7ο **ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

(ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΝΕΑ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ)

ΘΕΜΑ Α

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Δίνουμε τις παρακάτω προτάσεις :

Π_1 : Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο A , τότε η f θα είναι και $1-1$ στο A .

Π_2 : Αν η f είναι $1-1$ στο A , τότε η f θα είναι αναγκαστικά γνησίως μονότονη στο A .

Π_3 : Αν η f είναι $1-1$ στο A , τότε η f μπορεί να είναι γνησίως μονότονη στο A .

Π_4 : Αν η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο A , τότε η f δεν θα είναι και $1-1$ στο A .

Π_5 : Αν η f δεν είναι $1-1$ στο A , τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο A .

Π_6 : Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο A , τότε η C_f θα τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$, το πολύ σε ένα σημείο .

Π_7 : Αν η f είναι $1-1$ στο A , τότε η C_f θα τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$, το πολύ σε ένα σημείο .

Π_8 : Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο A , τότε η C_f θα τέμνει την ευθεία $\psi = \chi$, το πολύ σε ένα σημείο .

Π_9 : Αν η f είναι $1-1$ στο A , τότε η C_f θα τέμνει την ευθεία $\psi = \chi$, το πολύ σε ένα σημείο .

Π_{10} : Για να αντιστρέφεται η f στο $f(A)$ θα πρέπει απαραίτητα να είναι γνησίως μονότονη στο A .

Π_{11} : Αν η f είναι παραγωγίσιμη και όχι $1-1$ στο A , τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f , στο οποίο η C_f να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη .

Π_{12} : Αν η f είναι $1-1$ και συνεχής στο $A = (\alpha , \beta)$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο A .

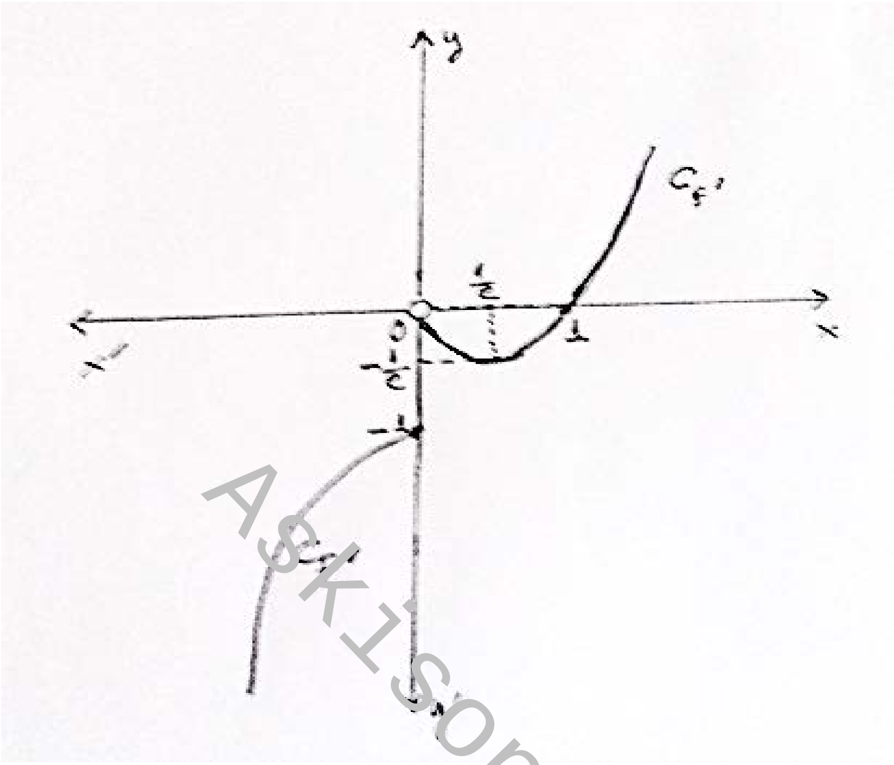
Να χαρακτηρίσετε τις παραπάνω προτάσεις ως αληθείς ή ψευδείς και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας .

(Οι σωστές απαντήσεις των προτάσεων Π_1 – Π_{11} βαθμολογούνται με 2 Μονάδες , ενώ η σωστή απάντηση της πρότασης Π_{12} βαθμολογείται με 3 Μονάδες)

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σε ένα σύνολο Α .



