ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

(ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ....

ΘΕΜΑ Α :

Α 1 . Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ ' ένα διάστημα (α , β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο χ_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής .

Αν $f'(\chi)>0$ στο (α , χ_0) και $f'(\chi)<0$ στο (χ_0 , β) , τότε το $f(\chi_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

(5 **Μονάδες)**

Α2 . Να διατυπώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f (2 μονάδες) , καθώς και τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Fermat (2 μονάδες) .

(4 **Μονάδες)**.

Α3 . Θεωρούμε τον ισχυρισμό :

« Αν για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη , τότε δεν είναι δυνατόν η γραφική παράσταση της f να έχει σε κάποιο $\chi_0 \in \mathbb{R}$ ταυτόχρονα τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής .»

Να εξετάσετε αν ο παραπάνω ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας . (7 **Μονάδες)**

Α4 . Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές **(Σ)** ή λανθασμένες **(Λ)** .

(i) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορεί να έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες .

(ii) Τα σημεία ασυνέχειας μιας συνάρτησης f μπορούν να αποτελούν τοπικά ακρότατα της f .

(iii) Αν για τις παραγωγίσιμες και 1-1 συναρτήσεις $f , f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει :

$\left(f^{-1}\right)'\left(f(\chi)\right)=f'\left(f^{-1}(\chi)\right)$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ και $f'(\chi)\cdot f^{-1\prime}(\chi)\neq 0$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, τέτοιος , ώστε να ισχύει : $f(\chi)-f^{-1}(\chi)=c$.

(3 **Μονάδες)**

Α5 . Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να **δικαιολογήσετε** την επιλογή σας .

(i) Εάν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-3 , 4]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-3 , 4)$, με $f'(\chi)<0$ για κάθε $\chi \in (-3 , 0)$ και $f'(\chi)>0$ για κάθε $\chi \in [0 , 4)$, ενώ ισχύουν : $f(-3)=4$, $f(0)=0$ και $f(4)=3$, τότε η εξίσωση $f(\chi)=2$

(α) έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(-3\,,4)$.

(β) έχει ακριβώς δύο λύσεις στο διάστημα $(-3\,,4)$.

(γ) έχει το πολύ μία λύση στο διάστημα $(-3\,,4)$.

(δ) δεν έχει καμμία λύση στο διάστημα $(-3\,,4)$.

(ii) (α) Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\chi_0 \in \Delta$. Αν το χ_0 είναι άκρο του διαστήματος Δ , τότε το $f(\chi_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της συνάρτησης f στο διάστημα Δ.

(β) Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\chi_0 \in \Delta$. Αν ισχύει : $f''(\chi_0)=0$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει καμπή στο χ_0 .

(γ) Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta=(\alpha\,,\beta)$ και $\chi_0 \in \Delta$. Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα Δ , όπου $f'(\chi_0)=0$, τότε το $f(\chi_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της συνάρτησης f .

(δ) Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\chi_0 \in \Delta$ (εσωτερικό σημείο του Δ) . Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και ισχύει : $f'(\chi_0)\neq 0$, τότε το $f(\chi_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της συνάρτησης f .

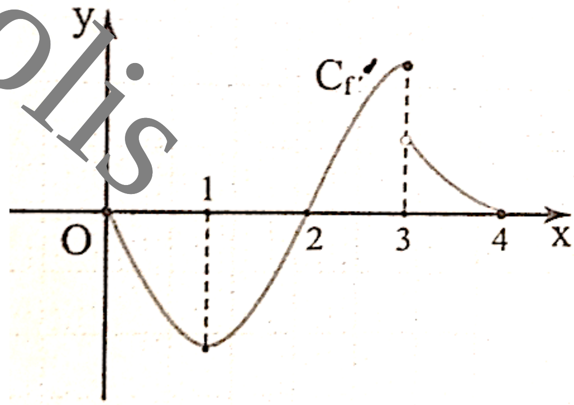
(iii) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f' μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[0\,,4]$. Ποιό από τα παρακάτω συμπεράσματα είναι λανθασμένο ;

(α) Δεν υπάρχει η τιμή $f''(3)$.

(β) Ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $\chi_0=3$.

(γ) Στο $\chi_0=3$ η C_f παρουσιάζει καμπή .

(δ) Το $\chi_0=3$ είναι τοπικό ακρότατο της f .



(6 **Μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β :

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f , g με τύπους : $f(\chi)=\dfrac{\chi+1}{\chi-1}$, $\chi\neq 1$ και $g(\chi)=\ell n\chi$, $\chi>0$.

Β1 . Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f\circ g$. (5 **Μονάδες)**

Έστω $h(\chi)=\dfrac{\ell n\chi+1}{\ell n\chi-1}$, $\chi\in(0\,,+\infty)-\{e\}$.

Β2 . Να αποδείξετε ότι :

(α) οι συναρτήσεις f , g , h αντιστρέφονται . (3 **Μονάδες)**

(β) $h^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$ (8 **Μονάδες)**

Β3 . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(\chi)=f(\chi)-g(\chi)$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right)$. (9 **Μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ :

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g ορισμένες στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$ με τύπους :

$f(\chi)=-\ell n(\sigma\upsilon\nu\chi)-\frac{\chi^2}{2}$ και $g(\chi)=\varepsilon\varphi\chi-\chi$.

Γ1 . Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f , g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

(6 **Μονάδες)**

Γ2 . Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν κοινές ασύμπτωτες .

(6 **Μονάδες)**

Γ3 . Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο με κοινή εφαπτομένη . (7 **Μονάδες)**

Γ4 . Να βρείτε τον τύπο μιας συνάρτησης h ορισμένης και παραγωγίσιμης στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$, για την οποία ισχύουν :

- $h\left(-\frac{\pi}{4}\right)=h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}$ και
- $(\varepsilon\varphi\chi-\chi)\cdot h'(\chi)-\varepsilon\varphi^2\chi\cdot h(\chi)=(\varepsilon\varphi\chi-\chi)^2$, για κάθε $\chi\in\left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

(6 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ :

Ένα σημείο $M(\chi\ ,\psi)$ κινείται πάνω στο επίπεδο έτσι ώστε οι συντεταγμένες του να ικανοποιούν τις παραμετρικές εξισώσεις : $\begin{cases}\chi=\alpha\cdot\sigma\varphi\theta\\ \psi=\beta\cdot\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\end{cases}$, όπου οι α , $\beta>0$ είναι σταθεροί αριθμοί και $\theta\in\mathbb{R}-\{\kappa\cdot\pi\ ,\ \kappa\in\mathbb{Z}\}$.

