ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α :

Α1 . Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και χ_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο χ_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό , τότε να αποδείξετε ότι : $f'(\chi_0)=0$.

(6 **Μονάδες)**

Α2 . Να αναφέρετε ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μίας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ . (3 **Μονάδες)**

Α3 . Πότε η ευθεία $\chi=\chi_0$ θα λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; (3 **Μονάδες)**

Α4 . Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός : '' Δεν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία να έχει την ίδια πλάγια ασύμπτωτη με την παράγωγό της στο $+\infty$.''

(i) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή . **(2 Μονάδες)**

(ii) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας . (6 **Μονάδες)**

Α5. Να χαρακτηρίσετε στο γραπτό σας τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) .

(i) Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\chi)\neq 0$, για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$, τότε , εάν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<0$ θα ισχύει: $f(\chi)<0$, για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$.

(ii) Αν για τις συνεχείς συναρτήσεις $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε , υπάρχει πάντοτε αριθμός $\chi_0\in(\alpha,\beta)$: $f(\chi_0)=g(\chi_0)$.

(iii) Εάν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f'(\chi)=f'(\chi_0)$, τότε η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο χ_0.

(iv) Εάν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(\alpha\,,\,\beta)$ και ο αριθμός χ_0 είναι η μοναδική ρίζα της συνάρτησης f' στο διάστημα $(\alpha\,,\,\beta)$, τότε η τιμή $f(\chi_0)$ είναι ολικό ακρότατο της συνάρτησης f στο διάστημα $(\alpha\,,\,\beta)$.

(v) Εάν για την παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση $f:(0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύουν :

$f'(\chi)<f(\chi+1)-f(\chi)<f'(\chi+1)$, $\chi>0$, $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)=2020$, τότε , επίσης θα ισχύει :

$\lim\limits_{\chi\to+\infty} f'(\chi)=2020$. **(5 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β :

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(\chi)=\begin{cases}\ell n(\chi+1)+e^{\chi}-1\;, & \chi\geq 0\\ \eta\mu\chi+\chi\;, & \chi<0\end{cases}$.

Β1 . Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$ και να ορίσετε τη συνάρτηση f' . (7 **Μονάδες)**

Β2 . Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της . (7 **Μονάδες)**

Β3 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(0\,,+\infty)$ και να αποδείξετε ότι : $\ell n\dfrac{(\chi+1)^2}{4}+2\cdot e^{\chi}\geq(1+2e)\cdot\chi-1$, για κάθε $\chi>0$. **(5 Μονάδες)**

Β4 . Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση ενός τυχαίου σημείου $M(\boldsymbol{\chi}\,,\mathbf{f}(\boldsymbol{\chi}))$, όπου $\chi\geq 0$, της καμπύλης της συνάρτησης f από την εφαπτομένη της $\mathbf{C_f}$ στο σημείο της με τετμημένη $\chi_1=-\dfrac{\pi}{2}$. (6 **Μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ :

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(\chi)=e^{\chi}-e^{-\chi}+\alpha\cdot\chi$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$. Έστω F μία παράγουσα της συνάρτησης f για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$. Δίνεται ακόμη η συνάρτηση g με τύπο $g(\chi)=\ell n(f(\chi))-\chi$, η οποία είναι ορισμένη στο διάστημα $(0\,,+\infty)$.

Γ1 . Να αποδείξετε ότι : $\alpha = -2$. (3 **Μονάδες)**

Γ2 . Να αποδείξετε ότι από το σημείο $A(0\ ,\ 1)$ άγεται μοναδική εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (6 **Μονάδες)**

Γ3 . Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της . (6 **Μονάδες)**

Γ4 . Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g δεν έχουν κοινά σημεία . (3 **Μονάδες)**

Γ5 . Αν $F(0) = 2$, να αποδείξετε ότι : $F(\chi) = e^{\chi} + e^{-\chi} - \chi^2$ και να κάνετε μία πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης F . (7 **Μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ :

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(\chi) = \chi \cdot \sqrt{\dfrac{\chi^2 - 1}{4 - \chi^2}}$.

Δ1 . Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A_f και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία . (7 **Μονάδες)**

Δ2 . Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και να βρείτε , εάν υπάρχουν , τις ασύμπτωτες της $\mathbf{C_f}$. (6 **Μονάδες)**

Δ3 . (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} . (4 **Μονάδες)**

(β) Να βρείτε , εάν υπάρχουν , τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} . (2 **Μονάδες)**

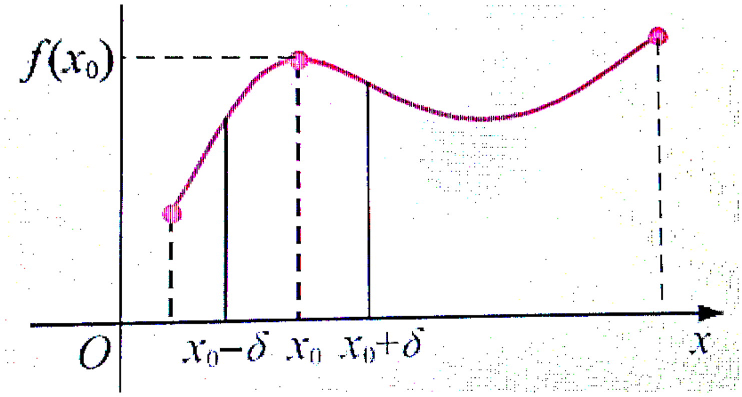
Δ4 . Να υπολογίσετε , εάν υπάρχει , το όριο : $\lim\limits_{\chi \to 1} \dfrac{|\,f(\chi)\,|}{(\chi - 1)\cdot \ell n\big(-\eta\mu(\pi\cdot\chi)\big)}$. (6 **Μονάδες)**

ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α :

Α1 . Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο χ_0 τοπικό μέγιστο . Επειδή το χ_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ ’ αυτό τοπικό μέγιστο , υπάρχει $\delta > 0$



τέτοιο , ώστε $(\chi_0 - \delta \, , \, \chi_0 - \delta) \subseteq \Delta$ και $f(\chi) \leq f(\chi_0)$, για κάθε $\chi \in (\chi_0 - \delta \, , \, \chi_0 - \delta)$ (1) .

