ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α :

Α1 . Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν ισχύει : $f'(\chi) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ . (10 Μονάδες)

Α2 . Να δώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f . (5 Μονάδες)

Α3 . Να διατυπώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Fermat . (10 Μονάδες)

Α4 . Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός : '' Αν $A(\chi_0 , f(\chi_0))$ είναι ένα κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ , τότε το σημείο A είναι και τοπικό ακρότατο της f στο Δ .''

(i) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή . (2 Μονάδες)

(ii) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας . (8 Μονάδες)

Α5. Να χαρακτηρίσετε στο γραπτό σας τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) .

(i) Στην οικονομία , αν Κ είναι το κόστος παραγωγής και εκφράζεται συναρτήσει της ποσότητας χ του παραγόμενου προϊόντος , τότε η παράγωγος $K'(\chi_0)$ ονομάζεται οριακό κόστος στο χ_0 .

(ii) Ισχύει : $\lim\limits_{\chi \to 0^+} (\chi^{\chi}) = 1$.

(iii) Τα άκρα του διαστήματος Δ είναι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f σε ένα διάστημα Δ .

(iv) Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ θα βρίσκεται ''πάνω'' από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(v) Όλες οι ρητές συναρτήσεις της μορφής $\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$, όπου $Q(\chi) \neq 0$, έχουν πλάγιες ασύμπτωτες .

(15 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β :

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο σύνολο $A=(0\ ,\ 1)\cup(1\ ,+\infty)$ για την οποία ισχύουν τα παρακάτω :

- $(\chi-1)\cdot f'(\chi)+f(\chi)=\dfrac{1}{\chi}$, για κάθε $\chi\in A$,
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ell n4$,
- η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $B=\left(e\ ,\ f(e)\right)$ τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο $\Gamma=\left(0\ ,\ \dfrac{e}{(e-1)^2}\right)$.

Β1 . Να αποδείξετε ότι : $f(\chi)=\dfrac{\ell n\chi}{\chi-1}$, για κάθε $\chi\in(0\ ,\ 1)\cup(1\ ,+\infty)$. (12 Μονάδες)

Β2 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (4 Μονάδες) και ότι οι συναρτήσεις $h=f\circ f^{-1}$ και $g=f^{-1}\circ f$ είναι ίσες . (6 Μονάδες)

(10 Μονάδες)

Β3 . Να λύσετε την εξίσωση : $\chi\cdot e^{\sigma\upsilon\nu\chi}=e^{\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi}$ στο διάστημα $\left(0\ ,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$. (5 Μονάδες)

Β4 . Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν έχει σημεία καμπής .

(7 Μονάδες)

Β5 . Να υπολογίσετε , εάν υπάρχει , το όριο : $\lim\limits_{\chi\to f(e)}\dfrac{(e-1)\chi-1}{f^{-1}(\chi)-e}$. (5 Μονάδες)

Β6 . Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο διάστημα $(1\ ,+\infty)$ στο οποίο η εφαπτομένη να σχηματίζει με τις ασύμπτωτες ισοσκελές τρίγωνο . (8 Μονάδες)

Β7 . Να σχεδιάσετε με στυλό την γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (3 Μονάδες)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!

ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α :

Α1 . Απόδειξη : Έστω $\chi_1 , \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$. Θα αποδείξουμε ότι $f(\chi_1) < f(\chi_2)$. Πράγματι , στο διάστημα $[\chi_1 , \chi_2]$ η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει

$\xi \in (\chi_1 , \chi_2)$ τέτοιο , ώστε να ισχύει : $f'(\xi) = \dfrac{f(\chi_2) - f(\chi_1)}{\chi_2 - \chi_1}$, οπότε έχουμε :

$f(\chi_2) - f(\chi_1) = f'(\xi)\cdot(\chi_2 - \chi_1)$. Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $\chi_2 - \chi_1 > 0$, έχουμε $f(\chi_2) - f(\chi_1) > 0$, οπότε $f(\chi_1) < f(\chi_2)$.

