1η Άσκηση Άλγεβρας Β΄ Λυκείου

2022-2023

Έως την μονοτονία και τα ακρότατα συνάρτησης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(\alpha+x)^2-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(0)=3\alpha^2-2\beta^2+5\alpha+3\beta$ και $f(3)=16-\beta(5-\beta)$. Έστω και η συνάρτηση $g(x)=f(x)$, $x\geq 3$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=(x-3)^2+16(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία.

γ) Να βρείτε το ακρότατο της g και να προσδιορίσετε την θέση του.

δ) Με χρήση της μονοτονίας να λύσετε την ανίσωση $(x-3)^2-(g(3)-3)^2>g(3)(g(3)-2)-16(x-2)$ στο διάστημα $[3,+\infty)$

ε) Να βρείτε τα $\kappa,\lambda\in[3,+\infty)$ για τα οποία ισχύει $2g(\kappa)+g(\lambda)=48$.

στ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να προσδιορίσετε το ακρότατό της.

Νίκος Τούντας

Askisopolis

Λύση

α) Είναι $f(0)=\alpha^2+2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2+2(\alpha^2-\beta^2)=3\alpha^2-2\beta^2$ (1)

Επίσης είναι $f(0)=3\alpha^2-2\beta^2+5\alpha+3\beta$ (2)

Άρα από (1),(2) ισχύει ότι $\cancel{3\alpha^2}-\cancel{2\beta^2}=\cancel{3\alpha^2}-\cancel{2\beta^2}+5\alpha+3\beta \Leftrightarrow 5\alpha+3\beta=0$ (3)

Είναι $f(3)=16-\beta(5-\beta)\Leftrightarrow(\alpha+3)^2-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(3-2)=16-\beta(5-\beta)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\alpha+3)^2-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=16-\beta(5-\beta)\Leftrightarrow(\alpha+3)^2-(\alpha^2-\beta^2)=16-\beta(5-\beta)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\alpha+3)^2-(\alpha^2-\beta^2)=16-\beta(5-\beta)\Leftrightarrow\cancel{\alpha^2}+6\alpha+9-\cancel{\alpha^2}+\cancel{\beta^2}=16-5\beta+\cancel{\beta^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\alpha+9=16-5\beta\Leftrightarrow 6\alpha+5\beta=7$ (4)

Από τις (3),(4) προκύπτει το σύστημα $\begin{cases}5\alpha+3\beta=0 & \cdot(5)\\ 6\alpha+5\beta=7 & \cdot(-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25\alpha+15\beta=0\\ -18\alpha-15\beta=-21\end{cases}$ και προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο γραμμικές εξισώσεις που έχουν προκύψει έχουμε: $25\alpha-18\alpha=-21\Leftrightarrow 7\alpha=-21\Leftrightarrow\alpha=-3$

Άρα βάζοντας στην σχέση (3) το $\alpha=-3$ είναι $5(-3)+3\beta=0\Leftrightarrow -15+3\beta=0\Leftrightarrow 3\beta=15\Leftrightarrow\beta=5$

Επομένως για $\alpha=-3$ και $\beta=5$ έχουμε $f(x)=(-3+x)^2-(-3+5)(-3-5)(x-2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=(x-3)^2-2(-8)(x-2)\Leftrightarrow f(x)=(x-3)^2+16(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$

β) $g(x)=f(x)=(x-3)^2+16(x-2)$, $x\geq 3$

Για κάθε $x_1,x_2\in[3,+\infty)$ με $3<x_1<x_2$ είναι:

- $0<x_1-3<x_2-3\Rightarrow(x_1-3)^2<(x_2-3)^2$ (A)
- $x_1-2<x_2-2\Rightarrow 16(x_1-2)<16(x_2-2)$ (B)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (A), (B) προκύπτει:

$(x_1-3)^2+16(x_1-2)<(x_2-3)^2+16(x_2-2)\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$.

γ) 1ος τρόπος: Για $x\geq 3\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)\geq g(3)=16$ άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=3$ το $g(3)=16$

2ος τρόπος: Είναι $(x-3)^2\geq 0$ για κάθε $x\geq 3$ και για κάθε $x\geq 3$ είναι $x-2\geq 1\Leftrightarrow 16(x-2)\geq 16$ άρα $(x-3)^2+16(x-2)\geq 16\Leftrightarrow g(x)\geq 16$

Είναι $g(x)=16\Leftrightarrow(x-3)^2+16(x-2)=16\Leftrightarrow x^2-6x+9+16x-32=16\Leftrightarrow x^2+10x-39=0$

$\Delta=10^2-4\cdot 1\cdot(-39)=100+156=256$ άρα $x_{1,2}=\dfrac{-10\pm\sqrt{256}}{2}=\dfrac{-10\pm 16}{2}=\begin{cases}3 & \text{δεκτή}\\ -13 & \text{απορρίπτεται}\end{cases}$

Άρα τελικά $g(x)\geq g(3)=16$ για κάθε $x\geq 3$ άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=3$ το $g(3)=16$.

δ) Για κάθε $x\geq 3$ είναι $(x-3)^2-(g(3)-3)^2>g(3)(g(3)-2)-16(x-2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-3)^2+16(x-2)>(g(3)-3)^2+g(3)(g(3)-2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x)>(g(3)-3)^2+16(g(3)-2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x)>g(g(3))\Leftrightarrow g(x)>g(16)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}x>16$

Askisopolis

ε) Επειδή από το γ) ερώτημα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=3$ το $g(3)=16$ ισχύει $g(x)\geq g(3)=16$ για κάθε $x\geq 3$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=3$. Άρα για τα $\kappa,\lambda\in[3,+\infty)$ ισχύει $g(\kappa)\geq 16 \Leftrightarrow 2g(\kappa)\geq 32$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\kappa=3$ και $g(\lambda)\geq 16$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\lambda=3$ άρα $2g(\kappa)+g(\lambda)\geq 48$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\kappa=\lambda=3$

στ) Είναι $f(x)=(x-3)^2+16(x-2)=x^2-6x+9+16x-32=x^2+10x-23$, $x\in\mathbb{R}$

1ος τρόπος: Η f είναι παραβολή της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha=1,\beta=10$ και $\gamma=-23$.

Άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ δηλαδή στο $(-\infty,-5]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$ δηλαδή στο $[-5,+\infty)$. Επίσης παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-5$ το $f(5)=-48$.

2ος τρόπος: $f(x)=x^2+10x-23=x^2+10x+25-48=(x+5)^2-48$, $x\in\mathbb{R}$

Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,-5]$ με $x_1<x_2<-5$ είναι $x_1+5<x_2+5<0\Rightarrow(x_1+5)^2>(x_2+5)^2\Rightarrow$
$\Rightarrow(x_1+5)^2-48>(x_2+5)^2-48\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-5]$.

Για κάθε $x_1,x_2\in[-5,+\infty)$ με $-5<x_1<x_2$ είναι $0<x_1+5<x_2+5\Rightarrow(x_1+5)^2<(x_2+5)^2\Rightarrow$
$\Rightarrow(x_1+5)^2-48<(x_2+5)^2-48\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-5,+\infty)$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $(x+5)^2\geq 0\Leftrightarrow(x+5)^2-48\geq -48\Leftrightarrow f(x)\geq -48$

Είναι $f(x)=-48\Leftrightarrow(x+5)^2-48=-48\Leftrightarrow(x+5)^2=0\Leftrightarrow x=-5$

Άρα $f(x)\geq f(-5)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=-5$ το $f(5)=-48$.

Askisopolis