Δ1 . Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M είναι η καμπύλη : $\psi = \dfrac{\alpha\cdot\beta\cdot\chi}{\chi^2+\alpha^2}$ (1)

(**Παρατήρηση** : Η καμπύλη (1) είναι γνωστή ως « οφιοειδής καμπύλη του Νεύτωνα » , ενώ στην διεθνή μαθηματική ορολογία ονομάζεται «serpantine function » .) (5 **Μονάδες)**

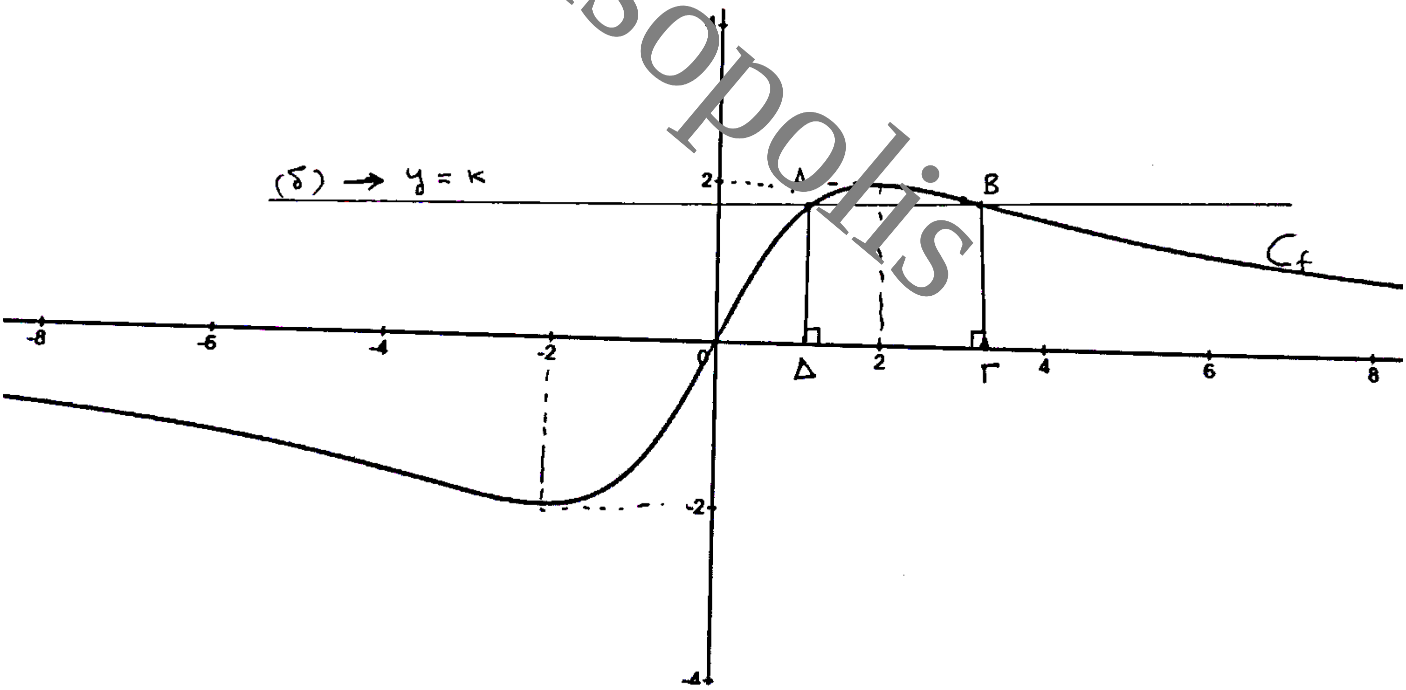
Θεωρούμε στη συνέχεια τη συνάρτηση f με τύπο : $f(\chi)=\psi$.

Δ2 . Να υπολογίσετε τις τιμές των α , $\beta>0$ για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $\chi_1=-2$, ενώ η συνάρτηση g με τύπο : $g(\chi)=\chi^2\cdot f(\chi)$ έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $(\varepsilon)\rightarrow\psi=8\cdot\chi$. **(6 Μονάδες)**

Έστω $\alpha=2$, $\beta=4$.

Δ3 . Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία , τα ολικά ακρότατα , και τα σημεία καμπής . (8 **Μονάδες)**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



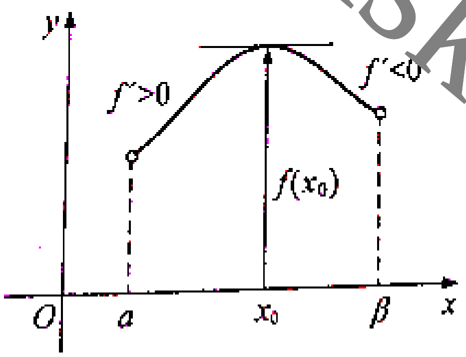
Δ4 . Μία ευθεία $(\delta)\rightarrow\psi=\kappa$, όπου $0<\kappa<2$, τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στα σημεία A , B . Φέρνουμε τις προβολές Γ , Δ των σημείων B , A στον άξονα $\chi'\chi$, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα . Να υπολογίσετε την τιμή του αριθμού κ , έτσι ώστε η συνάρτηση h με τύπο $h(\kappa)=\kappa\cdot E(\kappa)$, όπου $E(\kappa)$ είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$, να παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της και να βρείτε τη μέγιστο αυτή τιμή .

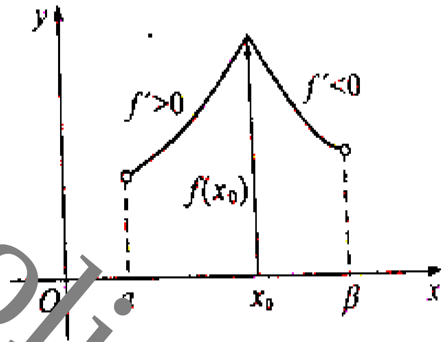
(6 Μονάδες)

ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ)

ΘΕΜΑ Α :

Α 1 . Επειδή $f'(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in(\alpha,\chi_0)$ και η f είναι συνεχής στο χ_0 , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,\chi_0]$, οπότε έχουμε $f(\chi)\le f(\chi_0)$ (1) , για κάθε $\chi\in(\alpha,\chi_0]$. $f'(\chi)<0$ για κάθε $\chi\in(\chi_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο χ_0 , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\chi_0,\beta)$, οπότε έχουμε $f(\chi)\le f(\chi_0)$ (2) , για κάθε $\chi\in[\chi_0,\beta)$. Λόγω των σχέσεων (1) και (2) ισχύει : $f(\chi)\le f(\chi_0)$ για κάθε $\chi\in(\alpha,\beta)$ που σημαίνει ότι το $f(\chi_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα το $f(\chi_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .





