6η Άσκηση

2020-2021

Έως την αντίστροφη συνάρτηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύουν:

- $2f^2(x+1)-10\sqrt{2}f\left(x^{2020}+1\right)\le -25$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$.
- $2g(x-1)\le g(2020)+g(2021)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνάρτηση 1-1.
β) Να δείξετε ότι η g δεν είναι συνάρτηση 1-1.
γ) Να αναφέρεται το πεδίο ορισμού της σύνθεσης της g με την f και να εξετάσετε αν αντιστρέφεται.
δ) Να δείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο και να βρείτε δύο τουλάχιστον θέσεις του.
ε) Να εξετάσετε αν υπάρχει γνησίως αύξουσα συνάρτηση $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε η $a\circ f$ να είναι γνησίως μονότονη.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Για $x=1$ έχουμε: $2f^2(2)-10\sqrt{2}f(2)\le -25 \Leftrightarrow 2f^2(2)-10\sqrt{2}f(2)+25\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}f(2)-5\right)^2\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}f(2)=5 \Leftrightarrow f(2)=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Για $x=0$ έχουμε: $2f^2(1)-10\sqrt{2}f(1)\le -25 \Leftrightarrow 2f^2(1)-10\sqrt{2}f(1)+25\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}f(1)-5\right)^2\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}f(1)=5 \Leftrightarrow f(1)=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ άρα αφού $f(1)=f(2)$ τότε δεν είναι 1-1 η f.

β) Για $x=2021$ και για $x=2022$ έχουμε: $2g(2020)\le g(2020)+g(2021) \Leftrightarrow g(2020)\le g(2021)$ και $2g(2021)\le g(2020)+g(2021) \Leftrightarrow g(2021)\le g(2020)$. Άρα $g(2020)=g(2021)$. Άρα δεν είναι 1-1 η g.

γ) $D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R} \mid g(x)\in A\}=x\in\mathbb{R}$ γιατί $g:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ άρα το $g(\mathbb{R})\subseteq[0,+\infty)$ άρα $g(x)\in[0,+\infty)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αφού η g δεν είναι 1-1 τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\ne x_2$ τέτοια ώστε: $g(x1)=g(x2)\Rightarrow f(g(x1))=f(g(x2))\Rightarrow (f\circ g)(x1)=(f\circ g)(x2)$. Άρα η $f\circ g$ δεν είναι 1-1.

δ) Από το ερώτημα **γ)** αφού $g(2020)=g(2021)$ προκύπτει:

$$2g(x)\le 2g(2020)\Rightarrow g(x)\le g(2020)\Rightarrow g(x)\le g(2021)$$

Άρα η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=2021$ και $x=2022$ το $g(2020)=g(2021)$.

ε) Για το πεδίο ορισμού της $a\circ f$ έχουμε: $D_{a\circ f}=\{x\in D_f \,/\, f(x)\in D_a\}=\{x\ge 0 \,/\, f(x)\in\mathbb{R}\}=[0,+\infty)$

Έστω ότι $a\circ f\nearrow[0,+\infty)$ τότε για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2\Rightarrow (a\circ f)(x_1)<(a\circ f)(x_2)$ (1)

Τότε η (1) γίνεται: $(1)\overset{a\nearrow}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$ και το $[0,+\infty)$ είναι το πεδίο ορισμού της f άρα αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού τότε θα είναι και 1-1 άτοπο.

Ομοίως αν $a\circ f\searrow[0,+\infty)$ τότε προκύπτει $f\searrow[0,+\infty)$ και προκύπτει ξανά άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.