Α2 . Ορισμός : Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α , β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του χ_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α , χ_0) και κοίλη στο (χ_0 , β) ή αντιστρόφως και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$,

τότε το σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Α3 . Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Fermat : Αν σε ένα εσωτερικό σημείο χ_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό , τότε στο σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι οριζόντια , δηλαδή ισχύει : $f'(\chi_0) = 0$.

Α4 . (i) Ο ισχυρισμός είναι ψευδής .

(ii) Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} \chi^3 & , \ \chi < 1 \\ (\chi - 2)^2 , & \chi \geq 1 \end{cases}$ ....αντιπαράδειγμα βιβλίου σελ . 143—144 **ή αλλιώς** μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(\chi) = 3\chi^2$. Ισχύει : $f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow \chi = 0$, άρα το 0 είναι κρίσιμο σημείο της f , αλλά όχι τοπικό ακρότατο , αφού ισχύει $f'(\chi) \geq 0$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Α5.

(i) Σωστό (βιβλίο σελ . 123—124)

(ii) Σωστό ($\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(\chi^{\chi}\right)=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(e^{\chi\cdot\ln\chi}\right)$. Θέτουμε $u(\chi)=\chi\cdot\ell n\chi$, οπότε

$$\lim_{\chi\to 0^+}\left(\chi\cdot\ell n\chi\right)^{0\cdot(-\infty)}=\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\ell n\chi}{\frac{1}{\chi}}$$ και επειδή $$\lim_{\chi\to 0^+}\frac{(\ell n\chi)'}{\left(\frac{1}{\chi}\right)'}=\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\frac{1}{\chi}}{-\frac{1}{\chi^2}}=\lim_{\chi\to 0^+}(-\chi)=0$$

από κανόνα D .L.H θα ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(\chi\cdot\ell n\chi\right)^{0\cdot(-\infty)}=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\frac{\ell n\chi}{\frac{1}{\chi}}=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\frac{(\ell n\chi)'}{\left(\frac{1}{\chi}\right)'}=0$,

άρα $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(\chi^{\chi}\right)=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(e^{\chi\cdot\ln\chi}\right)=\lim\limits_{u(\chi)\to 0^-}e^{u(\chi)}=e^0=1$.)

(iii) Λάθος (Αν το διάστημα είναι <u>ανοικτό</u> τα άκρα του διαστήματος Δ δεν ανήκουν στο Δ , οπότε δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f στο Δ .)

(iv) Λάθος (Σχόλιο βιβλίου σελ . 156 .)

(v) Λάθος (Σχόλιο βιβλίου σελ. 163 .)

ΘΕΜΑ Β :

Β1 . Έχουμε :

$$(\chi-1)\cdot f'(\chi)+f(\chi)=\frac{1}{\chi}\Leftrightarrow\left(\chi\cdot f'(\chi)+f(\chi)\right)-f'(\chi)=(\ell n\chi)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\chi\cdot f(\chi)-f(\chi)\right)'=(\ell n\chi)'\Leftrightarrow(\chi-1)f(\chi)=\begin{cases}\ell n\chi+c_1\ ,\ \chi\in(0\ ,\ 1)\\ \ell n\chi+c_2\ ,\ \chi\in(1\ ,+\infty)\end{cases}\qquad (\mathrm{I})$$

Για $\chi=\frac{1}{2}\in(0\ ,\ 1)$ ισχύει :

$$\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=\ell n\frac{1}{2}+c_1\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\cdot\ell n4=-\ell n2+c_1\Leftrightarrow-\ell n2=-\ell n2+c_1\Leftrightarrow c_1=0\ .$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $B=\left(e\ ,\ f(e)\right)$

είναι : $\psi-f(e)=f'(e)\cdot(\chi-e)$. Για $\chi=0$, $\psi=\frac{e}{(e-1)^2}$ έχουμε :

$\frac{e}{(e-1)^2}-f(e)=-e\cdot f'(e)$ (1) . Για $\chi=e$, η σχέση (Ι) γίνεται : $(e-1)\cdot f'(e)+f(e)=\frac{1}{e}$ (2) .

