10η Άσκηση στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της B΄ Λυκείου

2022-2023

Γενική άσκηση στον κύκλο

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $(C_1): x^2+y^2-6x+8y=0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του (C_1). Στην συνέχεια να σχεδιάσετε τον κύκλο (C_1) στο επίπεδο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στον κύκλο στην αρχή των αξόνων O.

γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου $A(1,2)$ από τον κύκλο (C_1), καθώς και τα σημεία τα οποία προσφέρουν τις αποστάσεις αυτές.

δ) Να βρείτε την εξίσωση των εφαπτομένων του κύκλου (C_1) που διέρχονται από το σημείο $B(1,1)$.

ε) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου (C_1) οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία $(\zeta): y=x+1$.

στ) Έστω τυχαίο σημείο M του κύκλου (C_1). Να βρείτε το σημείο N του κύκλου (C_1), ώστε το τρίγωνο OMN να είναι ορθογώνιο στο M.

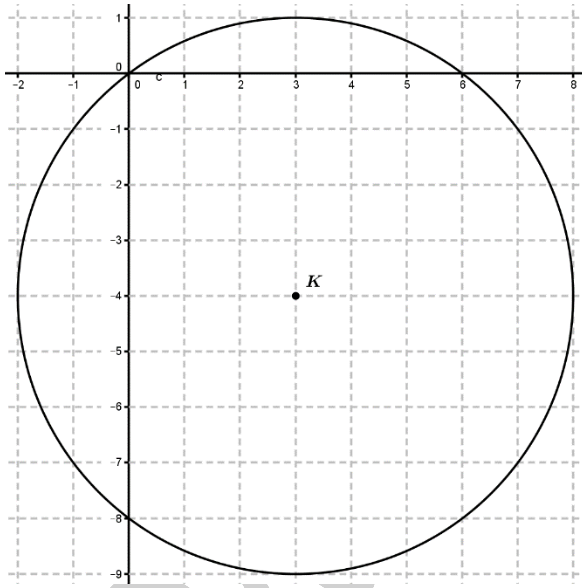
ζ) Έστω ο κύκλος (C_2), ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 4. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $(C_1),(C_2)$ τέμνονται.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) 1ος τρόπος:

Είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A=-6$, $B=8$ και $\Gamma=0$. Έχει κέντρο το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)\equiv K\left(-\frac{-6}{2},-\frac{8}{2}\right)\equiv K(3,-4)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{100}}{2}=5$.



2ος τρόπος: $C: x^2+y^2-6x+8y=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+8y+16=25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=25$

Άρα έχει κέντρο το $K(3,-4)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{25}=5$.

β) Έστω ε_1 η ζητούμενη ευθεία.

Τότε $\varepsilon_1 \perp OK \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{OK}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\frac{-4}{3}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}=\frac{3}{4}$.

Επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι η $\varepsilon_1: y=\frac{3}{4}x$.

γ) $d_{min}=(AK)-\rho=\sqrt{(3-1)^2+(-4-2)^2}-5=\sqrt{4+36}-5=\sqrt{40}-5=2\sqrt{10}-5$

$d_{max}=(AK)+\rho=\sqrt{(3-1)^2+(-4-2)^2}+5=2\sqrt{10}+5$

Τα ζητούμενα σημεία είναι τα κοινά σημεία της ευθείας (AK) με τον κύκλο (C).

Είναι $\lambda_{AK}=\frac{-4-2}{3-1}=-3$ άρα έχει εξίσωση $(AK): y-2=-3(x-1) \Leftrightarrow y=-3x+5$

Άρα έχουμε το σύστημα $\begin{cases} x^2+y^2-6x+8y=0 \\ y=-3x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(5-3x)^2-6x+8(5-3x)=0 \\ y=-3x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+25-30x+9x^2-6x+40-24x=0 \\ y=-3x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2-60x+65=0 \\ y=-3x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-12x+13=0 \\ y=-3x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{6+\sqrt{10}}{2} \text{ ή } x=\frac{6-\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{-18-3\sqrt{10}+10}{2} \text{ ή } y=\frac{-18+3\sqrt{10}+10}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{6+\sqrt{10}}{2} \text{ ή } x=\frac{6-\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{-8-3\sqrt{10}}{2} \text{ ή } y=\frac{-8+3\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι $\Gamma\left(\frac{6+\sqrt{10}}{2},\frac{-8-3\sqrt{10}}{2}\right)$ και $\Delta\left(\frac{6-\sqrt{10}}{2},\frac{-8+3\sqrt{10}}{2}\right)$.