Α2 . <u>Ορισμός του σημείου καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης</u> f :

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ΄ ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του χ_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α,χ_0) και κοίλη στο (χ_0,β) ή αντιστρόφως και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$, τότε το σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f .

<u>Η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Fermat είναι η εξής</u> :

Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ ' ένα εσωτερικό σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της και , επιπλέον , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό , τότε στο σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι οριζόντια , δηλαδή ισχύει : $f'(\chi_0)=0$.

Α3 . Ο παραπάνω ισχυρισμός είναι αληθής . <u>Απόδείξη</u> : Υποθέτουμε ότι η γραφική παράσταση της f έχει στο $\chi_0 \in \mathbb{R}$ σημείο καμπής , άρα σε ένα διάστημα $\Delta = (\alpha\,,\beta) \subseteq \mathbb{R}$ η συνάρτηση f'' θα αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $\chi_0 \in \Delta$. Υποθέτουμε επίσης ότι η f είναι κοίλη στο $(\alpha\,,\chi_0)$ και κυρτή στο $[\chi_0\,,\beta)$, τότε :

- Αν $\chi \in (\alpha\,,\chi_0)$, τότε : $\chi < \chi_0 \Rightarrow f'(\chi) > f'(\chi_0)$ (1)
- Αν $\chi \in [\chi_0\,,\beta)$, τότε : $\chi \geq \chi_0 \Rightarrow f'(\chi) \geq f'(\chi_0)$ (2)

Αν υποθέσουμε ότι στο $\chi_0 \in \Delta$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει ακρότατο , και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 , τότε , από το Θεώρημα του Fermat θα ισχύει : $f'(\chi_0) = 0$, πράγμα άτοπο από τις σχέσεις (1) και (2) , διότι θα ισχύει $f'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \Delta = (\alpha\,,\beta) - \{\chi_0\}$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , οπότε δεν παρουσιάζει ακρότατα . Αν υποθέταμε ότι η f είναι κυρτή στο $(\alpha\,,\chi_0)$ και κοίλη στο $[\chi_0\,,\beta)$, τότε η f θα ήταν είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ οπότε και πάλι δεν παρουσιάζει ακρότατα .

Α4 . (i) **Σωστό** (Για παράδειγμα η συνάρτηση $f : f(\chi) = \varepsilon\varphi\chi$ έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $\chi = \kappa\cdot\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ και η συνάρτηση $g : g(\chi) = \dfrac{1}{\eta\mu\chi}$ έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $\chi = \kappa\cdot\pi\,, \kappa \in \mathbb{Z}$)

(ii) **Σωστό** (Για παράδειγμα η συνάρτηση $f : f(\chi) = \begin{cases} \chi^2+1\,, & \chi<1 \\ 5\,, & \chi=1 \\ \chi\,, & \chi>1 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια στο $\chi_0 = 1$ ($\lim\limits_{\chi\to1^-} f(\chi) \neq \lim\limits_{\chi\to1^+} f(\chi)$) , $f(\chi) = \chi^2+1 \leq 5 = f(1)$, αν $\chi \in [-2\,,1)$ και $f(\chi) = \chi \leq 5 = f(1)$, αν $\chi \in (1\,,5]$, άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\chi_0 = 1$ το $f(1) = 5$, αφού ισχύει : $f(\chi) \leq f(1)$ για κάθε $\chi \in [-2\,,5]$.)

(iii) **Σωστό** (Ισχύει : $f^{-1}(f(\chi)) = \chi$, οπότε , παραγωγίζοντας κατά μέλη παίρνουμε :
$f^{-1\prime}(f(\chi))\cdot f'(\chi) = 1 \overset{f'(\chi)\neq0}{\Rightarrow} f^{-1\prime}(f(\chi)) = \dfrac{1}{f'(\chi)}$ (1) . Επίσης ισχύει : $f(f^{-1}(\chi)) = \chi$, οπότε ,

παραγωγίζοντας κατά μέλη παίρνουμε : $f'(f^{-1}(\chi))\cdot f^{-1\prime}(\chi) = 1 \overset{f^{-1\prime}(\chi)\neq0}{\Rightarrow} f'(f^{-1}(\chi)) = \dfrac{1}{f^{-1\prime}(\chi)}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) , (2) έχουμε :

$$\frac{1}{f'(\chi)} = \frac{1}{f^{-1\prime}(\chi)} \Rightarrow f'(\chi) = f^{-1\prime}(\chi) \overset{\substack{f',\, f^{-1\prime} \\ \text{συνεχείς στο } \mathbb{R}}}{\Rightarrow} f(\chi) - f^{-1}(\chi) = c\,,\ c\in\mathbb{R}\ .)$$

Α5 . **(i)** Σωστή απάντηση είναι η **(β)** .

Αιτιολόγηση : Η συνάρτηση f είναι συνεχής γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-3\,,0)$, οπότε θα ισχύει : $f\big((-3\,,0)\big)=\left(\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(\chi),\lim\limits_{\chi\to -3^+} f(\chi)\right)=\big(f(0),f(-3)\big)=(0\,,\,4)$ και επειδή $2\in(0\,,\,4)$, η εξίσωση $f(\chi)=2$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(-3\,,0)$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0\,,\,4)$, οπότε θα ισχύει : $f\big([0\,,\,4)\big)=\left[f(0)\,,\,\lim\limits_{\chi\to 4^-} f(\chi)\right)=[0\,,\,3)$ και επειδή $2\in[0\,,\,3)$ η εξίσωση $f(\chi)=2$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[0\,,\,4)$. Η εξίσωση $f(\chi)=2$ έχει τελικά δύο ακριβώς λύσεις στο διάστημα $(-3\,,4)$.

(ii) Σωστή απάντηση είναι η **(δ)** .