Λύνουμε το σύστημα των (1) , (2) για να βρούμε το $f(e)$. Από την (1) ισχύει :

$$f'(e)=\frac{\dfrac{e}{(e-1)^2}-f(e)}{-e}=\frac{f(e)}{e}-\frac{1}{(e-1)^2}$$ και η (2) γίνεται :

$$(e-1)\cdot\left[\frac{f(e)}{e}-\frac{1}{(e-1)^2}\right]+f(e)=\frac{1}{e}\Leftrightarrow(e-1)\cdot\frac{f(e)}{e}-\frac{1}{e-1}+f(e)=\frac{1}{e}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{e-1}{e}+1\right)\cdot f(e)=\frac{1}{e-1}+\frac{1}{e}\Leftrightarrow\left(\frac{e-1}{e}+1\right)\cdot f(e)=\frac{2e-1}{e\cdot(e-1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2e-1}{e}\cdot f(e)=\frac{2e-1}{e\cdot(e-1)}\Leftrightarrow f(e)=\frac{1}{e-1}$$

Για $\chi=e$ η σχέση (Ι) γίνεται : $(e-1)\cdot f(e)=\ell ne+c_2\Leftrightarrow(e-1)\cdot\dfrac{1}{e-1}=1+c_2\Leftrightarrow c_2=0$.

Άρα $c_1=c_2=0$, οπότε ο τύπος της συνάρτησης f είναι : $f(\chi)=\dfrac{\ell n\chi}{\chi-1}$, για κάθε $\chi\in A=(0\ ,\ 1)\cup(1\ ,+\infty)$.

Β2 . Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα A με

$$f'(\chi)=\frac{(\ell n\chi)'\cdot(\chi-1)-\ell n\chi\cdot(\chi-1)'}{(\chi-1)^2}=\frac{\dfrac{\chi-1}{\chi}-\ell n\chi}{(\chi-1)^2}=\frac{\chi-1-\chi\cdot\ell n\chi}{\chi\cdot(\chi-1)^2}\quad(3)$$, όπου $\chi\cdot(\chi-1)^2>0$,

για κάθε $\chi\in A$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa:\ \kappa(\chi)=\chi-1-\chi\cdot\ell n\chi$, όπου $\chi\in(0\ ,+\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,+\infty)$ με $\kappa'(\chi)=1-\ell n\chi-\chi\cdot\dfrac{1}{\chi}=-\ell n\chi$.

$\kappa'(\chi)=0\Leftrightarrow-\ell n\chi=0\Leftrightarrow\chi=1$. Για $0<\chi<1\Leftrightarrow\ell n\chi<0\Leftrightarrow\kappa'(\chi)>0$, άρα η συνάρτηση κ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\ ,\ 1)$, ενώ για $\chi>1\Leftrightarrow\ell n\chi>0\Leftrightarrow\kappa'(\chi)<0$, άρα η συνάρτηση κ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1\ ,+\infty)$, οπότε για $0<\chi<1\Leftrightarrow\kappa(\chi)<\kappa(1)=0$, ενώ για $\chi>1\Leftrightarrow\kappa(\chi)<\kappa(1)=0$. Η συνάρτηση κ είναι συνεχής στο $(0\ ,+\infty)$ και ισχύει $\kappa(\chi)<0\Leftrightarrow f'(\chi)<0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $\chi\in A$, οπότε και 1—1 , δηλαδή η f αντιστρέφεται .

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0\ ,\ 1)$, άρα το σύνολο τιμών της είναι : $f((0\ ,\ 1))=\left(\lim\limits_{\chi\to1^-}f(\chi)\ ,\ \lim\limits_{\chi\to0^+}f(\chi)\right)$.