Επειδή , επιπλέον , η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 , ισχύει :

$$f'(\chi_0) = \lim_{\chi \to \chi_0^-} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} = \lim_{\chi \to \chi_0^+} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} .$$

Επομένως ,

- Αν $\chi \in (\chi_0 - \delta \, , \, \chi_0)$, τότε , λόγω της (1) θα είναι $\dfrac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} \geq 0$, οπότε

  θα έχουμε $f'(\chi_0) = \lim\limits_{\chi \to \chi_0^-} \dfrac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} \geq 0$ (2)

- Αν $\chi \in (\chi_0 \, , \, \chi_0 + \delta)$, τότε , λόγω της (1) θα είναι $\dfrac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} \leq 0$, οπότε

  θα έχουμε $f'(\chi_0) = \lim\limits_{\chi \to \chi_0^+} \dfrac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} \leq 0$ (3)

Έτσι , από τις (2) και (3) έχουμε : $f'(\chi_0) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη .

Α2 . Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μίας συνάρτησης f σ’ ένα διάστημα Δ είναι

- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται , και
- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .

Α3 . Η ευθεία $\chi=\chi_0$ θα λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f , αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^+} f(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^-} f(\chi)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Α4 . (i) Ο ισχυρισμός είναι αληθής .

(ii) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση . Τότε θα υπάρχουν αριθμοί $\alpha , \beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$ τέτοιοι , ώστε η ευθεία $\psi=\alpha\cdot\chi+\beta$ να είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f και της συνάρτησης f' . Τότε θα ισχύουν : $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\alpha$ (1) και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f'(\chi)}{\chi}=\alpha$ (2) . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\alpha>0$. Τότε , για κάθε $\chi\neq0$ ισχύει : $f(\chi)=\dfrac{f(\chi)}{\chi}\cdot\chi$, άρα $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)=+\infty$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο : $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi^2}$ που είναι της μορφής $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Επειδή $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f'(\chi)}{(\chi^2)'}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f'(\chi)}{2\cdot\chi}=\dfrac{\alpha}{2}$, από τον κανόνα De l ' Hospital θα ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi^2}=\dfrac{\alpha}{2}$. Όμως από τη σχέση $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\alpha$ προκύπτει ότι : $\dfrac{\alpha}{2}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi^2}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\chi}\cdot\dfrac{f(\chi)}{\chi}\right)=0\Rightarrow\alpha=0$, το οποίο είναι άτοπο , άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση .

Α5. (i) **Σωστό** (διότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο διάστημα $[\alpha , \beta]$, άρα από συνέπεια θεωρήματος Bolzano , η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha , \beta]$ και επειδή είναι και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha , \beta]$ για $\alpha\le\chi\le\dfrac{\alpha+\beta}{2}\Rightarrow f(\chi)\le f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)<0\Rightarrow f(\chi)<0$.

(ii) **Λάθος** (διότι αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f : f(\chi)=\chi^3$, $g : g(\chi)=-\ell n\chi$ ορισμένες στο διάστημα $[1 , e]$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1 , e]$, η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1 , e]$, αλλά η συνάρτηση η $h : h(\chi)=f(\chi)-g(\chi)=\chi^3+\ell n\chi$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1 , e]$ (ως παραγωγίσιμη με $h'(\chi)=3\cdot\chi^2+\dfrac{1}{\chi}>0$, για κάθε $\chi\in[1 , e]$) , αλλά δεν έχει ρίζα στο

$[1\ ,\ e]$, διότι είναι συνεχής με σύνολο τιμών το $h([1\ ,\ e]) = [h(1)\ ,\ h(e)] = [1\ ,\ e^3+1]$ και $0 \notin h([1\ ,\ e])$) .

(iii) Λάθος (διότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : f(\chi) = \begin{cases} \chi^2 \cdot \eta\mu \dfrac{1}{\chi}\ , & \alpha\nu\ \chi \neq 0 \\ 0 \quad , & \alpha\nu\ \chi = 0 \end{cases}$,

τότε αυτή είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως γινόμενο και σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(\chi) = 2\chi \cdot \eta\mu \dfrac{1}{\chi} + \chi^2 \cdot \sigma\upsilon\nu \dfrac{1}{\chi} \cdot \left(-\dfrac{1}{\chi^2}\right) = 2\chi \cdot \eta\mu \dfrac{1}{\chi} - \sigma\upsilon\nu \dfrac{1}{\chi}$, αλλά και στο $\chi_0 = 0$, διότι ισχύει : $\lim\limits_{\chi \to 0} \dfrac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0} = \lim\limits_{\chi \to 0} \left(\chi \cdot \eta\mu \dfrac{1}{\chi}\right) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$ (από κριτήριο παρεμβολής), αλλά η συνάρτηση f' δεν είναι συνεχής , άρα και ούτε παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 0$, διότι εάν ήταν συνεχής θα είχαμε $\lim\limits_{\chi \to 0}\left(\sigma\upsilon\nu \dfrac{1}{\chi}\right) = \lim\limits_{\chi \to 0}\left(2\chi \cdot \eta\mu \dfrac{1}{\chi} - f'(\chi)\right) = 0$, πράγμα άτοπο , διότι το $\lim\limits_{\chi \to 0}\left(\sigma\upsilon\nu \dfrac{1}{\chi}\right)$ δεν υπάρχει .)

(iv) Λάθος (διότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : f(\chi) = \chi^3$ στο διάστημα $(-1\ ,\ 1)$, τότε ισχύει : $f'(\chi) = 3 \cdot \chi^2 = 0 \Rightarrow \chi = \chi_0 = 0$ η μοναδική ρίζα της συνάρτησης f' στο διάστημα $(-1\ ,\ 1)$, αλλά το $f(0) = 0$ δεν είναι ολικό ακρότατο της συνάρτησης f στο $(-1\ ,\ 1)$, διότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1\ ,\ 1)$, άρα δεν έχει ακρότατα .)

(v) Λάθος (διότι αν ισχύει $\lim\limits_{\chi \to +\infty} f(\chi) = 2020 \overset{\chi \to u+1}{\Rightarrow} \lim\limits_{u \to +\infty} f(u+1) = 2020$, άρα $\lim\limits_{\chi \to +\infty}(f(\chi+1) - f(\chi)) = 0$ και επειδή ισχύει και $f'(\chi) \leq f(\chi+1) - f(\chi)$, άρα $\lim\limits_{\chi \to +\infty} f'(\chi) \leq 0$. (1) Όμοια ισχύει : $f'(\chi+1) \geq f(\chi+1) - f(\chi)$, άρα $\lim\limits_{\chi \to +\infty} f'(\chi+1) \geq 0 \overset{\chi+1=\psi}{\Rightarrow} \lim\limits_{\psi \to +\infty} f'(\psi) \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to +\infty} f'(\chi) \geq 0$. (2) . Από (1) , (2) $\lim\limits_{\chi \to +\infty} f'(\chi) = 0$.)