Αιτιολόγηση : Το **(α) είναι λάθος** , διότι για τη συνάρτηση

$f:f(\chi)=\begin{cases}\chi\cdot\eta\mu\dfrac{1}{\chi}\ ,\ \alpha\nu\ \ \chi\in(0\,,\pi]\\ 0\qquad ,\ \alpha\nu\ \ \chi=0\end{cases}$ ορισμένη στο διάστημα $\Delta=[0\,,\,\pi]$, αποδεικνύουμε (με κριτήριο παρεμβολής) ότι είναι συνεχής στο $\chi_0=0$ και με τη βοήθεια του ορισμού και γνωστού θεωρήματος ότι είναι συνεχής στο $\Delta=[0\,,\,\pi]$. Αν υποθεσουμε ότι το $\chi_0=0$ είναι θέση τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης f , τότε θα υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος ώστε να ισχύει : $f(\chi)\geq f(0)=0$ για κάθε $\chi\in[0\,,\,\delta)$. Αυτό όμως είναι άτοπο , διότι υπάρχει $\nu\in\mathbb{N}:\chi_\nu=\dfrac{1}{2\nu\cdot\pi+\dfrac{3\pi}{2}}\in(0\,,\,\delta)$

με $f(\chi_\nu)=f\left(\dfrac{1}{2\nu\cdot\pi+\dfrac{3\pi}{2}}\right)=\dfrac{1}{2\nu\cdot\pi+\dfrac{3\pi}{2}}\cdot\eta\mu\left(2\nu\cdot\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\left(2\nu\cdot\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)<0$.

Το **(β) είναι λάθος** , διότι για την δύο φορές παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) συνάρτηση $f:f(\chi)=\chi^4$, ορισμένη στο διάστημα $\Delta=[-1\,,\,1]$, ισχύει : $f''(\chi)=12\cdot\chi^2$, με $f''(0)=0$, όμως στο $\chi_0=0$ η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει καμπή , διότι , εκατέρωθεν του $\chi_0=0$ η συνάρτηση f'' διατηρεί σταθερό (θετικό) πρόσημο .

Το **(γ) είναι λάθος** , διότι αφού η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση f' θα είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ , οπότε για κάθε
$\alpha<\chi<\chi_0<\beta\Rightarrow f'(\chi)<f'(\chi_0)=0$, ενώ για κάθε $\alpha<\chi_0<\chi<\beta\Rightarrow 0=f'(\chi_0)>f'(\chi)$.
΄Αρα ισχύει : $f'(\chi)<0$ για κάθε $\chi\in\Delta=(\alpha\,,\beta)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ , οπότε δεν έχει ακρότατα .

Το **(δ) είναι σωστό** , διότι αν το $f(\chi_0)$ ήταν τοπικό ακρότατο της συνάρτησης f , θα ισχύανε οι προϋποθέσεις του Θ. Fermat , άρα θα ίσχυε : $f'(\chi_0)=0$,το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση .

(iii) Σωστή απάντηση είναι η **(δ)** .

<u>Αιτιολόγηση</u> : Επειδή το $\chi_0 = 3$ είναι σημείο συνέχειας της συνάρτησης f , δεν υπάρχει η τιμή $f''(3)$, αφού η συνάρτηση f' είναι ασυνεχής στο $\chi_0 = 3$, ορίζεται όμως η εφαπτομένη της C_f στο $\chi_0 = 3$, διότι ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{f(\chi)-f(3)}{\chi-3} = f'(3)\in\mathbb{R}$ στο $\chi_0 = 3$ η C_f παρουσιάζει καμπή λόγω του προηγούμενου συμπεράσματος και του ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2\,,3)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(3\,,4)$, οπότε αλλάζει η κυρτότητα της f εκατέρωθεν του $\chi_0 = 3$. Η πρόταση **(δ)** είναι λανθασμένη διότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στα διαστήματα $(2\,,3)$ και $(3\,,4)$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $(2\,,4)$, άρα το $\chi_0 = 3\in(2\,,\,4)$ δεν μπορεί να αποτελεί τοπικό ακρότατο της f .

ΘΕΜΑ Β :

Β1 . Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης :

$A_h = A_{f\circ g} = \left\{\chi\in\mathbb{R}\ /\ \chi\in A_g \text{ και } g(\chi)\in A_f\right\} = \left\{\chi\in\mathbb{R}\ /\ \chi>0 \text{ και } \ell n\chi\neq 1\Rightarrow \chi\neq e\right\} = (0\,,+\infty)-\{e\}$.

Άρα $h(\chi)=(f\circ g)(\chi)=f(g(\chi))=\dfrac{\ell n\chi+1}{\ell n\chi-1}$, $\chi\in(0\,,+\infty)-\{e\}$.

Β2 . **(α)** Για κάθε $\chi_1,\chi_2\in\mathbb{R}-\{-1\}$ με

$f(\chi_1)=f(\chi_2)\Rightarrow\dfrac{\chi_1+1}{\chi_1-1}=\dfrac{\chi_2+1}{\chi_2-1}\Rightarrow(\chi_1+1)\cdot(\chi_2-1)=(\chi_2+1)\cdot(\chi_1-1)\Rightarrow\chi_1\cdot\chi_2-\chi_1+\chi_2-1=$

$=\chi_1\cdot\chi_2-\chi_2+\chi_1-1\Rightarrow 2\cdot\chi_1=2\cdot\chi_2\Rightarrow\chi_1=\chi_2$, άρα η f είναι $1-1$, οπότε η f αντιστρέφεται .

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$ με $g'(\chi)=\dfrac{1}{\chi}>0$, για κάθε $\chi>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\,,+\infty)$, οπότε και $1-1$, άρα αντιστρέφεται . Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)-\{e\}$ με $h'(\chi)=\dfrac{\frac{1}{\chi}\cdot(\ell n\chi-1)-(\ell n\chi+1)\cdot\frac{1}{\chi}}{(\ell n\chi-1)^2}=\dfrac{-2}{\chi\cdot(\ell n\chi-1)^2}<0$, για κάθε $\chi\in(0\,,+\infty)-\{e\}$, άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0\,,+\infty)-\{e\}$, οπότε και $1-1$, άρα αντιστρέφεται .

