33η Άσκηση

2021-2022

Γενική επαναληπτική άσκηση

Έστω η συνάρτηση $f(x)=(\alpha+1)e^{\beta-x}$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο $x_0\in\mathbb{R}$ είναι η ευθεία $y=-6x+36$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+2^{-x}}{2^{\beta-x}+e^{-x}}=2^{-\ln 6-5}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=6e^{5-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln x\, f(x)\,dx<\frac{1}{8}(138\ln 2+63)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $(5-x)f(x)+6>0$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της ευθείας $x=5$, της C_f και της οριζόντιας ασύμπτωτή της C_f.

ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\ln 6}^{5}\dfrac{2f^4(x)-7f^3(x)+6f^2(x)+f(x)}{f^2(x)-4f(x)+3}dx$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=-(\alpha+1)e^{\beta-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0\in\mathbb{R}$ έχει εξίσωση
$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+f(x_0)-x_0f'(x_0)$

Επειδή η εφαπτομένη στο $x_0\in\mathbb{R}$ είναι η ευθεία $y=-6x+36$ τότε:

$$\begin{cases} f'(x_0)=-6 \\ f(x_0)=-6x_0+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(\alpha+1)e^{\beta-x_0}=-6 \\ (\alpha+1)e^{\beta-x_0}=-6x_0+36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\beta-x_0}=\dfrac{6}{\alpha+1} \\ 6=-6x_0+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta-x_0=\ln\left(\dfrac{6}{\alpha+1}\right) \\ 6x_0=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\ln\left(\dfrac{6}{\alpha+1}\right)+5 \\ x_0=5 \end{cases}$$

(από τη σχέση $(\alpha+1)e^{\beta-x_0}=6$ έχουμε $\alpha+1>0\Leftrightarrow\alpha>-1$ αφού $e^{\beta-x_0}>0$)

Είναι $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+2^{-x}}{2^{\beta-x}+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha+1)e^{\beta-x}+2^{-x}}{2^{\beta-x}+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha+1)e^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5-x}+2^{-x}}{2^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5-x}+e^{-x}}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha+1)e^{-x}\cdot e^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5}+2^{-x}}{2^{-x}\cdot 2^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5}+e^{-x}}==\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2^{-x}}\left[\left(\frac{e}{2}\right)^{-x}(\alpha+1)e^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5}+1\right]}{\cancel{2^{-x}}\left[2^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5}+\left(\frac{e}{2}\right)^{-x}\right]}=\frac{1}{2^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5}}$$ γιατί $\frac{e}{2}>1$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^{-x}\overset{u=-x}{=}\lim_{u\to-\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^{u}=0.$$

Άρα είναι $\dfrac{1}{2^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5}}=2^{-\ln6-5}\Leftrightarrow 2^{-\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)-5}=2^{-\ln6-5}\Leftrightarrow-\ln\left(\dfrac{6}{\alpha+1}\right)-5=-\ln6-5\Leftrightarrow\alpha=0$ και ισχύει

$\beta=\ln6+5$. Άρα $f(x)=e^{\ln6+5-x}e^{\ln6}e^{5-x}=6e^{5-x}$, $x\in\mathbb{R}$

β) Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο $f''(x)=\left(-6e^{5-x}\right)'=6e^{5-x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι κυρτή και επομένως η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτόμενη με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Άρα $f(x)\geq-6x+36$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=x_0=5$.

Για $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ είναι $\ln x<0$ και $f(x)>-6x+36$ άρα $\ln x f(x)<\ln x(-6x+36)$ και είναι

$$\int_{\frac12}^{1}\ln x f(x)\,dx<\int_{\frac12}^{1}\ln x(-6x+36)dx=\int_{\frac12}^{1}(-6x\ln x+36\ln x)dx==\int_{\frac12}^{1}-6x\ln x\,dx+\int_{0}^{1}36\ln x\,dx=$$

$$=\left[-3x^2\ln x\right]_{\frac12}^{1}+\int_{\frac12}^{1}\frac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}dx+36\left[x\ln x\right]_{\frac12}^{1}-\int_{\frac12}^{1}\frac{36\cancel{x}}{\cancel{x}}dx=\frac34\ln\frac12+\left[\frac{3x^2}{2}\right]_{\frac12}^{1}-18\ln\frac12-36\left(1-\frac12\right)=$$

$$=\frac{69}{4}\ln2+\frac32-\frac38-18=\frac{69}{4}\ln2-\frac{63}{8}=\frac18(138\ln2+63)$$

