

Επαναληπτικό Διαγώνισμα

Συναρτήσεις και απλά όρια

Θέμα 1 (25 μονάδες) 1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; (4 μονάδες)

2. Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ μία πολυωνυμική συνάρτηση. Να δείξετε ότι, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει (7 μονάδες):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

3. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες**, σημειώνοντας στο χαρτί σας δίπλα από κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό ή Λάθος, αντίστοιχα (10 μονάδες):

(α) Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα τότε είναι και αντιστρέψιμη.

(β) Το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με ℓ αν και μόνον αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

(γ) Αν για μία συνάρτηση f ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 5,$$

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

(δ) Αν $f(x) = e$ και $g(x) = \ln x$ τότε:

$$(f \circ g)(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ε) Για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x}$ υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

αν και δεν έχει νόημα το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

4. Να χαρακτηρίσετε την ακόλουθη πρόταση ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη** και να αιτιολογήσετε (1+3 μονάδες):

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$, τότε $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 .

Θέμα 2 (25 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία (5 μονάδες).
2. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της (1+4 μονάδες).
3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (3 μονάδες).
4. Να υπολογίσετε τα όρια (3+3 μονάδες):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

5. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f (6 μονάδες).

Θέμα 3 (25 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x})$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της (3 μονάδες).
2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία (6 μονάδες).
3. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το (1+4 μονάδες)

$$f^{-1}(\ln e + \ln(1 + e)).$$

4. Να λύσετε την ανισότητα (6 μονάδες):

$$f(e^{x^2-4x+5}) - \ln e > \ln(1 + e).$$

5. Να υπολογίσετε το όριο (5 μονάδες):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x^2}{\sin x}\right).$$

Θέμα 4 (25 μονάδες)

Δίνονται δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = x^{2017} + x^{2019}$$

και η f ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x + y - 1) > x + y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Να δείξετε ότι $f(x) > x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (5 μονάδες).
2. Να υπολογίσετε το όριο (4 μονάδες):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

3. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία (4 μονάδες).
4. Να αποδείξετε την ανισότητα (6 μονάδες):

$$(g \circ f)(x^2 + 1) > g(x^2 + 2).$$

5. Να υπολογίσετε το όριο (6 μονάδες):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(g(-x))}.$$

Λύσεις

Λύση Θέματος 1 1. Σ.Β., σελ. 31.

2. Σ.Β., σελ. 49.

(α') Σωστό

(β') Σωστό

(γ') Λάθος

(δ') Λάθος

(ε') Σωστό

3. Η πρόταση είναι **Λανθασμένη**. Ένα αντιπαράδειγμα είναι η συνάρτηση:

$$f(x) = -x^2,$$

για $x_0 = 0$, καθώς $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 (\geq 0)$ και $f(x) < 0$ κοντά¹ στο $x_0 = 0$. Σχόλιο: Η σωστή μορφή της πρότασης είναι η ακόλουθη:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0.$$

Λύση Θέματος 2 1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \\ \Rightarrow -x_1 &> -x_2 \\ \Rightarrow 1 - x_1 &> 1 - x_2 \\ \Rightarrow e^{1-x_1} &> e^{1-x_2} \\ \Rightarrow -e^{1-x_1} &< -e^{1-x_2} \\ \Rightarrow 1 - e^{1-x_1} &< 1 - e^{1-x_2} \\ \Rightarrow f(x_1) &< f(x_2), \end{aligned}$$

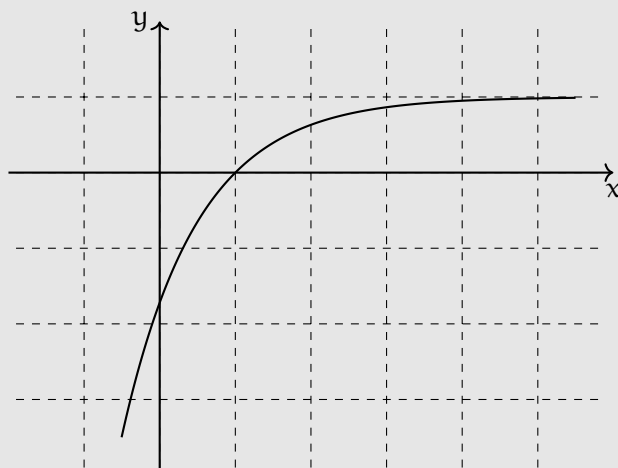
άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

2. Η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, άρα και 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Για τον υπολογισμό της αντίστροφης έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ \Leftrightarrow 1 - e^{1-x} &= y \\ \Leftrightarrow -e^{1-x} &= -1 + y \\ \Leftrightarrow e^{1-x} &= 1 - y \\ \Leftrightarrow 1 - x &= \ln(1 - y) \\ \Leftrightarrow -x &= -1 + \ln(1 - y) \\ \Leftrightarrow x &= 1 - \ln(1 - y), \end{aligned}$$

άρα $f^{-1}(x) = 1 - \ln(1 - x)$.

¹Να θυμηθούμε ότι «κοντά» στο 0 σημαίνει εκεί γύρω και όχι 0.



