^x+1\right)},$$

οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(1/2)^x}{(1/3)^x+(1/\pi)^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1/2)^x}{(1/\pi)^x\left((\pi/3)^x+1\right)}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^x\frac{1}{(\pi/3)^x+1}=0\cdot\frac{1}{0+1}=0.$$

□

Παράδειγμα 3.5. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x+1}+3^{x+2}}{4^x-2^{x-1}}.$$

Εδώ χρειάζεται λίγη προσοχή με τις βάσεις των δυνάμεων και τις ιδιότητες των εκθετών:

$$\frac{2^{2x+1}+3^{x+2}}{4^x-2^{x-1}}=\frac{2\cdot 2^{2x}+3^2\cdot 3^x}{4^x-2^{-1}2^x}=$$
$$=\frac{2\cdot 4^x+9\cdot 3^x}{4^x-\frac{1}{2}2^x}=$$
$$=\frac{4^x\left(2+9(3/4)^x\right)}{4^x\left(1-\frac{1}{2}(1/2)^x\right)}=$$
$$=\frac{2+9(3/4)^x}{1-\frac{1}{2}(1/2)^x},$$

επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x+1}+3^{x+2}}{4^x-2^{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+9(3/4)^x}{1-\frac{1}{2}(1/2)^x}=$$
$$=\frac{2+9\cdot 0}{1-\frac{1}{2}\cdot 0}=2.$$

□

[2] Αφού το $x\to-\infty$.

4 Όρια με αλλαγή μεταβλητής

Παράδειγμα 4.1. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} e^{\sigma\upsilon\nu\, x}.$$

Διαδοχικά:

1. Θέτουμε $g(x) = \sigma\upsilon\nu\, x$ και υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu\, x = \sigma\upsilon\nu\, \frac{\pi}{2} = 0.$$

2. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{y \to 0} e^{y} = e^{0} = 1,$$

οπότε το όριο που ψάχνουμε υπάρχει και είναι:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} e^{\sigma\upsilon\nu\, x} = 1.$$

□

Παράδειγμα 4.2. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(\sqrt{x} + x^2).$$

Διαδοχικά:

1. Θέτουμε $g(x) = \sqrt{x} + x^2$ και υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} (\sqrt{x} + x^2) = 0 + 0 = 0.$$

2. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{y \to 0} \ln y = -\infty,$$

οπότε το όριο που ψάχνουμε υπάρχει και είναι:

$$\lim_{x \to 0} \ln(\sqrt{x} + x^2) = -\infty.$$

□

Παράδειγμα 4.3. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \ln \frac{e^x + x}{x + 1}.$$

Διαδοχικά, έχουμε:

1. Θέτουμε $g(x) = \frac{e^x+x}{x+1}$ και υπολογίζουμε το όριο:
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+x}{x+1} = \frac{e^0+0}{0+1} = 1.$$
2. Υπολογίζουμε το όριο:
$$\lim_{y\to 1} \ln y = \ln 1 = 0,$$
οπότε το όριο που ψάχνουμε υπάρχει και είναι:
$$\lim_{x\to 0} \ln \frac{e^x+x}{x+1} = 0.$$

□

Παράδειγμα 4.4. Να υπολογισθεί το όριο:
$$\lim_{x\to\pi} 2\,\text{συν}\left(\frac{\text{ημ}\,x+x}{x/\pi}\right).$$

Διαδοχικά, έχουμε:

1. Θέτουμε $g(x) = \frac{\text{ημ}\,x+x}{x/\pi}$ και υπολογίζουμε το όριο:
$$\lim_{x\to\pi} \frac{\text{ημ}\,x+x}{x/\pi} = \frac{\text{ημ}\,\pi+\pi}{\pi/\pi} = \frac{0+\pi}{1} = \pi.$$
2. Υπολογίζουμε το όριο:
$$\lim_{y\to\pi} 2\,\text{συν}\,y = 2\,\text{συν}\,\pi = -2,$$
οπότε το όριο που ψάχνουμε υπάρχει και είναι:
$$\lim_{x\to\pi} 2\,\text{συν}\left(\frac{\text{ημ}\,x+x}{x/\pi}\right) = -2.$$