Β1 . Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f . **Μονάδες** 4

Β2 . Να εξετάσετε αν οι θέσεις $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 1$ αποτελούν κρίσιμα σημεία ή ακρότατα της συνάρτησης f . **Μονάδες** 6

Β3 . Να αποδείξετε ότι υπάρχει: μοναδικό $\xi \in \left(\frac{1}{e}\ ,\ 1\right)$ τέτοιο , ώστε να ισχύει : $f'(\xi) = -\frac{\pi}{12}$.

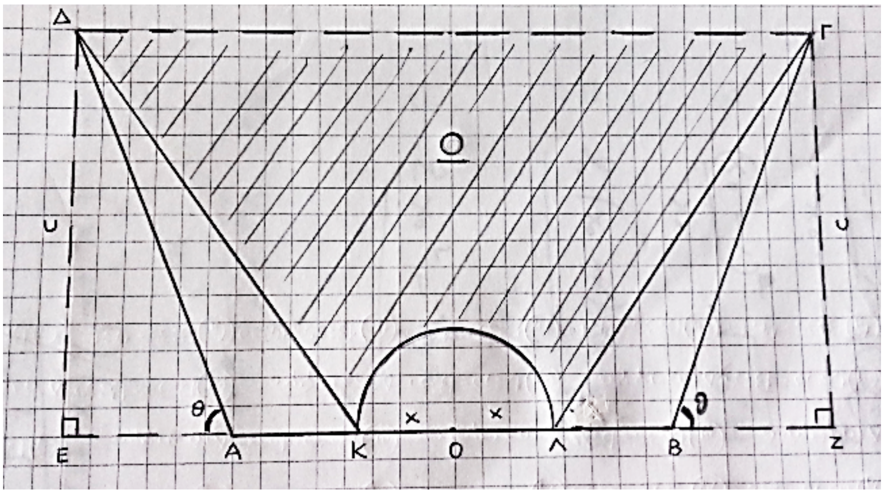
Μονάδες 6

Β4 . Αν οι συναρτήσεις f και f' έχουν κοινές ρίζες να υπολογίσετε , αν υπάρχουν , τα παρακάτω όρια :

(α) $\lim\limits_{\chi \to 0^+} \frac{f'(\chi)}{\ell n|\chi|}$, **(β)** $\lim\limits_{\chi \to 0} \frac{f'(\chi)}{|\sigma \upsilon \nu \chi|}$, **(γ)** $\lim\limits_{\chi \to 1} \frac{f(\chi)}{\ell n \chi}$. **Μονάδες** 9

ΘΕΜΑ Γ

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα αρδευτικό κανάλι σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου , του οποίου η κάθετη διατομή $ΑΒΓΔ$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα . Γνωρίζουμε ότι $ΑΔ = ΑΒ = ΒΓ = 4 \text{ m}$ και ότι οι πλευρές του $ΑΔ$, $ΒΓ$ στηρίζονται σε κινούμενες κατασκευές και σχηματίζουν γωνία $θ \in \left(0\ ,\ \frac{π}{2}\right)$ με το οριζόντιο επίπεδο . Στο μέσο $Ο$ της μικρής βάσης $ΑΒ$ του καναλιού τοποθετούμε ένα συντριβάνι του οποίου ο πίδακας νερού διαγράφει ημικύκλιο $\overset{\frown}{ΟΚΛ}$ μεταβλητής ακτίνας $χ$.



Γ1 . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $Ε$ της διατομής $ΑΒΓΔ$ δίνεται από τον τύπο
$Ε(θ) = 16 \cdot ημθ \cdot (1 + συνθ)$. **Μονάδες** 8

Γ2 . Να βρείτε τη γωνία $θ \in \left(0\ ,\ \frac{π}{2}\right)$ για την οποία το εμβαδόν $Ε(θ)$ γίνεται μέγιστο και να υπολογίσετε το μέγιστο αυτό εμβαδόν . **Μονάδες** 6

Γ3 . Για $θ = \frac{π}{3}$, εάν $Ω$ είναι το γραμμοσκιασμένο χωρίο του σχήματος $Δ\overset{\frown}{ΚΛ}ΓΔ$, να αποδείξετε ότι : $Ε_χ(Ω) = -π \cdot \frac{χ^2}{2} + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot χ + 8 \cdot \sqrt{3}$, όπου $χ \in (0\ ,\ 2)$.