- $\lim\limits_{\chi\to 1^-} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 1^-} \dfrac{\ell n\chi}{\chi-1}$ που είναι απροσδιόριστη μορφή 0/0 και επειδή

  $\lim\limits_{\chi\to 1^-} \dfrac{(\ell n\chi)'}{(\chi-1)'} = \lim\limits_{\chi\to 1^-} \dfrac{\frac{1}{\chi}}{1} = 1$, από κανόνα D. L. H θα ισχύει :

  $\lim\limits_{\chi\to 1^-} \dfrac{\ell n\chi}{\chi-1} = \lim\limits_{\chi\to 1^-} \dfrac{(\ell n\chi)'}{(\chi-1)'} = 1$.

- $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 0^+} \dfrac{\ell n\chi}{\chi-1} = \lim\limits_{\chi\to 0^+} \left(\dfrac{1}{\chi-1}\cdot \ell n\chi\right) = +\infty$, διότι $\lim\limits_{\chi\to 0^+} \left(\dfrac{1}{\chi-1}\right) = -1$,

  $\lim\limits_{\chi\to 0^+} \ell n\chi = -\infty$. Τελικά $f((0\ ,\ 1)) = (1\ ,+\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(1\ ,+\infty)$, άρα το σύνολο τιμών της είναι : $f((1\ ,+\infty)) = \left(\lim\limits_{\chi\to +\infty} f(\chi)\ ,\ \lim\limits_{\chi\to 1^+} f(\chi)\right)$

- Όμοια ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to 1^+} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 1^+} \dfrac{\ell n\chi}{\chi-1} = \lim\limits_{\chi\to 1^+} \dfrac{(\ell n\chi)'}{(\chi-1)'} = 1$.

- $\lim\limits_{\chi\to +\infty} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to +\infty} \dfrac{\ell n\chi}{\chi-1}$ που είναι απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ και επειδή

  $\lim\limits_{\chi\to +\infty} \dfrac{(\ell n\chi)'}{(\chi-1)'} = \lim\limits_{\chi\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{\chi}}{1} = 0$, από κανόνα D. L. H θα ισχύει :

  $= \lim\limits_{\chi\to +\infty} \dfrac{\ell n\chi}{\chi-1} = \lim\limits_{\chi\to +\infty} \dfrac{(\ell n\chi)'}{(\chi-1)'} = \lim\limits_{\chi\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{\chi}}{1} = 0$. Τελικά $f((1\ ,+\infty)) = (0\ ,\ 1)$, οπότε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα A είναι το $f(A) = (0\ ,\ 1)\cup(1\ ,+\infty) = A$

Για τις συναρτήσεις $h\ ,\ g$ έχουμε :

$h(\chi) = (f\circ f^{-1})(\chi) = f(f^{-1}(\chi)) = \chi$, για κάθε $\chi\in f(A)$

$g(\chi) = (f^{-1}\circ f)(\chi) = f^{-1}(f(\chi)) = \chi$, για κάθε $\chi\in A$. Επειδή ισχύει : $A = f(A)$, άρα

$A_h = A_g = A$ και $h(\chi) = g(\chi) = \chi$, για κάθε $\chi\in A$, άρα $h = g$.

B3 . Η εξίσωση : $\chi \cdot e^{\sigma\upsilon\nu\chi} = e^{\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi}$, για $\chi \in \left(0\,,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, γράφεται ισοδύναμα :

$$\ell n\left(\chi \cdot e^{\sigma\upsilon\nu\chi}\right) = \ell n\left(e^{\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi}\right) \Leftrightarrow \ell n\chi + \ell n\, e^{\sigma\upsilon\nu\chi} = \chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi \ \Leftrightarrow \ell n\chi\ + \sigma\upsilon\nu\chi = \chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ell n\chi\ = (\chi - 1)\cdot \sigma\upsilon\nu\chi \overset{\chi\neq 1}{\Leftrightarrow} \frac{\ell n\chi}{\chi - 1} = \sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow f(\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi\ .$$