3. Το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, επομένως (οι πράξεις παραλείπονται ως εύκολες):

$$R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 1).$$

4. Για το πρώτο όριο, θέτουμε $y = 1 - x$, οπότε, αφού:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x) = 1 - (-\infty) = 1 + \infty = +\infty,$$

έπεται ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (1 - e^y) = 1 - (+\infty) = -\infty.$$

Μπορούμε, όμοια, να βρούμε και το άλλο όριο, αλλά, για λόγους ποικιλίας, θα το λύσουμε με ποιο στοιχειώδη μέσα, χωρίς αλλαγή μεταβλητής:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{e}{e^x}\right) = 1 - \frac{e}{+\infty} = 1 - 0 = 1.$$

5. Ξεκινώντας από τη γραφική παράσταση της e^x , περνάμε στην e^{-x} και μετά στην e^{1-x} και μετά στην $-e^{1-x}$ και, τέλος, στην $f(x)$. Η τελική γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα ;;

Λύση Θέματος 3 1. Αρχικά, πρέπει $x \geq 0$, αφού έχουμε υπόρριξη παράσταση. Έπειτα, για τον λογάριθμο απαιτούμε:

$$x + \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) > 0.$$

Το τελευταίο είναι γινόμενο ενός θετικού αριθμού $(\sqrt{x} + 1)$ με την \sqrt{x} . Επομένως, αυτό που πρέπει (και αρκεί) να ισχύει είναι²:

$$\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Τελικά:

$$D_f = (0, +\infty).$$

2. Έστω $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$. Διδαχικά, έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$$

² Μπορείτε να λύσετε αυτήν την ανισότητα με 1002 τρόπους, όπως να θέσετε κ.λπ...

και, προσθέτοντας κατά μέλη με την $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 + \sqrt{x_2} < x_2 + \sqrt{x_2} \Rightarrow \ln(x_1 + \sqrt{x_1}) < \ln(x_2 + \sqrt{x_2}) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

3. Η f είναι γνησίως μονότονη, άρα 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Για το $f^{-1}(\ln e + \ln(1+e))$ παρατηρούμε ότι:

$$f(e^2) = \ln(e^2 + \sqrt{e^2}) = \ln(e^2 + e) = \ln(e(e+1)) = \ln e + \ln(e+1),$$

οπότε:

$$f^{-1}(\ln e + \ln(1+e)) = f^{-1}(f(e^2)) = e^2.$$

4. Η δοσμένη ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$f(e^{x^2-4x+5}) > \ln e + \ln(1+e) = f(e^2).$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, η ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$e^{x^2-4x+5} > e^2,$$

οπότε λογαριθμίζοντας, παίρνουμε:

$$x^2 - 4x + 5 > 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0,$$

η οποία λύνεται κατά τα γνωστά και μας δίνει:

$$x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty).$$

Σχόλιο: Παρατηρήστε ότι η ποσότητα e^{x^2-4x+5} είναι πάντα θετική (> 0), άρα το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης $f(e^{x^2-4x+5})$ είναι όλο το \mathbb{R} , οπότε δεν προκύπτει επιπλέον περιορισμός για τις λύσεις μας.

5. Εδώ θέλει λίγη δουλίτσα. Αρχικά, με κάτι τόσο άσχημο μπροστά μας, δεν αντέχουμε άλλο και θέτουμε απευθείας:

$$y = \frac{x^2}{\sin x}.$$

Πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε, λοιπόν, το όριο³:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x} = \frac{0}{\sin 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Επομένως, το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x^2}{\sin x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \ln(y + \sqrt{y}).$$

Εδώ, τώρα, ξαναθέτουμε:

$$u = y + \sqrt{y}$$

και, αφού:

$$\lim_{y \rightarrow 0} (y + \sqrt{y}) = 0 + 0 = 0,$$

έπεται ότι:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \ln(y + \sqrt{y}) = \lim_{u \rightarrow 0} \ln u = -\infty.$$

³Μην παρώνετε, άμα βλέπετε τέτοια, θέσμο θέλουν συνήθως!

Λύση Θέματος 4 1. Θέτουμε $y = 1$ στη δοσμένη ανισότητα, οπότε:

$$f(x + 1 - 1) > x + 1 \Leftrightarrow f(x) > x + 1.$$

2. Αφού $f(x) > x + 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x) = +\infty$, έπεται ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2017} < x_2^{2017}$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2019} < x_2^{2019},$$

οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη:

$$x_1^{2017} + x_1^{2019} < x_2^{2017} + x_2^{2019} \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2),$$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

4. Ξεκινώντας από τη δοσμένη ανισότητα, θα καταλήξουμε σε κάτι που ισχύει προχωρώντας με ισοδυναμίες (χρησιμοποιούμε την μονοτονία της g):

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x^2 + 1) &> g(x^2 + 2) \\ \Leftrightarrow g(f(x^2 + 1)) &> g(x^2 + 2) \\ \Leftrightarrow f(x^2 + 1) &> x^2 + 2. \end{aligned}$$

Το τελευταίο ισχύει διότι από το πρώτο ερώτημα ισχύει $f(x) > x + 1$, οπότε, για x^2 στη θέση του x προκύπτει το ζητούμενο.

5. Θέτουμε $y = g(-x)$, οπότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(-x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^{2017} - x^{2019}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2019} \left(-1 - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty \cdot (-1 - 0) = +\infty. \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(g(-x))} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Γενική παρατήρηση: Όταν δεν ξέρουμε τι να κάνουμε, αλλάζουμε μεταβλητή! Σώζει ζωές!