(β) Θέτουμε : $f(\chi)=\psi=\dfrac{\chi+1}{\chi-1}\Leftrightarrow\psi\cdot(\chi-1)=\chi+1\Leftrightarrow(\psi-1)\cdot\chi=\psi+1$ (1) . Αν $\psi=1$ η (1) γίνεται $0\cdot\chi=2$, άρα αδύνατη , οπότε $\psi\neq 1$ και η (1) γίνεται : $\chi=\dfrac{\psi+1}{\psi-1}\neq 1$, το οποίο ισχύει , άρα ορίζουμε τη συνάρτηση $f^{-1}:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{1\}$ με τύπο : $f^{-1}(\chi)=\dfrac{\chi+1}{\chi-1}$. Θέτουμε :

$g(\chi)=\psi\Leftrightarrow\psi=\ell n\chi\Leftrightarrow\chi=e^{\psi}>0$, που ισχύει για κάθε , $\psi\in\mathbb{R}$ άρα ορίζουμε τη συνάρτηση $g^{-1}:\mathbb{R}\to(0\,,+\infty)$ με τύπο : $g^{-1}(\chi)=e^{\chi}$. Θέτουμε :

$h(\chi)=\psi=\dfrac{\ell n\chi+1}{\ell n\chi-1}\Leftrightarrow \psi\cdot(\ell n\chi-1)=\ell n\chi+1\Leftrightarrow(\psi-1)\cdot\ell n\chi=\psi+1$ (2) . Αν $\psi=1$ η (2) γίνεται

$0\cdot\ell n\chi=2$, άρα αδύνατη , οπότε $\psi\neq1$ και η (2) γίνεται : $\ell n\chi=\dfrac{\psi+1}{\psi-1}\Leftrightarrow\chi=e^{\frac{\psi+1}{\psi-1}}>0$, το οποίο

ισχύει , άρα ορίζουμε τη συνάρτηση $h^{-1}:\mathbb{R}-\{1\}\to(0\,,+\infty)-\{e\}$ με τύπο : $h^{-1}(\chi)=e^{\frac{\chi+1}{\chi-1}}$.
Έχουμε λοιπόν :

$A_{g^{-1}\circ f^{-1}}=\left\{\chi\in\mathbb{R}\ /\ \chi\in A_{f^{-1}}\ \text{και}\ f^{-1}(\chi)\in A_{g^{-1}}\right\}=\left\{\chi\in\mathbb{R}\ /\ \chi\neq1\ \text{και}\ \dfrac{\chi+1}{\chi-1}\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}-\{1\}$, οπότε

$A_{g^{-1}\circ f^{-1}}=A_{h^{-1}}=\mathbb{R}-\{1\}$ και $\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)(\chi)=g^{-1}\left(f^{-1}(\chi)\right)=g^{-1}\left(\dfrac{\chi+1}{\chi-1}\right)=e^{\frac{\chi+1}{\chi-1}}=h(\chi)$.

Β3 . Θεωρούμε τη συνάρτηση φ με $\varphi(\chi)=h(\chi)-f(\chi)+g(\chi)$. Έχουμε :

$\lim\limits_{\chi\to0^+}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to0^+}\left(h(\chi)-f(\chi)+g(\chi)\right)=\lim\limits_{\chi\to0^+}\left(\dfrac{\ell n\chi+1}{\ell n\chi-1}-\dfrac{\chi+1}{\chi-1}+\ell n\chi\right)=-\infty$, διότι

$\lim\limits_{\chi\to0^+}\left(\dfrac{\ell n\chi+1}{\ell n\chi-1}\right)\overset{\text{μορφή }\frac{-\infty}{-\infty}}{=}\lim\limits_{\chi\to0^+}\left(\dfrac{1+\frac{1}{\ell n\chi}}{1-\frac{1}{\ell n\chi}}\right)=1$, $\lim\limits_{\chi\to0^+}\left(\dfrac{\chi+1}{\chi-1}\right)=-1$ και $\lim\limits_{\chi\to0^+}(\ell n\chi)=-\infty$.

Από το παραπάνω όριο συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\chi_1>0\ :\ \varphi(\chi_1)>0$. Έχουμε επίσης :

$\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=h\left(\dfrac{1}{2}\right)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)+g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\ell n\left(\frac{1}{2}\right)+1}{\ell n\left(\frac{1}{2}\right)-1}-\dfrac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}+\ell n\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-\ell n2+1}{-\ell n2-1}+3-\ell n2=\dfrac{\ell n2-1}{\ell n2+1}+3-\ell n2=$

$=\dfrac{-\ell n^2 2+3\cdot\ell n2+2}{\ell n2+1}=\dfrac{\ell n2\cdot\left(\underbrace{3-\ell n2}_{>0}\right)+2}{\ell n2+1}>0$.

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\chi_1\,,\ \dfrac{1}{2}\right]\subseteq\left[0\,,\ \dfrac{1}{2}\right]$ με $\varphi(\chi_1)\cdot\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$, άρα από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0\in\left(\chi_1\,,\ \dfrac{1}{2}\right)$, άρα και $\chi_0\in\left(0\,,\ \dfrac{1}{2}\right):\ \varphi(\chi_0)=0$.

ΘΕΜΑ Γ :

Γ1 . Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2}\,,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(\chi)=-\dfrac{(\sigma\upsilon\nu\chi)'}{\sigma\upsilon\nu\chi}-\chi=\dfrac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}-\chi=\varepsilon\varphi\chi-\chi=g(\chi)$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2}\,,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(\chi)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}-1=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}=\dfrac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}>0$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Για $0 \le \chi \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow g(\chi) \ge g(0) = 0$, άρα $f'(\chi) \ge 0$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$, με $f'(\chi) = 0$ για $\chi = 0$.

Για $-\frac{\pi}{2} < \chi < 0 \Leftrightarrow g(\chi) < g(0) = 0$, άρα $f'(\chi) < 0$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\right]$. Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $\chi = 0$, το $f(0) = 0$.

Γ2 . Επειδή $A_f = A_g = \left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g δεν έχουν οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες . Ελέγχουμε αν οι ευθείες $\chi = -\frac{\pi}{2}$ και $\chi = \frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f , g .