Επειδή $\chi \in \left(0\,,\ \dfrac{\pi}{4}\right) \subseteq (0\,,\ 1)$ και $f\left((0\,,\ 1)\right) = (1\,,+\infty)$, άρα για κάθε $\chi \in (0\,,\ 1)$, άρα και $\chi \in \left(0\,,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ ισχύει : $f(\chi) > 1$ και $\sigma\upsilon\nu\chi \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\ 1\right)$, αφού η $\sigma\upsilon\nu\chi$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0\,,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, οπότε η αρχική εξίσωση είναι **αδύνατη** στο $\left(0\,,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

B4 . Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο A , ως πηλίκο και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει :

$$f''(\chi) = \left(\frac{\chi - 1 - \chi\cdot\ell n\chi}{\chi\cdot(\chi-1)^2}\right)' = \frac{(\chi - 1 - \chi\cdot\ell n\chi)'\cdot\chi\cdot(\chi-1)^2 - (\chi - 1 - \chi\cdot\ell n\chi)\cdot\left(\chi\cdot(\chi-1)^2\right)'}{\chi^2\cdot(\chi-1)^4} =$$

$$= \frac{-\chi\cdot\ell n\chi\cdot(\chi-1)^2 - (\chi - 1 - \chi\cdot\ell n\chi)\cdot\left((\chi-1)^2 + 2\chi\cdot(\chi-1)\right)}{\chi^2\cdot(\chi-1)^4} =$$

$$= \frac{-(\chi-1)\cdot\left[\chi\cdot(\chi-1)\cdot\ell n\chi + (\chi - 1 - \chi\cdot\ell n\chi)\cdot(3\chi-1)\right]}{\chi^2\cdot(\chi-1)^4} =$$

$$= \frac{-(\chi-1)\cdot\left[\chi^2\cdot\ell n\chi - \chi\cdot\ell n\chi + 3\chi^2 - \chi - 3\chi + 1 - \chi^2\cdot\ell n\chi + \chi\cdot\ell n\chi\right]}{\chi^2\cdot(\chi-1)^4} =$$

$$= \frac{-(\chi-1)\cdot\left(3\chi^2 - 4\chi + 1 - 2\chi^2\cdot\ell n\chi\right)}{\chi^2\cdot(\chi-1)^4} \quad (4)\,,\ \chi \in (0\,,\ 1)\cup(1\,,+\infty)\ .$$

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi : \varphi(\chi) = 3\chi^2 - 4\chi + 1 - 2\chi^2\cdot\ell n\chi$, όπου $\chi \in (0\,,+\infty)$, με $\varphi(1) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$, ως άθροισμα και γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(\chi) = 6\chi - 4 - 4\chi\cdot\ell n\chi - 2\chi^2\cdot\dfrac{1}{\chi} = 4\cdot(\chi - 1 - \chi\cdot\ell n\chi) \le 0$, για κάθε $\chi \in (0\,,+\infty)$, όπως είδαμε στο ερώτημα B2 , με $\varphi'(1) = 0$. οπότε η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0\,,+\infty)$.

Για $0<\chi<1 \Leftrightarrow \varphi(\chi)>\varphi(1)=0$ και επειδή $\chi-1<0$, $\varphi(\chi)>0 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} f''(\chi)>0$, άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0\ ,\ 1)$. Για $\chi>1 \Leftrightarrow \varphi(\chi)<\varphi(1)=0$ και επειδή $\chi-1>0$, $\varphi(\chi)<0 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} f''(\chi)>0$, άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(1\ ,+\infty)$. Ισχύει τελικά $f''(\chi)>0$, για κάθε $\chi \in A$, δηλαδή η f είναι κυρτή στο A , οπότε δεν παρουσιάζει σημεία καμπής .