γ) Έστω $\varphi(x)=(5-x)f(x)+6=6(5-x)e^{5-x}+6,\ x\in\mathbb{R}$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x)=-6e^{5-x}-6(5-x)e^{5-x}=6e^{5-x}(-1-5+x)=6e^{5-x}(x-6)$.
Για κάθε $x<6$ είναι $\varphi'(x)<0$ και για κάθε $x>6$ είναι $\varphi'(x)>0$, επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,6]$ και γνησίως αύξουσα στο $[6,+\infty)$. Η φ έχει ελάχιστο το $\varphi(6)=-6e^{-1}+6=6\left(1-\frac{1}{e}\right)$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\varphi(x)\geq\varphi(6)>0$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ άρα ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$
Έστω η κατακόρυφη ευθεία $x=\lambda>5$. Τότε επειδή $f(x)>0$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι
$E(\lambda)=\int_5^{\lambda}f(x)dx=\int_5^{\lambda}6e^{5-x}\ dx=\left[-6e^{5-x}\right]_5^{\lambda}=-6e^{5-\lambda}+6$
Όταν $\lambda\to+\infty$ είναι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=6$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι 6 τετραγωνικές μονάδες.

ε) $I=\int_{\ln 6}^{5}\frac{2f^4(x)-7f^3(x)+6f^2(x)+f(x)}{f^2(x)-4f(x)+3}dx=\int_{\ln 6}^{5}\frac{2f^3(x)-7f^2(x)+6f(x)+1}{f^2(x)-4f(x)+3}f(x)dx$
Θέτουμε $f(x)=u$ και $f'(x)dx=du\Leftrightarrow -f(x)dx=du$. Για $x=\ln 6$ είναι $u=e^5$ και για $x=5$ είναι $u=6$.

Άρα $I=-\int_{e^5}^{6}\frac{2u^3-7u^2+6u+1}{u^2-4u+3}du=\int_6^{e^5}\frac{2u^3-7u^2+6u+1}{u^2-4u+3}du$
Εκτελούμε την διαίρεση των πολυωνύμων $2u^3-7u^2+6u+1$ και u^2-4u+3:

Είναι $2u^3-7u^2+6u+1=(2u+1)\left(u^2-4u+3\right)+4u-2$ άρα:
$I=\int_6^{e^5}\frac{2u^3-7u^2+6u+1}{u^2-4u+3}du=\int_6^{e^5}\frac{(2u+1)\left(u^2-4u+3\right)+4u-2}{u^2-4u+3}du=\int_6^{e^5}\left(2u+1+\frac{4u-2}{u^2-4u+3}\right)du$
Είναι $\frac{4u-2}{u^2-4u+3}=\frac{4u-2}{(u-1)(u-3)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u-3}=\frac{Au-3A+Bu-B}{(u-1)(u-3)}=\frac{(A+B)u-3A-B}{(u-1)(u-3)}$
Πρέπει $\begin{cases}A+B=u\\-3A-B=-2\end{cases}\Leftrightarrow A=-1$ και $B=5$.
Άρα $I=\int_6^{e^5}\left(2u+1+\frac{4u-2}{u^2-4u+3}\right)du=\int_6^{e^5}\left(2u+1+\frac{1}{u-1}+\frac{5}{u-3}\right)du=$
$=\left[u^2+u+\ln(|u-1|)+5\ln(|u-3|)\right]_6^{e^5}=e^{10}+e^5+\ln\left(e^5-1\right)+5\ln\left(e^5-3\right)-36-6-\ln 5-\ln 3=$
$=e^{10}+e^5+\ln\left(e^5-1\right)+5\ln\left(e^5-3\right)-42-\ln 15$