Μονάδες 6

Γ4 . Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακτίνα $χ_0$ τέτοια , ώστε να ισχύει : $Ε_χ(Ω) = 14$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g , h με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν τα εξής :

- $g(\chi) = e^{f(\chi)}$, όπου $g(\chi) \neq \chi$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει : $f'(\chi) = \dfrac{1}{g(\chi) - \chi}$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = 0$.
- Η συνάρτηση h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με τύπο : $h(\chi) = \left(g(\chi)\right)^n$, όπου $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Δ1 . Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f . **Μονάδες** 7

Έστω $f(\chi) = \ell n\left(\chi + \sqrt{\chi^2 + 1}\right)$, όπου $\chi \in \mathbb{R}$.

Δ2 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων (Μονάδες 2) , ότι αντιστρέφεται (Μονάδες 2) και να ορίσετε την συνάρτηση f^{-1} (Μονάδες 3) .
Μονάδες 7

Δ3 . Να αποδείξετε ότι : $\left(\chi^2 + 1\right) \cdot h''(\chi) + \chi \cdot h'(\chi) - n^2 \cdot h(\chi) = 0$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.
Μονάδες 4

Δ4 . Αν $M\left(\alpha , f(\alpha)\right)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο των C_f , $C_{f^{-1}}$, τότε :

(α) να αποδείξετε ότι : $\alpha = 0$ **Μονάδες** 3

(β) να υπολογίσετε , εάν υπάρχει , το όριο : $\lim\limits_{\chi \to \alpha} \dfrac{\left(f(\chi) - n\right) \cdot g(\chi) + n \cdot h(\chi) \cdot g'(\chi)}{\chi \cdot g(\chi)}$,

όπου $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. **Μονάδες** 4

ΛΥΣΕΙΣ 7ου ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝ. Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

(ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΝΕΑ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ)

ΘΕΜΑ Α

$\Pi_1 \to$ **Αληθής** , διότι αν $f \nearrow A$ από τον ορισμό για κάθε $\chi_1 , \chi_2 \in A$ με $\chi_1 < \chi_2$, άρα $\chi_1 \neq \chi_2$ ισχύει $f(\chi_1) < f(\chi_2)$, άρα $f(\chi_1) \neq f(\chi_2)$, οπότε η f θα είναι και $1-1$ στο A .

$\Pi_2 \to$ **Ψευδής** , διότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\mathbf{f} : \mathbf{f}(\chi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\chi} \ , \ \chi > 0 \\ \chi \ , \ \chi \leq 0 \end{cases}$, τότε η f είναι $1-1$ στο $A = \mathbb{R}$, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο $A = \mathbb{R}$, διότι η $f \searrow (0 , +\infty)$ και η $f \nearrow (-\infty , 0]$.

$\Pi_3 \to$ **Αληθής** , διότι η συνάρτηση $f : f(\chi) = \chi^3$ είναι $1-1$ στο $A = \mathbb{R}$, αλλά και $f \nearrow A = \mathbb{R}$.

$\Pi_4 \to$ **Ψευδής** , διότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\mathbf{f} : \mathbf{f}(\chi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\chi} \ , \ \chi > 0 \\ \chi \ , \ \chi \leq 0 \end{cases}$ ισχύει $f \searrow (0 , +\infty)$, $f \nearrow (-\infty , 0]$, οπότε η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $A = \mathbb{R}$, είναι όμως $1-1$ στο $A = \mathbb{R}$ σύμφωνα με τον ορισμό .

$\Pi_5 \to$ **Αληθής** , διότι αν ήταν η f γνησίως μονότονη στο A , τότε , σύμφωνα με την αλήθεια της Π_1 , η f θα ήταν και $1-1$ στο A , πράγμα άτοπο από την υπόθεση της Π_5 .