ΘΕΜΑ Β :

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(\chi)=\begin{cases}\ell n(\chi+1)+e^{\chi}-1 \ , \ \chi\geq 0\\ \eta\mu\chi+\chi \quad\quad , \ \chi<0\end{cases}$.

Β1 . Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\chi_0=0$, διότι ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(\chi)=f(0)=0$.

Ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0}=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{\ell n(\chi+1)+e^{\chi}-1}{\chi}$ και επειδή

$\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{\left(\ell n(\chi+1)+e^{\chi}-1\right)'}{(\chi)'}=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\chi+1}+e^{\chi}\right)=2$ από κανόνα D.L.H θα ισχύει :

$\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{\ell n(\chi+1)+e^{\chi}-1}{\chi}=2$. Ισχύει

$\lim\limits_{\chi\to 0^-}\dfrac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0}=\lim\limits_{\chi\to 0^-}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu\chi+\chi}{\chi}\right)=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}+1\right)=2$, οπότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0\ ,+\infty)$ ως άθροισμα και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(\chi)=\dfrac{1}{\chi+1}+e^{\chi}$, για κάθε $\chi>0$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty\ ,\ 0)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi+1$, για κάθε $\chi<0$, οπότε η συνάρτηση f' έχει τύπο : $f'(\chi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\chi+1}+e^{\chi} \ , \ \chi>0\\ \sigma\upsilon\nu\chi+1 \ , \ \chi<0\\ \quad 2 \quad\quad\ , \ \chi=0\end{cases}$.

Β2 . Για κάθε $\chi>0$, προφανώς ισχύει : $f'(\chi)=\dfrac{1}{\chi+1}+e^{\chi}>0$ και για κάθε $\chi<0$, προφανώς ισχύει : $f'(\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi+1\geq 0$, με $f'(0)=0$ για κάθε $\chi=(2\kappa+1)\cdot\pi$, με $\kappa\in\mathbb{Z}^*_-$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to +\infty}\left(\ell n(\chi+1)+e^{\chi}-1\right)=+\infty$, διότι $\lim\limits_{\chi\to +\infty}\left(\ell n(\chi+1)\right)\overset{\chi+1\,\to\,u}{=}\lim\limits_{u\to +\infty}(\ell n u)=+\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to +\infty}\left(e^{\chi}-1\right)=+\infty$. Επίσης ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to -\infty} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to -\infty}(\eta\mu\chi+\chi)=\lim\limits_{\chi\to -\infty}\left[\chi\cdot\left(\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}+1\right)\right]=-\infty$, διότι $-\frac{1}{\chi} \le \frac{\eta\mu\chi}{\chi} \le \frac{1}{\chi}$ και $\lim\limits_{\chi \to -\infty}\left(\frac{1}{\chi}\right)=0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει

$\lim\limits_{\chi \to -\infty}\frac{\eta\mu\chi}{\chi}=0$ και $\lim\limits_{\chi \to -\infty}\chi=-\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι

το $f(\mathbb{R})=[0\,,+\infty)\cup(-\infty\,,\,0)=\mathbb{R}$.

B3 . Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0\,,+\infty)$ ως πηλίκο και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(\chi)=-\frac{1}{(\chi+1)^2}+e^{\chi}=\frac{e^{\chi}\cdot(\chi+1)^2-1}{(\chi+1)^2}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(\chi)=e^{\chi}\cdot(\chi+1)^2-1$, όπου $\chi \ge 0$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0\,,+\infty)$ με

$g'(\chi)=e^{\chi}\cdot(\chi+1)^2+e^{\chi}\cdot(2\cdot\chi+1)=e^{\chi}\cdot\left(\chi^2+4\cdot\chi+2\right)>0$, για κάθε $\chi \ge 0$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0\,,+\infty)$, οπότε , για κάθε $\chi \ge 0 \Rightarrow g(\chi) \ge g(0)=0$, άρα $f''(\chi)>0$, για κάθε $\chi>0$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(0\,,+\infty)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $\chi_2=1$ είναι η εξής :

$$\psi-f(1)=f'(1)\cdot(\chi-1)\Rightarrow\psi-(\ell n2+e-1)=\left(\frac{1}{2}+e\right)\cdot(\chi-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\psi-\ell n2-e+1=\left(\frac{1+2\cdot e}{2}\right)\cdot\chi-\frac{1}{2}-e\Rightarrow\psi=\left(\frac{1+2\cdot e}{2}\right)\cdot\chi+\ell n2-\frac{3}{2} .$$

Αφού η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(0\,,+\infty)$ θα ισχύει

$$f(\chi)\ge\psi\Rightarrow f(\chi)\ge\left(\frac{1+2\cdot e}{2}\right)\cdot\chi+\ell n2-\frac{3}{2}\Rightarrow\ell n(1+\chi)+e^{\chi}-1\ge\left(\frac{1+2\cdot e}{2}\right)\cdot\chi+\ell n2-\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\ell n(1+\chi)+2\cdot e^{\chi}-2\ge(1+2\cdot e)\cdot\chi+\ell n4-3\Rightarrow\ell n\frac{(1+\chi)^2}{4}+2\cdot e^{\chi}\ge(1+2\cdot e)\cdot\chi-1 .$$

B4 . Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\chi_1=-\frac{\pi}{2}$ είναι η εξής : .

$$\psi-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\psi-\left(\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right)=\left(\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1\cdot\right)\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\psi-\left(-1-\frac{\pi}{2}\right)=\chi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\psi=\chi-1 .$$

Η απόσταση ενός τυχαίου σημείου $M(\chi, f(\chi))$, όπου $\chi \geq 0$, της καμπύλης της συνάρτησης f από την ευθεία $(\varepsilon) \to \psi = \chi - 1$ δίνεται από τον γνωστό τύπο :

$d(M,(\varepsilon)) = \dfrac{|\chi - f(\chi) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|\chi - \ell n(\chi+1) - e^{\chi}|}{\sqrt{2}}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

h με τύπο : $h(\chi) = \chi - \ell n(\chi+1) - e^{\chi}$, όπου $\chi \geq 0$. Ισχύει : $h(0) = -1 < 0$, ενώ

για κάθε $\chi > 0$ ισχύει : $\ell n\chi \leq \chi - 1 \overset{\chi \to e^{\chi} > 0}{\Rightarrow} \chi \leq e^{\chi} - 1 \Rightarrow \chi - e^{\chi} \leq -1 < 0$ και
$\chi \geq 0 \Rightarrow \chi + 1 \geq 1 \Rightarrow \ell n(\chi+1) \geq \ell n1 = 0$, άρα $h(\chi) < 0$ για κάθε $\chi \geq 0$, οπότε