□

Παράδειγμα 4.5. Να υπολογισθεί το όριο:
$$\lim_{x\to 4} \ln\left(x^2+\text{συν}(x-4)\right).$$

Διαδοχικά, έχουμε:

1. Θέτουμε $g(x) = x^2+\text{συν}(x-4)$ και εδώ παρατηρούμε ότι και αυτή η συνάρτηση είναι σύνθεση απλούστερων συναρτήσεων. Επομένως, για να υπολογίσουμε το όριο:
$$\lim_{x\to 4}(x^2+\text{συν}(x-4))$$
πρέπει να κάνουμε ένα ακόμα βήμα:

(α΄) Θέτουμε $h(x) = x - 4$ και υπολογίσουμε το

$$\lim_{x\to 4}(x-4) = 4-4 = 0.$$

(β΄) Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{u\to 0} \sigma\upsilon\nu\, u = \sigma\upsilon\nu\, 0 = 1$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 4} \sigma\upsilon\nu(x-4) = 1.$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 4}(x^2 + \sigma\upsilon\nu(x-4)) = 4^2 + \lim_{x\to 4}\sigma\upsilon\nu(x-4) = 16+1 = 17.$$

2. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{y\to 17} \ln y = \ln 17,$$

οπότε το όριο που ψάχνουμε υπάρχει και είναι:

$$\lim_{x\to 4} \ln\left(x^2 + \sigma\upsilon\nu(x-4)\right) = \ln 17.$$

□

Παράδειγμα 4.6. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to +\infty} x^x.$$

Ξαναγράφουμε τη συνάρτηση ως εξής:

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x},$$

και θέτουμε $y = x\ln x$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to +\infty} x\ln x = (+\infty)(+\infty) = +\infty,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to +\infty} e^{x\ln x} = \lim_{y\to +\infty} e^y = +\infty,$$

άρα:

$$\lim_{x\to +\infty} x^x = \lim_{x\to +\infty} e^{x\ln x} = +\infty.$$

□

Παράδειγμα 4.7. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x.$$

Κι εδώ, ξαναγράφουμε τη συνάρτηση ως εξής:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^x} = e^{x\ln\frac{1}{x}},$$

και θέτουμε $y = x\ln\frac{1}{x}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}(-x\ln x) = -(+\infty)(+\infty) = -\infty,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

□

5 Όρια των (απροσδιόριστων) μορφών $(\pm\infty)^0$, $0^{\pm\infty}$, 0^0, $(\pm\infty)^{\pm\infty}$

Παράδειγμα 5.1. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to0} x^2\,\text{ημ}\,\frac{1}{x}.$$

Εδώ, αφού το όριο $\lim\limits_{x\to0}\text{ημ}\,\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει, θα χρειαστεί να φράξουμε τη συνάρτηση $x^2\,\text{ημ}\,\frac{1}{x}$ από δύο άλλες συναρτήσεις. Χρησιμοποιώντας, και πάλι, την ανισότητα:

$$-1 \le \text{ημ}\,x \le 1,$$

έχουμε:

$$-x^2 \le x^2\,\text{ημ}\,\frac{1}{x} \le x^2$$

και:

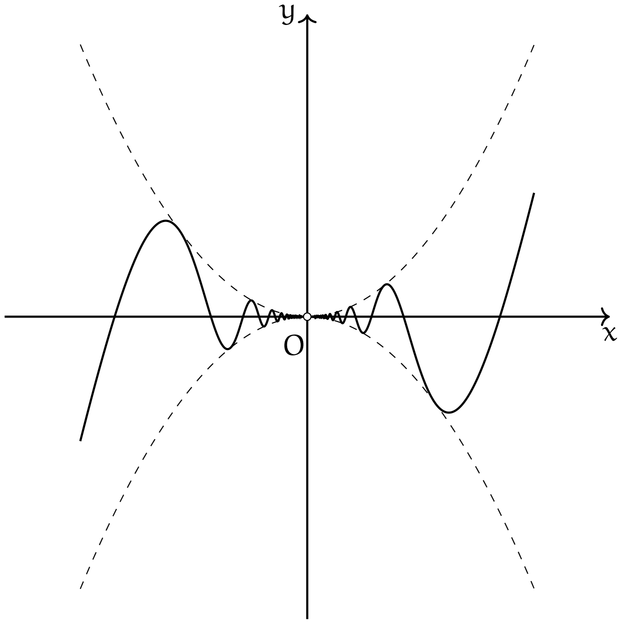
$$\lim_{x\to0}(-x^2) = 0 = \lim_{x\to0} x^2,$$

επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής, το ζητούμενο όριο υπάρχει και, μάλιστα:

$$\lim_{x\to0} x^2\,\text{ημ}\,\frac{1}{x} = 0.$$

Μπορούμε να δούμε και τη γραφική παράσταση της εν λόγω συνάρτησης, η οποία έχει ένα αισθητικό ενδιαφέρον, στο σχήμα 1.

□



Σχήμα 1: Η συνάρτηση $x^2 \,\text{ημ}\, \frac{1}{x}$

Παράδειγμα 5.2. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\text{ημ}^2 x + \text{ημ}\, x + \text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{x}.$$

Χρησιμοποιούμε κι εδώ την ανισότητα:

$$-1 \leq \text{ημ}\, x \leq 1,$$

οπότε[3]:

$$-3 \leq \text{ημ}^2 x + \text{ημ}\, x + \text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{x} \geq \frac{\text{ημ}^2 x + \text{ημ}\, x + \text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{x} \geq \frac{3}{x},$$

και, αφού:

$$\lim_{x \to -\infty} -\frac{3}{x} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x},$$

από το κριτήριο παρεμβολής, το ζητούμενο όριο υπάρχει και, μάλιστα:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\text{ημ}^2 x + \text{ημ}\, x + \text{ημ}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{x} = 0.$$

□

[3]Αφού $x \to -\infty$, υποθέτουμε ότι $x < 0$.

Παράδειγμα 5.3. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x^2)}{x}.$$

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε μία άλλη ανισότητα, την:

$$|\eta\mu\, x| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le \eta\mu\, x \le |x|,$$

οπότε, έχουμε:

$$-\left|x^2\right| \le \eta\mu(x^2 - x) \le \left|x^2\right|$$

Εδώ πρέπει να είμαστε προσεκτικοί, όμως, διότι, αφού $x \to 0$, έχουμε ότι η μεταβλητή x παίρνει τιμές *εκατέρωθεν*[4] του 0, άρα μπορεί να είναι και θετική και αρνητική. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην μπορούμε να διαιρέσουμε την παραπάνω σχέση με x, καθώς δε γνωρίζουμε το πρόσημο της x. Γι' αυτό διακρίνουμε δύο περιπτώσεις και χρησιμοποιούμε τα πλευρικά όρια:

1. αν $x \to 0^+$, τότε $x > 0$, επομένως:

   $$-\left|x^2\right| \le \eta\mu(x^2) \le \left|x^2\right| \Leftrightarrow \frac{-x^2}{x} \le \frac{\eta\mu(x^2)}{x} \le \frac{x^2}{x},$$

   δηλαδή:

   $$-x \le \frac{\eta\mu(x^2)}{x} \le x,$$

   και, επειδή:

   $$\lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} x,$$

   από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

   $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu(x^2 - x)}{x} = 0.$$

2. αν $x \to 0^-$, τότε $x < 0$, επομένως:

   $$-\left|x^2\right| \le \eta\mu(x^2) \le \left|x^2\right| \Leftrightarrow \frac{-x^2}{x} \ge \frac{\eta\mu(x^2)}{x} \ge \frac{x^2}{x},$$

   δηλαδή:

   $$-x \ge \frac{\eta\mu(x^2)}{x} \ge x,$$

   και, επειδή:

   $$\lim_{x\to 0^-}(-x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} x,$$

   από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

   $$\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu(x^2)}{x} = 0.$$

[4] Εκατέρωθεν σημαίνει «και από τις δύο μεριές».