δ) Οι ευθείες οι οποίες διέρχονται από το B(1,1) είναι η κατακόρυφη $x=1$ και $\varepsilon_2: y-1=\lambda_{\varepsilon_2}(x-1) \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2}x-y+1-\lambda_{\varepsilon_2}=0$

Θα πρέπει να έχουν από το κέντρο του (C) απόσταση ίση με την ακτίνα.

Η κατακόρυφη έχει απόσταση $d=|1-3|=2\neq\rho=5$ άρα δεν είναι εφαπτομένη.

Είναι $d(\varepsilon_2, K) = \rho \Leftrightarrow \dfrac{\left|3\lambda_{\varepsilon_2} + 4 + 1 - \lambda_{\varepsilon_2}\right|}{\sqrt{\lambda_{\varepsilon_2}{}^2 + 1}} = 5 \Leftrightarrow \left|2\lambda_{\varepsilon_2} + 5\right| = 5\sqrt{\lambda_{\varepsilon_2}{}^2 + 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\lambda_{\varepsilon_2}{}^2 + 20\lambda_{\varepsilon_2} + \cancel{25} = 25\lambda_{\varepsilon_2}{}^2 + \cancel{25} \Leftrightarrow 21\lambda_{\varepsilon_2}{}^2 - 20\lambda_{\varepsilon_2} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2}\left(21\lambda_{\varepsilon_2} - 20\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = 0$ ή $\lambda_{\varepsilon_2} = \dfrac{20}{21}$

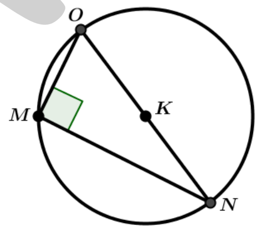
Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι η $y = 1$ και η $\dfrac{20}{21}x - y + 1 - \dfrac{20}{21} = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{20}{21}x + \dfrac{1}{21}$

ε) Η ζητούμενη εφαπτομένη θα έχει εξίσωση $\varepsilon: y = x + \beta \Leftrightarrow x - y + \beta = 0$ με $\beta \in \mathbb{R}$.

Πρέπει $d(\varepsilon, K) = \rho \Leftrightarrow \dfrac{|3 + 4 + \beta|}{\sqrt{2}} = 5 \Leftrightarrow |\beta + 7| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow \beta^2 + 14\beta + 49 = 50 \Leftrightarrow \beta^2 + 14\beta - 1 = 0$

Είναι $\Delta = 196 + 4 = 200$ άρα $\beta_{1,2} = \dfrac{-14 \pm \sqrt{200}}{2} = \dfrac{-14 \pm 10\sqrt{2}}{2} = -7 \pm 5\sqrt{2}$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι οι $y = x - 7 + 5\sqrt{2}$ και $y = x - 7 - 5\sqrt{2}$.



στ) Αφού το τρίγωνο OMN είναι ορθογώνιο στο M, τότε η γωνία $O\hat{M}N$ είναι εγγεγραμμένη και θα ισούται με το μίσο του μέτρου του αντίστοιχου τόξου που βαίνει. Άρα είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Επομένως η ON είναι διάμετρος άρα το K είναι το μέσο της ON.

Είναι $x_K = \dfrac{x_O + x_N}{2} \Leftrightarrow 3 = \dfrac{0 + x_N}{2} \Leftrightarrow x_N = 6$ και $y_K = \dfrac{y_O + y_N}{2} \Leftrightarrow -4 = \dfrac{0 + y_N}{2} \Leftrightarrow y_N = -8$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $N(6, -8)$.

ζ) Είναι $(C_2): x^2 + y^2 = 16$. Για να τέμνονται οι δύο κύκλοι πρέπει $|\rho_1 - \rho_2| < (KO) < \rho_1 + \rho_2$ όπου ρ_1, ρ_2 οι ακτίνες τους. Πράγματι είναι $|5 - 4| < (KO) < 5 + 4 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{3^2 + (-4)^2} < 9 \Leftrightarrow 1 < 5 < 9$ ισχύει.