B5 . Το όριο : $\lim\limits_{\chi\to f(e)} \dfrac{(e-1)\cdot\chi-1}{f^{-1}(\chi)-e}=\ell$ είναι της απροσδιόριστης μορφής 0/0 .

Έχουμε :

$$\ell=\lim_{\chi\to f(e)}\frac{(e-1)\cdot\left(\chi-\dfrac{1}{e-1}\right)}{f^{-1}(\chi)-e}=(e-1)\cdot\lim_{\chi\to f(e)}\frac{\chi-f(e)}{f^{-1}(\chi)-e}\overset{\chi\to f(\chi)}{=}(e-1)\cdot\lim_{f(\chi)\to f(e)}\frac{f(\chi)-f(e)}{f^{-1}(f(\chi))-e}=$$

$$\overset{f\ \text{συνεχής στο}\ \chi=e}{=}(e-1)\cdot\lim_{f(\chi)\to f(e)}\frac{f(\chi)-f(e)}{f^{-1}(f(\chi))-e}=(e-1)\cdot\lim_{\chi\to e}\frac{f(\chi)-f(e)}{\chi-e}=$$

$$\overset{f\ \text{παραγωγίσιμη στο}\ \chi=e}{=}(e-1)\cdot f'(e)\ .$$

Από την (3) για $\chi=e$ παίρνουμε : $f'(e)=\dfrac{e-1-e\cdot\ell ne}{e\cdot(e-1)^2}=-\dfrac{1}{e\cdot(e-1)^2}$, άρα

$$\ell=(e-1)\cdot f'(e)=(e-1)\cdot\left(-\frac{1}{e\cdot(e-1)^2}\right)=-\frac{1}{e\cdot(e-1)}\ .$$

B6 . Η ευθεία $\psi=0$ (ο άξονας $\chi'\chi$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , διότι ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)=0$. Η ευθεία $\chi=0$ (ο άξονας $\psi'\psi$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , διότι ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)=+\infty$.

Η ευθεία $\chi=1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , διότι ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to 1^+} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1^-} f(\chi)=1$.

Έστω ότι υπάρχει σημείο $M(\chi_0\ ,\ \psi_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , όπου $\chi_0>1$, στο οποίο η εφαπτομένη σχηματίζει με τις ασύμπτωτες – άξονες $\chi'\chi$, $\psi'\psi$ ισοσκελές τρίγωνο .

Η εφαπτομένη της γραφικής της f στο σημείο M είναι η εξής : $\psi - f(\chi_0) = f'(\chi_0)\cdot(\chi - \chi_0)$ (5) , με $f'(\chi_0) < 0$, αφού από το B1 ερώτημα για κάθε $\chi \in \mathrm{A}$, ισχύει : $f'(\chi) < 0$. Για $\psi = 0$, η (5) γίνεται : $-f(\chi_0) = f'(\chi_0)\cdot\chi - f'(\chi_0)\cdot\chi_0 \Leftrightarrow \chi = \dfrac{f'(\chi_0)\cdot\chi_0 - f(\chi_0)}{f'(\chi_0)}$, άρα

$$\mathrm{K}\left(\dfrac{f'(\chi_0)\cdot\chi_0 - f(\chi_0)}{f'(\chi_0)}\ ,\ 0\right).$$

Για $\chi = 0$, η (5) γίνεται : $\psi = f(\chi_0) - f'(\chi_0)\cdot\chi_0$, άρα $\Lambda\left(0\,,\, f(\chi_0) - f'(\chi_0)\cdot\chi\right)$.