$\Pi_6 \to$ **Αληθής** , διότι η f θα είναι $1-1$ στο A , άρα η εξίσωση $f(\chi) = \psi = 0$ αν έχει ρίζα , θα είναι ακριβώς μία στο A , μπορεί όμως η C_f να μην τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ σε κανένα σημείο , όπως π.χ η συνάρτηση $f : f(\chi) = e^{\chi} > 0$ για κάθε $\chi \in A = \mathbb{R}$.

$\Pi_7 \to$ **Ψευδής** , διότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\mathbf{f} : \mathbf{f}(\chi) = \begin{cases} \ell n\chi \ , \ 0 < \chi \leq 1 \\ -\chi \ , \ \chi \leq 0 \end{cases}$, τότε η f είναι $1-1$ στο $A = (-\infty , 1]$, αλλά η C_f τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$, σε 2 σημεία $O = (0 , 0)$ και $B = (1 , 0)$

$\Pi_8 \to$ **Ψευδής** , διότι η συνάρτηση $f : f(\chi) = \chi^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A = \mathbb{R}$, αλλά η εξίσωση $f(\chi) = \chi^3 = \chi$ έχει 3 ρίζες , δηλαδή $\chi = 0$ ή $\chi = 1$ ή $\chi = -1$

$\Pi_9 \to$ **Ψευδής** , διότι η συνάρτηση $f : f(\chi) = \chi^3$ είναι $1-1$ στο $A = \mathbb{R}$, αλλά η εξίσωση $f(\chi) = \chi^3 = \chi$ έχει 3 ρίζες , δηλαδή $\chi = 0$ ή $\chi = 1$ ή $\chi = -1$

$\Pi_{10} \rightarrow$ **Ψευδής** , διότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbf{f}(\chi)=\begin{cases} \dfrac{1}{\chi} \ , \ \chi>0 \\ \chi \ , \ \chi \le 0 \end{cases}$, τότε η f αντιστρέφεται στο $f(A)=f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ αφού είναι $1-1$ στο $A=\mathbb{R}$, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο $A=\mathbb{R}$, αφού ισχύει $f \searrow (0,+\infty)$ και $f \nearrow (-\infty \ , \ 0]$.

$\Pi_{11} \rightarrow$ **Αληθής** , διότι θα υπάρχουν $\chi_1 , \chi_2 \in A$ με έστω $\chi_1 < \chi_2$ θα ισχύει : $f(\chi_1)= f(\chi_2)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[\chi_1 , \chi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (χ_1 , χ_2) , από Θ. Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\chi_1 , \chi_2)$: $f'(\xi)=0$, δηλαδή θα υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi , f(\xi))$ της C_f , στο οποίο η C_f να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη .

$\Pi_{12} \rightarrow$ **Αληθής** . Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $A=[\alpha , \beta]$. Τότε θα υπάρχουν $\chi_0 , \chi_1 , \chi_2 \in [\alpha , \beta]$ με $\chi_0 < \chi_1 < \chi_2$ τέτοια , ώστε να ισχύουν $f(\chi_0) < f(\chi_1)$ και $f(\chi_0) > f(\chi_2)$ (ή $f(\chi_0) > f(\chi_1)$ και $f(\chi_0) < f(\chi_2)$) . Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : h(\chi)= f(\chi) - f(\chi_0)$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha , \beta]$ και ισχύουν : $h(\chi_1)= f(\chi_1) - f(\chi_0) > 0$ (ή $h(\chi_1)= f(\chi_1) - f(\chi_0) < 0$) , $h(\chi_2)= f(\chi_2) - f(\chi_0) < 0$ (ή $h(\chi_2)= f(\chi_2) - f(\chi_0) > 0$) . Άρα $h(\chi_1)\cdot h(\chi_2) < 0$, οπότε από Θ . Bolzano υπάρχει $\xi \in (\chi_1 , \chi_2)$: $h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=f(\chi_0)$, το οποίο είναι άτοπο , διότι $\xi \neq \chi_0$ και η f είναι $1-1$ στο A . Άρα η f είναι γνησίως μονότονη στο A .

ΘΕΜΑ Β

Β1 . Για $\chi \in [1 ,+\infty)$ ισχύει $f'(\chi) \ge 0$ με $f'(1)=0$, άρα $f \nearrow [1 ,+\infty)$, ενώ για $\chi \in (-\infty \ , \ 1)$ ισχύει $f'(\chi) < 0$, άρα $f \searrow (-\infty \ , \ 1)$.