Τέλος, αφού τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα έπεται ότι το ζητούμενο όριο υπάρχει και μάλιστα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x^2)}{x}=0.$$

□

Παρατήρηση 5.1. Για το παραπάνω όριο, θα μπορούσαμε να είχαμε εργαστεί και ως εξής[5]:

- αφού $x\to 0$, έπεται ότι $x\neq 0$, άρα και $x^2\neq 0$, επομένως μπορούμε να διαιρέσουμε με x^2. Διαιρούμε και πολλαπλασιάζουμε, λοιπόν, τη δοσμένη συνάρτηση με x^2:

$$\frac{\eta\mu(x^2)}{x}=\frac{\eta\mu(x^2)x^2}{x^2\cdot x}=\frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x}=\frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}x.$$

- Θα υπολογίσουμε δύο όρια και θα βρούμε το ζητούμενο όριο σαν γινόμενο ορίων. Πρώτα, θα υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}\underset{y\to 0}{\overset{y=x^2}{=\!=}}\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu\, y}{y}=1,$$

και στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}x=0,$$

οπότε το ζητούμενο όριο υπάρχει (γινόμενο ορίων) και, μάλιστα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}x=1\cdot 0=0.$$

□

6 Γενικές ασκήσεις

Παράδειγμα 6.1. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}x\,\eta\mu\frac{1}{x}.$$

Εδώ θα χρειαστούμε το θεώρημα για το όριο σύνθετης συνάρτησης. Ποιες συναρτήσεις έχουμε στα χέρια μας, όμως; Ας δούμε λίγο ένα τέχνασμα που θα χρησιμοποιήσουμε πολύ συχνά, ειδικά όταν έρχεται στο προσκήνιο κάποια απροσδιοριστία σαν και αυτή:

$$x\,\eta\mu\frac{1}{x}=\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

[5] Γενικά, προχωρώντας θα δείτε ότι πολλά όρια είναι δυνατό να υπολογιστούν με αρκετούς διαφορετικούς τρόπους.

Ε, και; Τώρα μπορούμε να παίξουμε με τις εξής δύο συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\eta\mu\, x}{x}$$
$$g(x) = \frac{1}{x},$$

μιας και:

$$x\,\eta\mu\,\frac{1}{x} = \frac{\eta\mu\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = f(g(x)) = (f\circ g)(x).$$

Ας υπολογίσουμε πρώτα το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0,$$

οπότε τώρα πρέπει να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu\, y}{y} = 1,$$

επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\eta\mu\,\frac{1}{x}.$$

□

Παράδειγμα 6.2. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{4x+5}.$$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{4x+5} = \\
&= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{(4x+5)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)} = \\
&= \frac{x^2+1-(x^2+x+1)}{(4x+5)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)} = \\
&= \frac{-x}{(4x+5)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)} = \\
&= \frac{-x}{(4x+5)\left(\sqrt{x^2\left(1+1/x^2\right)}+\sqrt{x^2\left(1+1/x+1/x^2\right)}\right)} = \\
&= \frac{-x}{(4x+5)\left(\sqrt{x^2}\sqrt{(1+1/x^2)}+\sqrt{x^2}\sqrt{(1+1/x+1/x^2)}\right)} = \\
&= \frac{-x}{(4x+5)\left(|x|\sqrt{(1+1/x^2)}+|x|\sqrt{(1+1/x+1/x^2)}\right)} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{-x}{x\left(4+5/x\right)\left(x\sqrt{(1+1/x^2)}+x\sqrt{(1+1/x+1/x^2)}\right)} =$$
$$= \frac{-x}{x^2\left(4+5/x\right)\left(\sqrt{(1+1/x^2)}+\sqrt{(1+1/x+1/x^2)}\right)} =$$
$$= \frac{-1}{x\left(4+5/x\right)\left(\sqrt{(1+1/x^2)}+\sqrt{(1+1/x+1/x^2)}\right)}.$$

Τώρα, μπορούμε, επιτέλους, να πάρουμε όριο καθώς $x \to +\infty$, οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{4x+5} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x\left(4+5/x\right)\left(\sqrt{(1+1/x^2)}+\sqrt{(1+1/x+1/x^2)}\right)} =$$
$$= \frac{-1}{(+\infty)\left(4+0\right)\left(\sqrt{(1+0)}+\sqrt{(1+0+0)}\right)} = \frac{-1}{+\infty} = 0.$$