τελικά παίρνουμε $d(M,(\varepsilon)) = d(\chi) = \dfrac{\ell n(\chi+1) + e^{\chi} - \chi}{\sqrt{2}} = \dfrac{-h(\chi)}{\sqrt{2}}$. Η συνάρτηση

h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ως άθροισμα και σύνθεση παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με $h'(\chi) = 1 - \dfrac{1}{\chi+1} - e^{\chi}$. Η συνάρτηση h' είναι παραγωγίσιμη στο

$[0, +\infty)$ ως άθροισμα και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$h''(\chi) = \dfrac{1}{(\chi+1)^2} - e^{\chi} < 0$ (από την κυρτότητα της συνάρτησης f) , άρα η συνάρτηση

h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε για κάθε
$\chi \geq 0 \Rightarrow h'(\chi) \leq h'(0) = -1 < 0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο
$[0, +\infty)$, οπότε για κάθε $\chi \geq 0 \Rightarrow h(\chi) \leq h(0) = -1$, οπότε

$d(\chi) = \dfrac{\ell n(\chi+1) + e^{\chi} - \chi}{\sqrt{2}} = \dfrac{-h(\chi)}{\sqrt{2}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, άρα η ζητούμενη ελάχιστη

απόσταση ισούται με $d_{min} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, η οποία επιτυγχάνεται για $\chi = 0$, δηλαδή για το

σημείο $M(0\ ,\ f(0) = 0)$ (αρχή των αξόνων) .

ΘΕΜΑ Γ :

Γ1 . Ισχύει : $F'(\chi) = f(\chi)$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ και , επειδή η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$, θα ισχύει $F'(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, άρα και $f(\chi) \geq 0$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$. Ισχύει : $f(\chi) \geq f(0) = 0$, άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $\chi_0 = 0 \in \mathbb{R}$ (ολικό , άρα και) τοπικό ελάχιστο και επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα και σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων , με $f'(\chi)=e^{\chi}+e^{-\chi}+\alpha$, άρα και στο $\chi_0=0$, από το θεώρημα Fermat θα ισχύει : $f'(0)=0 \Rightarrow e^{0}+e^{0}+\alpha=0 \Rightarrow \alpha+2=0 \Rightarrow \alpha=-2$.

Γ2 . Για $\alpha=-2$ έχουμε $f(\chi)=e^{\chi}-e^{-\chi}-2\cdot\chi$, όπου $\chi\in\mathbb{R}$ και $A(0\ ,\ 1)\notin C_f$. Έστω $M(\chi_0\ ,\ f(\chi_0))$ το σημείο επαφής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

f με την εφαπτομένη της (ε) . Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $(\varepsilon)\rightarrow \psi-f(\chi_0)=f'(\chi_0)\cdot(\chi-\chi_0)$. Για $\chi=0$, $\psi=1$ η εξίσωση της ευθείας (ε) γίνεται

$$1-f(\chi_0)=f'(\chi_0)\cdot(0-\chi_0)\Rightarrow 1=f(\chi_0)-\chi_0\cdot f'(\chi_0)\Rightarrow 1=e^{\chi_0}-e^{-\chi_0}-2\cdot\chi_0-\chi_0\cdot\left(e^{\chi_0}+e^{-\chi_0}-2\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1=e^{\chi_0}-e^{-\chi_0}-2\cdot\chi_0-\chi_0\cdot e^{\chi_0}-\chi_0\cdot e^{-\chi_0}+2\cdot\chi_0\Rightarrow(1-\chi_0)\cdot e^{\chi_0}-(1+\chi_0)\cdot e^{-\chi_0}-1=0 .$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με τύπο : $h(\chi)=(1-\chi)\cdot e^{\chi}-(1+\chi)\cdot e^{-\chi}-1$, όπου $\chi\in\mathbb{R}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $h(\chi)=0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα .

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα και σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων , με

$h'(\chi)=-e^{\chi}+(1-\chi)\cdot e^{\chi}-e^{-\chi}+(1+\chi)\cdot e^{-\chi}=\chi\cdot\left(e^{-\chi}-e^{\chi}\right)$. Έχουμε

$h'(\chi)=0\Rightarrow\chi\cdot\left(e^{-\chi}-e^{\chi}\right)=0\Rightarrow\chi=0$ ή $e^{-\chi}=e^{\chi}\Rightarrow\chi=-\chi\Rightarrow\chi=0$.

- Για κάθε $\chi>0\Rightarrow\chi>-\chi\Rightarrow e^{\chi}>e^{-\chi}\Rightarrow e^{-\chi}-e^{\chi}<0\Rightarrow h'(\chi)<0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.
- Για κάθε $\chi\le 0\Rightarrow\chi\le-\chi\Rightarrow e^{\chi}\le e^{-\chi}\Rightarrow e^{-\chi}-e^{\chi}\ge 0\Rightarrow h'(\chi)\le 0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,\ 0]$. Η συνάρτηση

h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Για το σύνολο τιμών της συνάρτησης

h παίρνουβμε : $h(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{\chi\to+\infty}h(\chi)\ ,\ \lim\limits_{\chi\to-\infty}h(\chi)\right)$.

- ➢ $\lim\limits_{\chi\to+\infty}h(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left((1-\chi)\cdot e^{\chi}-(1+\chi)\cdot e^{-\chi}-1\right)=m$, όπου $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left((1-\chi)\cdot e^{\chi}\right)=-\infty$, διότι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left((1-\chi)\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{\chi}\right)=+\infty$, ενώ το όριο $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left((1+\chi)\cdot e^{-\chi}\right)$ είναι της μορφής $(+\infty)\cdot 0$ και έχουμε $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left((1+\chi)\cdot e^{-\chi}\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\dfrac{1+\chi}{e^{\chi}}\right)$ της μορφής $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

  και επειδή $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{(1+\chi)'}{\left(e^{\chi}\right)'}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{1}{e^{\chi}}=0$, από κανόνα D.L.H θα ισχύει :

  $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\dfrac{1+\chi}{e^{\chi}}\right)=0$, άρα $m=-\infty$.