Β2 . Επειδή $f'(0)=-1$ η θέση $\chi_1 = 0$ δεν αποτελεί ούτε κρίσιμο σημείο , ούτε ακρότατο της συνάρτησης f . Επειδή $f'(1)=0$ η θέση $\chi_2 = 1$ αποτελεί κρίσιμο σημείο , της συνάρτησης f και επειδή εκατέρωθεν του $\chi_2 = 1$ η συνάρτηση f' αλλάζει πρόσημο , άρα το $\chi_2 = 1$ αποτελεί τοπικό ακρότατο της συνάρτησης f (τοπικό ελάχιστο) .

Β3 . Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{e} \ , \ 1\right]$ με $f'(1)=0 \neq f'\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$ και επειδή $-\dfrac{1}{e} < -\dfrac{\pi}{12} < 0$ ($e\cdot\pi < 3\cdot 4 = 12$) από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\dfrac{1}{e} \ , \ 1\right)$: $f'(\xi)=-\dfrac{\pi}{12}$, το οποίο είναι και μοναδικό διότι $f' \nearrow \left(\dfrac{1}{e} \ , \ 1\right)$.

Β4 . (α) Έχουμε : $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{f'(\chi)}{\ell n|\chi|}=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{f'(\chi)}{\ell n\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(f'(\chi)\cdot\dfrac{1}{\ell n\chi}\right)=0$, διότι $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f'(\chi)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\ell n\chi=-\infty$.

(β) Έχουμε : $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{f'(\chi)}{|\sigma\upsilon\nu\chi|}=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{f'(\chi)}{\sigma\upsilon\nu\chi}=0$, αφού $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f'(\chi)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\sigma\upsilon\nu\chi=1$.

Επίσης έχουμε : $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\dfrac{f'(\chi)}{-\sigma\upsilon\nu\chi}=1$, αφού $\lim\limits_{\chi\to 0^-} f'(\chi)=-1$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^-}(-\sigma\upsilon\nu\chi)=-1$, άρα το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f'(\chi)}{|\sigma\upsilon\nu\chi|}$ δεν υπάρχει .

(γ) Έχουμε : $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{f(\chi)}{\ell n\chi}\overset{f(1)=f'(1)=0}{=}\lim\limits_{\chi\to 1}\left(\dfrac{f(\chi)-f(1)}{\chi-1}\cdot\dfrac{\chi-1}{\ell n\chi}\right)=\lim\limits_{\chi\to 1}\left(\dfrac{f(\chi)-f(1)}{\chi-1}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\ell n\chi}{\chi-1}}\right)=0$,

αφού $\lim\limits_{\chi\to 1}\left(\dfrac{f(\chi)-f(1)}{\chi-1}\right)=f'(1)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\ell n\chi}{\chi-1}=g'(1)=1$, για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:g(\chi)=\ell n\chi$ στο $\chi_0=1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 . Ισχύει : $E=(AB\Gamma\Delta)=\dfrac{(AB)+(\Gamma\Delta)}{2}\cdot\upsilon$, όπου στο ορθογώνιο τρίγωνο $AE\Delta$ ισχύει : $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{\upsilon}{AE}=\dfrac{\upsilon}{BZ}$ από την ισότητα των τριγώνων $AE\Delta$, ΓBZ . Έχουμε $(\Gamma\Delta)=(AB)+(AE)+(BZ)=4+2\cdot\dfrac{\upsilon}{\varepsilon\varphi\theta}$, άρα

$$E=E(\theta)=\dfrac{\left(4+4+2\cdot\dfrac{\upsilon}{\varepsilon\varphi\theta}\right)}{2}\cdot\upsilon=\left(4+\dfrac{\upsilon}{\varepsilon\varphi\theta}\right)\cdot\upsilon$$, όπου $\eta\mu\theta=\dfrac{\upsilon}{A\Delta}=\dfrac{\upsilon}{4}\Rightarrow\upsilon=4\cdot\eta\mu\theta$,

