39η Άσκηση

2021-2022

Γενική επαναληπτική άσκηση

Δίνεται η παραγωγίσιμη και κοίλη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)=2f(\gamma)$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha<\beta<\gamma$.

α) Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνάρτηση 1-1.

β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δέχεται μοναδική οριζόντια εφαπτομένη στο $x_0\in\mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0\in\mathbb{R}$.

δ) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ε) Έστω και η συνάρτηση $g(x)=-\dfrac{e^{-2021f(x)}}{2021}$. Αν $x_0>-1$ τότε να αποδείξετε ότι:

i) $\int_0^{x_0+1} g(x)\,dx < x_0 g(x_0)+g(x_0)$.

ii) $\int_0^{x_0+1} xg'(x)dx>0$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Είναι $f(\alpha)+f(\beta)=2f(\gamma)\Leftrightarrow \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=f(\gamma)$. Έστω ότι η f είναι συνάρτηση 1-1.

1ος τρόπος:

- Αν $f(\alpha)<f(\beta)\Rightarrow f(\alpha)<\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}<f(\beta)$ τότε από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\Leftrightarrow f(\xi)=f(\gamma)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}\xi=\gamma$ άτοπο γιατί $\alpha<\xi<\beta<\gamma$.
- Ομοίως αν $f(\alpha)>f(\beta)\Rightarrow f(\alpha)>\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}>f(\beta)$.
- Αν $f(\alpha)=f(\beta)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}\alpha=\beta$ άτοπο.

2ος τρόπος: Από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής, η f έχει μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m στο $[\alpha,\beta]$. Από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών είναι $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Άρα $m\le f(\alpha)\le M\ (1)$ και $m\le f(\beta)\le M\ (2)$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει

$$2m\le f(\alpha)+f(\beta)\le 2M\Leftrightarrow m\le\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\le M.$$

Άρα υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\Leftrightarrow f(\xi)=f(\gamma)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}\xi=\gamma$ άτοπο γιατί $\alpha\le\xi\le\beta<\gamma$.

β) Αφού f όχι 1-1 τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)$. Από το Θεώρημα Rolle στο $[x_1,x_2]$ υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)\subseteq\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.

Επειδή η f είναι κοίλη τότε η $f'\searrow\mathbb{R}$ άρα το $x_0\in\mathbb{R}$ είναι μοναδικό.

γ) Για $x<x_0\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_0)=0$ άρα η $f\nearrow(-\infty,x_0]$.

Για $x>x_0\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0$ άρα η $f\searrow[x_0,+\infty)$.

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0\in\mathbb{R}$ το $f(x_0)$.

δ) Έστω $\kappa<x_0$ πάρα πολύ κοντά στο $-\infty$, τότε $\kappa<x_0\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(\kappa)>f'(x_0)=0$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x=\kappa$ είναι η ευθεία: $y=f'(\kappa)x-\kappa f'(\kappa)+f(\kappa)$

Επειδή η f είναι κοίλη τότε $f(x)\le y\Leftrightarrow f(x)\le f'(\kappa)x-\kappa f'(\kappa)+f(\kappa)$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f'(\kappa)x-\kappa f'(\kappa)+f(\kappa)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f'(\kappa)x\right]=-\infty$ αφού $f'(\kappa)>0$.

Άρα είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

ε) i) 1ος τρόπος: Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο: $g'(x)=e^{-2021f(x)}f'(x)$

Για $x<x_0\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_0)=0\Rightarrow e^{-2021f(x)}f'(x)>0\Leftrightarrow g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow(-\infty,x_0]$.

Για $x>x_0\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0\Rightarrow e^{-2021f(x)}f'(x)<0\Leftrightarrow g'(x)<0\Rightarrow g\searrow[x_{0,+\infty})$.

Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0\in\mathbb{R}$ το $g(x_0)$.

Άρα $g(x)\le g(x_0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=x_0$.

Άρα $\int_0^{x_0+1}g(x)\,dx<\int_0^{x_0+1}g(x_0)\,dx=x_0g(x_0)+g(x_0)$

2ος τρόπος: Είναι $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=x_0$.

$f(x) \le f(x_0) \Leftrightarrow -2021f(x) \ge -2021f(x_0) \Leftrightarrow e^{-2021f(x)} \ge e^{-2021f(x_0)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{e^{-2021f(x)}}{2021} \le -\dfrac{e^{-2021f(x_0)}}{2021} \Leftrightarrow g(x) \le g(x_0)$

Άρα $\int_0^{x_0+1} g(x)\,dx < \int_0^{x_0+1} g(x_0)\,dx = x_0 g(x_0) + g(x_0)$

ii) $\int_0^{x_0+1} xg'(x)dx > 0 \Leftrightarrow \left[xg(x)\right]_0^{x_0+1} - \int_0^{x_0+1} g(x)dx > 0 \Leftrightarrow x_0 g(x_0) + g(x_0) - \int_0^{x_0+1} g(x)dx > 0$ το οποίο ισχύει σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.