□

Παράδειγμα 6.3. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2+4}{x^3-4x^2+3x+2}}.$$

Θέτουμε πρώτα:

$$y = \frac{x^2+4}{x^3-4x+3x+2},$$

και υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4}{x^3-4x^2+3x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+4/x^2\right)}{x^3\left(1-4/x+3/x^2+2/x^3\right)} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\frac{1+4/x^2}{1-4/x+3/x^2+2/x^3} =$$
$$= \frac{1}{-\infty}\frac{1+0}{1-0+0+0} = 0.$$

Άρα:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2+4}{x^3-4x^2+3x+2}} = \lim_{y\to 0} e^{y} = e^0 = 1.$$

□

Παράδειγμα 6.4. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{συν}\left(x^3-x^2\right)-1}{x}.$$

Εδώ εφαρμόζουμε το εξής τέχνασμα· πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την παράσταση $x^3 - x^2$, η οποία είναι μη μηδενική — αφού $x \to 0$ — οπότε:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\left(x^3 - x^2\right) - 1}{x} = \frac{\left(\sigma\upsilon\nu\left(x^3 - x^2\right) - 1\right)\left(x^3 - x^2\right)}{x\left(x^3 - x^2\right)} = $$
$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\left(x^3 - x^2\right) - 1}{x^3 - x^2} \cdot \frac{x^3 - x^2}{x}.$$

Τώρα, αρκεί να υπολογίσουμε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu\left(x^3 - x^2\right) - 1}{x^3 - x^2} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2}{x}.$$

Για το πρώτο όριο θέτουμε $y = x^3 - x^2$, οπότε $y \to 0$ και:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu\left(x^3 - x^2\right) - 1}{x^3 - x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu\, y - 1}{y} = 0.$$

Για το δεύτερο όριο, παραγοντοποιούμε ως εξής:

$$\frac{x^3 - x^2}{x} = \frac{x^2(x-1)}{x} = x(x-1),$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x(x-1) = 0,$$

άρα, το ζητούμενο όριο υπάρχει (γινόμενο ορίων) και είναι ίσο με:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu\left(x^3 - x^2\right) - 1}{x} = 0 \cdot 0 = 0.$$

□

Παράδειγμα 6.5. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \ln \frac{e^{-x} - 1}{1 - e^x}.$$

Εδώ έχουμε μία απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ που εμφανίζεται μέσα στον λογάριθμο. Επομένως, ίσως εξυπηρετεί να θέσουμε:

$$y = \frac{e^{-x} - 1}{1 - e^x}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, πρέπει να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{1 - e^x},$$

το οποίο δε θυμίζει κάποιο όριο που έχουμε δει. Μετά από λίγη σκέψη, παρατηρούμε ότι, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με e^x, παίρνουμε:

$$\frac{e^{-x} - 1}{1 - e^x} = \frac{e^x\left(e^{-x} - 1\right)}{e^x\left(1 - e^x\right)} = \frac{1}{e^x} \frac{1 - e^x}{1 - e^x} = e^{-x}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{1-e^{x}}=\lim_{x\to 0}e^{-x}=e^{0}=1.$$

Άρα, το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 0}\ln\frac{e^{-x}-1}{1-e^{x}}=\lim_{y\to 1}\ln y=0.$$

□

Παράδειγμα 6.6. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}e^{x}\,\text{ημ}\left(e^{1-x}\right).$$

Εδώ έχουμε μία απροσδιοριστία της μορφής $0\cdot(\pm\infty)$ και δε φαίνεται εύκολη λύση στον ορίζοντα. Θέτουμε, αρχικά:

$$y=e^{1-x},$$

οπότε:

$$\ln y=1-x\Leftrightarrow x=1-\ln y.$$

Τώρα, αφού:

$$\lim_{x\to+\infty}e^{1-x}=0,$$

το δοσμένο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty}e^{x}\,\text{ημ}\left(e^{1-x}\right)=\lim_{y\to 0}e^{1-\ln y}\,\text{ημ}\,y,$$