Έχουμε : $\lim\limits_{\chi \to -\frac{\pi}{2}^+} f(\chi) = \lim\limits_{\chi \to -\frac{\pi}{2}^+} \left(-\ell n(\sigma\upsilon\nu\chi) - \frac{\chi^2}{2}\right) = \ell$, όπου $\lim\limits_{\chi \to -\frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{\chi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8}$ και $\lim\limits_{\chi \to -\frac{\pi}{2}^+} \left(\ell n(\sigma\upsilon\nu\chi)\right) \overset{\sigma\upsilon\nu\chi = u}{=} \lim\limits_{u \to 0^+} (\ell n u) = -\infty$, οπότε παίρνουμε τελικά : $\ell = +\infty$, δηλαδή η ευθεία $\chi = -\frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f . Όμοια αποδεικνύουμε ότι : $\lim\limits_{\chi \to -\frac{\pi}{2}^-} f(\chi) = +\infty$, οπότε η ευθεία $\chi = \frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f . Έχουμε : $\lim\limits_{\chi \to -\frac{\pi}{2}^+} g(\chi) = \lim\limits_{\chi \to -\frac{\pi}{2}^+} (\varepsilon\varphi\chi - \chi) = m$, όπου $\lim\limits_{\chi \to -\frac{\pi}{2}^+} (\chi) = -\frac{\pi}{2}$ και $\lim\limits_{\chi \to -\frac{\pi}{2}^+} (\varepsilon\varphi\chi) = \lim\limits_{\chi \to -\frac{\pi}{2}^+} \left(\eta\mu\chi \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right) = -\infty$, διότι $\lim\limits_{\chi \to -\frac{\pi}{2}^+} (\eta\mu\chi) = -1$ και $\lim\limits_{\chi \to -\frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right) = +\infty$ ($\lim\limits_{\chi \to -\frac{\pi}{2}^+} (\sigma\upsilon\nu\chi) = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\chi > 0$ ¨ κοντά στο $-\frac{\pi}{2}$ ¨) , οπότε παίρνουμε τελικά : $m = -\infty$, δηλαδή η ευθεία $\chi = -\frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g . Όμοια αποδεικνύουμε ότι : $\lim\limits_{\chi \to \frac{\pi}{2}^-} g(\chi) = +\infty$, οπότε η ευθεία $\chi = \frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g . Έτσι οι ευθείες $\chi = -\frac{\pi}{2}$ και $\chi = \frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f , g .

Γ3 . Στο $\chi_0 = 0$ ισχύουν : $f(0) = g(0) = 0$ και $f'(0) = g'(0) = 0$, οπότε η ευθεία $\psi = 0$ (άξονας $\chi'\chi$) είναι κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $O(0\ ,\ 0)$. Θα αποδείξουμε ότι η αρχή των αξόνων είναι το μοναδικό κοινό τους σημείο στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa : \kappa(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$, όπου $\chi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ με

$$\kappa'(\chi) = f'(\chi) - g'(\chi) = g(\chi) - g'(\chi) = \varepsilon\varphi\chi - \chi - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} + 1 =$$

$$= \varepsilon\varphi\chi - \chi - \left(\varepsilon\varphi^2\chi + 1\right) + 1 = \varepsilon\varphi\chi - \chi - \varepsilon\varphi^2\chi\text{, όπου } \chi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Η συνάρτηση κ' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ με

$$\kappa''(\chi) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} - 1 - 2\varepsilon\varphi\chi \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2\chi - 2\varepsilon\varphi\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} = \frac{\eta\mu^2\chi - 2\varepsilon\varphi\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} =$$

$$= \frac{\eta\mu^2\chi - \dfrac{2\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} = \frac{\eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi - 2\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^3\chi} = \frac{\eta\mu\chi \cdot (\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi - 2)}{\sigma\upsilon\nu^3\chi} =$$

$$= \frac{\eta\mu\chi \cdot \left(\dfrac{\eta\mu2\chi}{2} - 2\right)}{\sigma\upsilon\nu^3\chi} = \frac{\eta\mu\chi \cdot (\eta\mu2\chi - 4)}{2 \cdot \sigma\upsilon\nu^3\chi}.$$

Έχουμε $\kappa''(0) = 0$. Για $\chi \in \left(0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ έχουμε : $\eta\mu\chi > 0$, $\sigma\upsilon\nu^3\chi > 0$, $\eta\mu2\chi - 4 < 0$ ($-1 \le \eta\mu2\chi \le 1$) , άρα $\kappa''(\chi) < 0$, οπότε η συνάρτηση κ' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, δηλαδή για $0 < \chi < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \kappa'(\chi) < \kappa'(0) = 0$, άρα η συνάρτηση κ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, δηλαδή για $0 < \chi < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \kappa(\chi) < \kappa(0) = 0$.

Για $\chi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ 0\right)$ έχουμε : $\eta\mu\chi < 0$, $\sigma\upsilon\nu^3\chi > 0$, $\eta\mu2\chi - 4 < 0$ ($-1 \le \eta\mu2\chi \le 1$) , άρα $\kappa''(\chi) > 0$, οπότε η συνάρτηση κ' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\right)$, δηλαδή για $-\frac{\pi}{2}<\chi<0 \Rightarrow \kappa'(\chi)<\kappa'(0)=0$, άρα η συνάρτηση κ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\right)$, δηλαδή για $-\frac{\pi}{2}<\chi<0 \Rightarrow \kappa(\chi)<\kappa(0)=0$.

Τελικά συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\chi\in\left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει : $\kappa(\chi)\le 0 \Leftrightarrow f(\chi)\le g(\chi)$, με μοναδικό κοινό τους σημείο το $O(0\ ,\ 0)$.

Γ4 . Έχουμε :

$$(\varepsilon\varphi\chi-\chi)\cdot h'(\chi)-\varepsilon\varphi^2\chi\cdot h(\chi)=(\varepsilon\varphi\chi-\chi)^2 \Rightarrow (\varepsilon\varphi\chi-\chi)\cdot h'(\chi)-(\varepsilon\varphi\chi-\chi)'\cdot h(\chi)=(\varepsilon\varphi\chi-\chi)^2$$

Για $\chi\in\left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)-\{0\}$ παίρνουμε :

$$\frac{(\varepsilon\varphi\chi-\chi)\cdot h'(\chi)-(\varepsilon\varphi\chi-\chi)'\cdot h(\chi)}{(\varepsilon\varphi\chi-\chi)^2}=1 \Rightarrow \left(\frac{h(\chi)}{\varepsilon\varphi\chi-\chi}\right)'=(\chi)' \ .$$

- Για $\chi\in\left(0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει : $\frac{h(\chi)}{\varepsilon\varphi\chi-\chi}=\chi+c_1$, όπου $c_1\in\mathbb{R}$.
- Για $\chi\in\left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\right)$ ισχύει : $\frac{h(\chi)}{\varepsilon\varphi\chi-\chi}=\chi+c_2$, όπου $c_2\in\mathbb{R}$. Άρα παίρνουμε :

$$h(\chi)=\begin{cases}\chi\cdot(\varepsilon\varphi\chi-\chi)+c_1\cdot(\varepsilon\varphi\chi-\chi)\ , & -\frac{\pi}{2}<\chi<0\\ \chi\cdot(\varepsilon\varphi\chi-\chi)+c_2\cdot(\varepsilon\varphi\chi-\chi)\ , & 0<\chi<\frac{\pi}{2}\\ c_3 \ , & \chi=0\end{cases} .$$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη , άρα και συνεχής στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε και στο $\chi_0=0$ οπότε ισχύει : , για την οποία ισχύουν : $\lim\limits_{\chi\to0^-}h(\chi)=\lim\limits_{\chi\to0^+}h(\chi)=h(0)\Rightarrow c_3=0$.