➢ $\lim\limits_{\chi\to-\infty} h(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left((1-\chi)\cdot e^{\chi}-(1+\chi)\cdot e^{-\chi}-1\right)=\ell$, όπου $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left((1+\chi)\cdot e^{-\chi}\right)=-\infty$,

διότι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left((1+\chi)\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(e^{-\chi}\right)=+\infty$, ενώ το όριο $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left((1-\chi)\cdot e^{\chi}\right)$ είναι της μορφής $(+\infty)\cdot 0$ και έχουμε $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left((1-\chi)\cdot e^{\chi}\right)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\dfrac{1-\chi}{e^{-\chi}}\right)$ της μορφής $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ και

επειδή $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{(1-\chi)'}{\left(e^{-\chi}\right)'}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{1}{e^{-\chi}}=0$, από κανόνα D.L.H θα ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\dfrac{1-\chi}{e^{-\chi}}\right)=0$,

άρα $\ell=+\infty$, οπότε $h(\mathbb{R})=(-\infty\ ,\ +\infty)$ και επειδή $0\in h(\mathbb{R})$, τότε η εξίσωση $h(\chi)=0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα .

Γ3 . Για κάθε $\chi>0$ ισχύει $f(\chi)=e^{\chi}-e^{-\chi}-2\cdot\chi>0$, διότι

$f'(\chi)=e^{\chi}+e^{-\chi}-2=\left(e^{\chi/2}-e^{-\chi/2}\right)^2>0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\ ,+\infty)$, δηλαδή για κάθε $\chi>0$ ισχύει $f(\chi)>f(0)=0$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,+\infty)$ ως άθροισμα και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(\chi)=\frac{f'(\chi)}{f(\chi)}-1=\frac{e^{\chi}+e^{-\chi}-2}{e^{\chi}-e^{-\chi}-2\cdot\chi}-1=\frac{e^{\chi}+e^{-\chi}-2-e^{\chi}+e^{-\chi}+2\cdot\chi}{e^{\chi}-e^{-\chi}-2\cdot\chi}=\frac{2\cdot\left(e^{-\chi}+\chi-1\right)}{e^{\chi}-e^{-\chi}-2\cdot\chi}\ .$$

Από γνωστή εφαρμογή ισχύει : $\ell n\chi\le\chi-1$, για κάθε $\chi>0$, οπότε για $\chi\to e^{-\chi}>0$ παίρνουμε $\ell n e^{-\chi}\le e^{-\chi}-1\Rightarrow e^{-\chi}+\chi-1\ge 0$ με $e^{-\chi}+\chi-1=0\Rightarrow\chi=0$, άρα $g'(\chi)>0$, για κάθε $\chi>0$, δηλαδή η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\ ,+\infty)$.

Έχουμε : $g\left((0\ ,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{\chi\to0^+}g(\chi)\ ,\ \lim\limits_{\chi\to+\infty}g(\chi)\right)$.

- $\lim\limits_{\chi\to0^+}g(\chi)=\lim\limits_{\chi\to0^+}\left(\ell n\left(f(\chi)\right)-\chi\right)=\kappa$.

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to0^+}(\chi)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to0^+}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to0^+}\left(e^{\chi}-e^{-\chi}-2\cdot\chi\right)=0$, άρα

$\lim\limits_{\chi\to0^+}\left(\ell n\left(f(\chi)\right)\right)\overset{f(\chi)\to u}{=}\lim\limits_{u\to0^+}\left(\ell n u\right)=-\infty$, οπότε $\kappa=-\infty$.

- $\lim\limits_{\chi\to+\infty}g(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\ell n\left(f(\chi)\right)-\chi\right)=\nu$. Έχουμε $\lim\limits_{\chi\to+\infty}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{\chi}-e^{-\chi}-2\cdot\chi\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{-\chi}\right)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{\chi}-2\cdot\chi\right)\overset{(+\infty)-(+\infty)}{=}\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[e^{\chi}\left(1-\dfrac{2\cdot\chi}{e^{\chi}}\right)\right]=+\infty$, διότι

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{\chi}\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\dfrac{(2\cdot\chi)'}{\left(e^{\chi}\right)'}\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{2}{e^{\chi}}=0$, άρα το όριο $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\dfrac{2\cdot\chi}{e^{\chi}}\right)$ της μορφής $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

από κανόνα D.L.H γίνεται : $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\dfrac{2\cdot\chi}{e^{\chi}}\right)=0$ οπότε το όριο $\lim\limits_{\chi\to+\infty}g(\chi)$ περιέχει απροσδιοριστία της μορφής $+\infty-\infty$, άρα

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}g(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\ln\left(f(\chi)\right)-\chi\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\ln\left(f(\chi)\right)-\ln e^{\chi}\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{f(\chi)}{e^{\chi}}\right)\right]$.

Θέτουμε $\tau=\dfrac{f(\chi)}{e^{\chi}}$, με $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\tau=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\dfrac{f(\chi)}{e^{\chi}}\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\dfrac{e^{\chi}-e^{-\chi}-2\cdot\chi}{e^{\chi}}\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{e^{2\cdot\chi}}-\dfrac{2\cdot\chi}{e^{2\cdot\chi}}\right)=1$,

αφού $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{2\cdot\chi}\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\dfrac{2\cdot\chi}{e^{2\cdot\chi}}\right)=0$. Άρα $\lim\limits_{\chi\to+\infty}g(\chi)=\lim\limits_{\tau\to1}(\ln\tau)=0$.

Τελικά παίρνουμε $g\left((0,+\infty)\right)=(-\infty,0)$.

Γ4 . Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση : $f(\chi)=g(\chi)$, όπου $\chi\in\mathbb{R}\cap(0,+\infty)=(0,+\infty)$ είναι αδύνατη . Αυτό εύκολα διαπιστώνεται , διότι από το **Γ3** ερώτημα βρήκαμε ότι : $g(\chi)<0$ για κάθε $\chi>0$, καθώς , επίσης και $f(\chi)>0$ για κάθε $\chi>0$.

Γ5 . Ισχύει : $F'(\chi)=f(\chi)=e^{\chi}-e^{-\chi}-2\cdot\chi\Rightarrow F'(\chi)=\left(e^{\chi}+e^{-\chi}-\chi^{2}\right)'$, άρα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$: $F(\chi)=e^{\chi}+e^{-\chi}-\chi^{2}+c$. Για $\chi=0\Rightarrow F(0)=2+c\Rightarrow2=2+c\Rightarrow c=0$, άρα $F(\chi)=e^{\chi}+e^{-\chi}-\chi^{2}$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(\chi)=f(\chi)$, γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για $\chi\geq0\Rightarrow f(\chi)\geq f(0)=0\Rightarrow F'(\chi)\geq0$, άρα η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$. Επίσης , για $\chi<0\Rightarrow f(\chi)<f(0)=0\Rightarrow F'(\chi)<0$, άρα η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0)$. Στο $\chi_0=0$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης F παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $F(0)=2$, διότι $\lim\limits_{\chi\to+\infty} F(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{\chi}+e^{-\chi}-\chi^2\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{-\chi}\right)=0$ και