οπότε το εμβαδόν γίνεται :

$$E(\theta)=\left(4+\dfrac{4\cdot\eta\mu\theta}{\varepsilon\varphi\theta}\right)\cdot 4\cdot\eta\mu\theta=(4+4\cdot\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot 4\cdot\eta\mu\theta=16\cdot\eta\mu\theta\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$$, όπου $\theta\in\left(0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Γ2 . Η συνάρτηση $E(\theta)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\theta\in\left(0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ με

$$E'(\theta)=16\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\theta)-16\cdot\eta\mu^2\theta=16\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+16\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta-16+16\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta=$$
$$=16\cdot\left(2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1\right)=16\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta+1)\cdot(2\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-1)$$

Έχουμε : $E'(\theta)=0 \overset{\sigma\upsilon\nu\theta>0}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$. Για $0<\theta<\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta>\frac{1}{2}\Rightarrow E'(\theta)>0$, ενώ για $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta \le\frac{1}{2}\Rightarrow E'(\theta)\le 0$, άρα για $\theta=\frac{\pi}{3}$ η συνάρτηση $E(\theta)$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή την $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=16\cdot\eta\mu\frac{\pi}{3}\cdot\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)=16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=12\cdot\sqrt{3}$ τ.μ .

Γ3 . Έχουμε :

$$E_\chi(\Omega)=(AB\Gamma\Delta)-\left(O\widehat{K\Lambda}\right)-2\cdot(AK\Delta)=12\cdot\sqrt{3}-\pi\cdot\frac{\chi^2}{2}-2\cdot\frac{(2-\chi)\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=$$

$$=-\pi\cdot\frac{\chi^2}{2}+2\cdot\sqrt{3}\cdot\chi+8\cdot\sqrt{3}\ ,\ \chi\in(0\ ,\ 2)\ .$$

Γ4 . Η συνάρτηση E_χ είναι συνεχής στο $[0\ ,\ 2]$ ως πολυωνυμική με
$E_\chi(0)=8\cdot\sqrt{3}\neq E_\chi(2)=12\cdot\sqrt{3}-2\cdot\pi$ και ισχύει $E_\chi(0)=8\cdot\sqrt{3}<14$, που ισχύει αφού $\left(8\cdot\sqrt{3}\right)^2=64\cdot 3=192<14^2=196$ και
$E_\chi(2)=12\cdot\sqrt{3}-2\cdot\pi<14\Rightarrow 6\cdot\sqrt{3}<\pi+7<11$, που ισχύει αφού
$\left(6\cdot\sqrt{3}\right)^2=36\cdot 3=108<11^2=121$. Άρα $E_\chi(0)<14<E_\chi(2)$, άρα από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει $\chi_0 : E(\chi_0)=14$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 . Έχουμε :

$$f'(\chi)=\frac{1}{g(\chi)-\chi}\Rightarrow f'(\chi)=\frac{1}{e^{f(\chi)}-\chi}\Rightarrow e^{f(\chi)}\cdot f'(\chi)=\frac{e^{f(\chi)}}{e^{f(\chi)}-\chi}\Rightarrow e^{f(\chi)}\cdot f'(\chi)=\frac{e^{f(\chi)}-\chi+\chi}{e^{f(\chi)}-\chi}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{f(\chi)}\cdot f'(\chi)=1+\frac{\chi}{e^{f(\chi)}-\chi}\Rightarrow e^{f(\chi)}\cdot f'(\chi)-1=\frac{\chi}{e^{f(\chi)}-\chi}\Rightarrow\left(e^{f(\chi)}-\chi\right)'=\frac{\chi}{e^{f(\chi)}-\chi}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\left(e^{f(\chi)}-\chi\right)\cdot\left(e^{f(\chi)}-\chi\right)'=2\cdot\chi\Rightarrow\left[\left(e^{f(\chi)}-\chi\right)^2\right]'=\left(\chi^2\right)'\Rightarrow\left(e^{f(\chi)}-\chi\right)^2=\chi^2+c\ \ (1)\ ,\ c\in\mathbb{R}\ .$$

Για $\chi=0$ από την (1) προκύπτει ότι : $c=1$, άρα ισχύει : $\left(e^{f(\chi)}-\chi\right)^2=\chi^2+1$ (2) . Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi:\varphi(\chi)=e^{f(\chi)}-\chi$, τότε επειδή $g(\chi)\neq\chi\Rightarrow e^{f(\chi)}-\chi\neq 0\Rightarrow\varphi(\chi)\neq 0$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, η συνάρτηση φ ως συνεχής (διαφορά και σύνθεση συνεχών) θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο

$\mathbb{R}$ και επειδή για $\chi=0 \Rightarrow \varphi(0)=1>0$, άρα $\varphi(\chi)>0$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, οπότε από τη (2) προκύπτει ότι : $\varphi(\chi)=\sqrt{\chi^2+1} \Rightarrow e^{f(\chi)}-\chi=\sqrt{\chi^2+1} \Rightarrow e^{f(\chi)}=\chi+\sqrt{\chi^2+1}>0 \Rightarrow f(\chi)=\ell n\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)$.

(Ισχύει : $\sqrt{\chi^2+1}>\sqrt{\chi^2}=|\chi| \geq -\chi \Rightarrow \chi+\sqrt{\chi^2+1}>0$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$)

Δ2 . Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε σημείο $M(\chi\,,\,\psi) \in C_f$, το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων $O(0\,,0)$ σημείο $M'(-\chi\,,\,-\psi) \in C_f$, δηλαδή ισχύει : $f(-\chi)=-\psi=-f(\chi)$, για κάθε $\chi,-\chi \in \mathbb{R}$ (δηλαδή ότι η συνάρτηση f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$) . Έχουμε :

$$f(-\chi)=\ell n\left(-\chi+\sqrt{(-\chi)^2+1}\right)=\ell n\left[\frac{\left(\sqrt{\chi^2+1}-\chi\right)\cdot\left(\sqrt{\chi^2+1}+\chi\right)}{\sqrt{\chi^2+1}+\chi}\right]=\ell n\frac{1}{\sqrt{\chi^2+1}+\chi}=-\ell n\left(\sqrt{\chi^2+1}+\chi\right)=-f(\chi)$$

Έχουμε : $f'(\chi)=\dfrac{\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)'}{\chi+\sqrt{\chi^2+1}}=\dfrac{1+\dfrac{2\cdot\chi}{2\cdot\sqrt{\chi^2+1}}}{\chi+\sqrt{\chi^2+1}}=\dfrac{\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\chi^2+1}}}{\chi+\sqrt{\chi^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{\chi^2+1}}>0$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$,

άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και $1-1$, άρα αντιστρέφεται .

Έχουμε : $f(\chi)=\psi=\ell n\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right) \Rightarrow e^{\psi}=\chi+\sqrt{\chi^2+1} \Rightarrow e^{\psi}-\chi=\sqrt{\chi^2+1}>0$, άρα πρέπει $e^{\psi}>\chi$.

Έχουμε : $\left(e^{\psi}-\chi\right)^2=\chi^2+1 \Rightarrow e^{2\cdot\psi}+\chi^2-2\cdot\chi\cdot e^{\psi}=\chi^2+1 \overset{e^{\psi}>0}{\Rightarrow} \chi=\dfrac{e^{2\cdot\psi}-1}{2\cdot e^{\psi}}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$e^{\psi}>\chi \Rightarrow e^{\psi}>\dfrac{e^{2\cdot\psi}-1}{2\cdot e^{\psi}}$, για κάθε $\psi \in \mathbb{R}$, άρα ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο :

$f^{-1}(\chi)=\dfrac{e^{2\cdot\chi}-1}{2\cdot e^{\chi}}$.

Δ3 . Έχουμε : $h(\chi)=\left(g(\chi)\right)^n=\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)^n$,

$$h'(\chi)=n\cdot\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)^{n-1}\cdot\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)'=n\cdot\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{2\cdot\chi}{2\cdot\sqrt{\chi^2+1}}\right)=\frac{n\cdot\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)^n}{\sqrt{\chi^2+1}}$$

Επίσης έχουμε :

$$h''(\chi)=\frac{n^2\cdot\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\dfrac{2\cdot\chi}{2\cdot\sqrt{\chi^2+1}}\right)\cdot\sqrt{\chi^2+1}-n\cdot\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)^n\cdot\dfrac{\chi}{\sqrt{\chi^2+1}}}{\chi^2+1}=$$

$$=\frac{n^2\cdot\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)^n\cdot\sqrt{\chi^2+1}-n\cdot\chi\cdot\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)^n}{\left(\chi^2+1\right)\cdot\sqrt{\chi^2+1}}$$