- $$h\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}\Rightarrow -\frac{\pi}{4}\cdot\left(\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)+c_1\cdot\left(\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}\Rightarrow$$
  $$\Rightarrow\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}+c_1\cdot\left(-1+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}\Rightarrow c_1=0\ .$$
- $$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}\Rightarrow\frac{\pi}{4}\cdot\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right)+c_2\cdot\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}\Rightarrow$$
  $$\Rightarrow\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}+c_2\cdot\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}\Rightarrow c_2=0\ .$$

Τελικά παίρνουμε :

$$h(\chi)=\begin{cases}\chi\cdot(\varepsilon\varphi\chi-\chi)\ ,\ -\dfrac{\pi}{2}<\chi<0\\ \chi\cdot(\varepsilon\varphi\chi-\chi)\ ,\quad 0<\chi<\dfrac{\pi}{2}\\ \quad 0 \qquad\quad ,\qquad \chi=0\end{cases}\Rightarrow h(\chi)=\chi\cdot(\varepsilon\varphi\chi-\chi)\ ,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ \chi\in\left(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)\ .$$

ΘΕΜΑ Δ :

Δ1. Έχουμε : $\alpha\cdot\beta\cdot\chi=\alpha^2\cdot\beta\cdot\sigma\varphi\theta$ και ακόμη

$\chi^2+\alpha^2=\alpha^2\cdot\sigma\varphi^2\theta+\alpha^2=\alpha^2\cdot\left(\sigma\varphi^2\theta+1\right)=\alpha^2\cdot\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta}+1\right)=\dfrac{\alpha^2}{\eta\mu^2\theta}$, οπότε παίρνουμε : ;

$$\frac{\alpha\cdot\beta\cdot\chi}{\chi^2+\alpha^2}=\frac{\alpha^2\cdot\beta\cdot\sigma\varphi\theta}{\dfrac{\alpha^2}{\eta\mu^2\theta}}=\beta\cdot\sigma\varphi\theta\cdot\eta\mu^2\theta=\beta\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}\cdot\eta\mu^2\theta=\beta\cdot\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=\psi\ .$$

Δ2 . Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή με

$f'(\chi)=\dfrac{\alpha\cdot\beta\cdot\left(\chi^2+\alpha^2\right)-\alpha\beta\chi\cdot\left(\chi^2+\alpha^2\right)'}{\left(\chi^2+\alpha^2\right)^2}=\dfrac{\alpha^3\cdot\beta-\alpha\beta\cdot\chi^2}{\left(\chi^2+\alpha^2\right)^2}$. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό

ακρότατο στη θέση $\chi_1=-2$ και επειδή είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_1=-2$, από το θεώρημα του

Fermat θα ισχύει : $f'(-2)=0\Leftrightarrow\dfrac{\alpha^3\cdot\beta-4\alpha\beta}{\left(4+\alpha^2\right)^2}=0\Leftrightarrow\dfrac{\alpha\cdot\beta\cdot\left(\alpha^2-4\right)}{\left(4+\alpha^2\right)^2}=0\overset{\alpha\,,\,\beta>0}{\Leftrightarrow}\alpha=2$.

Η συνάρτηση g έχει τύπο : $g(\chi)=\chi^2\cdot f(\chi)\overset{\alpha=2}{=}\dfrac{2\beta\cdot\chi^3}{\chi^2+4}$ και έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την

ευθεία $(\varepsilon)\rightarrow\psi=8\cdot\chi$, τότε από τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης παίρνουμε :

$$\lim_{\chi\to+\infty}\left(g(\chi)-8\cdot\chi\right)=0\Leftrightarrow\lim_{\chi\to+\infty}\left(\frac{2\beta\cdot\chi^3}{\chi^2+4}-8\chi\right)=0\Leftrightarrow\lim_{\chi\to+\infty}\left(\frac{(2\beta-8)\cdot\chi^3-32\cdot\chi}{\chi^2+4}\right)=0\Leftrightarrow(2\beta-8)\cdot\lim_{\chi\to+\infty}\chi=0\ .$$

Οι περιπτώσεις $2\beta-8>0$ και $2\beta-8<0$ αποκλείονται διότι δίνουν όρια $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα , άρα πρέπει : $2\beta-8=0\Leftrightarrow\beta=4$.

Δ3 . Έχουμε : $f(\chi)=\dfrac{8\cdot\chi}{\chi^2+4}$ και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή με

$$f'(\chi)=\frac{(8\cdot\chi)'\cdot\left(\chi^2+4\right)-8\cdot\chi\cdot\left(\chi^2+4\right)'}{\left(\chi^2+4\right)^2}=\frac{8\cdot\left(\chi^2+4\right)-16\cdot\chi^2}{\left(\chi^2+4\right)^2}=\frac{8\cdot(2-\chi)\cdot(2+\chi)}{\left(\chi^2+4\right)^2}\ .$$

Η εξίσωση $f'(\chi)=0$ δίνει ρίζες $\chi=-2$ ή $\chi=2$.

- Για $\chi\in(-2\ ,\ 2)$, έχουμε $4-\chi^2>0$, άρα $f'(\chi)>0$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-2\ ,\ 2)$.
- Για $\chi\in[2\ ,+\infty)$, έχουμε $4-\chi^2\le 0$, άρα $f'(\chi)\le 0$ (με $f'(2)=0$) , δηλαδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2\ ,+\infty)$.
- Για $\chi\in(-\infty\ ,-2]$, έχουμε $4-\chi^2\le 0$, άρα $f'(\chi)\le 0$ (με $f'(-2)=0$) , δηλαδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty\ ,-2]$.