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{\chi}-\chi^2\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[e^{\chi}\cdot\left(1-\dfrac{\chi^2}{e^{\chi}}\right)\right]=+\infty$, $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^2}{e^{\chi}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{2\cdot\chi}{e^{\chi}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{2}{e^{\chi}}=0$, εφαρμόζοντας διαδοχικές φορές τον κανόνα D. L.H . Όμοια έχουμε :

$\lim\limits_{\chi\to-\infty} F(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(e^{\chi}+e^{-\chi}-\chi^2\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(e^{\chi}\right)=0$ και

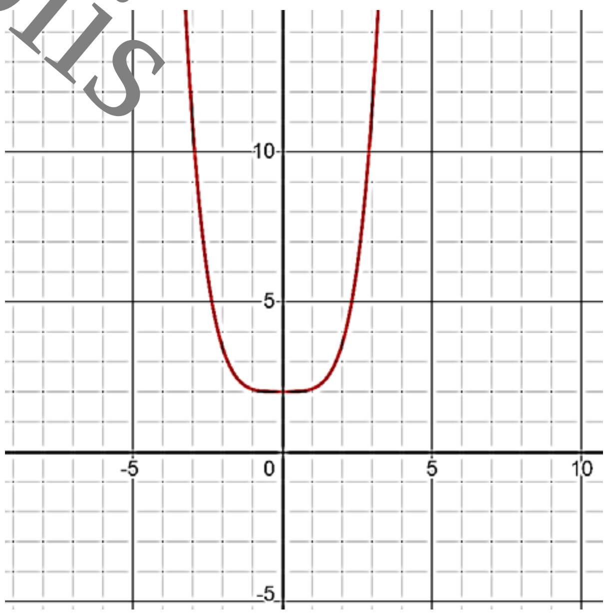
$\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(e^{-\chi}-\chi^2\right)\overset{\chi=-u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(e^{u}-u^2\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\left[e^{u}\left(1-\dfrac{u^2}{e^{u}}\right)\right]=+\infty$. Η συνάρτηση F είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, διότι $F''(\chi)=f'(\chi)>0$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$ (από το **Γ3** ερώτημα) . Επειδή $A_F=\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης F δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες . Επειδή $\lim\limits_{\chi\to-\infty} F(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty} F(\chi)=+\infty$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης F δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες . Επίσης :

$\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{F(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{e^{\chi}+e^{-\chi}-\chi^2}{\chi}=-\infty$, αφού $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}-\chi^2\right)'}{(\chi)'}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(e^{\chi}-e^{-\chi}-2\cdot\chi\right)=-\infty$

, άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης F δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Επίσης : $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{F(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{e^{\chi}+e^{-\chi}-\chi^2}{\chi}=+\infty$, αφού

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}-\chi^2\right)'}{(\chi)'}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{\chi}-e^{-\chi}-2\cdot\chi\right)=+\infty$,

άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης F δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Τέλος για κάθε $\chi\in\mathbb{R}\Rightarrow-\chi\in\mathbb{R}$ και $F(-\chi)=F(\chi)$, άρα η συνάρτηση F είναι άρτια και έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $\psi'\psi$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται από το διπλανό :



ΘΕΜΑ Δ :

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(\chi)=\chi\cdot\sqrt{\dfrac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}$.

Δ1 . Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το

$$A_f=\left\{\chi\in\mathbb{R}\ /\ 4-\chi^2\neq 0\ ,\ \frac{\chi^2-1}{4-\chi^2}\geq 0\right\}$$

Έχουμε : $4-\chi^2\neq 0\Rightarrow \chi^2\neq 4\Rightarrow \chi\neq 2\ ,\ \chi\neq -2$, καθώς επίσης και

$$\frac{\chi^2-1}{4-\chi^2}\geq 0\overset{\left(4-\chi^2\right)^2>0}{\Rightarrow}\left(\chi^2-1\right)\cdot\left(4-\chi^2\right)\geq 0\overset{\chi^2=\omega\geq 0}{\Rightarrow}(\omega-1)\cdot(4-\omega)\geq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\leq\omega<4\Rightarrow 1\leq\chi^2<4\text{ , όπου }\begin{cases}\chi^2<4\Rightarrow|\chi|<2\Rightarrow -2<\chi<2\\ \chi^2\geq 1\Rightarrow|\chi|\geq 1\Rightarrow\chi\geq 1\text{ ή }\chi\leq -1\end{cases}$$

Παίρνουμε τελικά : $A_f=(-2\ ,\ -1]\cup[1\ ,\ 2)$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $A_{f'}=A_f-\{-1\ ,\ 1\}$ ως γινόμενο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(\chi)=(\chi)'\cdot\sqrt{\frac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}+\chi\cdot\left(\sqrt{\frac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}\right)'=\sqrt{\frac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}+\chi\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}}\cdot\left(\frac{\chi^2-1}{4-\chi^2}\right)'=$$

$$=\sqrt{\frac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}+\chi\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}}\cdot\left(\frac{2\chi\cdot\left(4-\chi^2\right)-\left(\chi^2-1\right)\cdot(-2\chi)}{\left(4-\chi^2\right)^2}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}+\chi\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}}\cdot\frac{6\cdot\chi}{\left(4-\chi^2\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{\dfrac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}\right)^2\cdot\left(4-\chi^2\right)^2+3\cdot\chi^2}{\sqrt{\dfrac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}\cdot\left(4-\chi^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\chi^2-1\right)\cdot\left(4-\chi^2\right)+3\cdot\chi^2}{\sqrt{\dfrac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}\cdot\left(4-\chi^2\right)^2}=\frac{4\cdot\chi^2-\chi^4-4+\chi^2+3\cdot\chi^2}{\sqrt{\dfrac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}\cdot\left(4-\chi^2\right)^2}=\frac{-\left(\chi^4-8\cdot\chi^2+4\right)}{\sqrt{\dfrac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}\cdot\left(4-\chi^2\right)^2}\ .$$

Έχουμε :

$$f'(\chi)=0 \Rightarrow \frac{-\left(\chi^4-8\cdot\chi^2+4\right)}{\sqrt{\frac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}\cdot\left(4-\chi^2\right)^2}=0 \Rightarrow \chi^4-8\cdot\chi^2+4=0 \overset{\chi^2=\omega\geq 0}{\Rightarrow} \omega^2-8\cdot\omega+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega=4+2\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2 \text{ ή } \omega=4-2\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi^2=\left(\sqrt{3}+1\right)^2 \text{ ή } \chi^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi=\sqrt{3}+1 \text{ ή } \chi=-\sqrt{3}-1 \text{ ή } \chi=\sqrt{3}-1 \text{ ή } \chi=-\sqrt{3}+1 .$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f' είναι ο παρακάτω :

χ	$-\infty$		$-\sqrt{3}-1$		-2		-1		$-\sqrt{3}+1$		$\sqrt{3}-1$		1		2		$\sqrt{3}+1$		$+\infty$
$f'(\chi)$		$-$	○	$+$	|	$+$	|	$+$	○	$-$	○	$+$	|	$+$	|	$+$	○	$-$	

Παρατηρούμε στο σύνολο $A_{f'}=A_f-\{-1,\ 1\}$ ισχύει : $f'(\chi)>0$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $A_f=(-2\ ,-1]\cup[1\ ,\ 2)$.