το οποίο δε φαίνεται και πολύ καλύτερο. Αν, όμως κάνουμε λίγες πράξεις, βλέπουμε ότι:

$$e^{1-\ln y}\,\text{ημ}\,y=e\cdot e^{-\ln y}\,\text{ημ}\,y=e\cdot e^{\ln(1/y)}\,\text{ημ}\,y=e\frac{1}{y}\,\text{ημ}\,y,$$

δηλαδή, έχουμε να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{y\to 0}e\frac{\text{ημ}\,y}{y}=e\lim_{y\to 0}\frac{\text{ημ}\,y}{y}=e\cdot 1=e.$$

□

Παράδειγμα 6.7. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\text{συν}\left(\frac{\text{ημ}\,x\,\text{συν}\,x}{x^{2}-2x}\right).$$

Πολλά μαζεύτηκαν και θα μπερδευτούμε. Θέτουμε:

$$y=\frac{\text{ημ}\,x\,\text{συν}\,x}{x^{2}-2x}$$

και πρέπει να υπολογίσουμε στη συνέχει το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\, x\, \sigma\upsilon\nu\, x}{x^2-2x}.$$

Ας κάνουμε πρώτα λίγες πράξεις:

$$\frac{\eta\mu\, x\, \sigma\upsilon\nu\, x}{x^2-2x}=\frac{\eta\mu\, x\, \sigma\upsilon\nu\, x}{x(x-2)}=$$
$$=\frac{\eta\mu\, x}{x}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{x-2}.$$

Έχουμε δει σε προηγούμενο παράδειγμα ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\, x}{x}=0,$$

επομένως, αρκεί να υπολογίσουμε (αν υπάρχει) το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{x-2}.$$

Θα αξιοποιήσουμε τώρα το κριτήριο παρεμβολής, μέσω της ανισότητας[6]:

$$-1\le \sigma\upsilon\nu\, x\le 1\Leftrightarrow -\frac{1}{x-2}\le\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{x-2}\le\frac{1}{x-2}.$$

Αφού:

$$\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x-2}=0=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2},$$

από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{x-2}=0,$$

επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\, x\, \sigma\upsilon\nu\, x}{x^2-2x}=0\cdot 0=0.$$

Έτσι, το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\eta\mu\, x\, \sigma\upsilon\nu\, x}{x^2-2x}\right)=\lim_{y\to 0}\sigma\upsilon\nu\, y=\sigma\upsilon\nu\, 0=1.$$

□

Παράδειγμα 6.8. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(2+e^x)-3x\right).$$

Εδώ εκμεταλλευόμαστε την ταυτότητα:

$$x=\ln e^x,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

[6] Αφού $x\to+\infty$, υποθέτουμε ότι $x>0$.

ως εξής:

$$\ln(2+e^x) - 3x = \ln(2+e^x) - \ln e^{3x} = \ln\frac{1+e^x}{e^{3x}}.$$

Τώρα, θέτουμε:

$$y = \frac{1+e^x}{e^{3x}},$$

και έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{e^{3x}} &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}+\frac{e^x}{e^{3x}}\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\frac{1}{e^{2x}}\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+e^{-2x}\right) = 0+0 = 0,\end{aligned}$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln(2+e^x)-3x) = \lim_{y\to 0}\ln y = -\infty.$$

□

Παράδειγμα 6.9. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}.$$

Να σου πω τη μοίρα σου, να σου πω το ριζικό σου. Εδώ έχουμε πολλά ριζικά μέσα στην παράσταση. Ένα τέχνασμα εδώ, για να φανούν τα πράγματα πιο ξεκάθαρα είναι να θέσουμε:

$$y = \sqrt[12]{x}.$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι το 12 δε μας ήρθε στην τύχη, αλλά είναι το Ε.Κ.Π. των τάξεων των ριζών που εμφανίζονται στην παράσταση (του 3, του 4 και του 2). Προφανώς, $y \to 0$, επομένως:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{y\to 0}\frac{y^4+y^6}{y^3}.$$