Η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση $\chi_1=-2$ τοπικό ελάχιστο το $f(-2)=-2$, ενώ παρουσιάζει στη θέση $\chi_2=2$ τοπικό μέγιστο το $f(2)=2$. Επειδή όμως ισχύουν :

$f((-\infty\ ,-2])=\left[f(-2)\ ,\ \lim\limits_{\chi\to-\infty}f(\chi)\right)=[-2\ ,\ 0)$, $f((-2\ ,\ 2))=\left(\lim\limits_{\chi\to-2^+}f(\chi)\ ,\ \lim\limits_{\chi\to2^-}f(\chi)\right)=(-2\ ,\ 2)$,

$f([2\ ,+\infty))=\left(\lim\limits_{\chi\to+\infty}f(\chi)\ ,\ f(2)\right]=(0\ ,\ 2]$, οπότε τελικά παίρνουμε :

$f(\mathbb{R})=[-2\ ,\ 0)\cup(-2\ ,\ 2)\cup(0\ ,\ 2]=[-2\ ,\ 2]$, άρα στις θέσεις $\chi_1=-2$ και $\chi_2=2$ η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικά ακρότατα .

Η συνάρτηση f': $f'(\chi)=\dfrac{32-8\cdot\chi^2}{(\chi^2+4)^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή με

$$f''(\chi)=\frac{(32-8\cdot\chi^2)'\cdot(\chi^2+4)^2-(32-8\cdot\chi^2)\cdot\left((\chi^2+4)^2\right)'}{(\chi^2+4)^4}=\frac{-16\chi\cdot(\chi^2+4)^2-2\cdot(32-8\cdot\chi^2)\cdot(\chi^2+4)\cdot 2\chi}{(\chi^2+4)^4}=$$

$$=\frac{(\chi^2+4)\cdot\left[-16\chi\cdot(\chi^2+4)-4\chi\cdot(32-8\cdot\chi^2)\right]}{(\chi^2+4)^4}=\frac{-16\chi^3-64\chi-128\chi+32\chi^3}{(\chi^2+4)^3}=\frac{16\chi^3-192\chi}{(\chi^2+4)^3}=$$

$$=\frac{16\chi\cdot(\chi+2\sqrt{3})\cdot(\chi+2\sqrt{3})}{(\chi^2+4)^3}\ .$$

Έχουμε : $f''(\chi)=0\Leftrightarrow\chi=-2\sqrt{3}$ ή $\chi=0$ ή $\chi=2\sqrt{3}$, οπότε

$f''(\chi)>0$, για $\chi\in(-2\sqrt{3}\ ,\ 0)\cup(2\sqrt{3}\ ,\ +\infty)$, ενώ $f''(\chi)<0$, για $\chi\in(-\infty\ ,-2\sqrt{3})\cup(0\ ,\ 2\sqrt{3})$.

Τελικά η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρουσιάζει καμπή στα σημεία $O(0\ ,f(0)=0)$, $K(2\sqrt{3}\ ,\ f(2\sqrt{3})=\sqrt{3})$ και $\Lambda(-2\sqrt{3}\ ,\ f(-2\sqrt{3})=-\sqrt{3})$.

Δ4 . Επειδή η ευθεία $(\delta)\to\psi=\kappa\ //\ \chi'\chi$, άρα $AB\ //\ \Gamma\Delta$ και επειδή ισχύουν : $A\Delta\perp\chi'\chi$, $B\Gamma\perp\chi'\chi$, τότε θα έχουμε : $A\Delta\ //\ B\Gamma$, οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $\hat{\Delta}=90^\circ$, το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο . Έστω τα σημεία $A(\chi_1\ ,\ f(\chi_1))$,

$B(\chi_2 \, , \, f(\chi_2))$ της γραφικής παράστασης της f . , τέμνει τη γραφική παράσταση

Οι τετμημένες χ_1 , χ_2 είναι λύσεις της εξίσωσης :

$f(\chi)=\kappa \Leftrightarrow \dfrac{8\cdot\chi}{\chi^2+4}=\kappa \Leftrightarrow 8\cdot\chi=\kappa\cdot\chi^2+4\cdot\kappa \Leftrightarrow \kappa\cdot\chi^2-8\cdot\chi+4\cdot\kappa=0$ (1) , όπου $0<\kappa<2$.

Το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$ ισούται με $E(\kappa)=(AB)\cdot(A\Delta)=|\chi_2-\chi_1|\cdot f(\chi_1)$ (2) .

(**Παρατήρηση** : Γνωρίζουμε ότι σε μια εξίσωση β΄ βαθμού της μορφής $\alpha\cdot\chi^2+\beta\cdot\chi+\gamma=0$, όπου $\alpha\neq 0$ και $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma>0$, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες $\chi_1\neq\chi_2$, όπου $|\chi_1-\chi_2|=|\chi_2-\chi_1|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|\alpha|}$.)

Από τη σχέση (1) παίρνουμε : $\Delta=64-16\cdot\kappa^2=16\cdot(4-\kappa^2)>0$, αφού $0<\kappa<2$, οπότε , από τη σχέση (2) έχουμε : $E(\kappa)=|\chi_2-\chi_1|\cdot f(\chi_1)=\dfrac{\sqrt{16\cdot(4-\kappa^2)}}{|\kappa|}\cdot\kappa \overset{\kappa>0}{=} 4\cdot\sqrt{4-\kappa^2}$.

Η συνάρτηση h έχει τύπο : $h(\kappa)=\kappa\cdot E(\kappa)=4\kappa\cdot\sqrt{4-\kappa^2}$, όπου $0<\kappa<2$, είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0 \, , \, 2)$ ως γινόμενο και σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$h'(\kappa)=4\cdot\sqrt{4-\kappa^2}+4\kappa\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{4-\kappa^2}}\cdot(4-\kappa^2)'=4\cdot\sqrt{4-\kappa^2}-\frac{4\kappa^2}{\sqrt{4-\kappa^2}}=$$

$$\frac{4\cdot\left(\sqrt{4-\kappa^2}\right)^2-4\cdot\kappa^2}{\sqrt{4-\kappa^2}}=\frac{16-8\cdot\kappa^2}{\sqrt{4-\kappa^2}}=\frac{8\cdot(2-\kappa^2)}{\sqrt{4-\kappa^2}} \, , \, 0<\kappa<2$$

Έχουμε : $h'(\kappa)=0 \overset{0<\kappa<2}{\Leftrightarrow} \kappa=\sqrt{2}$. Για $0<\kappa<\sqrt{2}\Leftrightarrow h'(\kappa)>0$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0 \, , \, \sqrt{2})$. Επίσης για $\sqrt{2}\leq\kappa<2\Leftrightarrow h'(\kappa)\leq 0$, με $h'(\sqrt{2})=0$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\sqrt{2} \, , \, 0)$. Η συνάρτηση h παρουσιάζει στο $\kappa=\sqrt{2}$ τη μέγιστη τιμή της ίση με $h(\sqrt{2})=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=8$.