Δ2 . Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε σημείο $M(\chi\ ,\ f(\chi))\in C_f$, το σημείο $M'(-\chi\ ,-f(\chi))\in C_f$, δηλαδή η συνάρτηση f θα είναι περιττή στο A_f .

Πράγματι , το πεδίο ορισμού A_f είναι συμμετρικό διάστημα (δηλαδή για κάθε $\chi\in A_f \Rightarrow -\chi\in A_f$) και επιπλέον ισχύει : $f(-\chi)=-\chi\cdot\sqrt{\frac{(-\chi)^2-1}{4-(-\chi)^2}}=-f(\chi)$,

δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων . Από τη μορφή του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f παρατηρούμε ότι η C_f δεν έχει οριζόντιες , ούτε πλάγιες ασύμπτωτες διότι δεν έχουν νόημα τα όρια της συνάρτησης f στο $-\infty$ και στο $+\infty$. Αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες στα άκρα του πεδίου ορισμού της f .

Για το όριο $\lim\limits_{\chi\to-2^+} f(\chi)$ θέτουμε $u=\dfrac{\chi^2-1}{4-\chi^2}$, άρα $\lim\limits_{\chi\to-2^+} u=\lim\limits_{\chi\to-2^+}\left(\dfrac{\chi^2-1}{2-\chi}\cdot\dfrac{1}{2+\chi}\right)=+\infty$,

αφού $\lim\limits_{\chi\to-2^+}\left(\dfrac{\chi^2-1}{2-\chi}\right)=\dfrac{3}{4}$ και $\lim\limits_{\chi\to-2^+}\left(\dfrac{1}{2+\chi}\right)\underset{\text{κοντά στο }-2}{\overset{2+\chi>0}{=}}+\infty$. Παίρνουμε τελικά

$\lim\limits_{\chi\to-2^+} f(\chi)=-\infty$ ($\lim\limits_{\chi\to-2^+}(\chi)=-2$) , δηλαδή η ευθεία $\chi=-2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f . Όμοια , το όριο $\lim\limits_{\chi\to2^-} f(\chi)$ θέτουμε $u=\dfrac{\chi^2-1}{4-\chi^2}$, άρα

$\lim\limits_{\chi\to2^-} u=\lim\limits_{\chi\to2^-}\left(\dfrac{\chi^2-1}{2+\chi}\cdot\dfrac{1}{2-\chi}\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{\chi\to2^-}\left(\dfrac{\chi^2-1}{2+\chi}\right)=\dfrac{3}{4}$ και

$\lim\limits_{\chi\to2^-}\left(\dfrac{1}{2-\chi}\right)\underset{\text{κοντά στο }2}{\overset{2-\chi>0}{=}}+\infty$. Παίρνουμε τελικά $\lim\limits_{\chi\to2^-} f(\chi)=+\infty$ ($\lim\limits_{\chi\to2^-}(\chi)=2$) , δηλαδή η ευθεία $\chi=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Δ3 . (α) Από τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f' παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A_f , οπότε και 1—1 , άρα αντιστρέφεται . Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το :

$$f\left((-2\ ,-1]\right)\cup f\left([1\ ,\ 2)\right)=\left(\lim_{\chi\to-2^+} f(\chi), f(-1)\right]\cup\left[f(1),\lim_{\chi\to2^-} f(\chi)\right)=$$

$$=(-\infty\ ,\ 0]\cup[0\ ,+\infty)=\mathbb{R}=A_{f^{-1}}\ .$$

$$f(\chi)=\psi=\chi\cdot\sqrt{\frac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}\Rightarrow\psi^2=\chi^2\cdot\left(\frac{\chi^2-1}{4-\chi^2}\right)\Rightarrow\psi^2\cdot(4-\chi^2)=\chi^4-\chi^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot\psi^2-\psi^2\cdot\chi^2=\chi^4-\chi^2\Leftrightarrow\chi^4+(\psi^2-1)\cdot\chi^2-4\cdot\psi^2=0\quad(1)$$

Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta=(\psi^2-1)^2+16\cdot\psi^2=\psi^4+14\cdot\psi^2+1>0$,

για κάθε $\psi\in\mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση (1) έχει ρίζες :

$$\chi^2=\frac{-(\psi^2-1)\pm\sqrt{\psi^4+14\cdot\psi^2+1}}{2}\quad(2)$$

Παρατηρούμε ότι οι ρίζες επαληθεύουν τις συνθήκες του A_f , δηλαδή $1 \le \chi^2 < 4$

για κάθε $\psi \in \mathbb{R}$ (κάτι που αναμέναμε άλλωστε αφού η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$) , οπότε από τη σχέση (2) παίρνουμε τις λύσεις :

$$\chi = \sqrt{\frac{-(\psi^2-1) \pm \sqrt{\psi^4+14\cdot\psi^2+1}}{2}} \in [1\ ,\ 2) \quad \text{ή}$$

$$\chi = -\sqrt{\frac{-(\psi^2-1) \pm \sqrt{\psi^4+14\cdot\psi^2+1}}{2}} \in (-2\ ,-1] .$$

Τελικά ορίζουμε τη συνάρτηση f^{-1} ως εξής :

$$f^{-1}(\chi) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{-(\chi^2-1) \pm \sqrt{\chi^4+14\cdot\chi^2+1}}{2}} & ,\ \chi \in [0\ ,+\infty) \\ -\sqrt{\dfrac{-(\chi^2-1) \pm \sqrt{\chi^4+14\cdot\chi^2+1}}{2}} & ,\ \chi \in (-\infty\ ,\ 0] \end{cases} .$$

(β) Θέλουμε να βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης $f(\chi) = f^{-1}(\chi)$, όπου $\chi \in A_f \cap A_{f^{-1}} = A_f \cap \mathbb{R} = A_f$. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι , επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A_f , οι εξισώσεις $f(\chi) = f^{-1}(\chi)$ και $f(\chi) = \chi$ είναι ισοδύναμες .