Αφού το τρίγωνο ΟΚΛ , όπου Ο(0,0) είναι ισοσκελές θα ισχύει :

$$(\mathrm{OK}) = (\mathrm{O}\Lambda) \Leftrightarrow \left|\dfrac{f'(\chi_0)\cdot\chi_0 - f(\chi_0)}{f'(\chi_0)}\right| = \left[f(\chi_0) - f'(\chi_0)\cdot\chi_0\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\dfrac{f'(\chi_0)\cdot\chi_0 - f(\chi_0)}{f'(\chi_0)}\right| - \left[f(\chi_0) - f'(\chi_0)\cdot\chi_0\right] = 0 \overset{f'(\chi_0)<0}{\Leftrightarrow} \left|f'(\chi_0)\cdot\chi_0 - f(\chi_0)\right|\cdot\left(-\dfrac{1}{f'(\chi_0)} - 1\right) = 0 \quad (6)$$

Αν η εφαπτομένη της εξίσωσης (5) διερχόταν από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) , για $\chi = \psi = 0$, θα έχουμε : $f(\chi_0) = f'(\chi_0)\cdot\chi_0 \Leftrightarrow f'(\chi_0)\cdot\chi_0 - f(\chi_0) = 0$, αλλά τότε δεν θα σχημάτιζε με τους άξονες κάποιο τρίγωνο , άρα ισχύει : $f(\chi_0) \neq f'(\chi_0)$, για κάθε $\chi_0 > 1$, οπότε από την (6) έχουμε : $-\dfrac{1}{f'(\chi_0)} - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(\chi_0) = -1 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \dfrac{\chi_0 - 1 - \chi_0\cdot\ell n\chi_0}{\chi_0\cdot(\chi_0 - 1)^2} = -1$ (7) , όπου $\chi_0 > 1$.

Από την (7) προκύπτει (με διάσπαση κλάσματος) ότι :

$$\dfrac{\chi_0 - 1}{\chi_0\cdot(\chi_0 - 1)^2} - \dfrac{\chi_0\cdot\ell n\chi_0}{\chi_0\cdot(\chi_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\chi_0\cdot(\chi_0 - 1)} - \dfrac{\ell n\chi_0}{(\chi_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\overset{\chi_0 - 1 > 0}{\Leftrightarrow} (\chi_0 - 1)\cdot\dfrac{1}{\chi_0\cdot(\chi_0 - 1)} - (\chi_0 - 1)\cdot\dfrac{\ell n\chi_0}{(\chi_0 - 1)^2} = -\chi_0 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\chi_0} - \dfrac{\ell n\chi_0}{\chi_0 - 1} = -\chi_0 + 1 \Leftrightarrow \dfrac{\ell n\chi_0}{\chi_0 - 1} = \dfrac{1}{\chi_0} + \chi_0 - 1 \Leftrightarrow \dfrac{\ell n\chi_0}{\chi_0 - 1} = \dfrac{1 + \chi_0^{\,2} - \chi_0}{\chi_0} \quad (8)$$

Γνωρίζουμε όμως από γνωστή εφαρμογή του βιβλίου ότι ισχύει : $\ell n\chi \leq \chi - 1$, για κάθε $\chi > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\chi = 1$. Άρα για κάθε $\chi_0 > 1$ ισχύει :

$$\ell n\chi_0 < \chi_0 - 1 \overset{\chi_0 > 1}{\Leftrightarrow} \dfrac{\ell n\chi_0}{\chi_0 - 1} < 1 \overset{(8)}{\Leftrightarrow} \dfrac{1 + \chi_0^{\,2} - \chi_0}{\chi_0} < 1 \overset{\chi_0 > 0}{\Leftrightarrow} 1 + \chi_0^{\,2} - \chi_0 < \chi_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \chi_0^{\,2} - 2\cdot\chi_0 + 1 < 0 \Leftrightarrow (\chi_0 - 1)^2 < 0 \ ,\ \text{άτοπο}\ .$$

Άρα δεν υπάρχει στο διάστημα $(1\,,+\infty)$ εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , η οποία να σχηματίζει με τις ασύμπτωτες ισοσκελές τρίγωνο .

Β7 . Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(\chi)=\dfrac{\ell n\chi}{\chi-1}$, όπου $\chi\in A=(0\ ,\ 1)\cup(1\ ,+\infty)$ στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οχψ δίνεται από το παρακάτω σχήμα :