Αυτό το όριο, όμως, είναι πια εύκολο να υπολογιστεί, αφού:

$$\frac{y^4+y^6}{y^3} = \frac{y^4(1+y^2)}{y^3} = y(1+y^2),$$

οπότε:

$$\lim_{y\to 0}\frac{y^4+y^6}{y^3} = \lim_{y\to 0}y(1+y^2) = 0,$$

άρα και

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = 0.$$

□

Παράδειγμα 6.10 (Θεωρητική). Αν $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση:

$$xf(x)\left(f(x) - 2\,\text{συν}\,\frac{1}{x}\right) \le |\text{ημ}\,x| + x\left(\text{ημ}^2\,\frac{1}{x} - 1\right),\ \text{για κάθε } x \ne 0,$$

να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Τώρα, μάλιστα... Αυτό μας έλειπε. Επειδή μας δίνεται μια ανισότητα, υποθέτουμε ότι θα χρησιμοποιήσουμε, κάπως, το κριτήριο παρεμβολής. Ναι, αλλά πού είναι η δεύτερη ανισότητα; Ας ξεκινήσουμε λίγο, «καθαρογράφοντας» τη δοσμένη ανισότητα[7]:

$$\begin{aligned}
& xf(x)\left(f(x) - 2\,\text{συν}\,\frac{1}{x}\right) \le |\text{ημ}\,x| + x\left(\text{ημ}^2\,\frac{1}{x} - 1\right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & f(x)\left(f(x) - 2\,\text{συν}\,\frac{1}{x}\right) \le \frac{|\text{ημ}\,x|}{x} + \left(\text{ημ}^2\,\frac{1}{x} - 1\right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & f^2(x) - 2f(x)\,\text{συν}\,\frac{1}{x} \le \frac{|\text{ημ}\,x|}{x} - \left(1 - \text{ημ}^2\,\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & f^2(x) - 2f(x)\,\text{συν}\,\frac{1}{x} \le \frac{|\text{ημ}\,x|}{x} - \text{συν}^2\,\frac{1}{x} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & f^2(x) - 2f(x)\,\text{συν}\,\frac{1}{x}\,\text{συν}^2\,\frac{1}{x} \le \frac{|\text{ημ}\,x|}{x} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \left(f(x) - \text{συν}\,\frac{1}{x}\right)^2 \le \frac{|\text{ημ}\,x|}{x}.
\end{aligned}$$

Τι λες τώρα; Και η δεύτερη ανισότητα, από τα αριστερά, πού είναι; Λοιπόν, αν σκεφτούμε ψύχραιμα, θα θυμηθούμε, από το γυμνάσιο ακόμα, ότι,

$$a^2 \ge 0,$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$, επομένως, στην προκειμένη έχουμε, τελικά:

$$0 \le \left(f(x) - \text{συν}\,\frac{1}{x}\right)^2 \le \frac{\text{ημ}\,x}{x}.$$

Τώρα, αφού:

$$\lim_{x\to+\infty} 0 = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\text{ημ}\,x}{x},$$

έπεται, από το κριτήριο παρεμβολής, ότι το υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \text{συν}\,\frac{1}{x}\right)^2 = 0,$$

άρα, από το θεώρημα ορίου σύνθετης συνάρτησης, υπάρχει και το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \left|f(x) - \text{συν}\,\frac{1}{x}\right| = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\left(f(x) - \text{συν}\,\frac{1}{x}\right)^2} = 0,$$

[7]Πάντα, αφού $x \to +\infty$, υποθέτουμε ότι $x > 0$.

Επομένως[8],

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\text{συν}\,\frac{1}{x}\right)=0.$$

Επίσης, υπάρχει και το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\text{συν}\,\frac{1}{x}\;\underset{y\to 0}{\overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=}}\;\lim_{y\to 0}\text{συν}\,y=1,$$

επομένως:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\text{συν}\,\frac{1}{x}+\text{συν}\,\frac{1}{x}\right)=\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\text{συν}\,\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to+\infty}\text{συν}\,\frac{1}{x}=\\&=0+1=1.\end{aligned}$$

□

[8] Γιατί;

Κατάλογος Σχημάτων

1 Η συνάρτηση $x^2 \,\text{ημ}\, \frac{1}{x}$ 21

Κατάλογος Πινάκων

1 Πίνακας της $f(x) = \frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}$ 5