Έστω ότι $f(\chi) = f^{-1}(\chi)$, για κάθε $\chi \in A_f$ και $f(\chi) \ne \chi$. Τότε θα ισχύουν : $f(\chi) < \chi$, για κάθε $\chi \in A_f$ ή $f(\chi) > \chi$, για κάθε $\chi \in A_f$.

- Αν $f(\chi) < \chi \overset{\chi \to f^{-1}(\chi)}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(\chi)\right) < f^{-1}(\chi) \overset{f^{-1}(\chi) = f^{-1}(\chi)}{\Rightarrow} \chi < f(\chi)$, άτοπο .
- Αν $f(\chi) > \chi \overset{\chi \to f^{-1}(\chi)}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(\chi)\right) > f^{-1}(\chi) \overset{f^{-1}(\chi) = f^{-1}(\chi)}{\Rightarrow} \chi > f(\chi)$, άτοπο .

Γεωμετρικά λοιπόν αποδείξαμε ότι τα σημεία τομής των $\mathbf{C_f}$, $\mathbf{C_{f^{-1}}}$, εάν υπάρχουν , θα βρίσκονται πάνω στην ευθεία $\psi = \chi$ (<u>και μόνο πάνω σ ' αυτήν</u>) .

Έχουμε :

$$f(\chi) = \chi \Rightarrow \chi \cdot \sqrt{\frac{\chi^2-1}{4-\chi^2}} = \chi \overset{\chi \ne 0}{\Rightarrow} \sqrt{\frac{\chi^2-1}{4-\chi^2}} = 1 \Rightarrow \frac{\chi^2-1}{4-\chi^2} = 1 \Rightarrow \chi^2 - 1 = 4 - \chi^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\chi^2 = 5 \Rightarrow \chi^2 = \frac{5}{2} \in [1\ ,4) \Rightarrow \chi = \sqrt{\frac{5}{2}} \in [1\ ,\ 2) \text{ ή } \chi = -\sqrt{\frac{5}{2}} \in (-2\ ,-1] .$$

Άρα οι $\mathbf{C_f}$, $\mathbf{C_{f^{-1}}}$ τέμνονται στα σημεία $\mathrm{B}\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}\,,\ \sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)$ και $\Gamma\left(-\sqrt{\dfrac{5}{2}}\,,\ -\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)$.

Δ4 . Επειδή $\chi \to 1$, από το A_f το όριο που ζητάμε έχει νόημα στο διάστημα $[1\,,\ 2)$, άρα $\chi > 1$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1\,,\ 2)$

θα ισχύει : $f(\chi) > f(1) = 0 \Rightarrow |f(\chi)| = f(\chi)$. Οπότε παίρνουμε :

$$\lim_{\chi \to 1^+} \frac{f(\chi)}{(\chi-1)\cdot \ell n(-\eta\mu(\pi\cdot\chi))} = \lim_{\chi \to 1^+} \frac{\chi\cdot\sqrt{\dfrac{\chi^2-1}{4-\chi^2}}}{(\chi-1)\cdot \ell n(-\eta\mu(\pi\cdot\chi))} =$$

$$= \lim_{\chi \to 1^+} \frac{\chi\cdot\sqrt{\dfrac{\chi+1}{4-\chi^2}}\cdot\sqrt{\chi-1}}{(\chi-1)\cdot \ell n(-\eta\mu(\pi\cdot\chi))} = \lim_{\chi \to 1^+}\left(\chi\cdot\sqrt{\frac{\chi+1}{4-\chi^2}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\chi-1}\right)\cdot \ell n(-\eta\mu(\pi\cdot\chi))}\right) = \ell$$

- $\lim\limits_{\chi \to 1^+}\left(\chi\cdot\sqrt{\dfrac{\chi+1}{4-\chi^2}}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$
- $\lim\limits_{\chi \to 1^+}\left(\sqrt{\chi-1}\right)\cdot \ell n(-\eta\mu(\pi\cdot\chi)) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim\limits_{\chi \to 1^+}\dfrac{\ell n(-\eta\mu(\pi\cdot\chi))}{\dfrac{1}{\sqrt{\chi-1}}}$, το οποίο είναι της μορφής

  $\dfrac{-\infty}{+\infty}$ και επειδή

  $$\lim_{\chi \to 1^+}\frac{\left(\ell n(-\eta\mu(\pi\cdot\chi))\right)'}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\chi-1}}\right)'} = \lim_{\chi \to 1^+}\frac{\dfrac{-\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi\cdot\chi)}{-\eta\mu(\pi\cdot\chi)}}{\dfrac{-1}{2\cdot\sqrt{\chi-1}\cdot(\chi-1)}} = \lim_{\chi \to 1^+} -\frac{2\pi\cdot\sqrt{\chi-1}\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi\cdot\chi)}{\dfrac{\eta\mu(\pi\cdot\chi)}{\chi-1}} = m$$, με

  $\lim\limits_{\chi \to 1^+}\left(-2\pi\cdot\sqrt{\chi-1}\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi\cdot\chi)\right) = 0$ και

  $$\lim_{\chi \to 1^+}\frac{\eta\mu(\pi\cdot\chi)}{\chi-1} \underset{\chi-1=u}{\overset{\mu o\rho\varphi\acute{\eta}\ 0/0}{=}} \lim_{u \to 0^+}\frac{\eta\mu(\pi\cdot u+\pi)}{u} = \lim_{u \to 0^+}\left(-\pi\cdot\frac{\eta\mu(\pi\cdot u)}{\pi\cdot u}\right) \overset{\pi\cdot u=\psi}{=} \lim_{\psi \to 0^+}\left(-\pi\cdot\frac{\eta\mu\psi}{\psi}\right) = -\pi,$$

  άρα $m = 0$, οπότε από τον κανόνα D. L.H , θα ισχύει : $\lim\limits_{\chi \to 1^+}\dfrac{\ell n(-\eta\mu(\pi\cdot\chi))}{\dfrac{1}{\sqrt{\chi-1}}} = 0$

  και επειδή ισχύουν : $\sqrt{\chi-1} > 0$, κοντά στο $\chi = 1$ και

  $\eta\mu(\pi\cdot\chi) > -1 \Rightarrow -\eta\mu(\pi\cdot\chi) < 1 \Rightarrow \ell n(-\eta\mu(\pi\cdot\chi)) < 0$, κοντά στο $\chi = 1$, άρα

  $\ell = -\infty$.