Τελικά παίρνουμε :

$$\left(\chi^2+1\right)\cdot h''(\chi) + \chi\cdot h'(\chi) - n^2\cdot h(\chi) =$$

$$=\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)^n\cdot\left[\frac{n^2\cdot\sqrt{\chi^2+1}-n\cdot\chi}{\sqrt{\chi^2+1}}+\frac{n\cdot\chi}{\sqrt{\chi^2+1}}-n^2\right]=0\ .$$

Δ4 . (α) Θα αποδείξουμε ότι , επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οι εξισώσεις $f(\chi)=f^{-1}(\chi)$ και $f(\chi)=\chi$ είναι ισοδύναμες .

Έστω ότι $f(\chi)=f^{-1}(\chi)$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$ και $f(\chi)\neq\chi$. Τότε θα ισχύουν : $f(\chi)<\chi$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$ ή $f(\chi)>\chi$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$.

- Αν $f(\chi)<\chi \overset{\chi\to f^{-1}(\chi)}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(\chi)\right)<f^{-1}(\chi) \overset{f^{-1}(\chi)=f^{-1}(\chi)}{\Rightarrow} \chi<f(\chi)\ ,\ \text{άτοπο}\ .$
- Αν $f(\chi)>\chi \overset{\chi\to f^{-1}(\chi)}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(\chi)\right)>f^{-1}(\chi) \overset{f^{-1}(\chi)=f^{-1}(\chi)}{\Rightarrow} \chi>f(\chi)\ ,\ \text{άτοπο}\ .$

Γεωμετρικά λοιπόν αποδείξαμε ότι τα σημεία τομής των $\mathbf{C_f}$, $\mathbf{C_{f^{-1}}}$, εάν υπάρχουν , θα βρίσκονται πάνω στην ευθεία $\psi=\chi$ (<u>και μόνο πάνω σ ' αυτήν</u>) .

$f(\chi)=\chi\Rightarrow \ell n\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)=\chi\Rightarrow \ell n\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)-\chi=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi:\varphi(\chi)=\ell n\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)-\chi$, με $\varphi(0)=0$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$\varphi'(\chi)=\dfrac{1}{\sqrt{\chi^2+1}}-1=\dfrac{1-\sqrt{\chi^2+1}}{\sqrt{\chi^2+1}}$ και $\varphi'(\chi)=0\Rightarrow\chi=0$. Για $\chi>0\Rightarrow\varphi'(\chi)<0\Rightarrow\varphi\searrow(0\ ,+\infty)$, ενώ για $\chi\leq0\Rightarrow\varphi'(\chi)\geq0\Rightarrow\varphi\nearrow(-\infty\ ,0]$. Άρα , επειδή $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\chi^2+1}-\chi}=0$,

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)=+\infty$, έχουμε $\varphi\left((0\ ,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)\ ,\ 0\right)$ και $\varphi\left((-\infty\ ,0]\right)=\left(\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)\ ,0\right]$. Στο $\chi=0$ η συνάρτηση φ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $\varphi(0)=0$, άρα η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(\chi)=\chi$ είναι η $\alpha=0$.

(β) Έχουμε :

$$\lim_{\chi\to0}\frac{\left(f(\chi)-n\right)\cdot g(\chi)+n\cdot h(\chi)\cdot g'(\chi)}{\chi\cdot g(\chi)}=\lim_{\chi\to0}\left(\frac{f(\chi)\cdot g(\chi)}{\chi\cdot g(\chi)}+n\cdot\frac{\left(g(\chi)\right)^n\cdot g'(\chi)-g(\chi)}{\chi\cdot g(\chi)}\right)=$$

$$=\lim_{\chi\to0}\left(\frac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0}+\frac{n\cdot\left(g(\chi)\right)^{n-1}\cdot g'(\chi)-n}{\chi-0}\right)=\lim_{\chi\to0}\left(\frac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0}+\frac{h'(\chi)-h'(0)}{\chi-0}\right)=$$

$$=f'(0)+h''(0)=1+n^2\ ,\ \text{από}\ (\Delta_3)\ \text{για}\ \chi=0\ .$$